Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

КАФЕДРА **КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ (ИУ6)**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

О Т Ч Е Т

по домашнему заданию

Тема: Поток в транспортной сети. Алгоритм Форда-Фалкерсона

Дисциплина: Дискретная математика

Студент	ИУ6-42Б	06.05.21	С.В. Астахов
	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)
Преподаватель			В.В. Гуренко
		(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)

Москва, 2021

Задание

16 вариант

Общая формулировка задания:

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток φ_{max} , доставляемый от источника $s = x_1$ к стоку $t = x_{12}$ и указать минимальный разрез, отделяющий t от s.

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица Ω: см. по номеру варианта.

Матрица весов:

Вариант 16.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	–	17	23	8	14	–	–	–	–	–	–	–
x_2	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
x_3	–	–	–	30	–	21	11	–	–	–	–	–
x_4	–	–	–	–	–	5	–	14	–	–	–	–
x_5	–	–	–	2	–	–	–	5	–	26	–	–
x_6	–	8	–	–	–	–	6	–	–	–	–	15
x_7	–	–	–	–	–	–	–	–	13	–	7	–
x_8	–	–	–	–	–	–	6	–	2	1	–	–
x_9	–	–	–	–	–	22	–	–	–	–	9	11
x_{10}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6
x_{11}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	–	16
x_{12}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Теоретические сведения

Теорема 1: Если (s, …, x_i, …, t) — путь от источника к стоку и все ребра на этом пути ненасыщенные, то величину потока на этом пути и, следовательно, во всей сети, можно увеличить на значение δ^*.

Где $\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$.

Теорема 2: Если (s, …, x_i, …, t) — маршрут от источника к стоку, такой, что все прямые ребра на нем ненасыщенные, а поток по всем обратным ребрам строго >0 (такой маршрут назовем увеличивающим), тогда на всех прямых ребрах такого маршрута поток φ можно увеличить на ε^*, а на все обратных — уменьшить на ε^*. При этом поток в сети возрастет на ε^*.

Где $\varepsilon^* = \min\{\delta^*, \varphi^*\}$,

$\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$

$\varphi^* = \min\{\varphi(x_i, x_j)\}$

Теорема 3: Поток в сети достигает максимального значения φ_{max} тогда и только тогда, когда в сети не существует ни одного увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (теорема Форда-Фалкерсона): Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока φ_{max} от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

Решение

Изобразим заданную сеть графически в соответствии с матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер.

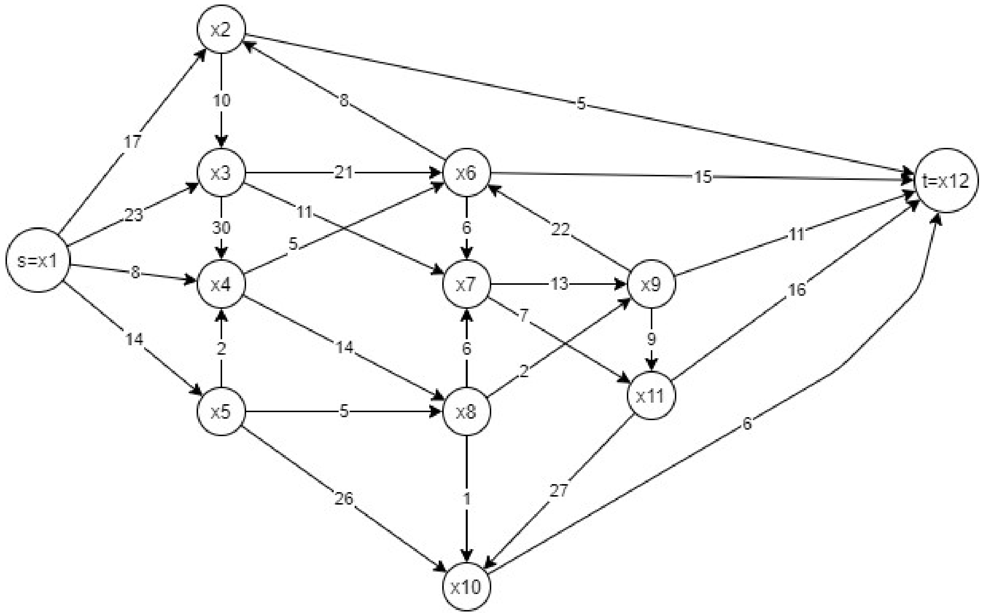

Рисунок 1 — вид исходной сети

I. Достижение полного потока

1) Зададим начальное значение потока через все дуги (и соответственно через всю сеть) $\varphi_i = 0$ для $\forall\ i \in [1;12]$. Далее будем увеличивать поток в сети согласно теореме 1.

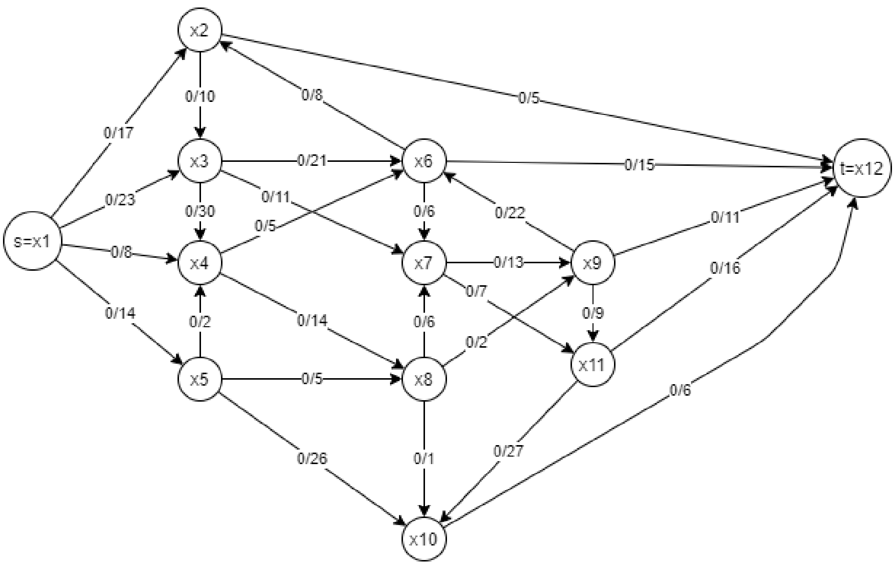

Рисунок 2 — сеть с нулевым потоком

2) Рассмотрим путь $(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12})$, увеличив поток на пути $(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_6), \delta(x_6,x_{12})\} = \min\{23, 11, 13, 22, 15\} = 11$

Дуга (x_3,x_7) стала насыщенной.

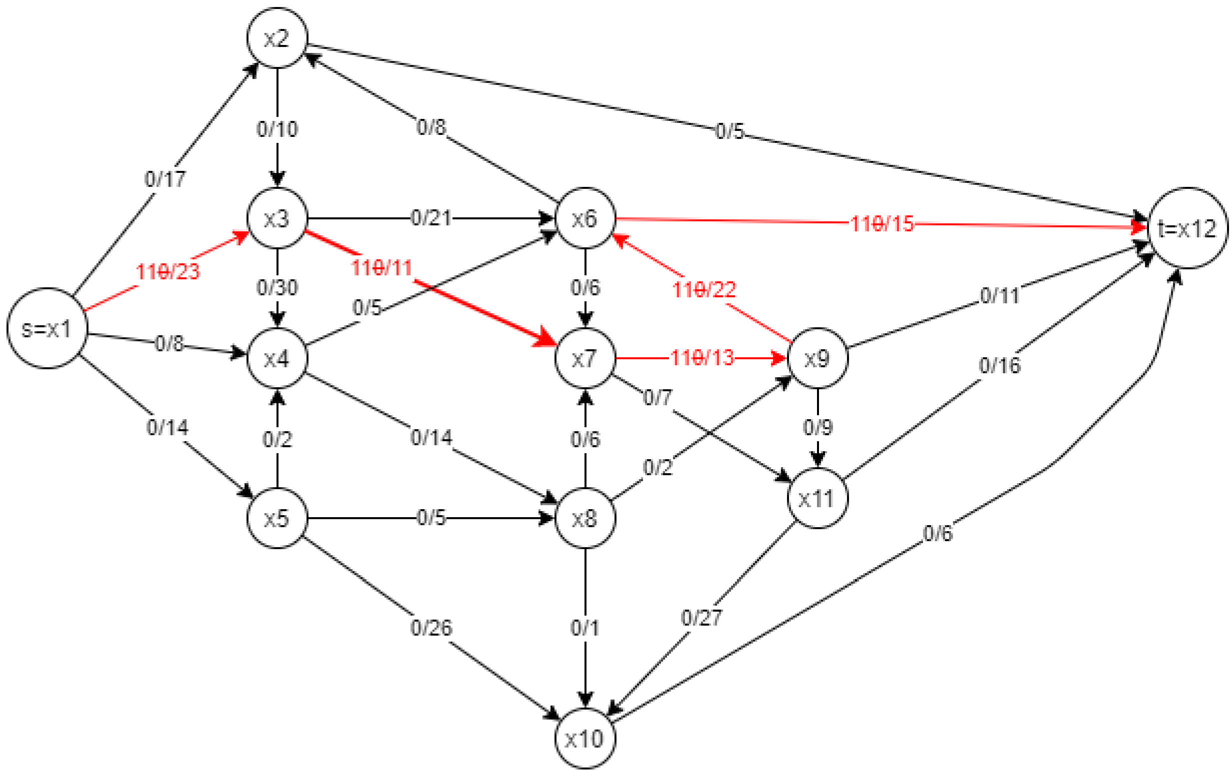

Рисунок 3 — увеличение потока на пути $(x_1,x_3,x_7,x_9,x_6,x_{12})$

3) Рассмотрим путь (x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12})$ увеличив поток на пути (x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12}) на значение $\delta^*(x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_6), \delta(x_6, x_2), \delta(x_2, x_{12})\} = \min\{8, 5, 8, 5\} = 5$

Дуги (x_4,x_6) и (x_2,x_{12}) стали насыщенными.

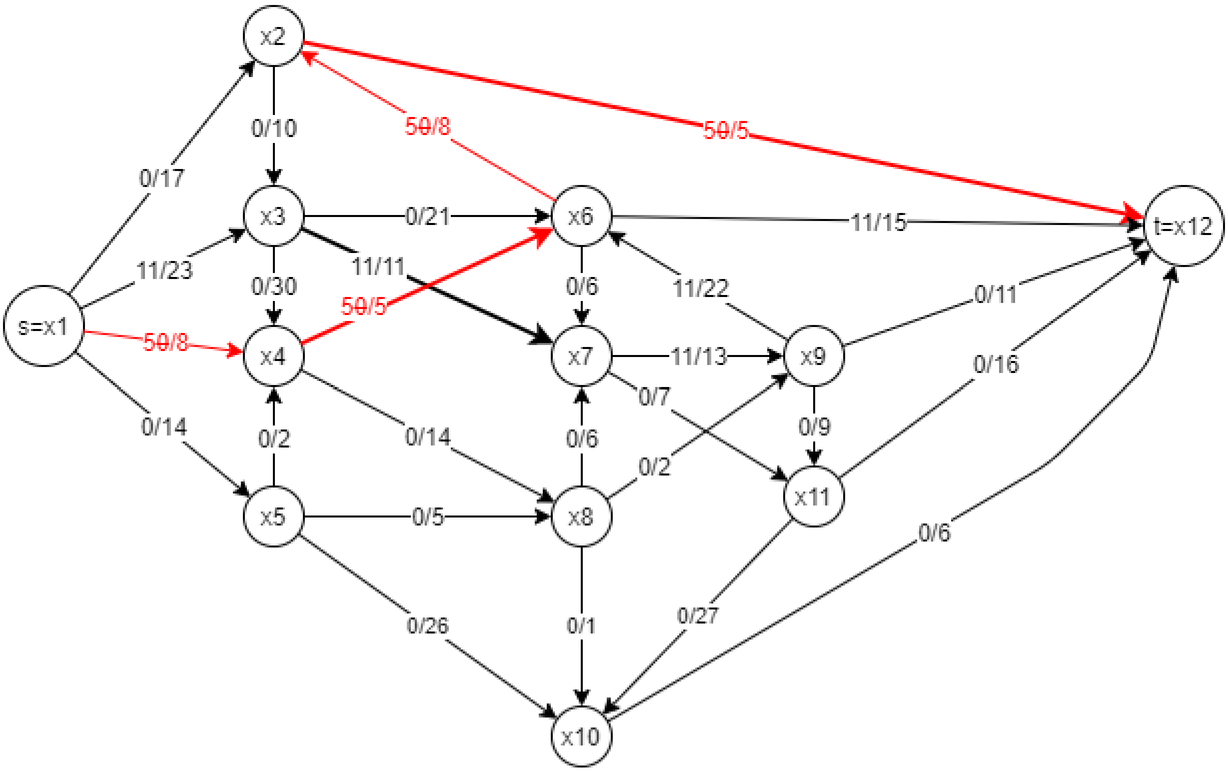

Рисунок 4 — увеличение потока на пути (x_1,x_4,x_6,x_2,x_{12})

4) Рассмотрим путь (x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на δ^*(x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) увеличив поток на пути (x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) на значение δ^*(x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12}).

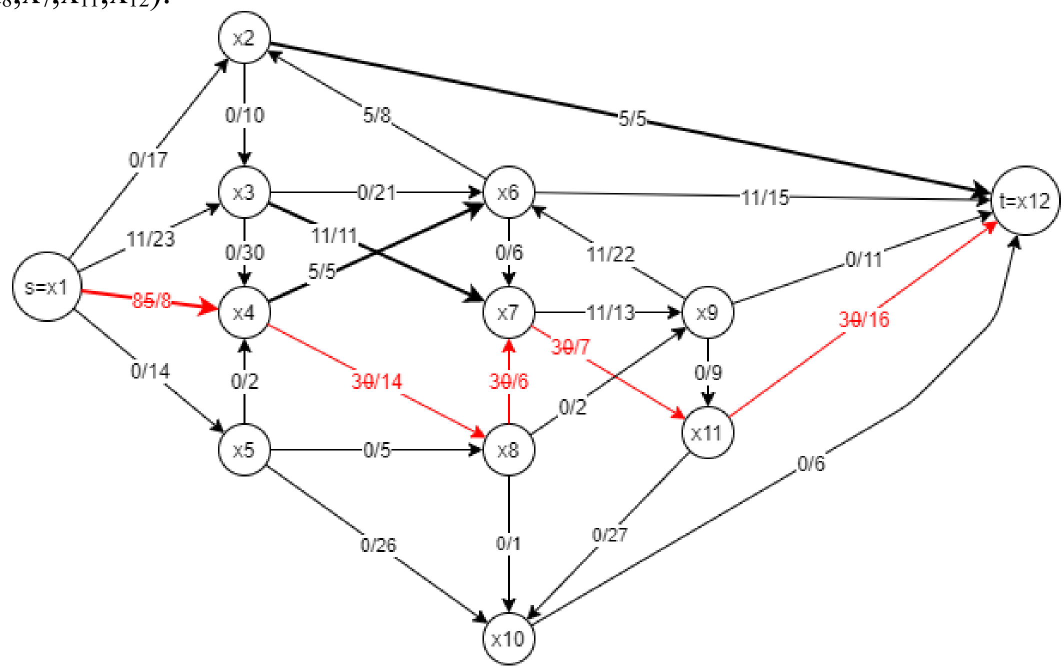

Рисунок 5 — увеличение потока на пути (x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12})

$\delta^*(x_1,x_4,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{3, 14, 6, 7, 16\} = 3$

Дуга (x_1,x_4) стала насыщенной

5) Рассмотрим путь $(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_9), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{14, 2, 11, 2, 11\} = 2$

Дуги (x_5,x_4) и (x_8,x_9) стали насыщенными.

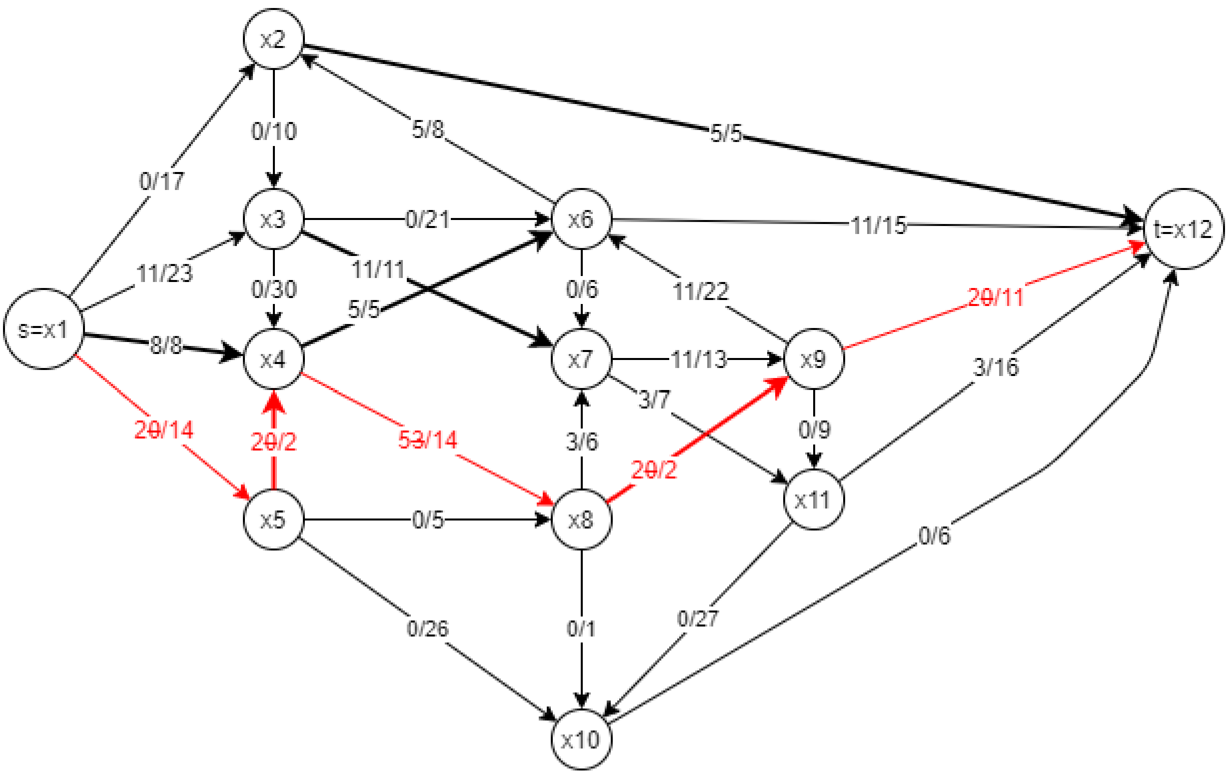

Рисунок 6 — увеличение потока на пути $(x_1,x_5,x_4,x_8,x_9,x_{12})$

6) Рассмотрим путь (x_1,x_5,x_{10},x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на δ^*(x_1,x_5,x_{10},x_{12}) увеличив поток на пути (x_1,x_5,x_{10},x_{12}) на значение δ^*(x_1,x_5,x_{10},x_{12}).

$\delta^*(x_1,x_5,x_{10},x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_{10}), \delta(x_{10}, x_{12})\} = \min\{12, 26, 6\} = 6$

Дуга (x_{10},x_{12}) стала насыщенной.

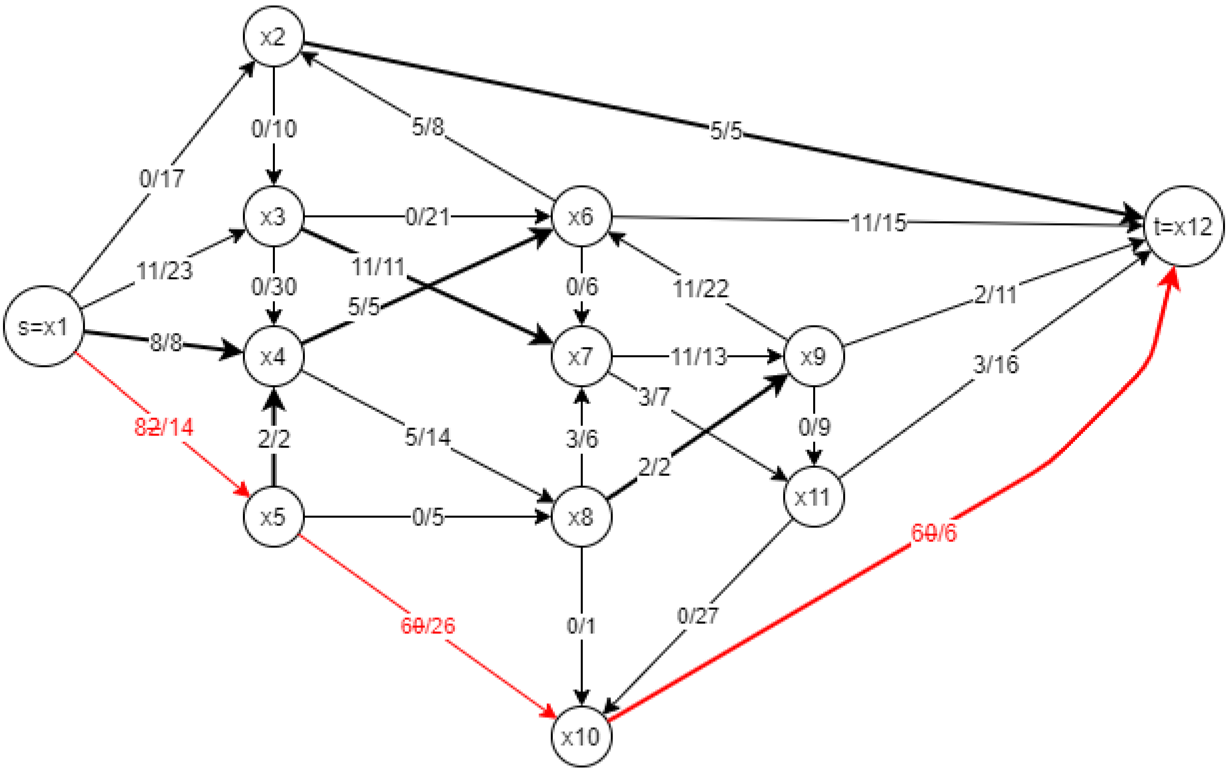

Рисунок 7 — увеличение потока на пути (x_1,x_5,x_{10},x_{12})

7) Рассмотрим путь (x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на δ^*(x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) увеличив поток на пути (x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) на значение δ^*(x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12}).

$\delta^*(x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{6, 5, 3, 4, 13\} = 3$

Дуга (x_8,x_7) стала насыщенной.

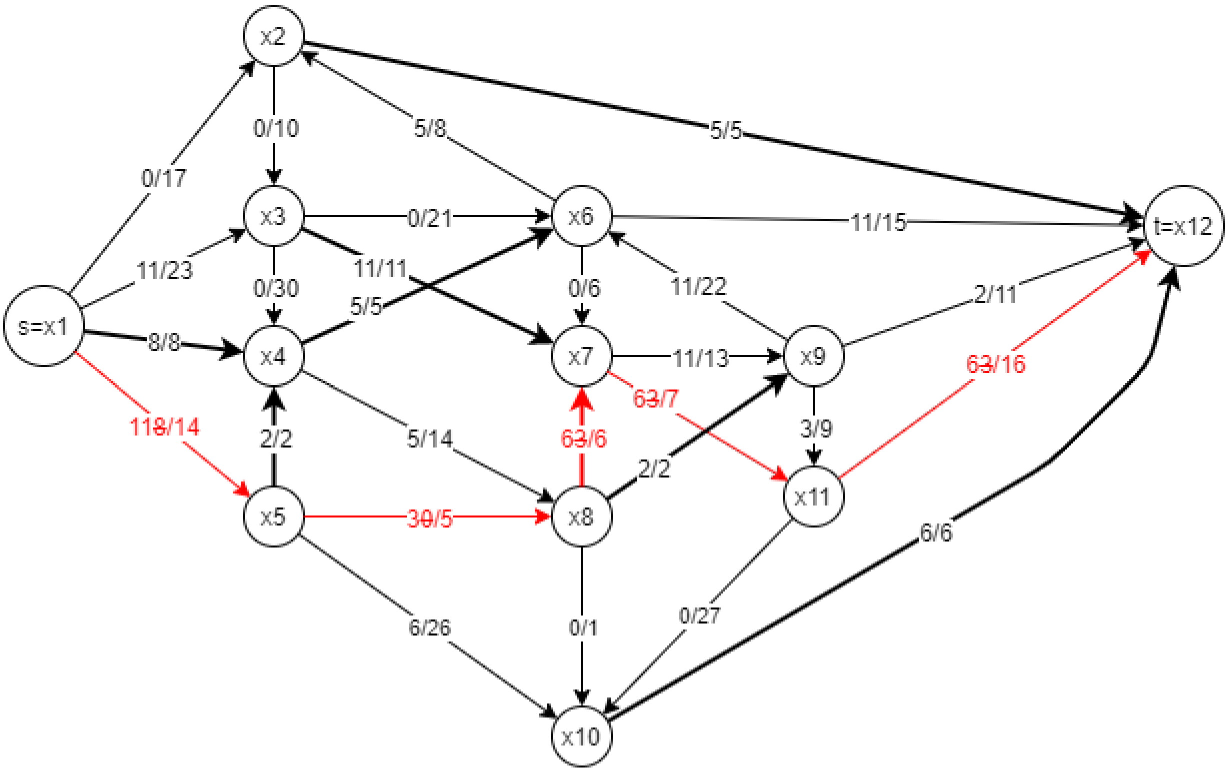

Рисунок 8 — увеличение потока на пути $(x_1,x_5,x_8,x_7,x_{11},x_{12})$

8) Рассмотрим путь (x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12})$ увеличив поток на пути (x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12}) на значение $\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_{12})\} = \min\{17, 10, 21, 4\} = 3$

Дуга (x_6,x_{12}) стала насыщенной.

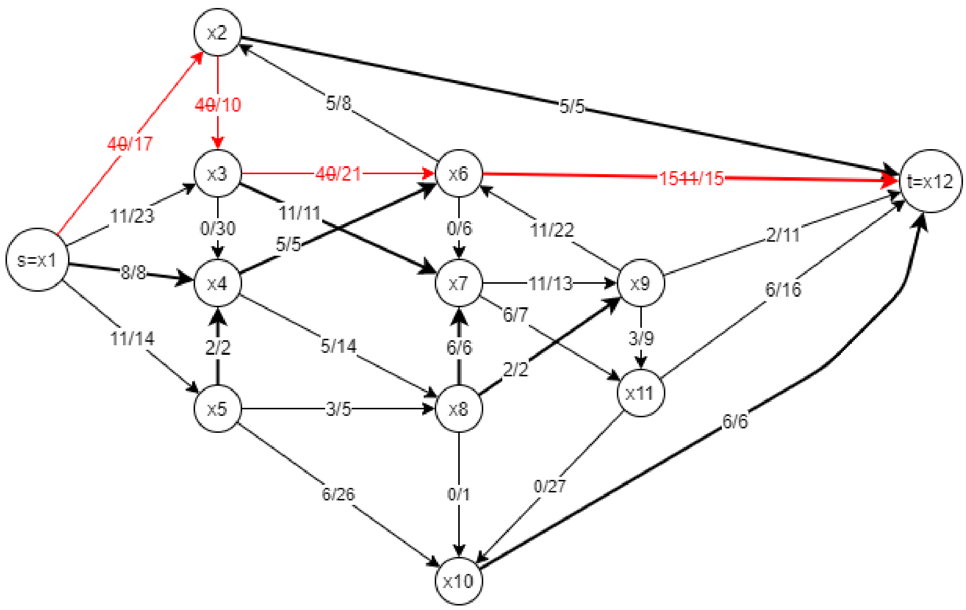

Рисунок 9 — увеличение потока на пути (x_1,x_2,x_3,x_6,x_{12})

9) Рассмотрим путь (x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12}) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12})$ увеличив поток на пути (x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12}) на значение $\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{13, 6, 17, 6, 1, 10\} = 1$

Дуга (x_7,x_{11}) стала насыщенной.

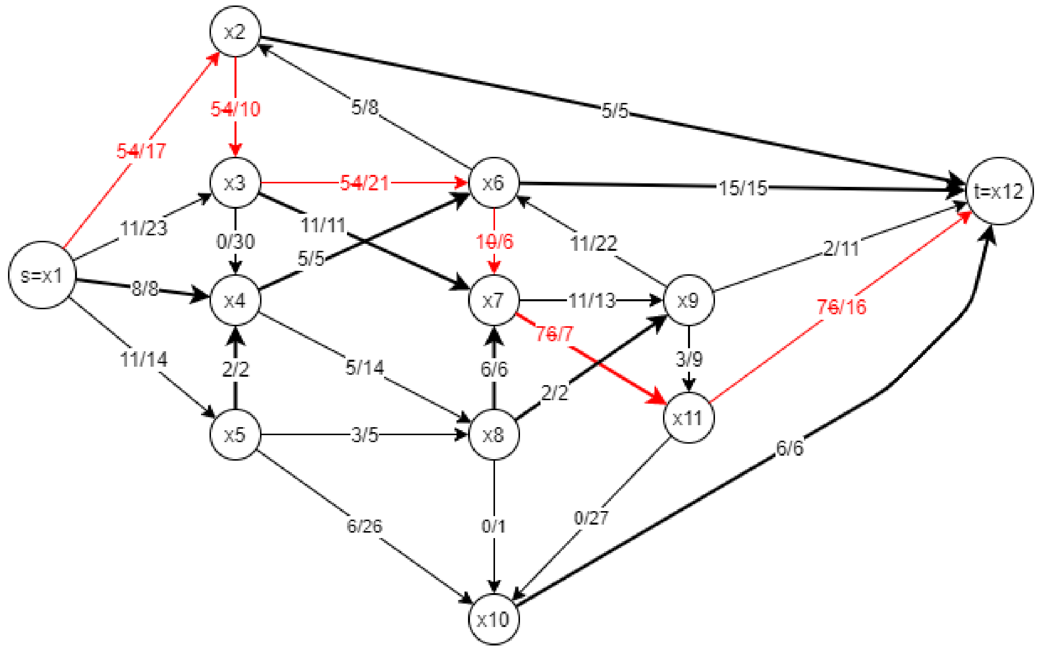

Рисунок 10 — увеличение потока на пути (x_1,x_2,x_3,x_6,x_7,x_{11},x_{12})

10) Рассмотрим путь $(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12})$.

$\delta^*(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_{11})\} = \min\{12, 16, 5, 2, 9\} = 2$

Дуга (x_7,x_9) стала насыщенной.

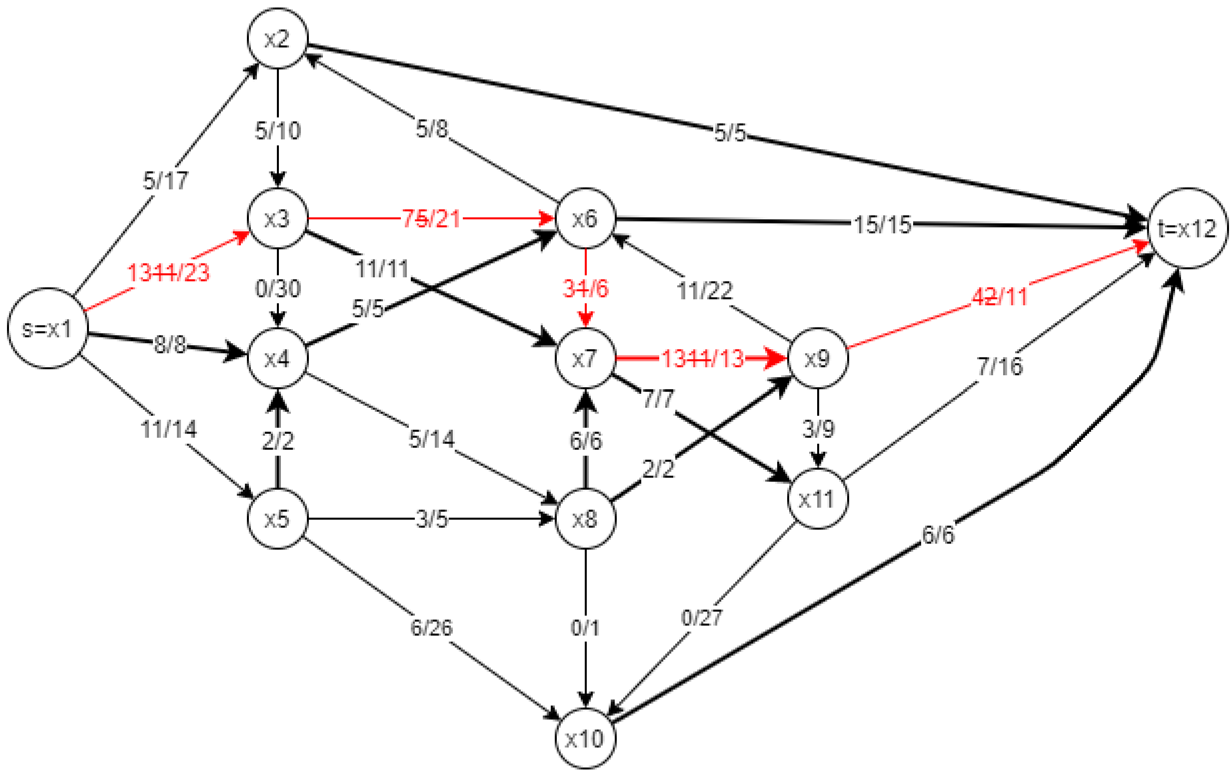

Рисунок 11 — увеличение потока на пути $(x_1,x_3,x_6,x_7,x_9,x_{12})$

Итак, не существует путей из источника в сток, не включающих насыщенных дуг, следовательно, был получен полный поток в сети:

$\varphi_{\text{полн}} = \sum\varphi(s, x_i) = \sum\varphi(x_i, t) = 5 + 13 + 8 + 11 = 5 + 15 + 4 + 7 + 6 = 37$

Теперь проведем оптимизацию сети, опираясь на теоремы 2 и 3.

II. Достижение максимального потока

Для достижения максимального потока посредством оптимизации сети согласно <u>теореме 2</u> будем искать <u>увеличивающие маршруты</u> в сети и корректировать значение потока в их дугах.

11) Рассмотрим маршрут (x_1,x_3,x_6,x_9,x_{12}). Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на величины $\varepsilon^*(x_1,x_3,x_6,x_9,x_{12})$ согласно <u>теореме 2</u>. Тогда поток в сети вырастет так же на величину $\varepsilon^*(x_1,x_3,x_6,x_9,x_{12})$

$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9,x_6)\} = \min\{11\} = 11$

$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{10, 14, 7\} = 7$

$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{11, 7\} = 7$

Дуга (x_9, x_{12}) стала насыщенной

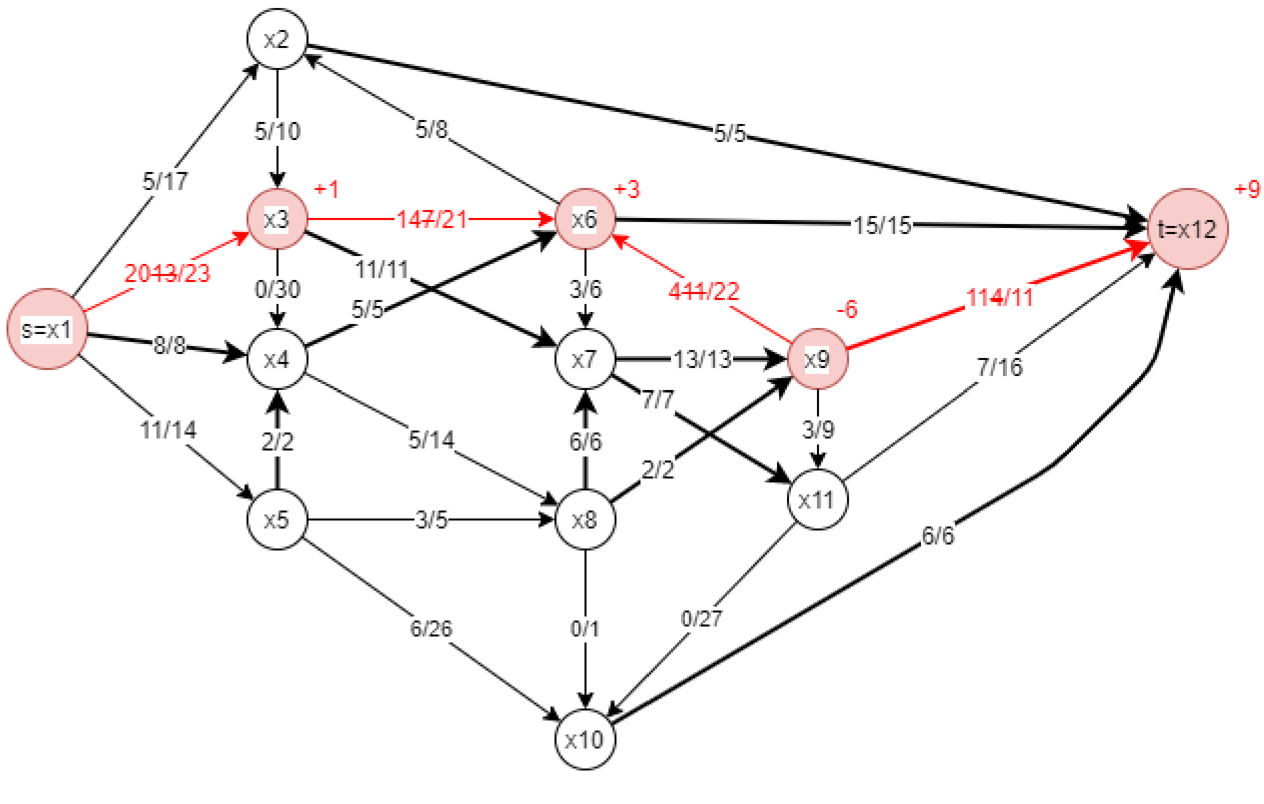

Рисунок 12 — увеличивающий маршрут (x_1,x_3,x_6,x_9,x_{12})

12) Рассмотрим маршрут ($x_1,x_2,x_3,x_6,x_9,x_{11},x_{12}$). Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на $\varepsilon^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_9,x_{11},x_{12})$ согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину $\varepsilon^*(x_1,x_2,x_3,x_6,x_9,x_{11},x_{12})$

$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9,x_6)\} = \min\{4\} = 4$

$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{11})\} = \min\{12, 5, 7, 6, 9\} = 6$

$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{4, 6\} = 4$

Дуга (x_9,x_6) имеет теперь $\varphi(x_9,x_6) = 0$

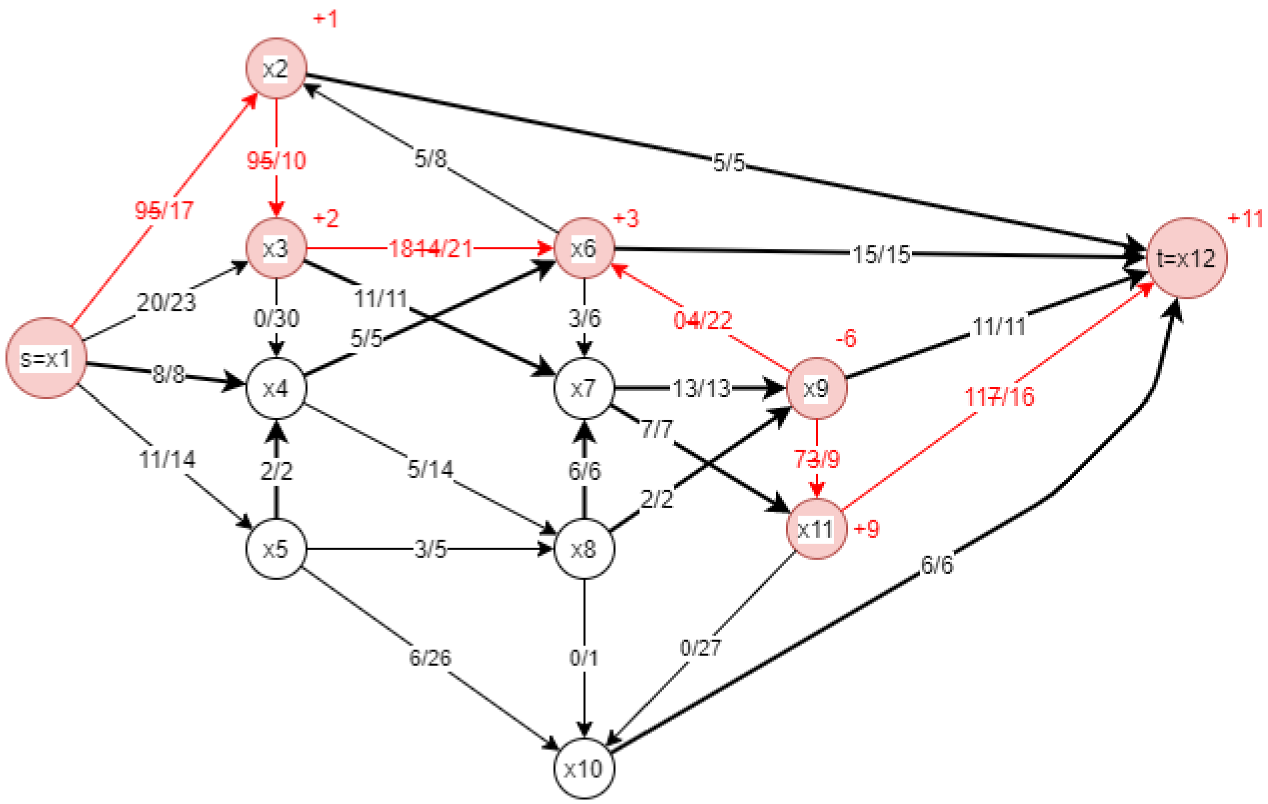

Рисунок 13 — увеличивающий маршрут ($x_1,x_2,x_3,x_6,x_9,x_{11},x_{12}$)

13) Как видно на рисунке 14, найти еще один увеличивающий маршрут не удалось, следовательно, по теореме 3, был достигнут максимальный поток φ_{max}

$\varphi_{max} = \sum\varphi(s, x_i) = \sum\varphi(x_i, t) = 9 + 20 + 8 + 11 = 5 + 15 + 11 + 11 + 6 = 48$

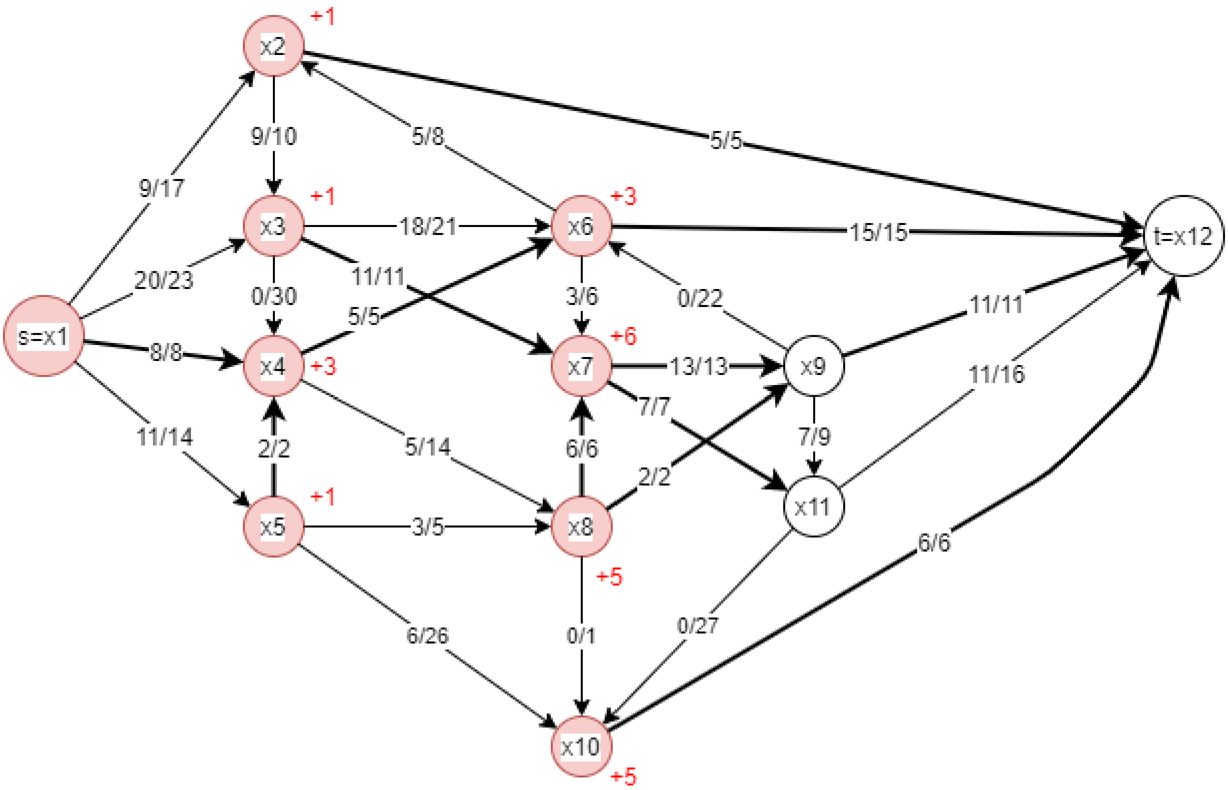

Рисунок 14 — поиск увеличивающего маршрута

III. Построение минимального разреза

Отделим помеченные вершины от непомеченных (рисунок 15) и выпишем насыщенные дуги, составляющие минимальный разрез.

$A = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}$

$A' = \{x_9,x_{11},x_{12}\}$

Минимальный разрез: $(A \rightarrow A') = \{(x_2,x_{12}), (x_6,x_{12}), (x_7,x_9), (x_7,x_{11}), (x_8,x_9), (x_{10},x_{12})\}$

Согласно теореме Форда-Фалкерсона, величина φ_{max} максимального потока в сети равна $c(A' \rightarrow A)$.

$c(A \rightarrow A') = c(x_2,x_{12}) + c(x_6,x_{12}) + c(x_7,x_9) + c(x_7,x_{11}) + c(x_8,x_9) + c(x_{10},x_{12}) = 5 + 15 + 13 + 7 + 2 + 6 = 48$

Значение совпало с величиной $\varphi_{max,}$ найденной в пункте II, следовательно, задача решена верно.

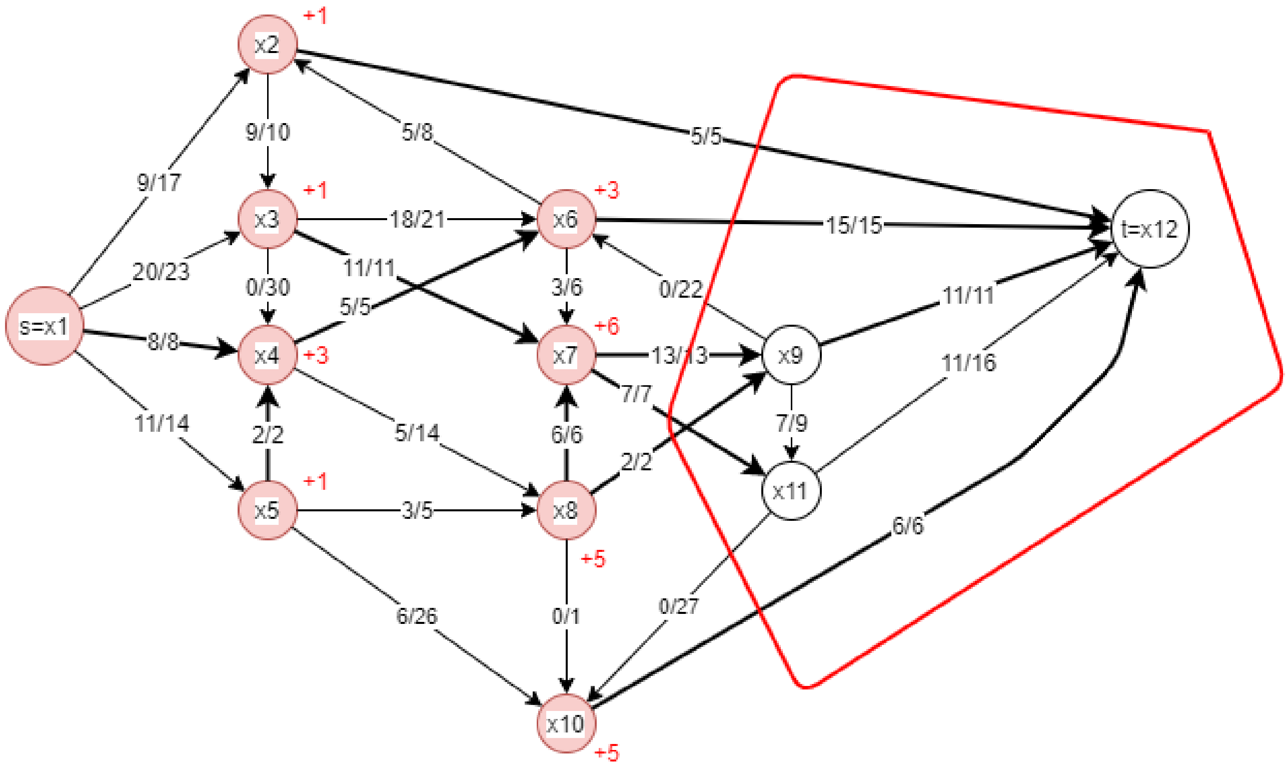

Рисунок 15 — построение минимального разреза

Вывод:

- В ходе данной работы с помощью теоремы 1 за 10 шагов был найден полный поток сети $\varphi_{\text{полн.}}$ Затем, за еще 3 шага с помощью теорем 2 и 3 был найден максимальный поток в сети $\varphi_{\max.}$ Затем был найден минимальный разрез сети, его пропускная способность совпала с максимальным потоком в сети, следовательно задача была решена верно (в соответствии с теоремой 4).

  Максимальный поток в сети: $\varphi_{\max} = 48$
  $A = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}$
  $A' = \{x_9,x_{11},x_{12}\}$
  Минимальный разрез: $(A \to A') = \{(x_2,x_{12}), (x_6,x_{12}), (x_7,x_9), (x_7,x_{11}), (x_8,x_9), (x_{10},x_{12})\}$
- В ходе данной работы были освоены навыки применения алгоритма Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока и минимального разреза в сети (с помощью теорем, перечисленных в теоретической части).