

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

по домашнему заданию

Дисциплина: Дискретная математика

Студент	<u>ИУ6-42Б</u>	<u>(Подпись, дата)</u>	<u>С.В. Астахов</u>
	(Группа)		(И.О. Фамилия)
Преподаватель		<u>(Подпись, дата)</u>	<u>В.В. Гуренко</u>
			(И.О. Фамилия)

Москва, 2021

Задание

16 вариант

Общая формулировка задания:

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток φ_{\max} , доставляемый от источника $s = x_1$ к стоку $t = x_{12}$ и указать минимальный разрез, отделяющий t от s .

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица Ω : см. по номеру варианта.

Матрица весов:

Вариант 16.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	–	17	23	8	14	–	–	–	–	–	–	–
x_2	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
x_3	–	–	–	30	–	21	11	–	–	–	–	–
x_4	–	–	–	–	–	5	–	14	–	–	–	–
x_5	–	–	–	2	–	–	–	5	–	26	–	–
x_6	–	8	–	–	–	–	6	–	–	–	–	15
x_7	–	–	–	–	–	–	–	–	13	–	7	–
x_8	–	–	–	–	–	–	6	–	2	1	–	–
x_9	–	–	–	–	–	22	–	–	–	–	9	11
x_{10}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6
x_{11}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	–	16
x_{12}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Теоретические сведения

Теорема 1: Если $(s, \dots, x_i, \dots, t)$ — путь от источника к стоку и все ребра на этом пути ненасыщенные, то величину потока на этом пути и, следовательно, во всей сети, можно увеличить на значение δ^* .

$$\text{Где } \delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}.$$

Теорема 2: Если $(s, \dots, x_i, \dots, t)$ — маршрут от источника к стоку, такой, что все прямые ребра на нем ненасыщенные, а поток по всем обратным ребрам строго >0 (такой маршрут назовем увеличивающим), тогда на всех прямых ребрах такого маршрута поток φ можно увеличить на ε^* , а на все обратных — уменьшить на ε^* . При этом поток в сети возрастет на ε^* .

$$\text{Где } \varepsilon^* = \min\{\delta^*, \varphi^*\},$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_i, x_j)\}$$

Теорема 3: Поток в сети достигает максимального значения φ_{\max} тогда и только тогда, когда в сети не существует ни одного увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (теорема Форда-Фалкерсона): Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока φ_{\max} от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

Решение

Изобразим заданную сеть графически в соответствии с матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер.

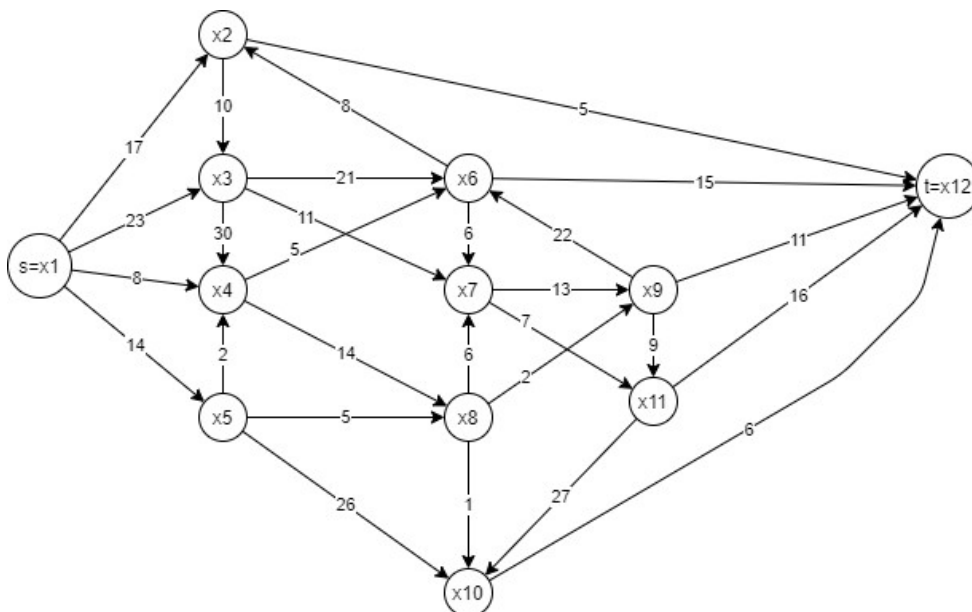


Рисунок 1 — вид исходной сети

I. Достижение полного потока

1) Зададим начальное значение потока через все дуги (и соответственно через всю сеть) $\varphi_i = 0$ для $\forall i \in [1;12]$. Далее будем увеличивать поток в сети согласно теореме 1.

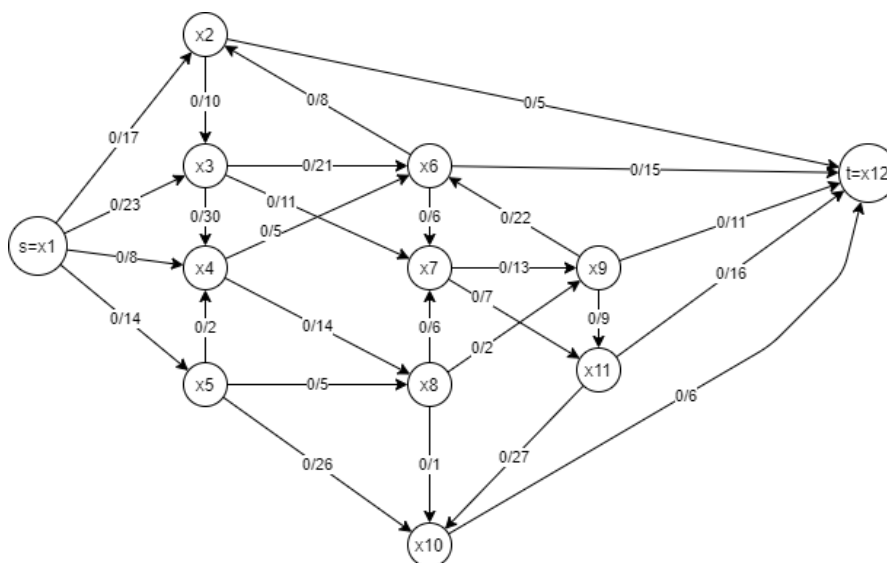


Рисунок 2 — сеть с нулевым потоком

2) Рассмотрим путь $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$, увеличив поток на пути $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_6), \delta(x_6, x_{12}) \} = \min \{ 23, 11, 13, 22, 15 \} = 11$$

Дуга (x_3, x_7) стала насыщенной.

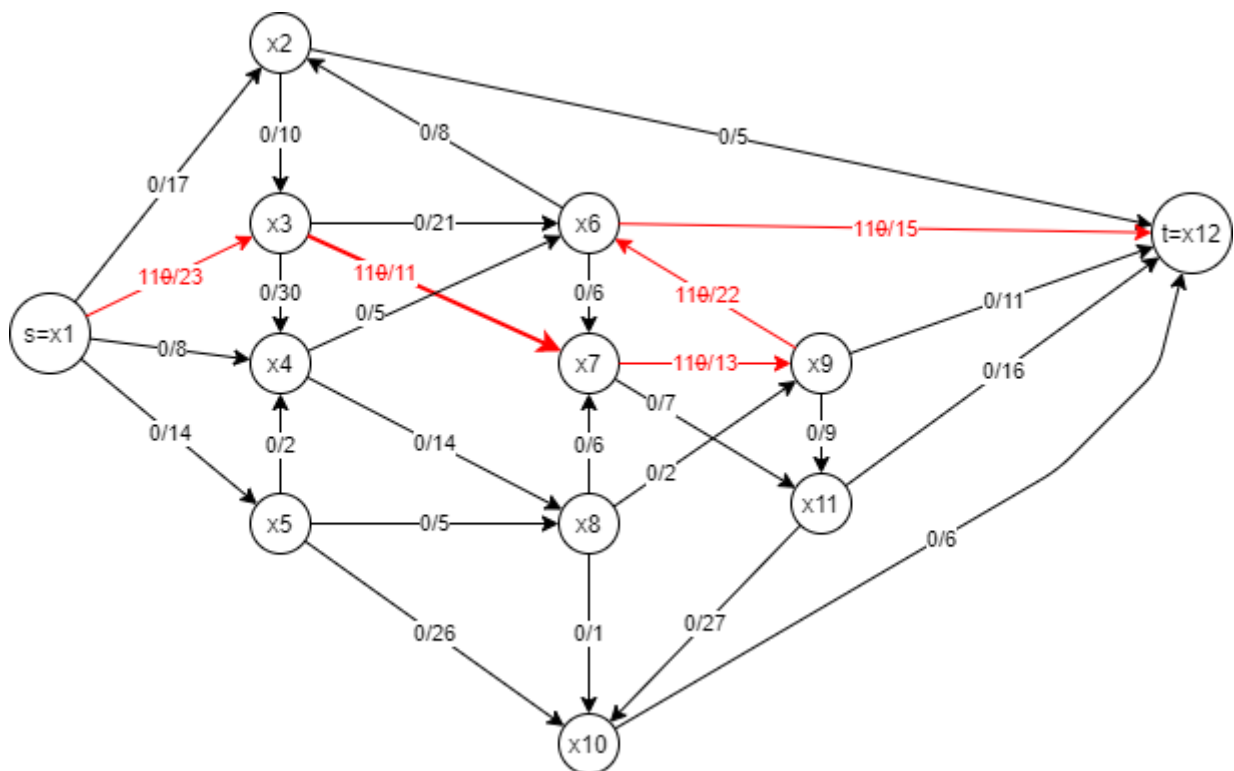


Рисунок 3 — увеличение потока на пути $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$

3) Рассмотрим путь $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_6), \delta(x_6, x_2), \delta(x_2, x_{12}) \} = \min \{ 8, 5, 8, 5 \} = 5$$

Дуги (x_4, x_6) и (x_2, x_{12}) стали насыщенными.

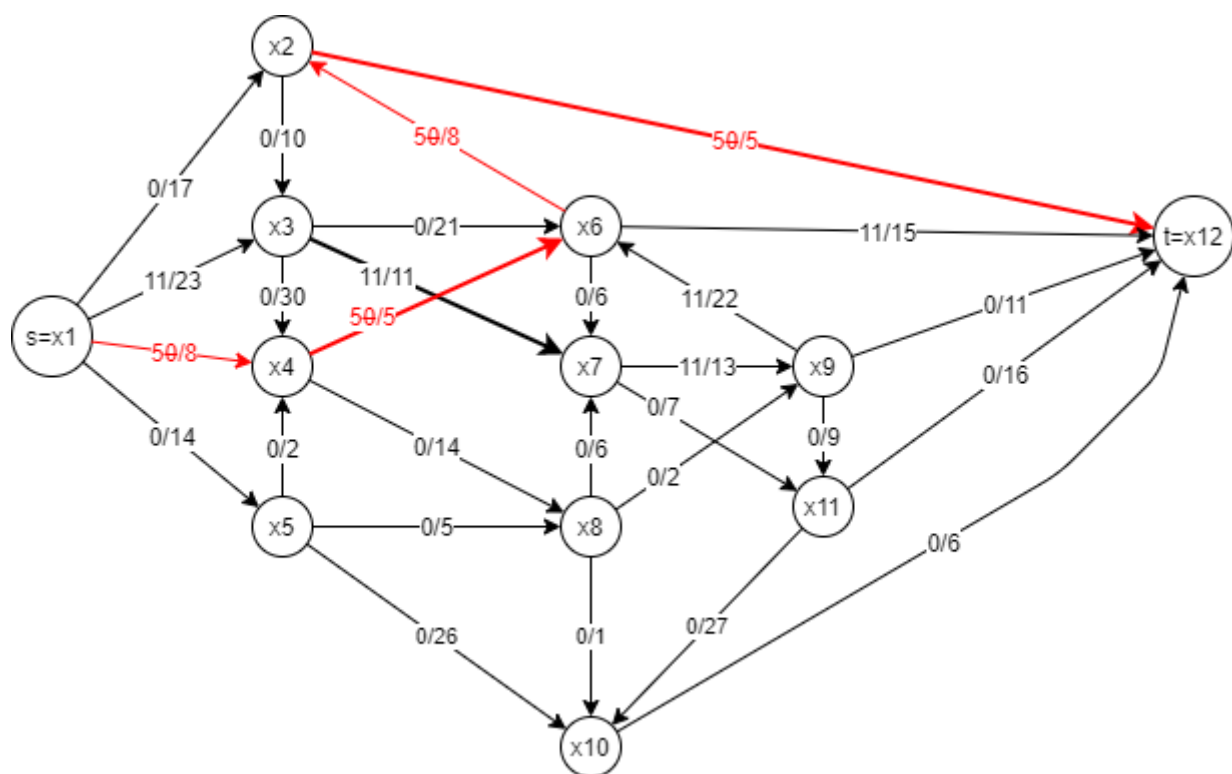


Рисунок 4 — увеличение потока на пути $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$

4) Рассмотрим путь $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$.

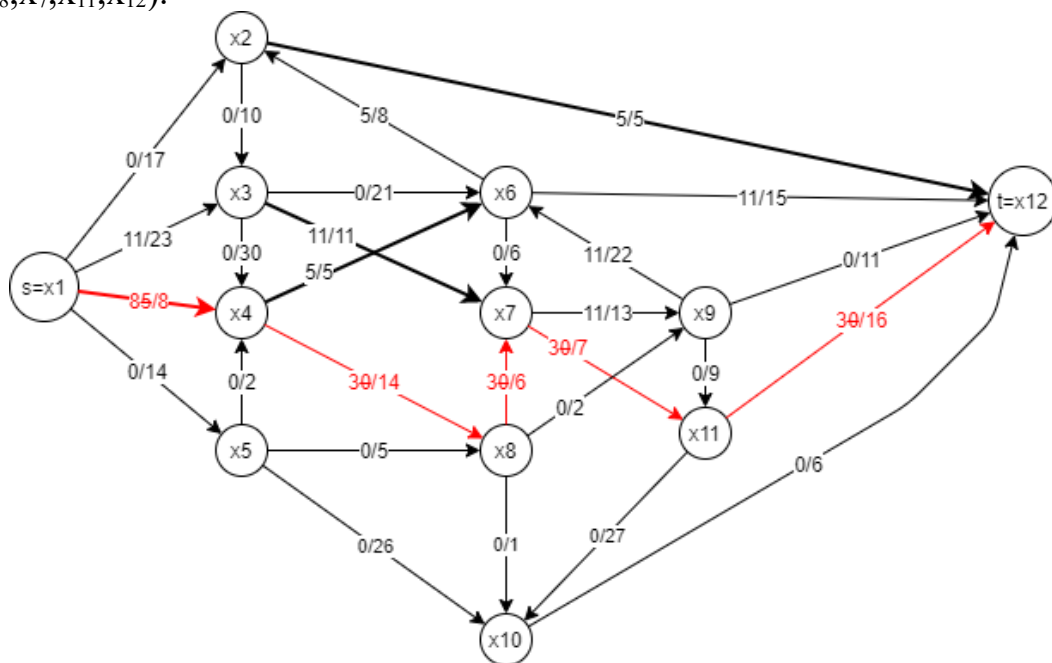


Рисунок 5 — увеличение потока на пути $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$

$$\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{3, 14, 6, 7, 16\} = 3$$

Дуга (x_1, x_4) стала насыщенной

5) Рассмотрим путь $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_9), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{14, 2, 11, 2, 11\} = 2$$

Дуги (x_5, x_4) и (x_8, x_9) стали насыщенными.

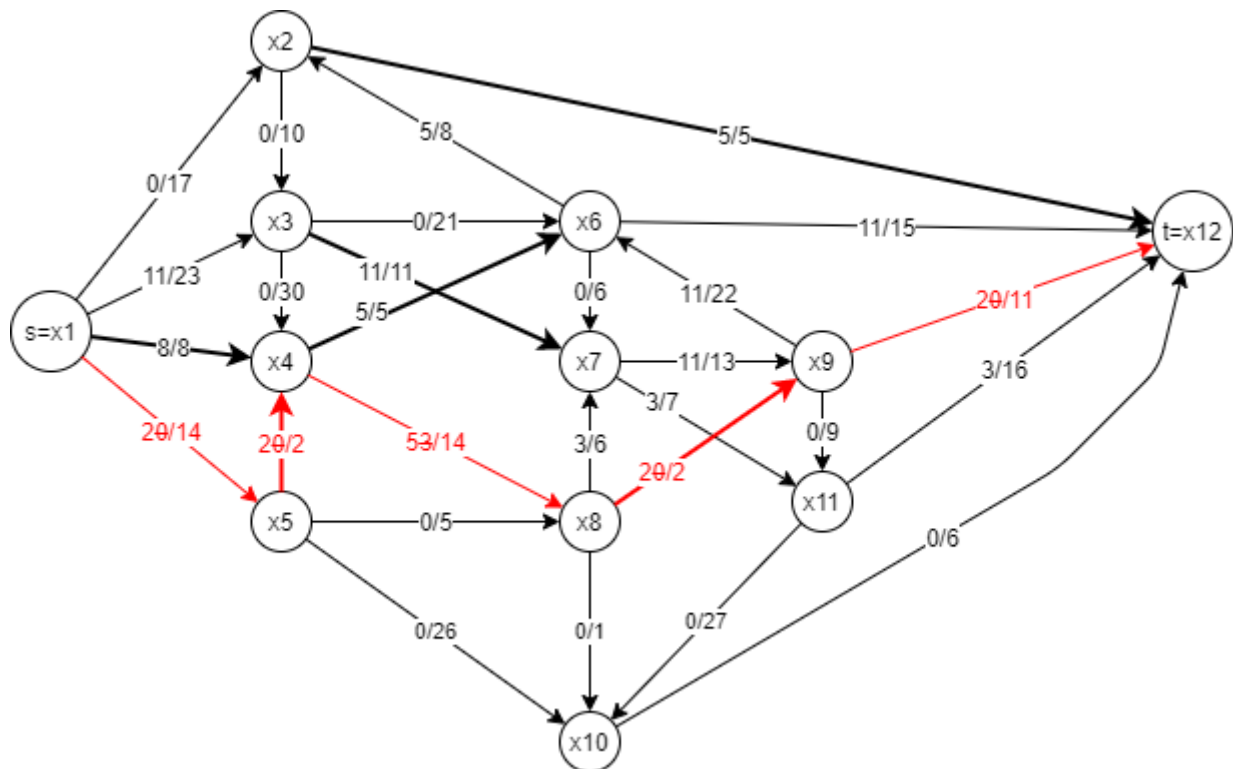


Рисунок 6 — увеличение потока на пути $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$

б) Рассмотрим путь $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_{10}), \delta(x_{10}, x_{12})\} = \min\{12, 26, 6\} = 6$$

Дуга (x_{10}, x_{12}) стала насыщенной.

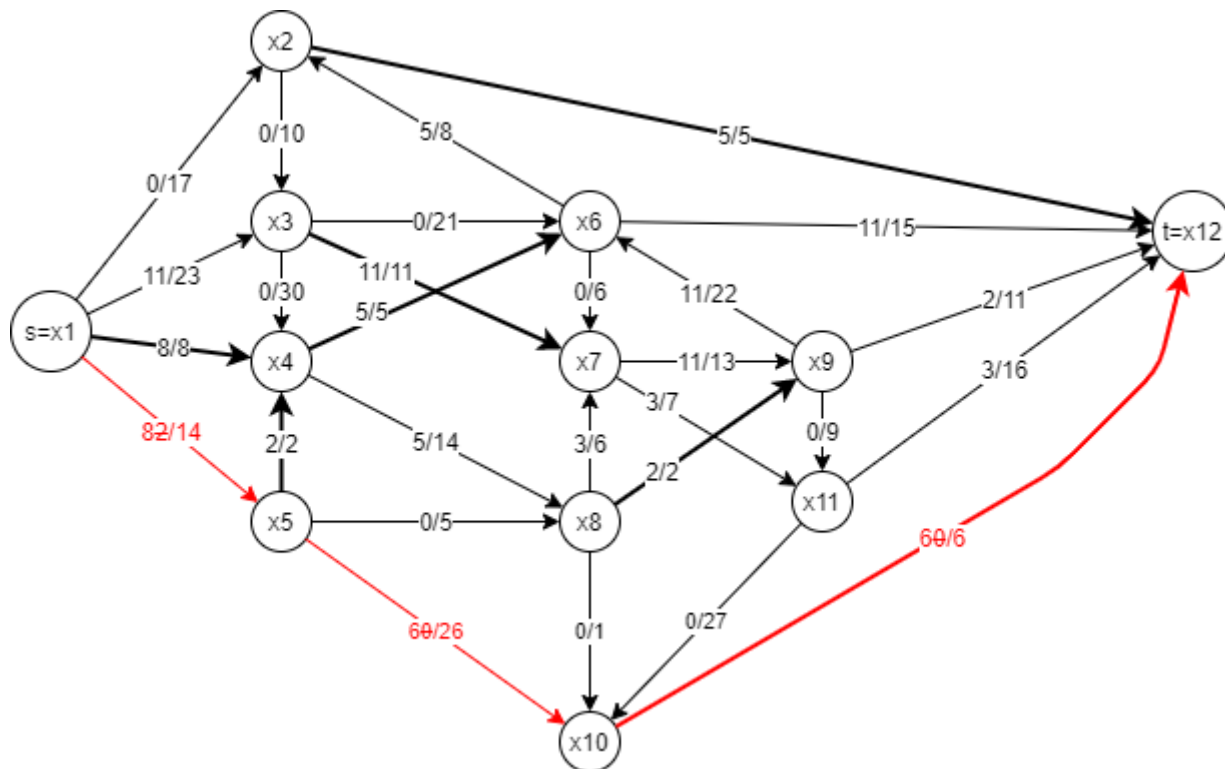


Рисунок 7 — увеличение потока на пути $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$

7) Рассмотрим путь $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{6, 5, 3, 4, 13\} = 3$$

Дуга (x_8, x_7) стала насыщенной.

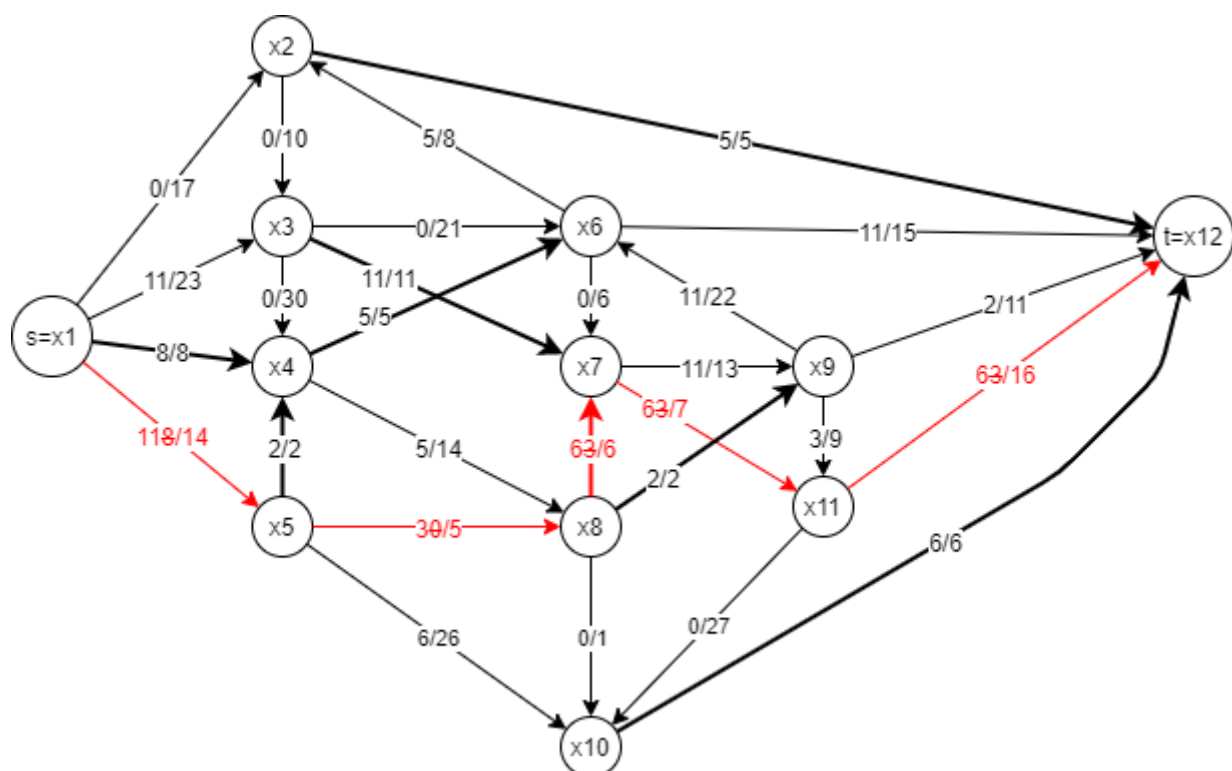


Рисунок 8 — увеличение потока на пути $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$

8) Рассмотрим путь $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_{12}) \} = \min \{ 17, 10, 21, 4 \} = 3$$

Дуга (x_6, x_{12}) стала насыщенной.

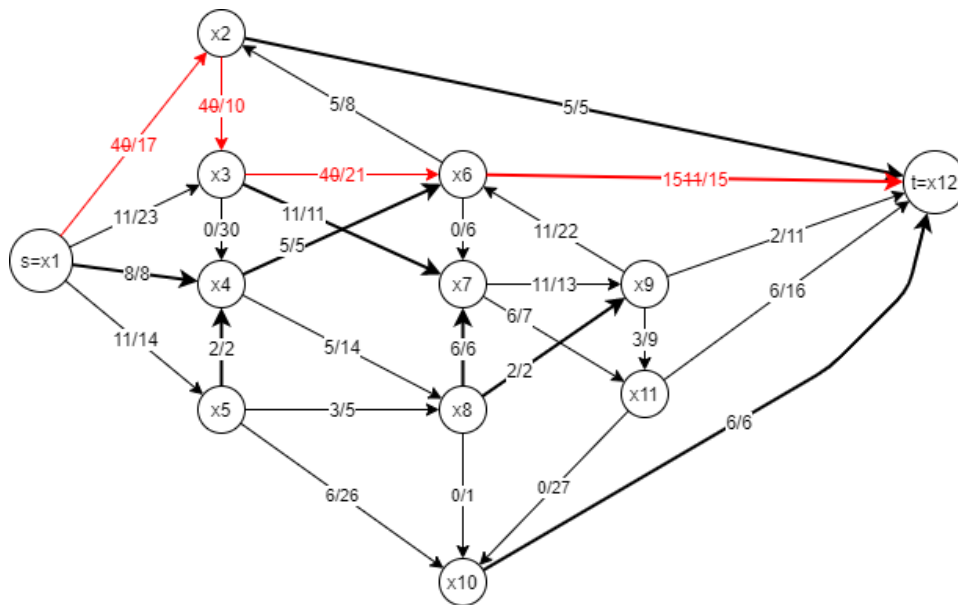


Рисунок 9 — увеличение потока на пути $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$

9) Рассмотрим путь $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{13, 6, 17, 6, 1, 10\} = 1$$

Дуга (x_7, x_{11}) стала насыщенной.

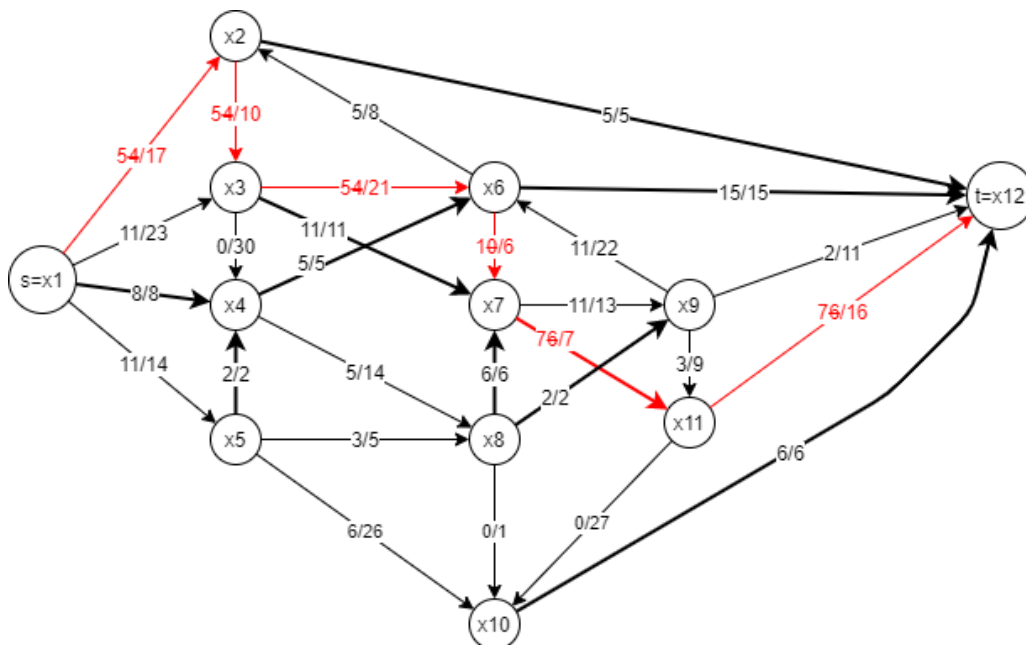


Рисунок 10 — увеличение потока на пути $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$

10) Рассмотрим путь $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$ от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на $\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$ увеличив поток на пути $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$ на значение $\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$.

$$\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{12, 16, 5, 2, 9\} = 2$$

Дуга (x_7, x_9) стала насыщеннй.

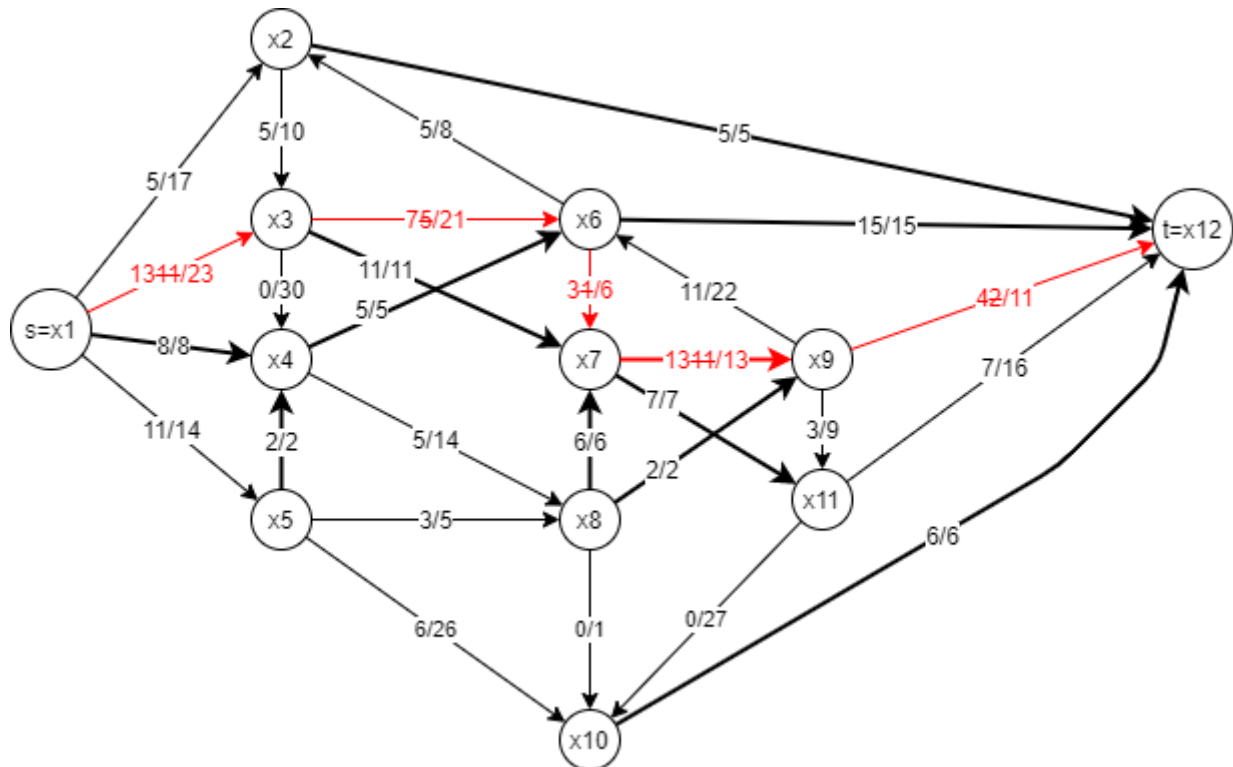


Рисунок 11 — увеличение потока на пути $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$

Итак, не существует путей из источника в сток, не включающих насыщенных дуг, следовательно, был получен полный поток в сети:

$$\varphi_{\text{полн}} = \sum \varphi(s, x_i) = \sum \varphi(x_i, t) = 5 + 13 + 8 + 11 = 5 + 15 + 4 + 7 + 6 = 37$$

Теперь проведем оптимизацию сети, опираясь на теоремы 2 и 3.

II. Достижение максимального потока

Для достижения максимального потока посредством оптимизации сети согласно теореме 2 будем искать увеличивающие маршруты в сети и корректировать значение потока в их дугах.

11) Рассмотрим маршрут $(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$. Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на величины $\varepsilon^*(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$ согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину $\varepsilon^*(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9, x_6)\} = \min\{11\} = 11$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{10, 14, 7\} = 7$$

$$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{11, 7\} = 7$$

Дуга (x_9, x_{12}) стала насыщенной

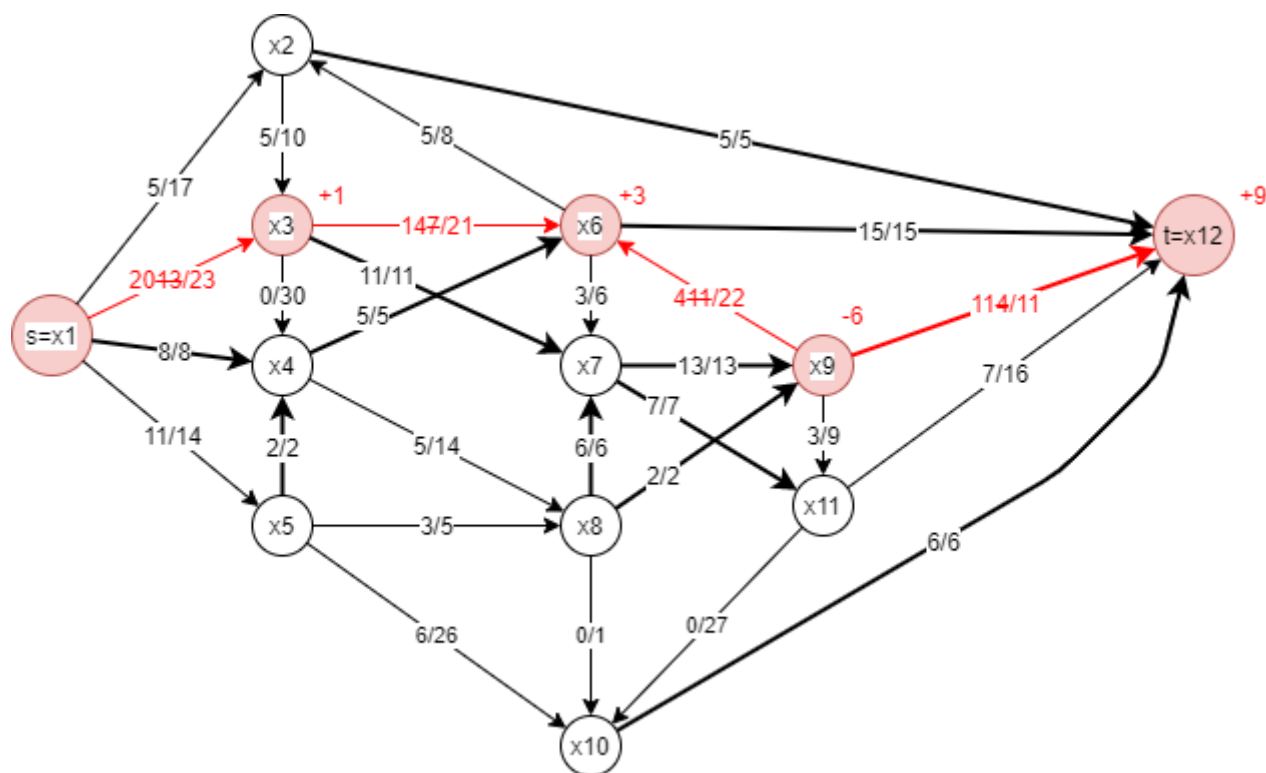


Рисунок 12 — увеличивающий маршрут $(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$

12) Рассмотрим маршрут $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$. Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на $\varepsilon^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$ согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину $\varepsilon^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9, x_6)\} = \min\{4\} = 4$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{11})\} = \min\{12, 5, 7, 6, 9\} = 6$$

$$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{4, 6\} = 4$$

Дуга (x_9, x_6) имеет теперь $\varphi(x_9, x_6) = 0$

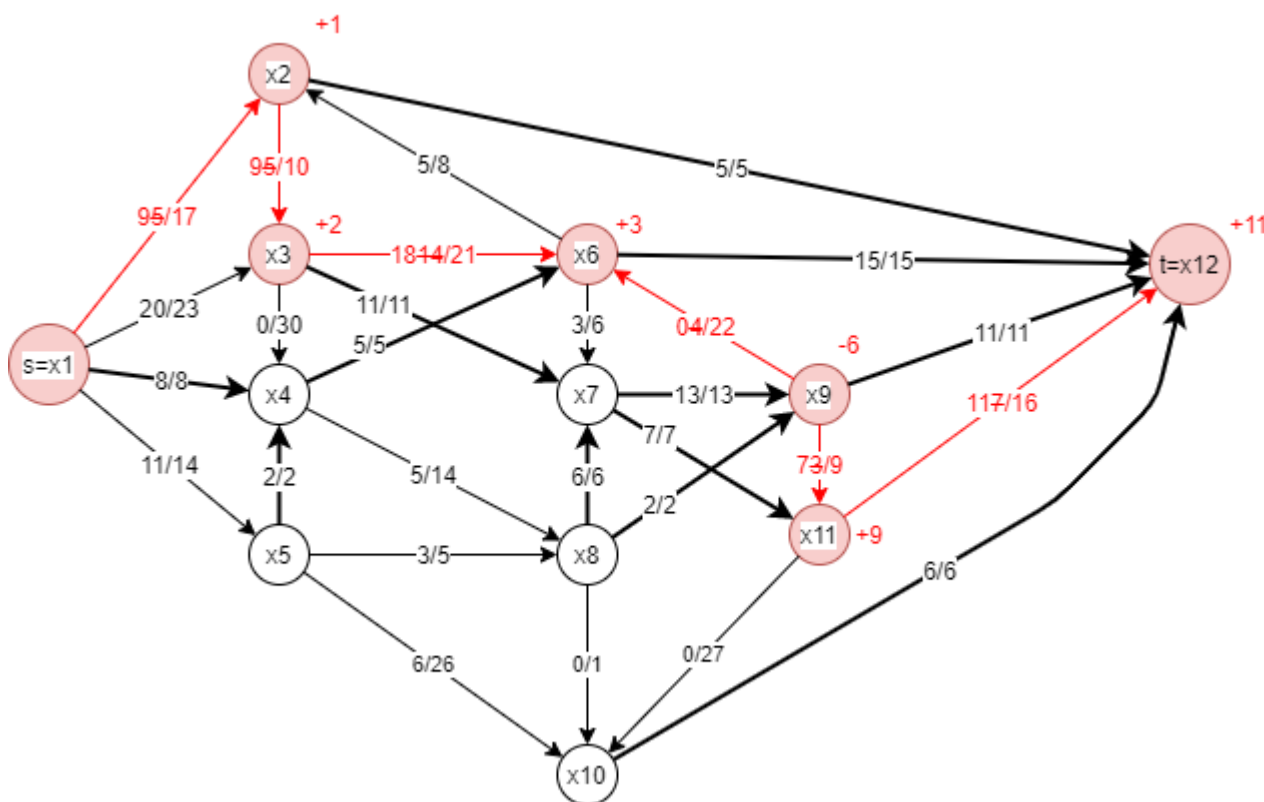


Рисунок 13 — увеличивающий маршрут $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$

13) Как видно на рисунке 14, найти еще один увеличивающий маршрут не удалось, следовательно, по теореме 3, был достигнут максимальный поток φ_{\max}

$$\varphi_{\max} = \sum \varphi(s, x_i) = \sum \varphi(x_i, t) = 9 + 20 + 8 + 11 = 5 + 15 + 11 + 11 + 6 = 48$$

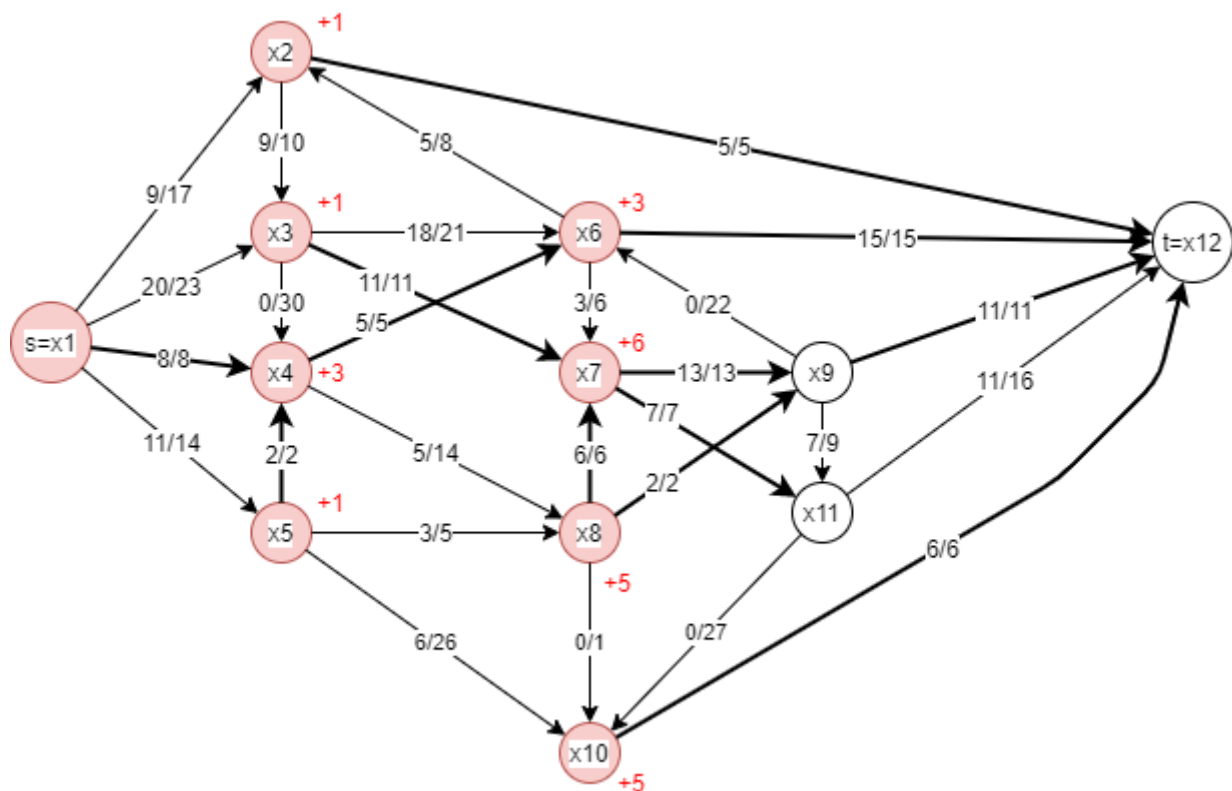


Рисунок 14 — поиск увеличивающего маршрута

III. Построение минимального разреза

Отделим помеченные вершины от непомеченных (рисунок 15) и выпишем насыщенные дуги, составляющие минимальный разрез.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$A' = \{x_9, x_{11}, x_{12}\}$$

$$\text{Минимальный разрез: } (A \rightarrow A') = \{(x_2, x_{12}), (x_6, x_{12}), (x_7, x_9), (x_7, x_{11}), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{12})\}$$

Согласно теореме Форда-Фалкерсона, величина φ_{\max} максимального потока в сети равна $c(A' \rightarrow A)$.

$$c(A \rightarrow A') = c(x_2, x_{12}) + c(x_6, x_{12}) + c(x_7, x_9) + c(x_7, x_{11}) + c(x_8, x_9) + c(x_{10}, x_{12}) = 5 + 15 + 13 + 7 + 2 + 6 = 48$$

Значение совпало с величиной φ_{\max} , найденной в пункте II, следовательно, задача решена верно.

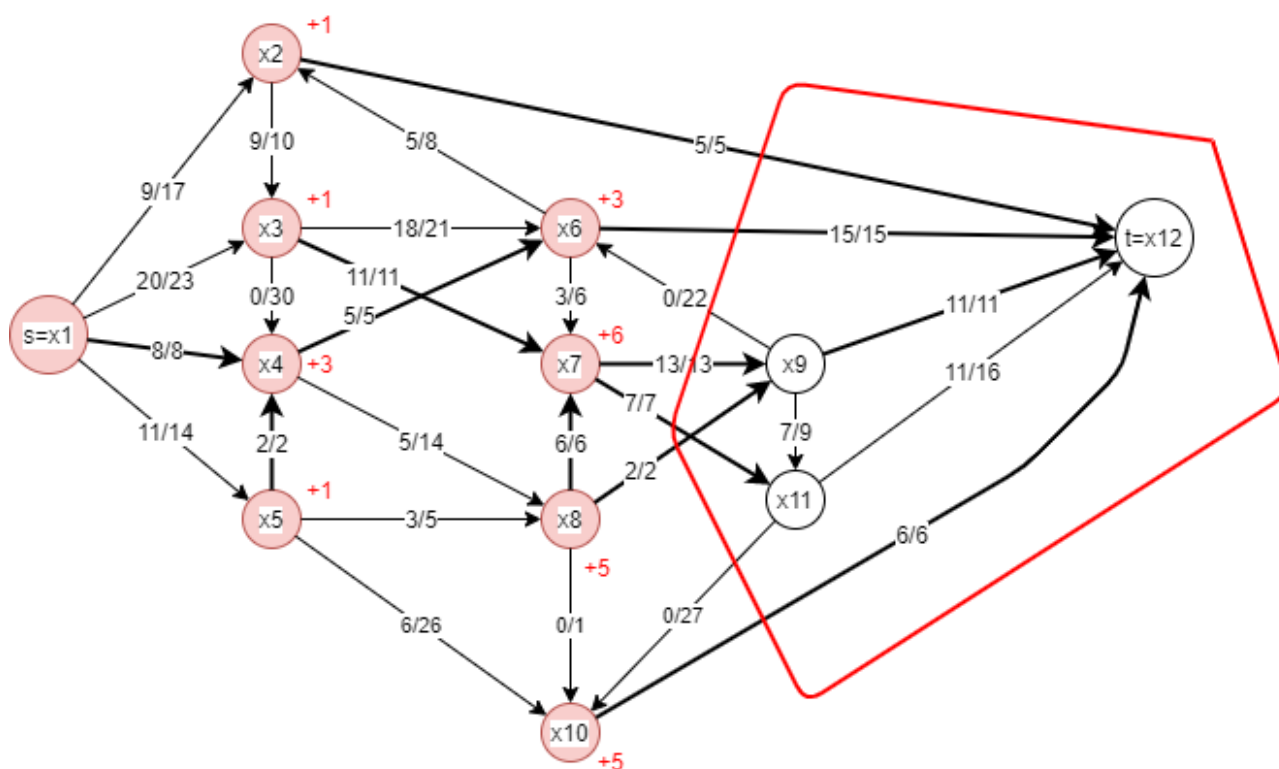


Рисунок 15 — построение минимального разреза

Вывод:

- В ходе данной работы с помощью теоремы 1 за 10 шагов был найден полный поток сети $\varphi_{\text{полн}}$. Затем, за еще 3 шага с помощью теорем 2 и 3 был найден максимальный поток в сети φ_{max} . Затем был найден минимальный разрез сети, его пропускная способность совпала с максимальным потоком в сети, следовательно задача была решена верно (в соответствии с теоремой 4).

Максимальный поток в сети: $\varphi_{\text{max}} = 48$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$

$A' = \{x_9, x_{11}, x_{12}\}$

Минимальный разрез: $(A \rightarrow A') = \{(x_2, x_{12}), (x_6, x_{12}), (x_7, x_9), (x_7, x_{11}), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{12})\}$

- В ходе данной работы были освоены навыки применения алгоритма Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока и минимального разреза в сети (с помощью теорем, перечисленных в теоретической части).