Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

КАФЕДРА **КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ (ИУ6)**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

О Т Ч Е Т

по домашнему заданию № 1

Название: Метод резолюций в логике предикатов первого порядка

Дисциплина: Математическая логика и теория алгоритмов

Студент	ИУ6-72Б		Н.В. Лапшин
	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)
Преподаватель			В.В. Гуренко
		(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)

Москва, 2022

Общая формулировка задания:

1. Самостоятельно выбрать предметную область для формулировки в ней утверждений и фактов.
2. Сформулировать словесно:

   – утверждения в избранной предметной области – не менее четырех;

   – факты;

   – заключение (вопрос) по базе утверждений и фактов.

   Формулировки утверждений и заключения должны предполагать введение квантификаций, желательно получить не менее трех логических связок в каждом утверждении и в заключении.
3. Выписать предикаты и указать их области определения в виде множеств. Наличие хотя бы одного двухместного предиката обязательно. Области определения задавать только для одноместных предикатов.
4. Формализовать в терминах логики предикатов первого порядка предметную область: утверждения, факты и заключение. Использовать логические связки: ¬, ^, v, →. Наличие логических связок отрицания и импликации обязательно, однако допускается наличие до двух формул без импликации (не считая факты).
5. Выполнить последовательно для каждой формулы: преобразование в ПНФ, сколемовскую и клаузальную формы, элиминацию кванторов всеобщности и элиминацию конъюнкций до получения множества дизъюнктов Г. Указать универсум Эрбрана H(Г).
6. Методом резолюций доказать или опровергнуть теорему о логическом следовании заключения из базы утверждений и фактов. При необходимости вводить унификаторы. Перед резольвированием указывать как сам унификатор, так и полученную в результате унифицирования формулу.
7. В случае доказанности получить конкретный ответ на вопрос заключения.

Предметная область: автомобильные гонки RDS GP

Утверждения:

1. Для любого пилота верно утверждение: если он принадлежит к элитной команде или не новичок, то он хорошо подготовлен.
2. Для любого автомобиля верно: если он японский или его пилот (у каждого автомобиля есть пилот) принадлежит к элитной команде, то он мощный.
3. Существует (хотя бы один) такой пилот, что, если пилот не имеет большого опыта или не состоит в элитной команде, то он не будет допущен до гонки.
4. Существует (хотя бы один) такой автомобиль японского производства, что все его пилоты (могут быть запасные пилоты) допущены до гонки.
5. Для любого пилота верно: если пилот допущен до гонки и {хорошо подготовлен или его автомобиль — японский}, то пилот займет призовое место.

Факты:

1. Автомобиль Nissan Skyline — японского производства
2. Автомобиль Nissan Silvia — японского производства
3. Автомобиль Dodge Viper — не японского производства
4. Автомобиль Dodge Chllenger — не японского производства
5. Пилот Георгий Чевчян — не новичок
6. Пилот Аркадий Цареградцев — не новичок
7. Пилот Леонид Шнайдер — новичок
8. Пилот Валерия Кама — новичок
9. Пилот Георгий Чевчян допущен до гонки
10. Пилот Аркадий Цареградцев допущен до гонки
11. Пилот Леонид Шнайдер допущен до гонки
12. Пилот Валерия Кама допущена до гонки
13. Пилот Георгий Чевчян не принадлежит к элитной команде

14. Пилот Аркадий Цареградцев не принадлежит к элитной команде
15. Пилот Леонид Шнайдер принадлежит к элитной команде
16. Пилот Валерия Кама принадлежит к элитной команде
17. Леонид Шнайдер — водитель Nissan Skyline
18. Валерия Кама — водитель Nissan Silvia
19. Георгий Чевчян — водитель Dodge Viper
20. Аркадий Цареградцев — водитель Dodge Chllenger

Заключение:

Существует ли такой пилот, который занял призовое место и чей автомобиль (у любого пилота есть автомобиль) японский?

Предикаты:

T(x) — «пилот x принадлежит к элитной команде»

O(x) — «пилот x — новичок»

N(x) — «пилот x хорошо подготовлен»

P(y) — «y — мощный автомобиль»

J(y) — «автомобиль y — японского производства»

D(x, y) — «x — водитель y»

S(x) — «пилот x прошел медосмотр»

Q(y) — «автомобиль y прошел техосмотр»

L(x) — «пилот x допущен до гонки»

M(x) — «пилот x занял призовое место»

Области определения предикатов:

Cars = {nissan_skyline, nissan_silvia, dodge_viper, dodge_challenger}
Pilots = {георгий_чевчян, аркадий_цареградцев, леонид_шнайдер, валерия_кама}
$x \in$ Cars
$y \in$ Pilots

Формализация типовых фраз:

«Для любого x верно ...» — ∀x(...)

«Существует (хотя бы один) x, такой, что...» — ∃x(...)

«Если A, то B» — (A → B)

«A(x) верно для пилота x автомобиля y» = «A(x) <u>И</u> (x — пилот y)» — [A(x)∧ D(x, y)]

Формализация утверждений:

1. $\forall x \ < [T(x) \lor \neg O(x)] \ \rightarrow \ N(x) >$
2. $\forall y \ < [J(y) \lor \ \exists x\{D(x,y) \land T(x)\}] \rightarrow \ P(y) >$
3. $\exists x \ < [\neg T(x) \lor O(x)] \ \rightarrow \neg L(x) >$
4. $\exists y \forall x \ < J(y) \land D(x,y) \land L(x) >$
5. $\forall x \ < [L(x) \land \{N(x) \lor \ \exists y(P(y) \land \ D(x,y))\}] \ \rightarrow M(x) >$

Формализация фактов:

1. J(nissan_skyline)
2. J(nissan_silvia)
3. ¬J(dodge_viper)
4. ¬J(dodge_challenger)
5. ¬O(георгий_чевчян)
6. ¬O(аркадий_цареградцев)
7. O(леонид_шнайдер)
8. O(валерия_кама)
9. L(георгий_чевчян)
10. L(аркадий_цареградцев)
11. L(леонид_шнайдер)
12. L(валерия_кама)
13. ¬T(георгий_чевчян)
14. ¬T(аркадий_цареградцев)

15. T(леонид_шнайдер)
16. T(валерия_кама)
17. D(леонид_шнайдер, nissan_skyline)
18. D(валерия_кама, nissan_silvia)
19. D(георгий_чевчян, dodge_viper)
20. D(аркадий_цареградцев, dodge_challenger)

Формализация заключения:

G = $\exists x \exists y < M(x) \wedge J(y) \wedge D(x, y) >$

¬G = $\neg \exists x \exists y < M(x) \wedge J(y) \wedge D(x, y) >$

Преобразуем формулу (1):

1 Приведение к ПНФ

1.1 Исключение импликаций

$\forall x < [T(x) \vee \neg O(x)] \rightarrow N(x) >$

$\forall x < \neg [T(x) \vee \neg O(x)] \vee N(x) >$

1.2 Переименование связанных переменных — не требуется

1.3 Разделение связанных переменных — не требуется

1.4 Удаление кванторов, связывающих несуществующие переменные — не требуется

1.5 Протаскивание отрицаний

$\forall x < \neg [T(x) \vee \neg O(x)] \vee N(x) >$

$\forall x < [\neg T(x) \wedge O(x)] \vee N(x) >$ — прикладная ПНФ и СНФ

1.6 Смещение кванторов влево — не требуется

2 Сколемизация — не требуется (в формуле нет кванторов существования)

3 Приведение к клаузальной форме

$\forall x < [\neg T(x) \wedge O(x)] \vee N(x) >$

$\forall x < [\neg T(x) \vee N(x)] \wedge [O(x) \vee N(x)] >$ — клаузальная форма

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$\neg T(x) \vee N(x)$

$O(x) \vee N(x)$

Преобразуем формулу (2):

1 Приведение к ПНФ

1.1 Исключение импликаций

$\forall y < [J(y) \vee \exists x\{D(x,y) \wedge T(x)\}] \rightarrow P(y) >$

$\forall y < \neg [J(y) \vee \exists x\{D(x,y) \wedge T(x)\}] \vee P(y) >$

1.2 Переименование связанных переменных — не требуется

1.3 Разделение связанных переменных — не требуется

1.4 Удаление кванторов, связывающих несуществующие переменные — не требуется

1.5 Протаскивание отрицаний

$\forall y < \neg [J(y) \vee \exists x\{D(x,y) \wedge T(x)\}] \vee P(y) >$

$\forall y < [\neg J(y) \wedge \neg\exists x\{D(x,y) \wedge T(x)\}] \vee P(y) >$

$\forall y < [\neg J(y) \wedge \forall x \neg\{D(x,y) \wedge T(x)\}] \vee P(y) >$

$\forall y < [\neg J(y) \wedge \forall x\{\neg D(x,y) \vee \neg T(x)\}] \vee P(y) >$

1.6 Смещение кванторов влево — так как левее квантора $\forall x$ нет вхождений x, протаскиваем этот квантор влево

$\forall y \forall x < [\neg J(y) \wedge \{\neg D(x,y) \vee \neg T(x)\}] \vee P(y) >$ — прикладная ПНФ и СНФ

2 Сколемизация — не требуется (в формуле нет кванторов существования)

3 Приведение к клаузальной форме

$\forall y \forall x < [\neg J(y) \wedge \{\neg D(x,y) \vee \neg T(x)\}] \vee P(y) >$

$\forall y \forall x < [\neg J(y) \vee P(y)] \wedge [\neg D(x,y) \vee \neg T(x) \vee P(y)] >$ — клаузальная форма

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$$\neg J(y) \lor P(y)$$

$$\neg D(x, y) \lor \neg T(x) \lor P(y)$$

Преобразуем формулу (3):

1 Приведение к ПНФ

1.1 Исключение импликаций

$$\exists x < [O(x) \lor \neg T(x)] \rightarrow \neg L(x) >$$

$$\exists x < \neg [O(x) \lor \neg T(x)] \lor \neg L(x) >$$

1.2 Переименование связанных переменных — не требуется

1.3 Разделение связанных переменных — не требуется

1.4 Удаление кванторов, связывающих несуществующие переменные — не требуется

1.5 Протаскивание отрицаний

$$\exists x < \neg [O(x) \lor \neg T(x)] \lor \neg L(x) >$$

$\exists x < [\neg O(x) \land T(x)] \lor \neg L(x) >$ — прикладная ПНФ

1.6 Смещение кванторов влево — не требуется

2 Сколемизация (по первому правилу Сколема {a // x})

$$\exists x < [\neg O(x) \land T(x)] \lor \neg L(x) >$$

$< [\neg O(a) \land T(a)] \lor \neg L(a) >$ — СНФ

3 Приведение к клаузальной форме

$$< [\neg O(a) \land T(a)] \lor \neg L(a) >$$

$< [\neg O(a) \lor \neg L(a)] \land [T(a) \lor \neg L(a)] >$ — клаузальная форма

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$$\neg O(a) \lor \neg L(a)$$

$T(a) \vee \neg L(a)$

Преобразуем формулу (4):

1 Приведение к ПНФ — не требуется (нет импликаций, кванторы вынесены)

2 Сколемизация (по первому правилу Сколема {b // y})

$\exists y \forall x < J(y) \wedge D(x, y) \wedge L(x) >$ — прикладная ПНФ

$\forall x < J(b) \wedge D(x, b) \wedge L(x) >$ — СНФ и клаузальная форма

3 Приведение к клаузальной форме — не требуется (матрица формулы в КНФ)

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$J(b)$

$D(x, b)$

$L(x)$

Преобразуем формулу (5):

1 Приведение к ПНФ

1.1 Исключение импликаций

$\forall x < [L(x) \wedge \{N(x) \vee \exists y(P(y) \wedge D(x, y))\}] \rightarrow M(x) >$

$\forall x < \neg [L(x) \wedge \{N(x) \vee \exists y(P(y) \wedge D(x, y))\}] \vee M(x) >$

1.2 Переименование связанных переменных — не требуется

1.3 Разделение связанных переменных — не требуется

1.4 Удаление кванторов, связывающих несуществующие переменные — не требуется

1.5 Протаскивание отрицаний

$\forall x < \neg [L(x) \wedge \{N(x) \vee \exists y(P(y) \wedge D(x, y))\}] \vee M(x) >$

$\forall x < [\neg L(x) \vee \neg \{N(x) \vee \exists y(P(y) \wedge D(x, y))\}] \vee M(x) >$

$\forall x < [\neg L(x) \vee \{\neg N(x) \wedge \neg \exists y(P(y) \wedge D(x, y))\}] \vee M(x) >$

$\forall x < [\neg L(x) \vee \{\neg N(x) \wedge \forall y \neg (P(y) \wedge D(x, y))\}] \vee M(x) >$

$$\forall x \ < [\neg L(x) \vee \{\neg N(x) \wedge \ \forall y (\neg P(y) \vee \ \neg D(x,y))\}] \ \vee \ M(x) >$$

1.6 Смещение кванторов влево — так как левее квантора $\forall y$ нет вхождений y, протаскиваем этот квантор влево

$$\forall x \, \forall y < [\neg L(x) \vee \{\neg N(x) \wedge \ (\neg P(y) \vee \ \neg D(x,y))\}] \ \vee \ M(x) > —$$

прикладная ПНФ и СНФ

2 Сколемизация — не требуется (в формуле нет кванторов существования)

3 Приведение к клаузальной форме

$$\forall x \, \forall y < [\neg L(x) \vee \{\neg N(x) \wedge \ (\neg P(y) \vee \ \neg D(x,y))\}] \ \vee \ M(x) >$$

$$\forall x \, \forall y < [M(x) \vee \neg N(x) \vee \neg L(x)] \wedge$$

$$\wedge [M(x) \vee \neg P(y) \vee \ \neg D(x,y) \vee \neg L(x)] > \text{— клауз. форма}$$

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$$M(x) \vee \neg N(x) \vee \neg L(x)$$

$$M(x) \vee \neg P(y) \vee \ \neg D(x,y) \vee \neg L(x)$$

Преобразуем заключение (в виде $\neg G$):

1 Приведение к ПНФ

1.1 Исключение импликаций — не требуется

1.2 Переименование связанных переменных — не требуется

1.3 Разделение связанных переменных — не требуется

1.4 Удаление кванторов, связывающих несуществующие переменные — не требуется

1.5 Протаскивание отрицаний

$$\neg \exists x \exists y \ < M(x) \wedge \ J(y) \wedge D(x,y) >$$

$$\forall x \forall y \ < \neg M(x) \vee \ \neg J(y) \vee \neg D(x,y) > \ \text{— прикладная ПНФ, СНФ и клаузальная форма}$$

1.6 Смещение кванторов влево — не требуется

2 Сколемизация — не требуется

3 Приведение к клаузальной форме — не требуется (матрица формулы в КНФ)

После элиминации кванторов всеобщности и конъюнкций получим дизъюнкты:

$\neg M(x) \vee \neg J(y) \vee \neg D(x, y)$

Г = {$\neg T(x) \vee N(x)$, $O(x) \vee N(x)$, $\neg J(y) \vee P(y)$, $\neg D(x, y) \vee \neg T(x) \vee P(y)$, $\neg O(a) \vee \neg L(a)$, $T(a) \vee \neg L(a)$, $J(b)$, $D(x, b)$, $L(x)$, $M(x) \vee \neg N(x) \vee \neg L(x)$, $M(x) \vee \neg P(y) \vee \neg D(x, y) \vee \neg L(x)$, $\boldsymbol{\neg M(x) \vee \neg J(y) \vee \neg D(x, y)}$**,** J(nissan_skyline), J(nissan_silvia), ¬J(dodge_viper), ¬J(dodge_challenger), ¬O(георгий_чевчян), ¬O(аркадий_цареградцев), O(леонид_шнайдер), O(валерия_кама), L(георгий_чевчян), L(аркадий_цареградцев), L(леонид_шнайдер), L(валерия_кама), ¬T(георгий_чевчян), ¬T(аркадий_цареградцев), T(леонид_шнайдер), T(валерия_кама), D(леонид_шнайдер, nissan_skyline), D(валерия_кама, nissan_silvia), D(георгий_чевчян, dodge_viper), D(аркадий_цареградцев, dodge_challenger)}

H(Г) = {a, b, nissan_skyline, nissan_silvia, dodge_viper, dodge_challenger, георгий_чевчян, аркадий_цареградцев, леонид_шнайдер, валерия_кама}

Применение метода резолюций:

1. $\neg T(x) \vee N(x)$
2. $O(x) \vee N(x)$
3. $\neg J(y) \vee P(y)$
4. $\neg D(x, y) \vee \neg T(x) \vee P(y)$
5. $\neg O(a) \vee \neg L(a)$
6. $T(a) \vee \neg L(a)$
7. $J(b)$
8. $D(x, b)$

9. $L(x)$

10. $M(x) \vee \neg N(x) \vee \neg L(x)$

11. $M(x) \vee \neg P(y) \vee \neg D(x, y) \vee \neg L(x)$

12. $\neg \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) \vee \neg J(\boldsymbol{y}) \vee \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

13. J(nissan_skyline)

14. J(nissan_silvia)

15. ¬J(dodge_viper)

16. ¬J(dodge_challenger)

17. ¬O(георгий_чевчян)

18. ¬O(аркадий_цареградцев)

19. O(леонид_шнайдер)

20. O(валерия_кама)

21. L(георгий_чевчян)

22. L(аркадий_цареградцев)

23. L(леонид_шнайдер)

24. L(валерия_кама)

25. ¬T(георгий_чевчян)

26. ¬T(аркадий_цареградцев)

27. T(леонид_шнайдер)

28. T(валерия_кама)

29. D(леонид_шнайдер, nissan_skyline)

30. D(валерия_кама, nissan_silvia)

31. D(георгий_чевчян, dodge_viper)

32. D(аркадий_цареградцев, dodge_challenger)

---

33. $\neg J(y) \vee \neg P(y) \vee \neg D(x, y) \vee \neg L(x)$ (11, 12)

34. $\neg T(x) \vee \neg J(y) \vee \neg D(x, y) \vee \neg L(x)$ (4, 33)

35. $\lambda 1 = \{a \,//\, x\}$

$(34)\lambda 1 = \neg T(a) \vee \neg J(y) \vee \neg D(a, y) \vee \neg L(a)$

$\neg J(y) \vee \neg D(a, y) \vee \neg L(a) \quad (6, 34)\lambda 1$

36. $\lambda 2 = \{b \,//\, y\}$

$(35)\lambda 2 = \neg J(b) \vee \neg D(a, b) \vee \neg L(a)$

$\neg D(a, b) \vee \neg L(a) \qquad (7, 35)\lambda 2$

37. $(9)\lambda 1 = L(a)$

$\neg D(a, b) \quad (9, 36)\lambda 1$

38. $(8)\lambda 1 = D(a, b)$

$\square$ $(8, 37)\lambda 1$

Достигнут пустой дизъюнкт, следовательно, теорема доказана — заключение следует из исходных утверждений и фактов. То есть, существует такой пилот, который занял призовое место и чей автомобиль — японский.

Унификатор $\lambda 1 = \{a \,//\, x\}$ вводится в формулы 8, 9, 34. Значит $L(a)$ и $T(a)$ должны быть истинны. Это условие выполняется, если a $\in$ {леонид_шнайдер, валерия_кама}.

Унификатор $\lambda 2 = \{b \,//\, y\}$ вводится в формулу 35. Значит $J(b)$ должно быть истинно. Это условие выполняется, если b $\in$ {nissan_skyline, nissan_silvia}.

Из семантики очевидно, что истинно должно быть D(a, b). Тогда, призовые места заняли Леонид Шнайдер на Nissan Skyline и Валерия Кама на Nissan Silvia.

Ответ: призовые места заняли Леонид Шнайдер на Nissan Skyline и Валерия Кама на Nissan Silvia.