1. Способы задания множеств. Универсальное, конечное, пустое, равные множества. Включения и подмножества. Диаграмма Эйлера–Венна. Мощность конечного множества.

Способы задания множеств

- Перечисление элементов (возможно, когда количество элементов небольшое и конечное)
- Указание общего свойства элементов множества:
- $A = \left\{x : x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} < 3\right\}$
- $A = \{x : P(x)\}$, где P(x) - характеристический предикат.
- используют другое множество, заранее известное, например:
- $\left\{x : x = \frac{\Pi}{2} + 2\Pi n, n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{x : x \in \mathbb{N}, x \vdots 2\right\}$ - только чётные.
- используют процедуру (рекурсивную), порождающие элементы множества, например:
- $\begin{cases} 0! = 1 \in F \\ Esli : (n-1)! \in F, togda : n(n-1)! \in F \end{cases}$

Множества

- Универсальное (U) - множество, включающее в себя все множества.
- Конечное - множество состоящее из конечного числа элементов.
- Бесконечное - множество состоящее из бесконечного числа элементов.
- Пустое - множество не содержащее ни одного элемента.
- Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. B включено в A или $B \subseteq A$
- $B \subseteq A, B \neq A => B \subset A$ - строгое включение.
- Множества A и B называются равными или A = B, тогда и только тогда, когда $B \subseteq A, A \subseteq B$

Свойства включений (подмножеств):

- $A \subseteq A$ - множество A является собственным включением.
- Транзитивность $A \subseteq B, B \subseteq C => A \subseteq C$
- объединение A ⋂ B
- Пересечение A ⋃ B
- Разность A \ B
- Симметрическая разность(сумма по модулю 2) A ⊕ B
- Дополнение ¬A

Диаграмма Эйлера-Венна:

- Диаграмма Эйлера-Венна - иллюстрация, использующаяся для наглядного представления множества/операции над множествами. Примеры показаны в свойствах.

Мощность конечного множества:

- Мощность множества - количество его элементов, обозначается: |A|.
- Если между множествами A и B устанавливается взаимно однозначное соответствие, то эти множества содержат одинаковое количество элементов. Такие множества - равномощные.
- Если у множества A нет равномощного собственного подмножества, то множество A - конечное.
- Для конечного множества A, его $|A| < \infty$. Все остальные множества являются бесконечными и их мощность равна бесконечности.
- Теорема: Множество имеющее бесконечные подмножества само бесконечно. Следствие: Все подмножества конечного множества конечны.
- Подсчёт мощности:

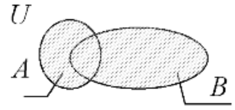
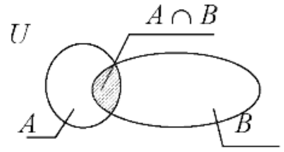
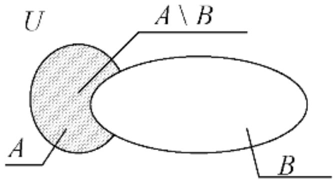
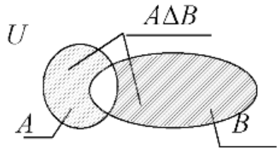
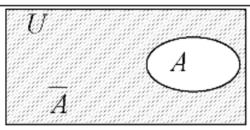
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A + |B| + |C| + |A \cap C \cap B| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C|$$

$$|\varnothing| = 0$$

2. Операции над множествами. Свойства операций над множествами.

- Операции над множествами:

Название операции и обозначение	Определение	Диаграмма
Объединение $C = A \cup B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$	
Пересечение $C = A \cap B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$	
Разность $C = A - B$ или $C = A \setminus B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$	
Симметричная разность $C = A \oplus B$ или $C = A \Delta B$	$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	
Дополнение A в U $C = \overline{A}$	$C = U \setminus A$ $C = \{c \mid c \notin A\}$	

- Свойства операций над множествами:

Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C множества U выполняются тождества:

1. ***Коммутативность***

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

2. ***Ассоциативность***

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. ***Дистрибутивность***

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. ***Идемпотентность***

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

5. ***Действия с Ø***

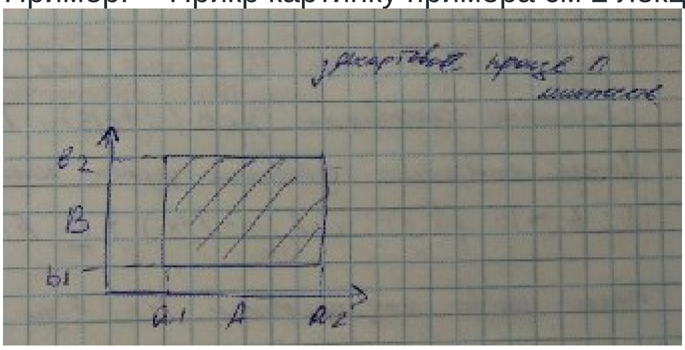
$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

3. Упорядоченные пары и кортежи. Прямое (декартово) произведение множеств, его свойства и геометрическая интерпретация.

Упорядоченные пары и кортежи:

- $\{a, b\} = \{b, a\}$ - неупорядоченная пара.
- $(a, b) \neq (b, a)$ - кортеж, упорядоченная пара. Два элемента a и b называются упорядоченной парой, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй, при этом ((a, b) = (c, d))<-->(a = c n b = d)
- Обобщением упорядоченной пары называется упорядоченный кортеж или просто кортеж.
- Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1 \ldots A_n$ называют декартовым или прямым произведением.
- $A_1 \ldots A_n : A_1 * A_2 * A_3 * \ldots * A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$
- Декартово или прямое произведение множеств - множество упорядоченных кортежей.
- $A * A * A * \ldots * A(nraz) = A^n$ - n-ая декартовая степень A.
- Мощность произведения:

$|A_1 * A_2| = |A_1| * |A_2|, |A_1 * A_2 * \ldots * A_n| = |A_1| * |A_2| * \ldots * |A_n|, |A^n| = |A|^n$

- Пример:<--Прикр картинку примера см 2 лекц начало-->
- 

- Свойства:

~ $A * (B \cup C) = (A * B) \cup (A * C)$;
~ $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C)$;
~ $A * \varnothing = \varnothing * A = \varnothing$;
~ $A * \mho$ не обладает особыми свойствами.

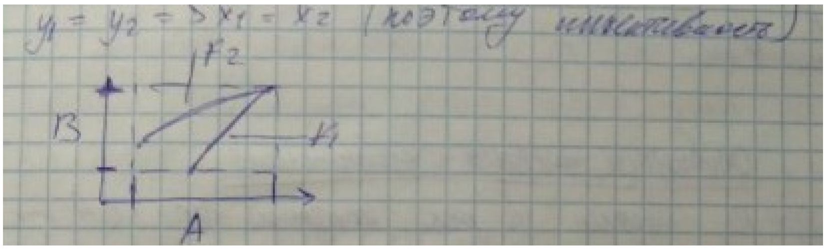
4. Отображения и соответствия. Инъективное, сюръективное, биективное отображения. Обратное соответствие. Сечение соответствия.

Отображение:

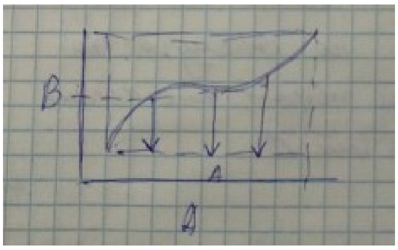
- Отображение f из множества A в множество B задано, если каждому элементу $x \in A$ сопоставим $!y \in B$ или по другому: $f : A -> B$.
- Каждое отображение однозначно задает множество однородных пар $\{(x, y) : x \in A, y \in f(x)\} \subseteq A \times B$. Такое множество пар называют графиком отображения f. В общем случае для отображения f может существовать несколько различных элементов из множества A, которым соответствует один и тот же элемент из множества $B : y_0 \in B$.
- Множество всех элементов, для которых $f(x) = y_0$ называется прообразом элемента y_0 при отображении f. Сам элемент , также как и все элементы множества B называется образом при отображении f.

Виды отображений:

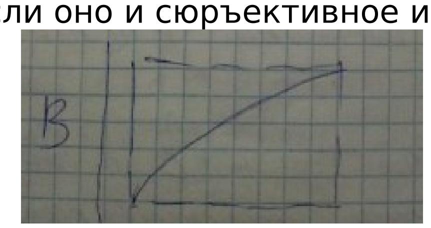
- Инъективное f: A→B : для каждого y из области значений отображения f ∃ ! прообраз



- Сюръективное f: A→B: область значений отображения f полностью совпадает с множеством B



- Биективное f: A→B: если оно и сюръективное и инъективное одновременно



- Если отображение неоднозначное, то есть хотя бы некоторым элементам из множества A сопоставлен не единственный образ $y \in B$, то имеет место соответствие из множества A в множество B.
- Обратное соответствие ρ^{-1} определено так

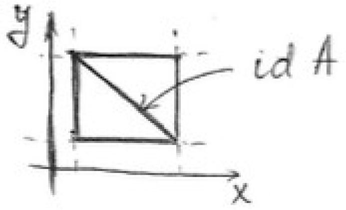
$\rho^{-1} \subseteq B \times A$
$\rho^{-1} \subseteq \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$
$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

- Сечением соответствия по элементу x_0 называют множество, причем x0 принадлежит A : $\rho(x_0) = \{y : (x, y) \in \rho\}$
- Сечением соответствия по множеству $C (C \subseteq A)$ называют множество элементов $y : \rho(C) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in C\}$

5. Способы задания соответствий. Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений.

Бинарное отношение:

- Бинарное отношение на множестве A - соответствие R из множества A в себя ($R \subseteq A \times A$)
- Бинарное отношение R, в каждой паре которого компоненты совпадают называется диагональю множества(квадрата) A - id_A



- Способы задания бинарных отношений:
- Перечислением пар, входящих в отношение
- Таблицей
- Матрица отношений (соответствий)
- Графический (стрелочный) способ
- Граф отношений
- (словесный, аналитический)

6. Свойства бинарных отношений: рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, плотность. График отношения.

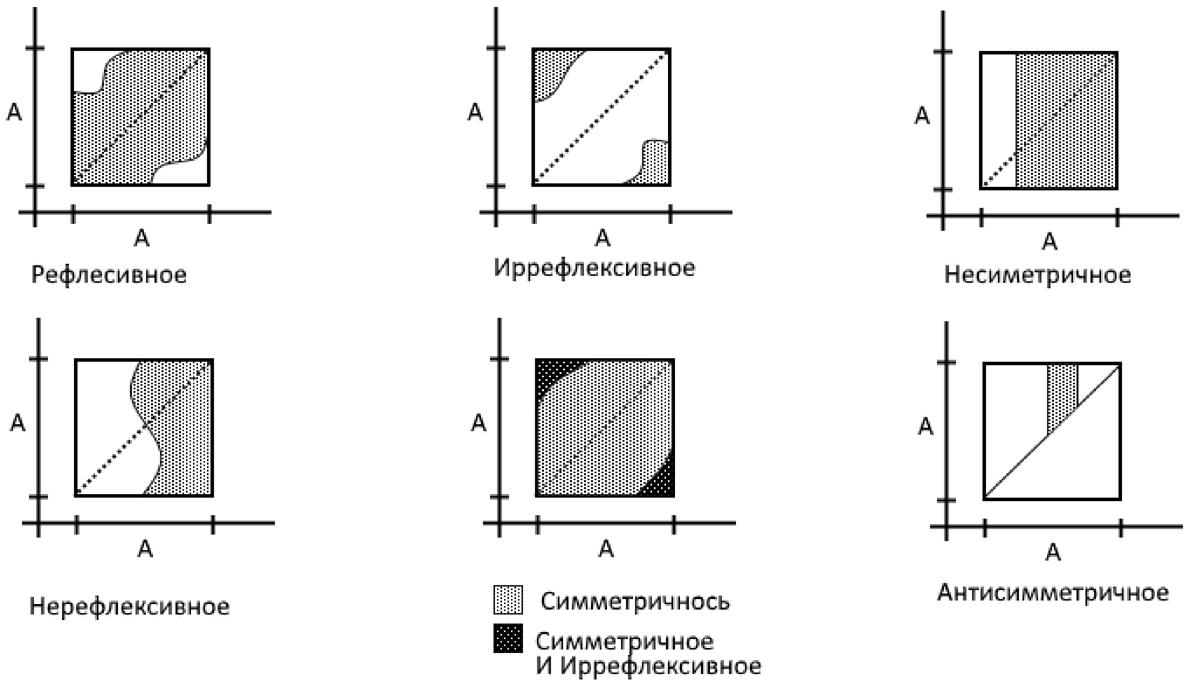
Свойства бинарных отношений:

- Рефлексивность - для $\forall x \in A (xRx)$
- Иррефлексивность - $\forall x \in A \neg (xRx)$

(Если для части $x \in A$ выполняется xRx, а для другой нет, тот отношение называют нерефлексивным)

- Симметричность - $\forall x, y \in A (xRy \Rightarrow yRx)$
- Антисимметричность - $\forall x, y \in A (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
- Транзитивность - $\forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
- Плотность - $\forall x, y, z \in A (xRy \wedge x \neq y \Rightarrow xRz \wedge zRy)$

Графики отношений:



7. Классы отношений: эквивалентность, толерантность. Отношения порядка

	рефлексивность	симметричность	антисимметричность	транзитивность
эквивалентность	+	+		+
толерантность	+	+		
порядок	+		+	+

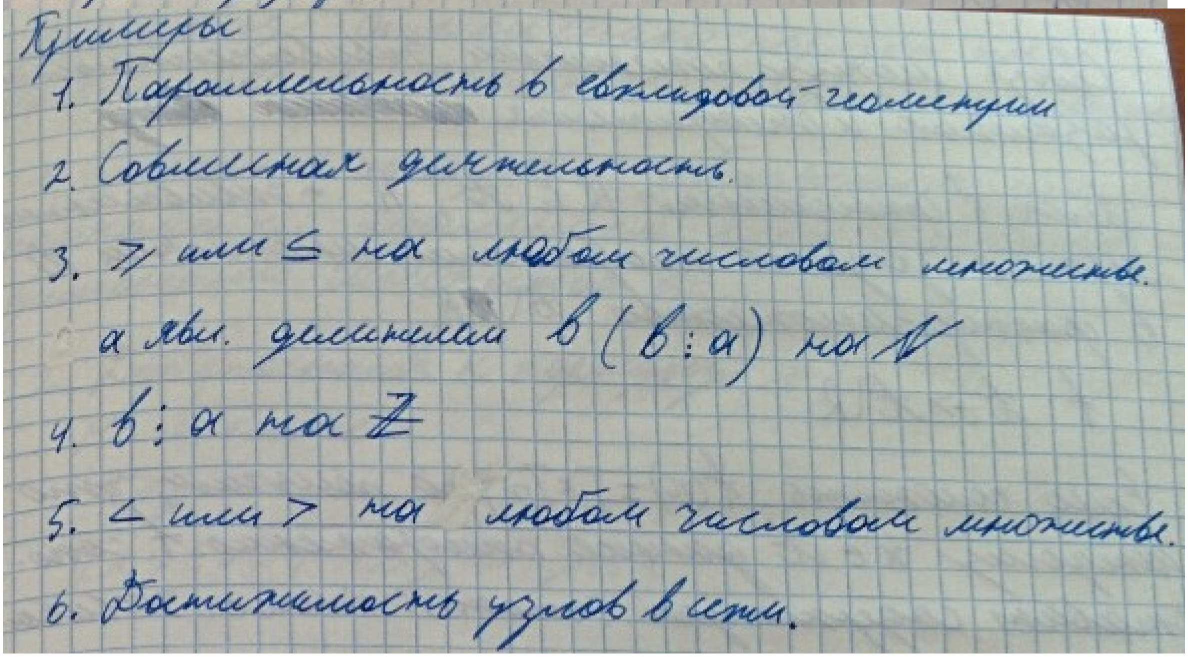
Бинарное отношение R на множестве A называется толерантным, если для $\forall x, y \notin A : x \neq y \wedge (x, y) \in R$ найдётся такой $z \in A : z \neq x, z \neq y, (x, z) \in R, (z, y) \in R$

Примеры:

Для эквивалентности - параллельность прямых или “живет в одном городе”.

Для толерантности - Отношение дружбы (Если Вася - друг Пети и Петя друг Вани, то не обязательно, что Вася друг Вани)

	Рефл.	Иррефл	Симм	Антисимм	Транзит
1. Эквивалентность	+		+		+
2. Толерантность	+		+		
3. Порядок	+			+	+
4. Предпорядок	+				+
5. Строгий порядок		+		+	+
6. Строгий предпорядок		+			+



Примеры

1. Параллельность в евклидовой геометрии
2. Совместная деятельность.
3. $\geq$ или $\leq$ на любом числовом множестве.
   a явл. делителем b (b : a) на $\mathbb{N}$
4. b : a на $\mathbb{Z}$
5. $<$ или $>$ на любом числовом множестве.
6. Достижимость узлов в сети.

8. Разбиение множества. Классы эквивалентности. Фактор-множество. Связь понятий отображения, разбиения, эквивалентности.

Пусть A произвольное множество, семейство Bi (i = 1..n) называют разбиением множества A. Bi называют элементами разбиениями множества A, если их объединение даёт A.

A = {1, 2, 7, 10, 3, 5}

B1 = {1,2,5}, B2 = {7, 10, 3}

опр Классом эквивалентности [x]R называют множество [x]R = {y | xRy, R - отношение эквивалентности}

Классом эквивалентности называют множество всех вторых компонентов отношения эквивалентности R, первые компоненты которого являются x

Th. (обозначение теоремы)

Для любого отношения эквивалентности на множестве A, множество классов эквивалентности образует разбиение множества A.

Обр. Th.

Любое разбиение множества A задаёт на нём отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

Таким образом, можно отождествить эквивалентность и разбиение

Фактор-множество - множество всех классов эквивалентности по заданному отношению эквивалентности R на множестве A. Обозначается A / R.

Для любого отношения эквивалентности R можно задать отображение A -> A / R. Это отображение будет сюръективно

Связь между понятиями

Существует связь между понятиями эквивалентности, разбиения и отображения. Для любой эквивалентности на мн-ве A можно задать отображение вида f: A -> A / R если положить, что f(x)=[x]R, то получим, что каждому x ∈ A данное отображение f сопоставляет содержащий это x класс эквивалентности.

Данное отображение сюръективно, т.к. для каждого [x]R∈A/R верно, что [x]R=f(x)

=> любое отображение f: A -> A / R однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

9. Отношения порядка и сопоставленные им отношения. Упорядоченные множества.

- Отношение порядка - бинарное отношение ($\leq$) заданное на множестве. $(A, \leq)$ - обозначение отношения порядка на множестве А, то $(x, y) \in A, x \leq y$ значит то, что x **не выше/больше** y, невзирая на вид множества.
- Упорядоченное множество - множество с заданным на нём отношением порядка $(A, \leq)$
- Каждому отношению порядка можно сопоставить:

~ отношение строгого порядка (<) - образуется из отношения порядка удалением всех элементов диагонали А - $x < y \leq ¿ x \leq y, x \neq y$

~ отношение двойственного порядка (≥) - $\forall x, y \in A : x \geq y \equiv y \leq x$

~ отношение строгого порядка больше (>) - $\forall x, y \in A : x > y \equiv y < x$

~ отношение доминирования (|< (перечеркнутый знак меньше)) - $x \vee ¿ y : x < y, \nexists z : x < z < y, x, y, z \in A$

(2,3,5,6,4,3)A

(2,3,3,4,5,6) A,<=2

10. Наибольший, максимальный, наименьший, минимальный элементы упорядоченного множества. Верхние и нижние грани множества. Точные верхняя и нижняя грани. Принцип двойственности для упорядоченных множеств. Вполне упорядоченное множество.

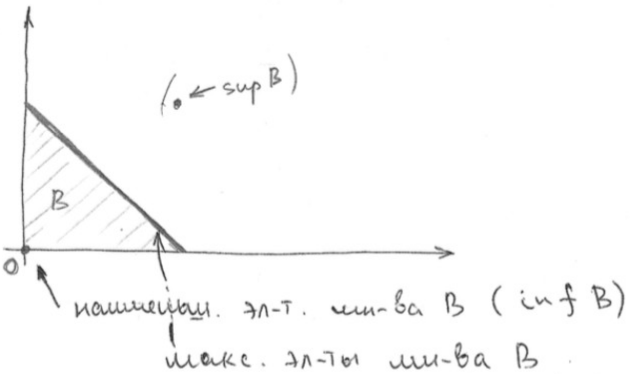
- Пусть A упорядоченное множество (A, <=) a ∈ A называют наименьшим (наибольшим) элементом множества A, если для любого x ∈ A выполняется x >= a (x <= a)
- Пусть A упорядоченное множество (A, <=) a ∈ A называют минимальным (максимальным) элементом множества A, если для любого x ∈ A выполняется x >= a (x <= a) или x, a не сравнимы
- Элемент a ∈ A называют верхней (нижней) гранью множества B, если для любого x из множества B выполняется x <= a (x >= a)
- Наименьший (наибольший) элемент множества всех верхних (нижних) граней множества B называют точной верхней (нижней) гранью множества B. Обозначают sup B (inf B)
- sup и inf могут ∉ B. Да и вообще не всегда существуют!
- Для упорядоченных множеств применим принцип двойственности. Если взять (A, <=), тогда любое свойство, доказанное для порядка не больше, может быть доказано для двойственного порядка не меньше, если:

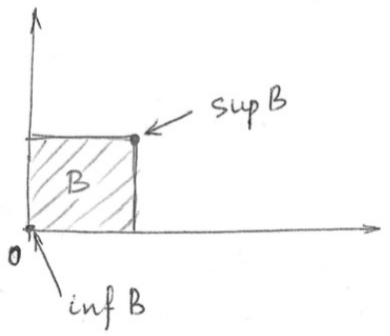
1) Заменить порядок <= -> >=
2) Наименьший (минимальный) заменить на наибольший (максимальный)
3) inf заменить на sup

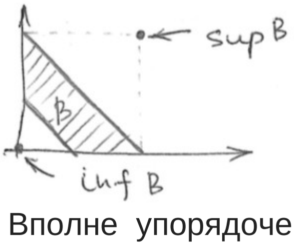
Либо наоборот

\# $(a, b) \le (c, d)$ е. и т.е. $(a \le c)$ и $(b \le d)$

тогда:







- Вполне упорядоченное множество - такое множество A , что $\forall B: B \subseteq A, B != 0$ имеет наименьший элемент.

11. Индуктивные упорядоченные множества. Теорема о неподвижной точке.

- Упорядоченное множество A называют индуктивным если выполняются два условия:

1. Оно содержит наименьший элемент.
2. Всякая неубывающая последовательность эл-тов этого мн-ва имеет точную верхнюю грань.

- Всякое непрерывное отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое монотонно
- Отображение $f: A \to B$ (A и B - индуктивные и упорядоченные множества) монотонно, если для $\forall x, y \in A: x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- Элемент $\alpha \in A$ называют неподвижной точкой отображения $f: A \to A$ (из A в A), если $f(\alpha) = \alpha$
- Элемент α∈A (A<=) называется наим. неподв. точкой отображения f, если он является наименьшим элементом мн-ва всех неподвижных точек отображения f.
-

Th. О неподвижной точке

Любое непрерывное отображение f индуктивного упорядоченного мн-ва A в себя имеет наименьшую неподвижную точку.

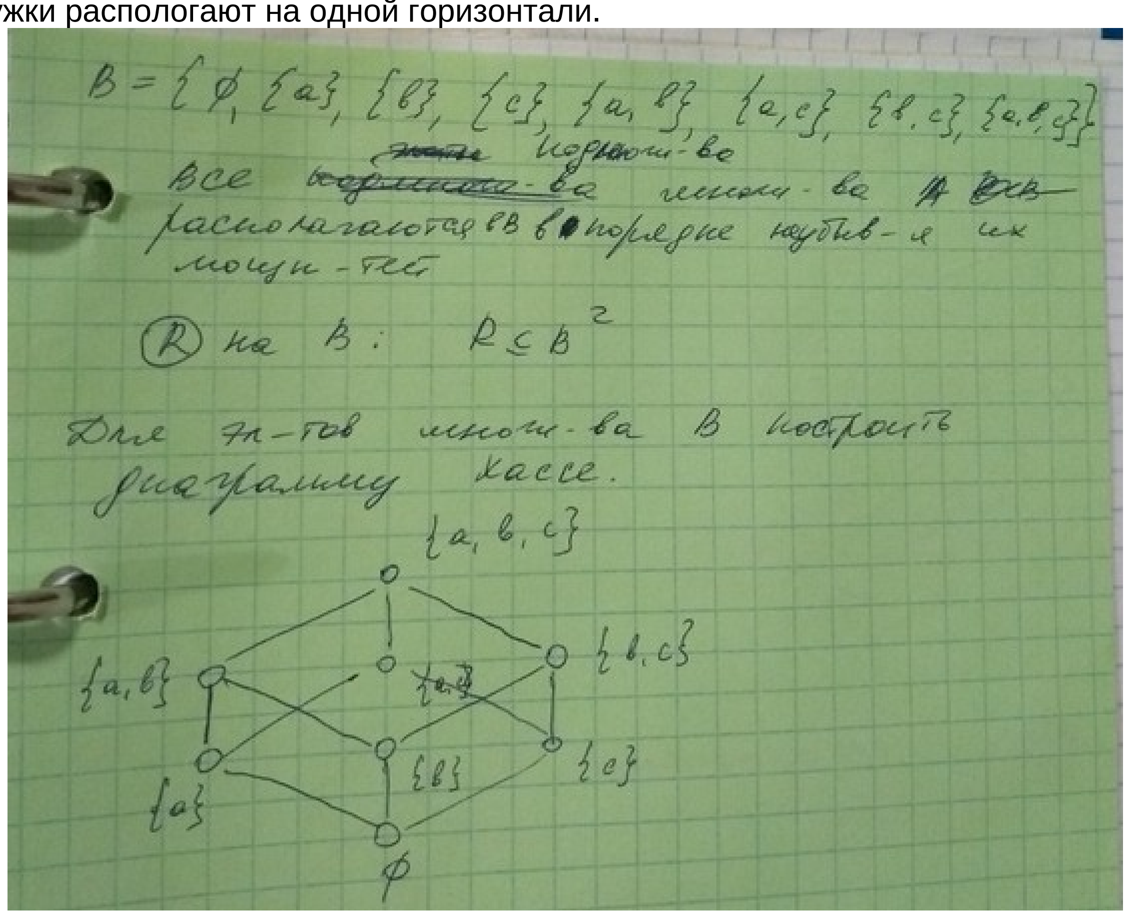
12. Диаграммы Хассе для конечных упорядоченных множеств.

Диаграмма Хассе - способ графической визуализации того, как упорядочено множество:

- Множество упорядоченное (A, <=)
- Отношение упорядочения (доминирования)

Конечное упорядоченное множество можно графически изобразить в виде так называемой диаграммы Хассе. На этой Диаграмме элементы множества изображаются кружочками.

Правила:

- Диаграмма Хассе строится не на отношении, а на множестве.
- Если элемент b доминирует над элементом a, то кружочек, изображающий элемент b, располагается выше кружочка, изображающего элемент a, и соединяется с ним прямой линией.
- Если 2 элемента находятся на одном уровне доминирования или недоминирования, то их кружки распологают на одной горизонтали.
- 

13. Мощность множеств. Отношение равномощности. Счетные множества. Нумерации.

- Мощность конечного множества, как число его элементов - лишь частный случай общего понятия мощности.
- Если A и B — произвольные множества, и между ними можно установить биекцию $f:A \leftrightarrow B, где\,f-¿$соответствие, то они **равномощны**: A ~ B. Отношение равномощности является эквивалентностью.
- Свойства:

1. Отношение равномощности обладает симметричностью.
2. Из определения биекции и опр. равномощности => для всякого множества A сущ. F: A <-A (рефлексивность)
3. Из определения равномощности => A~B, B~C, то A~C (транзитивность)

- Если отношение равномощности - эквивалентность, то если обозначить |A| как класс эквивалентности мн. A по отношению равномощности, то тогда в этом случае можно записать равномощность следующим образом: |A|=|B|, как равенство классов эквивалентности. Этот класс эквивалентности |A| и есть мощность множества A.
- |A| класс эквивалентности множ. A по отн. равномощности. Тогда можно записать |A|=|B|

- Множество называется **конечным**, если количество его элементов конечно, иначе оно называется **бесконечным**.

Теор. Если A - конечное мн-во и отображение f: A->A является инъективным, то эта инъекция явл. сюръекцией и биекцией.

Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют **счетным.** Мощность счетного множества называют “алеф-ноль” $\aleph_0$.

- Любую биекцию множества натуральных чисел на некоторое множество A$\phi : N \leftrightarrow A$ называют **нумерацией** счетного множества A. Если обозначить f как ϕ, тогда $\phi(n)\,принадлежит\,A$, n э N, тогда n- номер конкретного элемента A в нумерации ϕ. Таким образом, элементы счетного множества можно записать в виде $a_n=\phi(n)$.

Множ. всех нечетных натуральных чисел счетное
Нумерация: ϕ(n)=2k-1

14. Свойства счетных множеств. Равномощные множества.

- Мощность конечного множества, как число его элементов - лишь частный случай общего понятия мощности.
- Если А и В — произвольные множества, и между ними можно установить биекцию $f : A \leftrightarrow B$, где $f -$¿соответствие, то они равномощны: А ~ В. Отношение равномощности является эквивалентностью.
- Любое множество равномощное множеству всех натуральных - счетное множество.
- Свойства

1. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество. (NcZ)
2. Любое подмножество счётного множества не более чем счётно (т.е. конечно или счётно).
3. Если к бесконечному множеству присоединить конечное или счётное, то получится множество эквивалентное исходному.
4. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.
5. Прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.
6. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.
7. Множество всех подмножеств счётного множества континуально и, в частности, не является счётным.

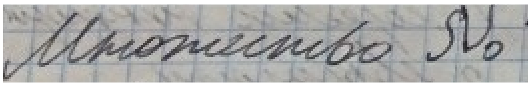
Свойства(По лекциям Гуреныча):

1. (Th.) Любое беск. множество содержит счетное подмножество.
2. В любом беск. мн-ве можно выделить 2 не пересекающихся между собой счетных подмн-ва
3. Любое подмнож. счетного множества конечно либо счетно.
4. Объединение любого числа конечных или счетных множеств - счетно
5. Объединение конечного и счетного множества счетно.(следствие из 4)
6. Следующие мн-ва равномощны:
    а) мн-во действительных чисел отрезка [0,1]
    б)мн-во действительных чисел интервала (0,1)
    в)мн-во действительных чисел отрезка [a,b] (a и b принадлежат R)
    г)мн-во действительных чисел интервала (a,b) (a и b принадлежат R)
    д)вся числовая ось (мн-во R)
    е)континум 2^n
7. Теорема Кантера-Берштейна: для 2 любых множеств А и В имеет в точности 1 из 3 условий: либо |A|<|B|, |A|>|B|, |A|=|B|
8. Для любого мн-ва А верно: мощность его булеана больше мощности А (|2^A|>|A|)
    //нет наибольшей мощности, т.к. для любого непустого множества найдется его булеан
9. Теорема о квадрате: для любого бесконечного множ. А его декартов квадрат ~ самому множ. А (AxA, A^2)

15. Свойства счетных множеств при сравнении их мощностей. Теорема Кантора–Бернштейна. Теорема о квадрате.

Свойства счетных множеств

1. Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество.
2. Любое подмножество счётного множества не более чем счётно (т.е. конечно или счётно).
3. Если к бесконечному множеству присоединить конечное или счётное, то получится множество эквивалентное исходному по мощности.
4. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.
5. Прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.
6. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.
7. Множество всех подмножеств счётного множества континуально и, в частности, не является счётным.



Мощность любого конечного множества строго меньше мощности счетного мн-ва No. Мощность счетного множества меньша континума С. Множество No имеет наименьшую мощность среди всех бесконечных множеств.

<u>Th. Кантора-Берштейна</u>

Для двух любых множеств А и В имеет место в точности одно из трех условий:

1. |A| < |B|
2. |A| > |B|
3. |A| = |B|

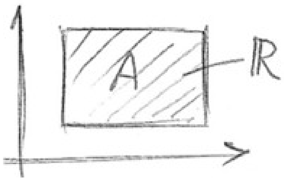
Таким образом для любых двух множеств можно говорить о сравнимости их по мощности,а другими словами измерение мощностей множеств образует линейный порядок.

<u>Th. О квадрате</u>

Для любого бесконечного мн-ва А его декартов квадрат равномощен самому мн-ву А.

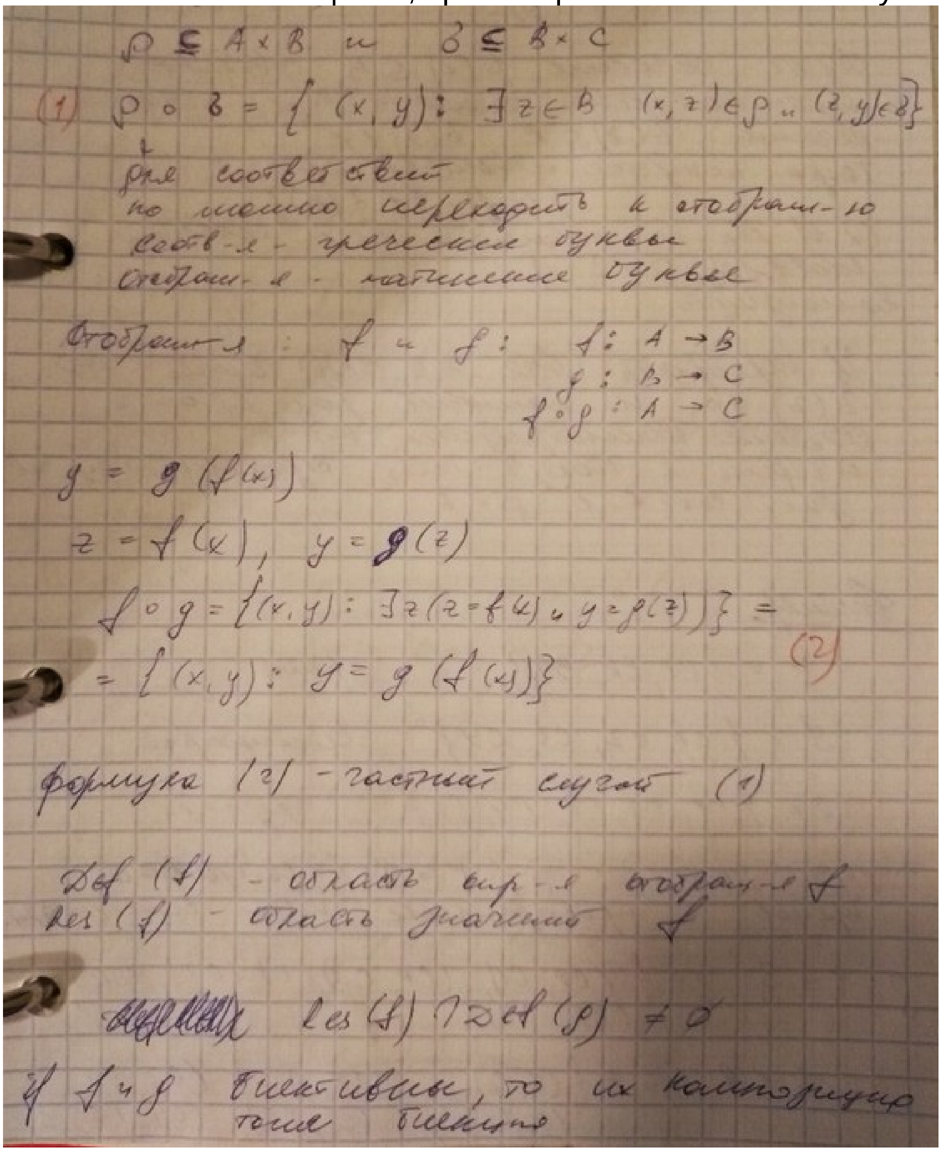
|A| = |A^2|

В квадрате столько же точек, сколько и в его стороне.



16. Композиция соответствий: понятие и порядок построения.

Композиция соответствий $f \circ g$, где $f u g$2 отображения $f: A \longrightarrow B, g: C \longrightarrow D, mo f \circ g: A \longrightarrow D$
$y=g(f(x)), z=f(x), y=g(z)$
$f \circ g=\{(x,y): \exists z \in B: z=f(x) \wedge y=g(z)\}=\{(x,y): y=g(f(x))\}$
Если$Res(f) \cap \stackrel{\text{def}}{=}(g) \neq \varnothing$, то композиция существует.
Соответствия - обобщение, про отображения - частный случай. См.ниже -->



$\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$

(1) $\rho \circ \sigma = \{(x,y): \exists z \in B \ (x,z) \in \rho \text{ и } (z,y) \in \sigma\}$

для соответствий
но можно перейти к отображ-ю
соотв-я - греческие буквы
отображ-я - латинские буквы

Отображ-я: f и g: $f: A \to B$
$g: B \to C$
$f \circ g: A \to C$

$y = g(f(x))$

$z = f(x)$, $y = g(z)$

$f \circ g = \{(x,y): \exists z (z=f(x) \text{ и } y=g(z))\} =$

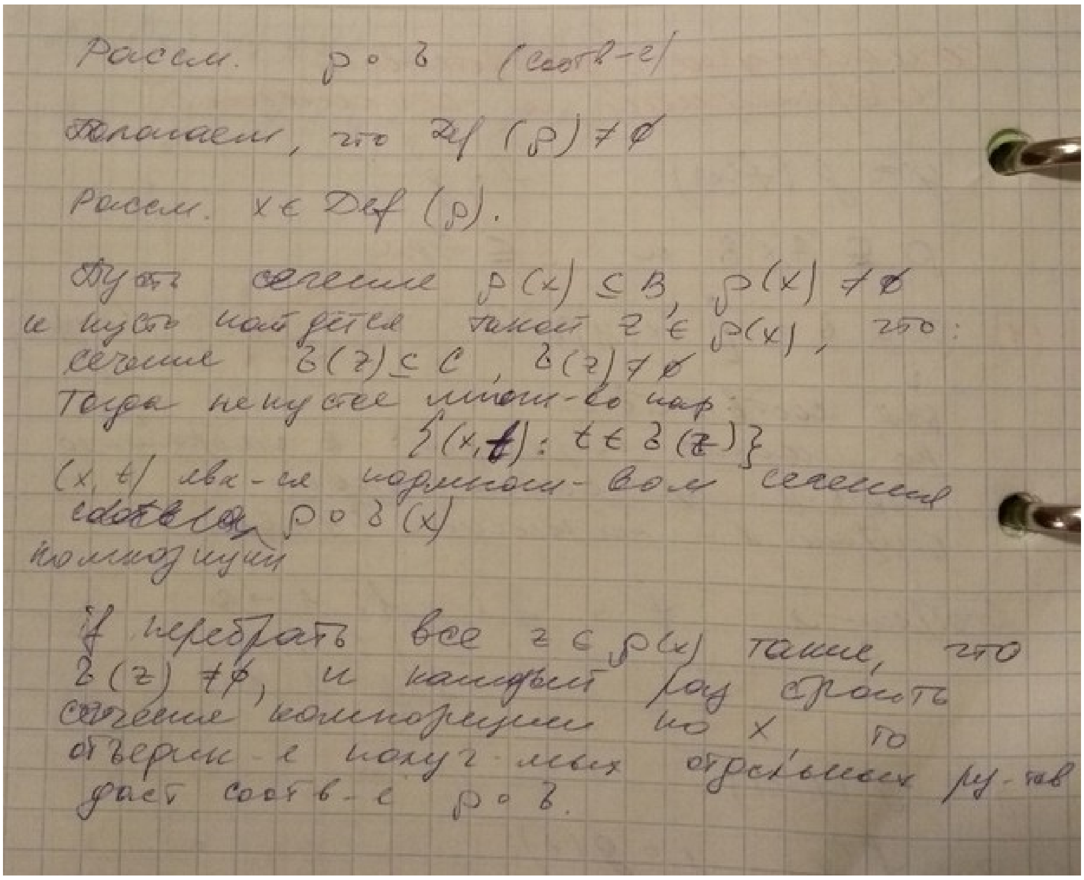
$= \{(x,y): y = g(f(x))\}$ (2)

формула (2) - частный случай (1)

Def (f) - область опр-я отображ-я f
Res (f) - область значений f

~~[illegible]~~ Res (f) $\cap$ Def (g) $\neq \varnothing$

$\forall$ f и g биективны, то их композиция тоже биективна



Рассм. $\rho \circ \sigma$ (соотв-е)

Полагаем, что $Def(\rho) \neq \varnothing$

Рассм. $x \in Def(\rho)$.

Пусть сечение $\rho(x) \subseteq B$, $\rho(x) \neq \varnothing$
и пусть найдётся такой $z \in \rho(x)$, что:
сечение $\sigma(z) \subseteq C$, $\sigma(z) \neq \varnothing$
Тогда непустое множ-во пар:
$$\{(x, t) : t \in \sigma(z)\}$$
(x, t) явл-ся подмнож-вом сечения соотв-я $\rho \circ \sigma(x)$ композиции

Если перебрать все $z \in \rho(x)$ такие, что $\sigma(z) \neq \varnothing$, и каждый раз строить сечение композиции по x, то объедин-е получ-мых отдельных мн-в даёт соотв-е $\rho \circ \sigma$.

Порядок построения:

- Пусть заданы три множества X, Y и Z и два соответствия – $G_1 \subset X \times Y u G_2 \subset Y \times Z$

Для каждого элемента x_iмножества X определим вторую компоненту в композиции соответствий:

Для каждой второй компоненты y_k пар соответствия G_1:
Определяем вторые компоненты пар $(y_k, z_j) \in G_2$.

В композиции соответствий создаем пары вида (x_i, z_j)

Пример:

$P = \{СР, ЕК, ВВ\}$

$S = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$G = \{Г_1, Г_2, Г_3, Г_4, Г_5\}$

$\rho: P \to S \quad \rho = \{(СР, c1), (СР, c3), (ЕК, c_2), (ВВ, c2), (ВВ, c3)\}$

$\sigma: S \to G \quad \sigma = \{(c_1, Г_1), (c_1, Г_3), (c_2, Г_2), (c_2, Г_4), (c_3, Г_5), (c_4, Г_5)\}$

$\rho \circ \sigma$ – ?

Реш: постр. сечение:

$\rho(СР) = \{c_1, c_3\}$

$\sigma(c_1) = \{Г_1, Г_3\} \quad \sigma(c_3) = \{Г_5\}$

$\sigma(c_1) \cup \sigma(c_3) = \{Г_1, Г_3, Г_5\} = \rho \circ \sigma(СР)$

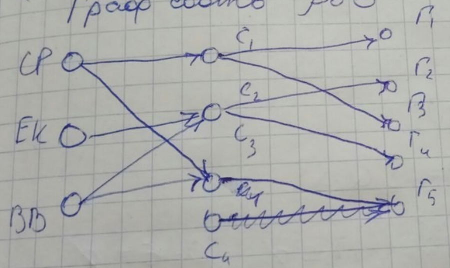
$\rho(ЕК) = \{c_2\} \quad \sigma(c_2) = \{Г_2, Г_4\} = \rho\circ\sigma(ЕК)$

$\sigma(c_2) =$

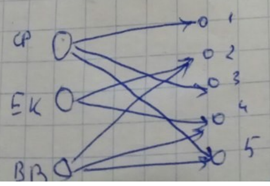
$\rho(ВВ) = \{c_2, c_3\} \quad \sigma(c_2) \cup \sigma(c_3) = \{Г_2, Г_4, Г_5\} = \rho\circ\sigma(ВВ)$

$\rho \circ \sigma = \{(СР, \{Г_1, Г_3, Г_5\}), (ЕК, \{Г_2, Г_4\}), (ВВ, \{Г_2, Г_4, Г_5\})\}$ – на граф

Граф соотв $\rho \circ \sigma$



Если $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in$



17. Обобщенная композиция соответствий. Свойства композиции соответствий. Композиция бинарных отношений.

ρ⊆AxB, d⊆CxD. Никаких ограничений на A, B, C и D изначально нет.
Для того чтобы композиция p○d была не пустой необх. и достаточно чтобы Res(p) ⋂Def(d)≠∅

Пусть p⊆A*B, d⊆C*D. Если B⋂C=∅,то p○d=∅, но обратное выражение (если пересечение не пустое мн-во) не работает.

Свойства:

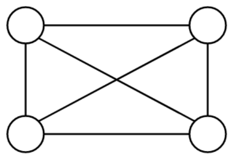
1. Ассоциативность: (p○d)○t=p○(d○t)
2. $p\circ\varnothing=\varnothing\circ p=\varnothing$
3. p○(d⋂t)⊆(p○d)⋂(p○t)
4. p○(dUt)=(p○d)U(p○t)
5. Для любого бинарного отношения на множ. A имеет место равенство p○idA = idA ○ p = p

18. Понятие графа. Ориентированные и неориентированные графы. Мультиграф. Простой, полный, двудольный (граф Кёнига), дополнительный графы.

- Граф – это совокупность элементов(вершин графа) и связей между ними (ребер).
- граф остается сам собою, если его модифицируют без разрыва.
- дискретный объект, => он может быть задан 2мя мн.: мн.вершин и мн. ребер, соединяющих. G(S,U), где S – узлы, вершины, U - ребра
- Графом G(S, U) называется математический объект, заданный 2мя множествами:

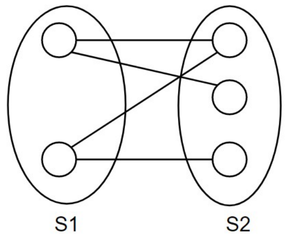
1. S={s1, s2,...,sn}, |S|=n
2. U={u1, u2,...,um}, |U|=m

- $si, sj \in S$могут быть связаны ребрами, или не связаны => на множестве S граф задает бинарное отношения. Элементы этого отношения - пары (si, sj). Если каждая пара (si, sj) упорядоченная, то имеет место ориентированный граф(орграф). Если порядок не важен - неорграф.
- Ребро, имеющее направление((si, sj) упорядочена) - называется дугой.
- Граф, в котором ∃ ориентированные и неориентированные ребра называют смешанным, частично ориентированным.
- Если в графе хотя бы одну пару вершин связывают несколько ребер(2 и больше) - это мультиграф, сами ребра - кратные.
- Граф называют простым, если в нем нет петель и кратных ребер.
- Граф называют полным, если он простой и 2 ∀ его вершины смежны.

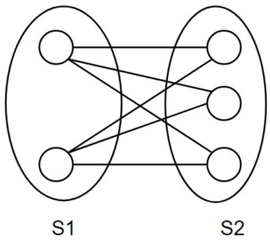


- Граф называют двудольным (Кёнига), если мн. его вершин можно разбить на 2 (непересекающихся) подмножества так, что для ∀ ребра верно:

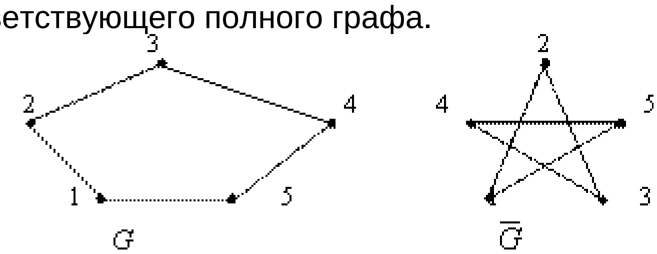
~ одна из его концевых вершин в одном подмножестве, другая - в другом
~ $S = S1 \cup S2$, $S1 \cap S2 = \varnothing$
~ $\forall\, ul = (si, sj)$, $si \in S1$, $sj \in S2$



- Если в двудольном графе 2 ∀ вершины из разных долей смежны, то граф наз. полным двудольным.(Каждый кружочек соединен со всеми из второго овала)



- Дополнительным графом к графу G(S, U) называется граф $\overline{G}(S, \overline{U})$, состоящий из того же множества вершин, что и граф G, и множества ребер $\overline{U}=U_n/U$, где U_n – множество ребер соответствующего полного графа.



-

19. Отношения смежности и инцидентности в графах. Порядок графа, степень и полустепени вершин. Изоморфизм графов.

- Два ребра (дуги) называются смежными, если они имеют общую концевую (определяющую ребро) вершину.
- Две вершины называются смежными, если они соединены.
- Между вершинами и рёбрами имеет место инцидентность: вершина s_i инцидентна ребру u_l, если s_i одна из концевых вершин u_l. Всякое ребро инцидентно своим концевым вершинам.
- Смежность - отношение между однородными компонентами графа, а инцидентность - разнородными.
- Число вершин графа называется его порядком.
- Число рёбер, инцидентных вершине s_i, называется степенью вершины p(s_i)
- Для орграфа степень вершины распадается на два понятия: полустепенью захода $p^{+¿¿}(s_i)$ - число дуг, заходящих в данную вершину, и полустепенью исхода - число исходящих дуг $p^{-¿¿}(s_i)$
- Если $p^{+¿¿}(s_i)$ = 0 , то эта вершина - источник, если $p^{-¿¿}(s_i)$=0, то приёмник (сток).
- G1(S1,U1) , G2(S2,U2) - изоморфны, если между мн-ми S1 и S2 установлено взаимно однозначное соответствие: $\varphi \subseteq S1 x S2$, такое, что между U1 и U2 устанавливается также взаимно однозначное соответствие:$\sigma \subseteq U1 x U2$
- Каждое ребро из U2 инцидентно двум вершинам из S2 ⇔ когда соответствующие им вершины из S1 инцидентны ребру из U1.
- В одном из графов две вершины соединены ребром ⇔когда ребром соединены соответствующие вершины другого графа.
- Существует биекция: f1: S1 ↔ S2, f2: U1 ↔ U2

Th.
Изоморфизм графов является отношением эквивалентности, так как изоморфизм рефлексивен, симметричен и транзитивен.

Следствие из Th.
Из теоремы следует, что множество всех графов разбивается на классы эквивалентности так, что любые два графа из одного класса изоморфны, а из разных - не изоморфны.

20. Способы задания графов. Части графа: подграфы и суграфы.

- Способы задания графов

~ Матричный - с помощью матрицы смежности или матрицы инцидентности.

Матрица смежности - квадратная двоичная матрица порядка |S|.

Свойства:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i \text{ и } S_j \text{ смежны} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности - прямоугольная матрица размерности mxn, где m=|S|, n=|U|

$$H_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i \text{ инцидентна } U_j \text{ и является началом} \\ 0, & \text{иначе} \\ -1, & \text{если } S_i \text{ инцидентна } U_j \text{ и является ее концом} \end{cases}$$

1. В случае неографа матрица смежности симметрична относительно главной диагонали.
2. Матрицы смежности изоморфных графов либо совпадают, либо вообще говоря совпадают с точностью до перестановки строк и столбцов.
3. В случае неографа сумма единиц с треугольной матрицы смежности равна числу рёбер графа. В случае орграфа сумма единичных элементов равна числу дуг.
4. Если граф взвешенный, то матрица смежности становится матрицей весов

~ Аналитический - связан с понятием отображений.

■ Прямым отображением вершины Si - Г(si) - назовём множество вершин, смежных Si, по исходящим дугам.

■ Обратным отображением Г^-1(si) назовём множество вершин, смежных Si, по входящим дугам.

~ Стековый (вектор Айлифа)

~ Массивом пар вершин или массивом рёбер

- Части графов

~ Граф G1 называют частью графа G если он находится в отношении включения к G, т.е.

$$G1 \subseteq G <=> \begin{cases} S1 \subseteq S \\ U1 \subseteq U \end{cases}$$

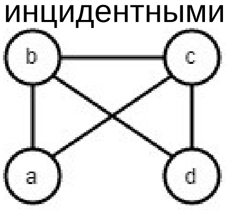
~ Часть графа называют подграфом, если включение строгое G1cG

~ Часть графа называют суграфом, если S1=S и U1cU

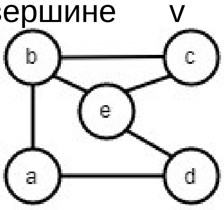
21. Теоретико-множественные операции на графах.

Изложение темы приводится для случая неографов. Даны графы $G_1(S_1, U_1)$ и $G_2(S_2, U_2)$.

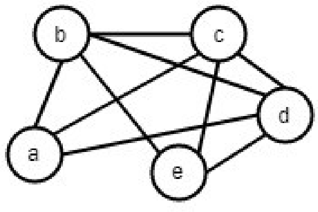
1. Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \cup G_2$ такой, что $S = S_1 \cup S_2$, $U = U_1 \cup U_2$. Таким образом, граф G состоит из вершин и ребер, входящий хотя бы в один из графов G_1, G_2.
2. Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \bigcap G_2$ такой, что $S = S_1 \bigcap S_2$, $U = U_1 \bigcap U_2$. Таким образом, граф G состоит из вершин и ребер, общих для обоих графов G_1, G_2.
3. Дополнительным графом к графу G(S, U) называется граф $\overline{G}(S, \overline{U})$, состоящий из того же множества вершин, что и граф G, и множества ребер $\overline{U}=U_n/U$, где U_n – множество ребер соответствующего полного графа. Таким образом, в дополнительном графе две вершины инцидентны одному и тому же ребру в том и только том случае, когда в исходном графе G это ребро отсутствует.
4. Композицией графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \circ G_2$, в котором каждое ребро (x_i, x_j) присутствует тогда и только тогда, когда в графе G_1 имеется ребро $(x_i, x_p) \in U_1$, а в графе G_2 – ребро $(x_p, x_j) \in U_2$. При этом имеется в виду, что либо $S = S_1 = S_2$, либо $S = S_1 \cup S_2$. Таким образом, композиция графов – это композиция бинарных отношений, заданных на множествах ребер графов.(**Это ему не понравилось!!!!!!! Весь 4 пункт)**
5. Удалением вершины v из графа G(S, U) называется операция, дающая граф G-v, в котором множество вершин есть S\{v}, а множество ребер $U' = \{u \mid u \in U \backslash E\}$, где $E \subset U$ и каждое $u_i \in E$ инцидентно вершине v. Таким образом, при удалении вершины из графа происходит удаление как самой этой вершины из множества вершин, так и инцидентных ей ребер из множества ребер.
6. Удалением ребра u из графа G(S, U) называется операция, дающая граф G-u, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество ребер есть U\{u}.
7. Добавлением ребра u в граф G(S, U) называется операция, дающая граф G+u, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество ребер есть U U {u}.
8. Стягиванием ребра $u = (x_i, x_j)$ графа G(S, U), где $u \in U$, $\{x_i, x_j\} \subset S$, называется операция, дающая граф с множеством ребер U\{u} при отождествлении вершин x_i и x_j одной вершине v, когда ребра, инцидентные вершинам x_i и x_j в исходном графе, становятся инцидентными вершине v полученного графа. Обозначение операции: G/u.



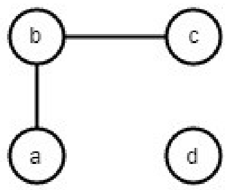
G1



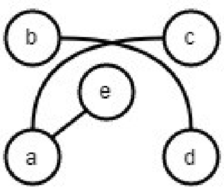
G2



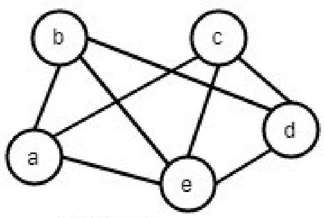
1. G1 U G2



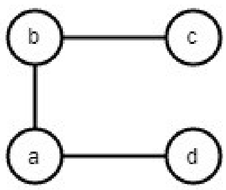
2.G1 ⋂ G2



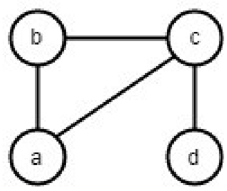
3. $\overline{G}2$



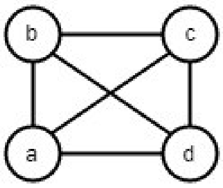
4. G1 ° G2



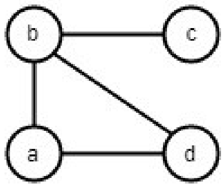
5. G2-e



6. G1-(b, d)



7. G1+(a,d)



8. G2/(b, e)

22. Маршрут, цепь, цикл, путь, контур в графе. Прямое и обратное транзитивные замыкания.

Маршрутом, соединяющим S1,S2,...,Sk графа называется последовательность вершин и рёбер след. вида: S1,U1,S2,U2,...,Sk-1,Uk-1,Sk; в котором два соединённых элемента связаны отношением инцендентности, а через один - отношением смежности относительно элемента между ними.

- Цепь - маршрут, в котором нет повторяющихся рёбер.
- Цепь называется простой, если все её вершины различны.
- Цикл - простая цепь, начальная вершина которой равна конечной.
- Контур - цикл в орграфе.
- Путь - цепь в орграфе.

Прямым отображением Гxi для вершины xi графа называется мн-во вершин, достижимых из xi путём длины 1.

Обратным отображением Гxi^(-1) называется мн-во вершин, из которых достижима xi путём длины 1.

Для прямых и обратных отображений введем степени (n) как объединение множеств отображений для тех же вершин степенью ниже.

Транзитивное замыкание вершины Si - многозначное отображение вида

~ Прямое - $\widehat{\Gamma}_{xi} = \{xi\} \cup \Gamma_{xi} \cup \Gamma_{xi}^{2} \cup \ldots \cup \Gamma_{xi}^{n} \cup \cdots$(до насыщения)

~ Обратное - $\widehat{\Gamma}_{xi}^{-1} = \{Si\} \cup \Gamma_{Si}^{-1} \cup \Gamma_{Si}^{-2} \cup \ldots \cup \Gamma_{Si}^{-n} \cup \cdots$ (до насыщения)

23. Понятие связности. Простая и сильная связность. Компонента связности. Алгоритм Мальгранжа разложения орграфа на компоненты связности.

Граф является <u>связным</u> тогда и только тогда, когда 2 любые различные его вершины соединены маршрутом.

- Простая связность - маршруты включают и прямые и обратные дуги.
- Сильная связность - маршруты при построении учитывают направление дуг (не используют обратные дуги)

~ Орграф называется сильно связным, если для любой вершины Si множества S выполняется: $\forall Si : Si \in S, \widehat{\Gamma}_{xi} = S; \widehat{\Gamma}_{xi}^{-1} = S$

~ Подграф $G1 \subset G$ наз <u>максимально сильно связным</u>, если $\nexists G2 : G2 \subset G; G1 \subset G2$так же сильно связанного Т.о. максимально сильносвязные подграфы G образуют классы эквивалентности C1,C2,C3,...,Ce, на которые разбивается граф G C1,C2,C3,...,Ce являются компонентами связности орграфа.

- Алгоритм Мальгранжа:

~ В основе алгоритма идея - каждая Si графа может принадлежать только одному классу эквивалентности.

~ Основная формула алгоритма Мальгранжа: $C_{Si} = \widehat{\Gamma}_{Si} \cap \widehat{\Gamma}_{Si}^{-1} (*)$

<u>**теор.**</u> Каждый граф может быть представлен в виде объединения непересекающихся по вершинам компонент связности. Разбиение графа на компоненты связности является единственным.

Шаги алгоритма Мальгранжа:

1) граф должен быть задан матрицей весов)
2) Берем Si ∈ S. Для неё строим Csi - класс эквивалентности вершины по формуле (*)
3) Вершины попавшие в Csi удаляем из графа
4) Из оставшихся вершин выбираем произвольную Sj (не присутствующую ни в одном из ранее найденных C) для неё выполняем п1 и п2
5) Алгоритм продолжаем пока это возможно, пока не будут рассмотрены все вершины.

24. Соответствие понятий маршрута и связности. Точка сочленения графа и теорема о ней. i-связный граф.

Граф является связным тогда и только тогда, когда 2 любые его вершины соединены маршрутом.

~ Простая связность - маршруты включают и прямые и обратные дуги.

~ Сильная связность - маршруты при построении учитывают направление дуг (не используют обратные дуги)

Точка сочленения графа - вершина, удаление которой приводит к увеличениеюю компонент связности.

~ Если граф имеет хотя бы одну точку сочленения, то такой граф называют разделимым, в противном случае - неразделимым.

~ Граф называется i-связным, если для нарушения его связности необходимо удалить не менее i вершин.

~ Граф содержащий i точек сочленения называется i-связынм.

Th.

Sk является точкой сочленения связного графа если и только если существует 2 такие вершины Si и Sj, причём Si != Sj, что любой путь Si -> Sj проходит через Sk

Это истинно для орграфа!

25. Порядковая функция орграфа без контуров. Метод Демукрона отыскания порядковой функции орграфа.

- Порядковой функцией орграфа без контуров называют функцию,задающую отношение порядка на множестве вершин графа, областью значений которой является множество {0,1,2,...,m} , причем $X_i \in N_j => O(x_i) = j$

~ Упорядочивает вершины графа лексикографически, то есть если xi принадлежит Nj, то следующая за ней по пути вершина войдёт в уровень j+1

- Метод Демукрона

~ Сложить по вертикали все значения матрицы смежности в каждом столбце

~ Каждая вершина, для которой сумма = 0 составляет уровень Ni

~ Вычёркиваем все попавшие в N вершины из матрицы

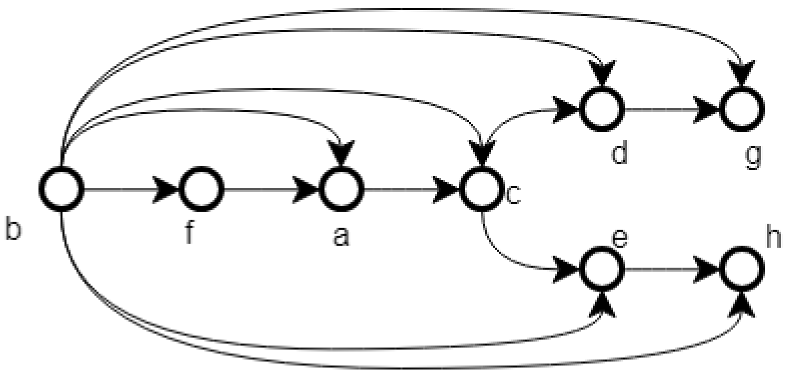
~ Повторять до тех пор, пока Ai != 0

~ Пример: (png/25-2.png)

	a	b	c	d	e	f	g	h
a			1					
b	1		1	1	1	1	1	1
c				1	1			
d							1	
e								1
f	1		1					
g								
h								

N0 = b
N1 = f
N2 = a
N3 = c
N4 = d,e
N5 = g,h

2	0	3	2	2	1	2	2	/\0
1	\	2	1	1	0	1	1	/\1
0	\	1	1	1	\	1	1	/\2
\	\	0	1	1	\	1	1	/\3
\	\	\	0	0	\	1	1	/\4
\	\	\	\	\	\	0	0	/\5
\	\	\	\	\	\	\	\	/\6



26. Внутренняя и внешняя устойчивость вершин графа. Определение устойчивых подмножеств вершин графа при помощи функции Гранди.

- Внутренняя устойчивость

~ Подмножество Е называется внутренне устойчивым подмножеством вершин графа G если никакие две вершины в Е не смежны. Очевидным условие В устойчивого является $E \cap \Gamma_E = \varnothing$

~ Подмножество Е называется максимально внутренне устойчивым, если в данном графе не существует такого множества вершин Е', что ЕсЕ'

- Внешняя устойчивость

~ Подмножество Т - внешне устойчиво, если для каждой вершины $x_i : x_i \in S, s_i \notin T, T \cap \Gamma_{xi} \neq \varnothing$

Внешняя устойчивость означает, что любая вершина не входящая в подмножество Т связана дугой (ребром) с остальной частью графа, причём начало этой дуги (ребра) лежит вне Т

Множество внешней устойчивости – множество вершин, для которых выполняется одно из следующих правил: Добавил, т.к. более понятно

1) Либо вершина входит в это множество

2) Либо вершина не входит в это множество, но из этой вершины есть дуга в данное множество.

Поиск внешне устойчивого множества происходит в другой классической задаче:

Как расставить минимальное число ферзей, чтобы все поля доски были под боем.

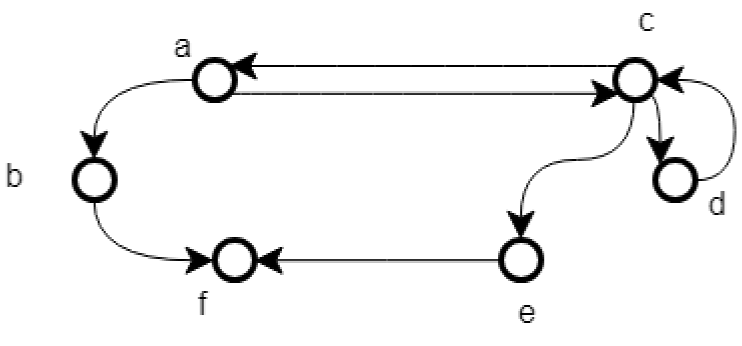
~ Подмножество Т называется минимально внешне устойчивым если в нём не содержится никакого другого внешне устойчивого подмножество вершин графа G

~ Для нахождения внутренне устойчивых подмножеств можно использовать функцию Гранди (она не находит всех внутренне устойчивы, но находит хотя бы 1 максимально внутренне устойчивое наибольшей мощности)

■ Функцией Гранди на орграфе G называется функция g(xi), xi принадлежит S, сопоставляющая каждой вершине целое неотрицательное число, наименьшее из всех значений, не сопоставленных никакой вершине из Г(xi)

■ правило: если для какой-то xi Г(xi)=0(пуст.множ-во), то ф-цию гранди начинают строить с этой вершины и полагают g(xi) = 0

■ Пример:



xi	Гxi	g(xi)	g(xj):xj Гxi
a	{b,c}	0	g(b) =1,-
b	{f}	1	g(f) = 0
c	{a,d,e}	2	0,-,1
d	{c}	0	2
e	{f}	1	0
f	{ }	0	-

27. Раскраска графа: постановка задачи, способы решения. Хроматическое число графа. Теорема Кёнига.

Раскраска графа - присваивание цветов его вершинам/рёбрам так, что смежные вершины/рёбра не окрашены в один цвет.

Если для решения задачи применено r цветов, то граф называют **r-хроматическим**

Наименьшее число r называют хроматическим числом графа x(G) (там не x а ХИ)

Множество вершин одного цвета называют одноцветным классом

Теорема: Для того, что бы неограф G имел r = x(G) необходимо и достаточно, чтобы существовал соответствующий ему симметрический граф без петель, который допускал бы такую функцию Гранди, что max g(xi) =< x(G) - 1; xi принадлежит S.

Симметричным орграфом называется граф, полученный из неорграфа замещением каждого ребра двумя противоположно направленными дугами. Однако, из-за громоздкости функции Гранди, половину дуг из него, как правило выкидывают.

-

Th. Кёнига

Граф двуцветный тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечётной длины.

28. Клика. Максимальная и наибольшая клики. Кликовое число. Алгоритм отыскания максимальной клики в неографе.

Клика - полный подграф заданного неографа (Граф, в котором любая вершина смежна с любой другой - полный)

Клика, которая не содержится ни в какой другой клике графа, называется **максимальной**

Клика с наибольшим числом вершин среди всех клик графа называется **наибольшей**.

Число вершин наибольшей клики называется **кликовым числом**. Обозначение - ф(G) (фи)

- Нахождение максимальной (наибольшей) клики неографа можно применить следующий алгоритм
~ Построить граф $\overline{G}$, дополнительный к исходному
~ Сопоставить этому графу некоторый орграф
~ В полученном орграфе определить максимальные внутренне устойчивые подмножества вершин S1,S2,...,Sm
~ Отобразить полученные S1,S2,...,Sm на исходный граф G
~ Вершины, принадлежащие Si, и соединяющие их рёбра исходного графа G образуют i-ю максимальную клику.

29. Эйлеров обход в графе. Доказательство теоремы (Эйлера) об эйлеровом цикле в связном неографе. Алгоритм Флёри построения эйлерова цикла в связном неографе.

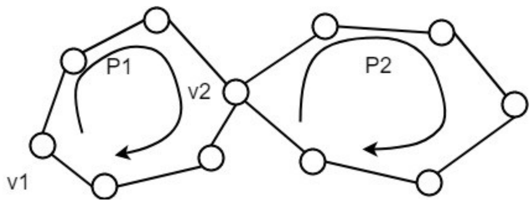
- Эйлеровым циклом(обходом) в неографе называется цикл, включающий все рёбра графа и проходящий по каждому ребру в точности один раз. Граф, содержащий эйлеров цикл называется эйлеровым.
- Теорема "О эйлеровых циклах": Связный неограф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют чётную степень. -
- Доказательство:

~ Необходимость: Пусть связный неограф G эйлеров. => цикл в G проходит через каждую вершину. Для каждой вершины верно: цикл входит в вершину по одному ребру, а выходит по другому. Таким образом, каждая вершина инцидентна чётному числу рёбер. Так как эйлеров цикл по определению содержит все рёбра графа, то степени всех вершин чётны.

~ Достаточность:

Предположим, что степени всех вершин связного графа G четные. Начнем цепь G_1 из произвольной вершины v_1, и будем продлевать ее, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени вершин четные, то, попав в некоторую вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Таким образом, построение цепи P_1 обязательно закончится в вершине v_1, и P_1 будет циклом. Если P_1 содержит все ребра графа G, то построен эйлеров цикл.

В противном случае, удалив из графа G ребра графа P_1, получим граф G_2. Так как степень всех вершин графов G и P_1 были четными, то и G_2 будет обладать этим свойством. В силу связности G графы P_1 и G_2 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2. Теперь начиная из v_2, построим в G цикл P_2 подобно тому, как построили P_1.



Объединим циклы P_1 и P_2 следующим образом: пройдем часть P_1 от вершины v_1 до вершины v_2, затем пройдем цикл P_2, затем – оставшуюся часть P_1 от v_2 до v_1.

Если объединенный цикл не эйлеров, проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл. Поскольку степени вершин во всех графах, составленных из ребер, не попавших в строящийся цикл, четные, и число ребер в этих графах убывает, то процесс закончится построением эйлерова цикла.

Существует алгоритм Флёри построения эйлерова цикла

- Выбираем S1 и инцидентное ей ребро U1
- По U1 переходим в S2
- Для S2 повторяем п.1
- Алгоритм проделывать до тех пор, пока не будут помечены все рёбра графа. При этом находясь в Si не следует

~ Выбирать ребро, инцидентное Si и S1, если есть другие варианты

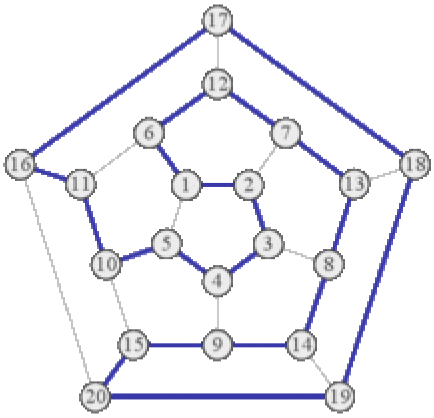
~ Выбирать ребро-перешеек (ребро, удаление которого разделяет граф на 2 комп-ты связности.)

30. Гамильтоновы графы. Классические задачи о гамильтоновом цикле. Теорема Оре о гамильтоновом графе.

Неограф называется Гамильтоновым, если он связный и содержит Гамильтонов цикл.
Гамильтонов цикл - цикл, содержащий все вершины графа и проходящий по каждой вершине ровно один раз.
Th. Ope
Дан связный неограф порядка N>=3. Если для любой пары несмежных вершин Si Sj выполняется условие $\forall S_i, S_j : S_i \neq S_j; S_i, S_j \in S; P(S_i) + P(S_j) \geq n$, то граф - гамильтонов.
P(Si) - степень вершины (число инцидентных рёбер)

Задача о коммивояжере — задача, в которой коммивояжер должен посетить N городов, побывав в каждом из них ровно по одному разу и завершив путешествие в том городе, с которого он начал. В какой последовательности ему нужно обходить города, чтобы общая длина его пути была наименьшей?

Гамильтонова линия для развёрнутого на плоскость додекаэдра, игра «вокруг света»:



*коммивояжер - разъездной посредник, который, перемещаясь по рынку, играет роль простого посредника или действует по поручению своего клиента

31. Эйлеровость и гамильтоновость в орграфах.

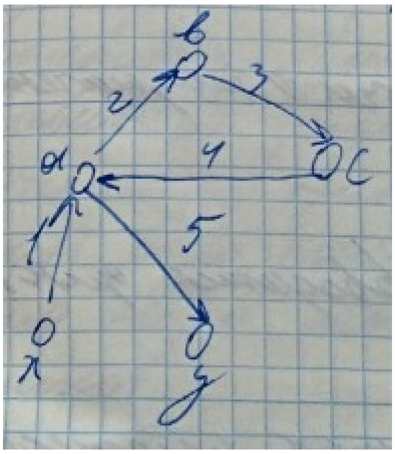
- Если орграф G(S,U) эйлеров, то для любой вершины Si справедливо $p^{+¿¿}$(Si) = $p^{-¿¿}$(Si)
- Если орграф G(S,U) эйлеров, то он является объединением контуров, попарно не имеющих общих дуг.

Th.

Связный орграф содержит открытую эйлерову цепь т. и т. т. когда в нём есть 2 такие вершины

$$p^-(x) = p^+(x) + 1$$
$$p^-(y) = p^+(y) - 1$$
$$\forall z \in S : z \neq x \neq y; p^-(z) = p^+(z)$$

x,y, что



- Дан сильносвязный орграф G без контуров и петель, n >= 2. Если для любой пары вершин Si Sj, таких что Si != Sj и Si и Sj не смежные и выполняется условие p(Si) + p(Sj) >= 2n-1, то G содержит Гамильтонов контур.
- Если условие выполняется, то гамильтонов контур практически существует, если же условие не выполняется, то обход всё равно может существовать

Универсального алгоритма построения гамильтонового контура в произвольном орграфе нет

32. Паросочетания. Задача о назначениях. Двудольные графы.

полным двудольнымв неографе - множество попарно несмежных рёбер.

Размер (мощность) паросочетания - число входящих в него рёбер.

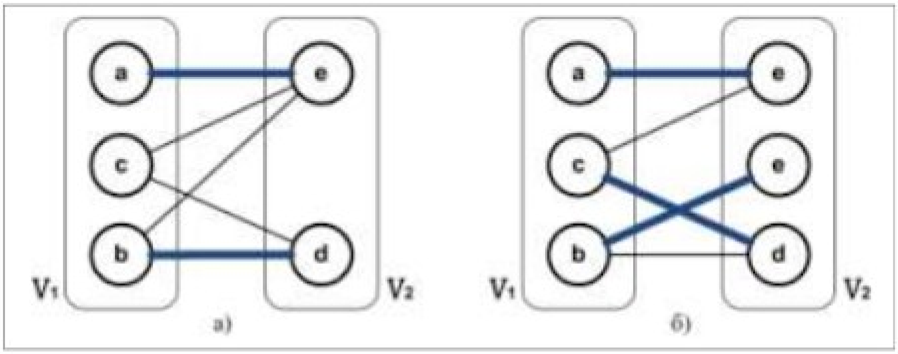
Паросочетание называется максимальным, если его размер нельзя увеличить добавлением хотя бы одного ребра.

Паросочетание называется совершенным, если оно включает в себя все вершины графа.

Граф называют **двудольным (Кёнига)**, если множество его вершин можно разбить на 2 (непересекающихся) подмножества так, что для ∀ ребра верно:
одна из его концевых вершин в одном подмножестве V1, другая - в другом V2.
Подмножества V1 и V2 называют долями графа.
Если любые две вершины внутри одной доли смежны, то такой граф называют полным двудольным. Kpq, где p = |V1|, q = |V2| (p и q - мощности подмножеств).
Граф является полным двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.

Задача о назначениях: Имеется состав из p работников и q видов работ. Каждый работник может выполнять работу нескольких видов, и на работе может может быть задействовано несколько работников. Ставится задача о выполнении назначений по принципу “один работник - одна работа”.

Для предложенного варианта, очевидно, имеет место двудольный граф с долями “работники” и “работы”. Ребра графа задают соответствие видов работ работникам. Решение задачи сводится к поиску в данном двудольном графе максимальных паросочетаний и наибольшего из них по мощности.



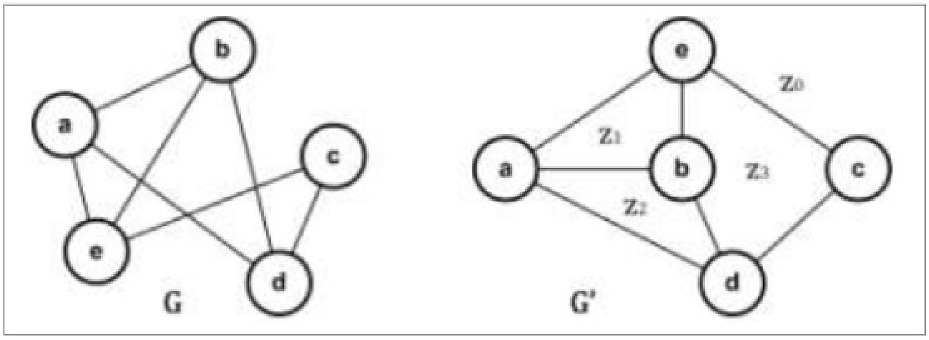
V_1 – «работники»,
V_2 – «виды работ».

Некоторые максимальные паросочетания выделены.

33. Планарные графы. Понятие грани. Теорема Эйлера о плоском графе и следствия из нее. Теорема «о пяти красках».

- Укладкой графа на плоскость называют процесс получения такого изображения графа, что все его вершины становятся точками одной плоскости, а рёбра - линиями на той же плоскости без самопересечений, причём никакие два ребра не имеют общих точек, кроме вершин, инцидентных им обоим
- Граф планарный, если можно выполнить его укладку на плоскость
- Граф плоский, если он уже уложен на плоскости
- Область плоскости ограниченная простым циклом плоского графа и не содержащая никакой другой цикл называется нижней внутренней гранью плоского графа. Вся внешняя по отношению к плоскому графу область плоскости называется его внешней гранью.

Пример.



Графы G и G' изоморфны.
G – планарный граф,
G' – плоский граф.

Th. Эйлера
Для связного плоского графа с n вершинами, m рёбрами и r гранями справедливо: $n-m+r=2$
Следствия:
1) Если число вершин связного планарного графа больше 3, то число его рёбер m отвечает неравенству m <= 3n-6
2) В каждом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5

Th. “О пяти красках”
Всякий планарный граф можно раскрасить пятью цветами

34. Гомеоморфизм графов. Теорема Понтрягина–Куратовского о планарном графе. Искаженность и толщина графа.

- Два графа <u>гомеоморфны</u>, если они изоморфны или могут быть приведены к изоморфности конечным числом слияний и разбиений их ребер

Th. Понтрягина-Куратовского:

Граф планарен ⇔ он не содержит подграфов, гомеоморфных K5 и K3,3.

~ K5 – полный граф из 5-ти вершин

~ K3,3 – полный двудольный граф, имеющий по 3 вершины в каждой доли. (см. рисунок)

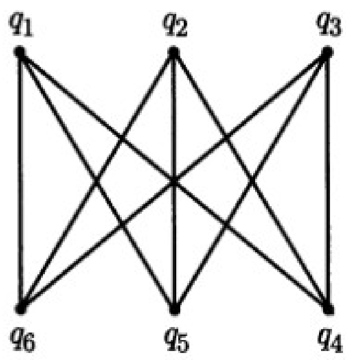


Рис. 4.2. Симметричный граф $K_{3,3}$

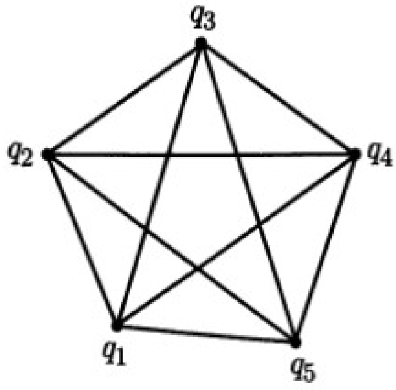


Рис. 4.3. Полный граф K_5

- <u>Искаженность</u> – минимальное число ребер, удаление которых приводит к планарности графа
- <u>Толщина</u> – наименьшее число планарных подграфов графа G, объединение которых дает исходный граф G. Обозначается t(G).
- t(G) = 1, если G -- планарный граф.

35. Деревья. Основные свойства деревьев. Ориентированные деревья. Бинарные деревья. Дерево решений.

- Дерево — это связный граф без циклов. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность — отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется только по одному пути.
- Лес — упорядоченное множество упорядоченных деревьев. Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются концевыми вершинами или листьями.
- Неориентированным деревом называют связный и ациклический неориентированный граф.
- Ориентированным деревом называют бесконтурный ориентированный граф, у которого полустепень захода любой вершины не больше 1 и существует ровно одна вершина, называемая корнем ориентированного дерева, полустепень захода которой равна 0.
- Ориентированное дерево называют бинарным, если полустепень исхода любой его вершины не больше 2.
- Бинарное ориентированное дерево называют полным, если из любой его вершины, не являющейся листом, исходят ровно две дуги, а уровни всех листьев совпадают.
- Свойства:

~ m = n - 1 (число ребер меньше числа вершин на единицу)

~ Если есть si, sj, принадлежащие S, si != sj, то их соединяет единственная простая цепь

~ si, sj принадлежат S и не смежны. Введение ребра (si, sj) дает граф, содержащий ровно один цикл

~ Дерево содержит по крайней мере 2 концевые вершины

~ Теорема Кейли. Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах равняется n ^ (n-2)

- Подход к оценке вычислительных сложностей алгоритмов принято называть построением дерева решений.
- Дерево решений - бинарное дерево, представляющее последовательность решений “если-то”. Концевыми вершинами являются принятые решения.

36. Остовы. Циклический и коциклический ранги. Задача Штейнера.

Остов графа G(S, U) - это дерево, построенное на множестве вершин графа G, а ребра дерева являются подмножеством ребер G. Понятие остова применяют к неориентированным графам.

Циклический ранг $v(G)=m-n+k$, m = |U|, n = |S|, k - число компонент связности графа
коциклический ранг $v*(G)=n-k$

Цикломатическим числом или <u>циклическим рангом</u> графа называется наименьшее число ребер, которое необходимо удалить из графа так, чтобы в нем не осталось ни одного цикла. После такого удаления ребер из связного графа будет получено дерево, называемое остовным деревом или остовом графа (в случае несвязного графа – остовный лес). Число вершин в остове совпадает с числом вершин графа.
Число ветвей в остове называют <u>коциклическим рангом</u> графа или рангом разреза.у

Есть G(S,V), можно рассмотреть подграф G’(S’,V’), G’ c G. G’ - остовный подграф, если S’ = S, а V’ c V и если он не содержит циклов

<u>Задача Штейнера</u>: на плоскости заданы n точек; нужно соединить их отрезками прямых таким образом, чтобы суммарная длина отрезков была наименьшей. Разрешается добавлять доп.точки, чтобы оптимизировать путь

37. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима.

Задача об остове экстремального веса: На плоскости заданы N точек. Нужно соединить их отрезками так, чтобы длины их были минимальны/максимальны. В процессе решения НЕ разрешается вводить дополнительные точки

Найти G(S,U), обладающее свойствами:
1. Каждому ребру графа сопоставлено некоторое неотрицательное число
2. G является деревом
3. Множество вершин дерева G должно включать множество вершин исходного графа
4. Сумма весов рёбер должна быть экстремальной (min/max)

Эффективного алгоритма решения не существует.
Алгоритм Прима(Ближайший сосед): Пусть множество вершин нашего графа разбивается на 2 подмножества $S = S_1 \cup S_2; S_1 \cap S_2 = \varnothing$
$d(S_1, S_2) = \min\{\omega(S_i, S_j) : S_i \in S_1, S_j \in S_2\}$
1. Присвоение начальных значений
Полагаем, что S1 = {S1}, U' = 0
S2 = S\S1 = S\{S1}
Задача - наращивать U' итерационно до достиже ния остова, руководствуясь d, то есть до S1 = S
2. Обновление данных
Находим
$(S_i, S_j) : S_i \in S_1, S_j \in S_2$
$\omega(S_i, S_j) = d(S_i, S_j)$
$S_1 = S_2 \cup \{S_j\}, U' = U' \cup \{(S_i, S_j)\}$
3. Проверка на завершение алгоритма
Если S1 = S то G'(S,U') = искомый остов
В противном случае повторяем шаг 2
4. Определение веса полученного остова
$\omega(G') = \sum \omega(S_i, S_j) : \forall (S_i, S_j) \in U'$

Примечание: Если потребуется построить остов максимального веса, алгоритм не меняется, но $d = \max\{\omega(S_i, S_j) : S_i \in S_1, S_j \in S_2\}$

38. Кратчайшие пути в графе: постановка задачи. Отыскание кратчайшего пути в невзвешенном графе.

Задачу о кратчайших расстояниях можно сформулировать так: Пусть задан невзвешенный(длина всех рёбер = 1) ориентированный граф и пусть из вершины s достижима вершина d. Требуется найти кратчайший путь - список попарно соединённых вершин - из s в d.

Используем модифицированный поиск в ширину.

Каждой вершине из сопоставим метку — минимальное известное расстояние от этой вершины до ***s*** и идентификатор предыдущей вершины. Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Инициализация. Метка самой вершины ***a*** полагается равной 0, метки остальных вершин — бесконечности. Это отражает то, что расстояния от ***a*** до других вершин пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как непосещённые. Идентификатор предыдущей вершины ставится специальным невалидным значением.

Шаг алгоритма. Если все вершины посещены, алгоритм завершается. В противном случае, из ещё не посещённых вершин выбирается вершина ***u***, имеющая минимальную метку. Мы рассматриваем всевозможные маршруты, в которых ***u*** является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут рёбра из ***u***, назовём *соседями* этой вершины. Для каждого соседа вершины ***u***, кроме отмеченных как посещённые, рассмотрим новую длину пути, равную сумме значений текущей метки ***u*** и длины ребра, соединяющего ***u*** с этим соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, заменим значение метки полученным значением длины и установим идентификатор предыдущей вершины в идентификатор той, из которой мы пришли. Рассмотрев всех соседей, пометим вершину ***u*** как посещённую и повторим шаг алгоритма.

Нахождение пути. Выбираем вершину d. Записываем её в список вершин, входящих в кратчайший путь. Переходим к вершине, на которую указывает идентификатор предыдущей вершины. Тоже записываем её в выходной путь. И так, переходя по цепочке, записываем все вершины от d к s, пока не упрёмся в s. Разворачиваем получившийся путь от s к d. Возвращаем его.

39. Алгоритм Форда отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Граф задается матрицей весов. Если из xi в xj существует путь и он кратчайший, то и любое подмножество этого пути будет кратчайшим. Алгоритм находит все кратчайшие пути во все достижимые вершины.

Шаг 1. Присваиваем начальные метки
1) Начальная вершина получает метку “0”
2) Просматриваем помеченные строки матрицы и каждый раз находя число, складываем его с меткой строки и помещаем сумму под соответствующим столбцом. Выполним это для всех помеченных строк.
3) После этого полученную сверху частично сформированную сверху информационную строку отражаем относительно главной диагонали. Получаем помеченными новые вершины.
4) пункты 2 и 3 выполняем, пока это возможно (пока не будут помечены в лучшем случае все вершины).
NB! На шаге 1 меток не меняем!
Получили оценки длин кратчайших путей от начальной во все остальные вершины графа.

Шаг 2. Корректировка меток
Просматриваем все строки сверху-вниз, слева-направо.
1) Просматривая текущую строку и встречая число складываем его с меткой строки (вес дуги + оценка кратчайшего пути). Если получившаяся сумма меньше метки соответствующего столбца, то заменяем ею (суммой) метку.
Важно всю матрицу построчно пройти до конца.
2) Отражаем информационную строку относительно главной диагонали. Для тех строк, где была коррекция меток, выполняем пункт 1.
Пункты № 1, 2 выполняем циклически, пока не прекратятся изменения меток.
Получили точное значение длин кратчайших путей.

Шаг 3. Построение кратчайшего пути
Начинаем с конечной вершины (справа налево). (j-1)-ая вершина пути находится так:
1) Просматриваем столбец j-й вершины
2) Каждый раз, встречая число, складываем его с меткой строки. Если сумма равна метке j-го столбца, то эта вершина и будет (j-1)-ой вершиной кратчайшего пути. Важно пройти по всему столбцу. После этого (j-1) становится текущей, повторяем цикл, пока не дойдём до начальной вершины.

40. Алгоритм Дейкстры отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Этап 1. Находим длину кратчайшего пути.

Шаг 1. Присваиваем вершинам начальные метки. Полагаем метку для первой вершины равной 0 и постоянной. Метки для остальных вершин $xi \in S \vee \{1\}$полагаем равными $\mu(xi)=\infty$ и считаем эти метки временными.Заполняем таблицу меток. Текущую вершину обозначим xт. Пусть xт = s.
Шаг 2. Метку временную для каждой вершины $x_i \in \Gamma_{x_m}$ меняем по правилу: $\mu(x_i)=min\{\mu(x_i),\mu(x_m)+\omega(x_m,x_i)\}$

Шаг 3. Превращаем одну из меток в постоянную. Из всех вершин, получивших временные метки, выбираем вершину с наименьшим значением метки и делаем эту метку постоянной: $\mu'(xj)=min\{\mu(xj)\vee xj \in S,\mu(xj)-временная\}$
Полагаем xт = xj', т.е. для которой $\mu'(xj)$- постоянная. Заполняем строку в таблице меток.

Шаг 4. Проверка на завершение этапа 1. Если xт = t, то $\mu(xm)$ – длина кратчайшего пути из 1 в t.
Переходим к этапу 2.
иначе
Возврат к шагу 2.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Поиск дуг кратчайшего пути.
Имеем xт = t. Среди вершин, составляющих $\Gamma❑_{XT}^{-1}$и имеющих постоянные метки, находим вершину xi, удовлетворяющую соотношению: $\mu(xm)=\mu(xi)+\omega(xi,xm)$
Дугу (xi,xm)включаем в искомый путь. Полагаем $xm=xi$.

Шаг 6. Проверка на завершение этапа 2.
Если xт = s, то кратчайший путь найден: он образован последовательностью дуг, полученных на шаге 5 и выстроенных в обратном порядке.
иначе
Возврат к шагу 5.
Конец алгоритма.

41. Поток в транспортной сети: постановка задачи. Полный и максимальный поток в сети. Увеличивающая цепь и алгоритм ее построения.

Дан взвешенный, связный граф без петель, заданный матрицей весов.
Имеется ровно 1 вершина S, не имеющая ни одной входящей дуги, полустепень захода = 0.
Имеется ровно 1 вершина T, не имеющая ни одной исходящей дуги, полустепень исхода = 0.
Каждой дуге(ориентированному ребру) сопоставлено неотрицательное число $c(s_1, s_2)$ - пропускная способность дуги.
На дугах графика определена функция от двух вершин $\varphi(s_1, s_2)$ называется потоком, и удовлетворяющая условиям:
Для каждой дуги s_1, s_2 графа величина потока $0 \leq \varphi(s_1, s_2) \leq c(s_1, s_2)$

Баланс потока в узле сети:
Для каждой вершины графа, узла сети будет выполнятся:
Количество единиц потока, исходящих из узла T, равно числу единиц потока, входящих в узел S.

Задача: нахождении такого потока по транспортной сети, что сумма потоков из истока, или, что то же самое, сумма потоков в сток максимальна (привести поток к экстремальному значению).

Увеличивающая цепь – маршрут, на котором все прямые дуги ненасыщены, а на всех обратных дугах поток больше нуля.

Постановка задачи: Сеть задана взвешенным орграфом. Определить величину максимального потока от источника S = x0 к стоку t = Xs и указать минимальный разрез, через который этот максимальный поток проходит

Теорема 1: Если $(s, .., s_i, ..., t)$ -- путь от s к t и все дуги ненасыщенные, то величину потока ϕ на этом пути можно увеличить на $\delta^{¿} = min(c(s_i, s_j) - \phi(s_i, s_j))$ по всем дугам пути

Поток называют **полным**, если его невозможно увеличить с помощью теоремы 1.

Максимальный поток - максимальный по величине полный поток среди всех полных потоков.

Построение увеличивающей цепи:

1. Вершину S помечаем “+”
2. Если Si помечена, то помечаем “+i” все те вершины Sj, которые не помечены и входят в Гsi, при этом в Sj из Si идут только ненасыщенные дуги.
3. Если Si - помеченная вершина, то символом “-i” помечаем все те непомеченные вершины Sj, которые входят в $\Gamma^{-1}{}_{Si}$ и из них в Si ведут дуги, поток по которым > 0.

Если в результате итерационного применения п.2 и п.3 удается пометить сток, то существует увеличивающая цепь от S к t, проходящая через помеченные вершины.

42. Понятие разреза транспортной сети. Минимальный разрез. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке в сети. Алгоритм Форда–Фалкерсона отыскания экстремального потока в сети.

Разрезом связного графа называется множество ребер(дуг), удаление которых приводит к увеличению компонент связности графа, а именно: граф становится несвязным в крайнем случае. Уточнение: в случае орграфа речь может идти о потере сильной связности, но не связности вообще.
Величина разреза - сумма пропускных способностей рёбер, его составляющих.

Теорема Форда--Фалкерсона: В сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока, доставляемого от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

Алгоритм Форда--Фалкерсона:
1) Задаем начальный поток $\phi = 0$
2) Руководствуясь **теоремой 1** получить ϕ_n
3) Руководствуясь **теоремой 2** выполнить итеративное построение увеличивающих цепей.
На основании **теоремы 3:** если ни одной увеличивающей цепи больше нет, то имеем ϕ_{max}
4) Определяем разрез, по которому идет ϕ_{max}

Теорема 1: Если $(s,..,s_i,...,t)$ -- путь от s к t и все дуги ненасыщенные, то величину потока ϕ на этом пути можно увеличить на $\delta^{¿} = min(c(s_i, s_j) - \phi(s_i, s_j))$ по всем прямым дугам пути
Когда увеличение потока невозможно, значит, поток полный

Теорема 2: Если $(s,..,s_i,...,t)$-- увеличивающая цепь, то на каждой ее прямой дуге поток можно увеличить на $\varepsilon^{¿}$, а на каждой обратной дуге уменьшить на $\varepsilon^{¿}$. $\varepsilon^{¿} = min(\delta^{¿}, \varphi^{¿})$
$\varphi^{¿} = min(\varphi(si, sj)^{□}) - минимум\ по\ всем\ потокам\ на\ обр.\ дугах$

Теорема 3: Поток $\phi_{□}$в сети достигает максимального значения ⇔ в сети не существует ни одной увеличивающей цепи.

43. Понятие булевой функции. Способы задания булевых функций. Существенные и несущественные переменные. Элементарные булевы функции одной и двух переменных.

Булева функция от n-переменных - функция, задающая соответствие $f: E^n \to E$,
где $E = \{0,1\}$- булево множество (является область определения и областью значения булевых функций).

Способы задания булевых функций

- Аналитически (формулой)
- Таблицей истинности

Переменную булевой функции называют существенной, если при изменении ее значения, изменяется значение булевой функции. Иначе -- переменную называют несущественной. Также говорят, что f не зависит от xi.

Элементарные булевы функции одной и двух переменных:

1) Конъюнкция
2) Дизъюнкция
3) Отрицание
4) Константа нуля
5) Константа единицы
6) Сложение по модулю 2
7) Импликация
8) Стрелка Пирса
9) Штрих Шеффера
10) Эквивалентность

Элементарные булевы функции. I. Булевы функции одной переменной.

x	f1	f2	f3	f4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функцию f_1 называют константой нуля, f_2 - константой единицы, f_3 - фукнцией тождества, f_4 - функцией отрицания.

Для f_1 и f_2 переменная x является существенной.

Основные булевы функции двух переменных

Ф-ция / Аргум.		$\bar{a}$ $(\neg a)$	$a \wedge b$ $(ab, a\&b)$	$a \vee b$ $(a+b)$	$a \oplus b$	$a \to b$	$\overline{a \to b}$	$b \to a$	$\overline{b \to a}$	$a \downarrow b$	a/b	$a \sim b$
a	b	отрицание a (инверсия a)	конъюнкция	дизъюнкция	сумма по mod2	импликация от a к b	запрет по b	импликация от b к a	запрет по a	стрелка Пирса	штрих Шеффера	эквивалент-ность
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
					$\bar{a}b \vee a\bar{b}$	$\bar{a} \vee b$	$a\bar{b}$	$a \vee \bar{b}$	$\bar{a}b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{ab}$	$\overline{a \oplus b}$

44. Логические формулы. Соотношение понятий функции и формулы. Булев базис и булева алгебра. Свойства булевых операций.

Формулы. Пусть $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ - множество булевых фукнций.

Функция f, полученная подстановками функций $f_1, \ldots, f_n$ друг в друга и переименованием переменных, называется суперпозицией фукнций $f_1 \ldots f_n$.

Выражение, описывающее эту суперпозицию, называется формулой над F.

Само множество F называют базисом.

Фактически мы имеем дело не с фукнциями, а с формулами, представляющими эти булевы фукнции.

Тогда формула $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, где φ_i - либо формула над F, либо перменная, называется внешней операцией или внешней формулой, а сами $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ называют подформулами, причем они также могут иметь подформулы.

Множество подформул (цепочка) называется глубиной.

Каждую булеву функцию преставляет бесконечное множество формул.

(простым языком: функция – это итог, а формула -- это реализация)

Формулы, базисом которых является базис $\{\wedge, \vee, \neg\}$, называются булевыми формулами

Алгебра $¿E, \wedge, \vee, \neg >¿$ называется булевой алгеброй, где E = {0, 1}

Свойства булевых функций:

1) Ассоциативность см ниже 3-4
2) Коммутативность 1-2
3) Дистрибутивность 5-6
4) Идемпотентность 7-8
5) *закон двойного отрицания* $: \neg\neg x = x$
6) *свойства констант* $: x \wedge 1 = x, x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1, x \vee 0 = x$
7) $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$
8) правила де моргана $\neg(xy) = \neg x \vee \neg y ; \neg(x \vee y) = \neg x \neg y$
9) закон противоречия $x \wedge \neg x = 0$
10) $x \vee \neg x = 1$
11) Закон поглощения: (xy)x = xy, (x v y) v x = x v y

1. $X \vee Y = Y \vee X$
2. $X \& Y = Y \& X$
3. $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$
4. $(X \& Y) \& Z = X \& (Y \& Z)$
5. $(X \vee Y) \& Z = (X \& Z) \vee (Y \& Z)$
6. $(X \& Y) \vee Z = (X \vee Z) \& (Y \vee Z)$
7. $X \vee X = X$
8. $X \& X = X$
9. $X \vee (X \& Y) = X$
10. $X \& (X \vee Y) = X$
11. $\neg(X \vee Y) = \neg X \& \neg Y$
12. $\neg(X \& Y) = \neg X \vee \neg Y$
13. $X \vee \neg X = 1$
14. $X \& \neg X = 0$
15. $X \vee 0 = X$
16. $X \& 0 = 0$
17. $X \vee 1 = 1$
18. $X \& 1 = X$
19. $\neg 1 = 0$
20. $\neg 0 = 1$
21. $\neg(\neg X) = X$

45. Алгебра и полином Жегалкина. Свойства операций базиса Жегалкина. Приведение булевой функции к полиномиальному представлению в базисе Жегалкина. Теорема о полиноме Жегалкина.

Алгебра ¿ E, ∧, ⊕, $0, 1$ >¿ называется алгеброй Жегалкина, где E = {0, 1}, 1 - функция константа единицы, 0 - нуля

Определение:

Полином Жегалкина — полином с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берётся конъюнкция, а в качестве сложения исключающее или.

Полином Жегалкина имеет следующий вид:
“вид полинома Жегалкина” $P_{f1}^{2} = a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$

С помощью полинома Жегалкина можно выразить любую булеву функцию, так как он строится из следующего набора функций: ⟨ ∧, ⊕, 1⟩, который, в свою очередь, по теореме Поста является полным.

Свойства операций базиса Жегалкина:
1) Коммутативность
2) Дистрибутивность конъюнкции
3) x ⊕ x = 0
4) x ⊕ 0 = x
5) x ⊕ 1 = ¬x
6) все свойства конъюнкции и константы

Теорема Жегалкина — утверждение о существовании и единственности представления всякой булевой функции в виде полинома Жегалкина.

Всегда возможен переход от формулы к формуле в алгебре Жегалкина без потери логической эквивалентности.

Для осуществления этого перехода нужно выразить отрицание и дизъюнкцию в базисе Жегалкина и тогда переход превращается от булевой алгебры в алгебру Жегалкина.

$$\bar{x} = x \oplus 1$$

$$x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1$$

46. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы булевых функций. Методика приведения булевой функции, заданной произвольной формулой, к ДНФ и КНФ.

Определение:

Простой конъюнкцией или **конъюнктом** называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая конъюнкция

- полная, если каждая переменная (или её отрицание) входит в неё ровно 1 раз;
- монотонная, если она не содержит отрицаний переменных.

Определение:

Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких простых конъюнктов.

Определение:

Простой дизъюнкцией или **дизъюнктом** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая дизъюнкция

- полная, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно один раз;
- монотонная, если она не содержит отрицаний переменных.

Определение:

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Методика

1) Все элементы функции, входящие в запись булевой функции выразить в базисе булевой алгебры
2) Перенести все отрицания к переменным, используя закон ы Де Моргана и закон 2го отрицания
3) Для ДНФ: преобразовать формулу так, чтобы /\ выполнялась раньше \/ (привести все конъюнкции к элементарным). Использовать дистрибутивность. Для КНФ - аналогично, но \/ раньше /\

$$f = (x -> y) \downarrow \overline{(y -> z)}$$

$$f = \overline{(\overline{x} \vee y) \vee \overline{(y \vee z)}} =$$

$$= \overline{(\overline{x} \vee y)}(\overline{y} \vee z) =$$

$$= (x \wedge \overline{y})(\overline{y} \vee z) = x\overline{y} \vee x\overline{y}z$$

47. Совершенные ДНФ и КНФ. Методика приведения булевой функции к СДНФ и СКНФ.

Определение:

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ — ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.
2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Определение:

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.
2. Для каждого отмеченного набора записываем дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Методика приведениея булевой функции к СДНФ(СКНФ)

1) Если элементарная конъюнкция содержит повторения одной и той же литеры, то это литеру оставляют один раз(идемпотентность)

2) Если в элементарную конъюнкцию входят контарные литеры (литера и её отрацание), то такая элементарная конъюнкция удаляется.

3) Если в элементарную конъюнкцию вида $x_1^\sigma x_2^\sigma \dots x_m^\sigma$ не входит переменная x_j, то данная конюнкция заменяется на $x_1^\sigma x_2^\sigma \dots x_m^\sigma(x_j \vee \bar{x}_j)$.

4) Если в итоге преобразований окажется несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то оставляем только одну из них.

Для СКНФ, согласно принципу двойственности.

48. Минимизация булевых функций: постановка задачи. Импликанты. Простые импликанты. Сокращенная, тупиковая и минимальная формы булевой функции (в классе ДНФ).

Задачу отыскания минимальной формулы, задающей булеву
функцию, можно понимать в различных вариантах:
1) найти формулу, содержащую наименьшее суммарное число литер в записи; - **чаще всего**
2) найти формулу с наименьшим количеством определенных операций;
3) найти формулу с наименьшим количеством подформул заданного вида

Импликанта -- Булева функция f1(x1, x2, … xn) называется импликантой булевой функции f(x1, x2, … xn), если f1 принимает значение 0 на тех же (но не обязательно только тех) наборах,
что и f.

Определение. Элементарная конъюнкция $k_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{r_i}^{\alpha_{r_i}}$ называется простой импликантой функции f(x_1, x_2, … x_n), если k_i – импликанта функции f, и никакая часть k_i не является импликантой функции f.

Th. Всякая булева функция может быть представлена в ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой является простой импликантой.
Сокращенная форма -- дизъюнкция всех простых импликант булевой функции f

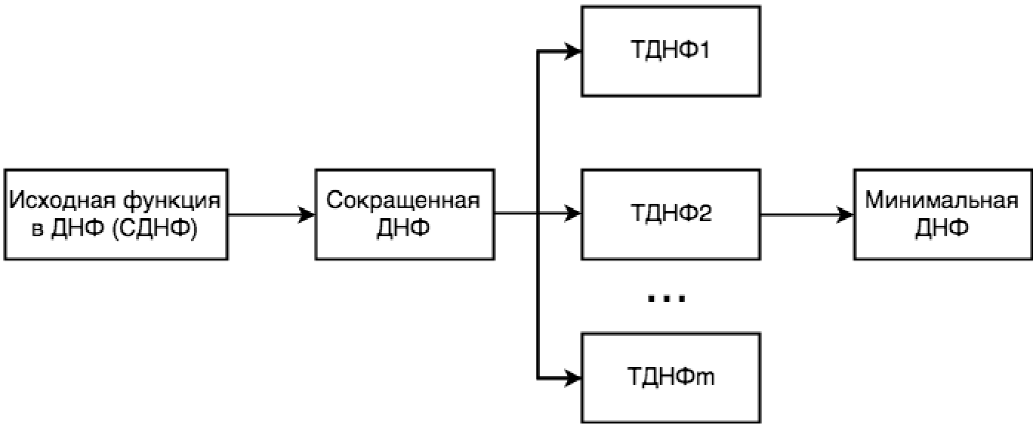
Дизъюнкция простых импликант булевой функции -- такая, что удаление из нее любой импликанты приводит к потере покрытия всех единиц функции, называется **тупиковой формой**
Th. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Минимальная форма -- Такая ДНФ, что ее суммарный ранг меньше всех остальных ДНФ этой функции.

Пусть булева функция f(x1, x2, … xn) задана в ДНФ: $\bigvee_{i=1}^{m} k_i,$

где есть i-я элементарная конъюнкция, т.е. $k_i = \bigwedge_{j=1}^{r_i} x_j^{\alpha_j}$
Число m называют длиной ДНФ. Количество литер в записи элементарной конъюнкции называют ее рангом (в записи ki верхние индексы следует понимать как наличие или отсутствие отрицания). Очевидно, 1 =< ri =< n.
Длина ДНФ может быть также охарактеризована числом R=r1+r2+...rm , где ri – ранг i-й элементарной конъюнкции. R называют суммарным рангом ДНФ.
Определение. ДНФ булевой функции f(x1, x2, … xn) называют **минимальной**, если ее суммарный ранг наименьший среди всех ДНФ этой функции.

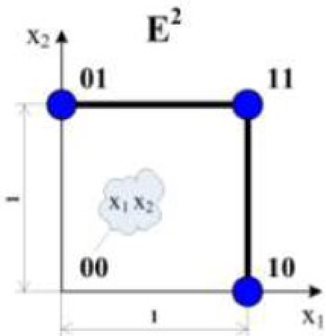
49. Этапы получения минимальной ДНФ булевой функции. Единичный гиперкуб. Геометрическая интерпретация задачи минимизации булевой функции.



Пусть булева функция n переменных f(x1, x2, … xn) задана в ДНФ. Каждому двоичному набору ранга n ставится в соответствие одна и только одна вершина n-мерного единичного гиперкуба En. Каждой элементарной конъюнкции соответствует либо одна вершина гиперкуба, если ранг конъюнкции равен n, либо несколько его вершин, если ранг конъюнкции меньше n.
Пример. 1. n = 2. En – квадрат. Пусть f(x1, x2) задана таблицей истинности.

x_1	x_2	f
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

На рисунке (справа) единичные наборы выделены синими кружками, что соответствует СДНФ заданной функции. Ребро, соединяющее вершины единичных наборов, означает возможность их склеивания. Так, на наборах 01 и 11 переменная x_1 подвергается склеиванию, переменная x_2 остается. На наборах 10 и 11 ситуация обратная, остается переменная x_1. Т.к. и x_1, и x_2 являются импликантами исходной функции, причем простыми, то сокращенная ДНФ имеет вид $x_1 \vee x_2$.



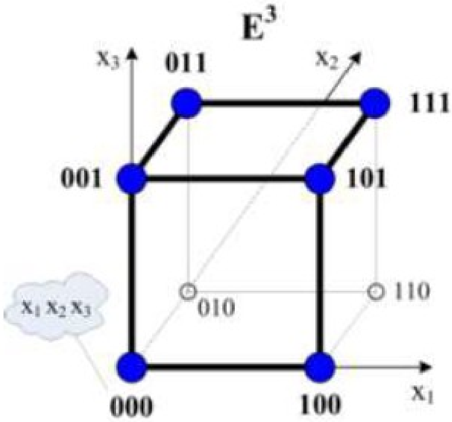
Эта же ДНФ является и единственной тупиковой, т.к. ни одну из импликант невозможно удалить без потери эквивалентности исходной функции. Итак, минимальная ДНФ заданной функции $f(x_1, x_2)$ есть $x_1 \vee x_2$.

2. **n = 3**. E^n – куб. Пусть дана таблица истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

Как и в случае n = 2, единичные наборы показаны синими кружками, а соединяющие их ребра выделены. В итоге склеивания имеем *грань* x_3 (наборы 001, 011, 101 и 111) и грань $\overline{x}_2$ (наборы 000, 001, 100, 101). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем минимальную ДНФ:

$$\overline{x}_2 \vee x_3.$$

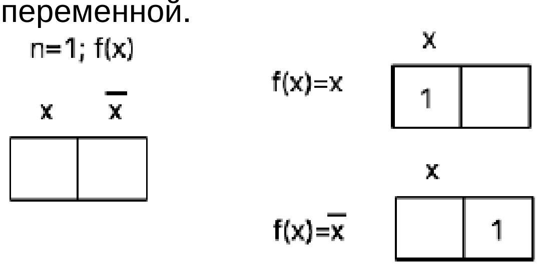


В общем случае импликанта ранга k образует $(n-k)$-мерную грань гиперкуба.

Геометрический смысл задачи минимизации булевой функции в классе ДНФ формулируется следующим образом.
Дано подмножество N вершин единичного гиперкуба En, то есть N единичных наборов функции f(x1, x2, … xn). Найти такой набор граней гиперкуба, чтобы они в совокупности давали покрытие всех N единичных наборов функции f и сумма рангов импликант покрытия была минимальной.
Заметим, что вершина или ребро гиперкуба – частные случаи его грани.

50. Метод диаграмм Вейча (карт Карно) минимизации булевой функции в классе ДНФ. Обоснование сокращения ранга покрывающих импликант в методе диаграмм Вейча.

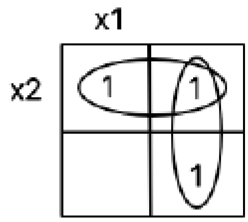
- это аналог диаграмм Эйлера-Венна в теории множеств.
Строится таблица для булевой функции n переменных, количество ячеек которой равно 2^n. Следовательно, для каждого двоичного набора (для каждой контитуэнтной единице) адресуется своя индивидуальная ячейка => каждой переменной функции соответствует ровно половина ячеек таблицы. А другая половина соответствует инверсному значению этой переменной.



n=2; f(x1, x2)

	x1	$\overline{x1}$
x2	x1x2	$\overline{x1}$x2
$\overline{x2}$	x1$\overline{x2}$	$\overline{x1}\,\overline{x2}$

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



СДНФ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_1 x_2$$

Склеиванию подлежат конституэнты единицы, число которых является степенью двойки и которые расположены так, что можно применить правило склеивания. Склеивание двух единиц снижает ранг соответствующей конституэнты единицы на один.

52. Классы Поста булевых функций: сохраняющих константу нуля и константу единицы, линейных и монотонных.

Класс функций сохраняющих ноль K_0

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет ноль**, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Класс функций сохраняющих единицу K_1

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет единицу**, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Класс самодвойственных функций K_S

Определение:

Говорят, что функция **самодвойственна**, если $f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$. Иными словами, функция называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения.

Класс монотонных функций K_M

Определение:

Говорят, что функция **монотонна**, если $\forall i (a_i \leqslant b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$.

Класс линейных функций K_L

Определение:

Говорят, что функция **линейна**, если существуют такие $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $a_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{1, n}$, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место равенство: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n$.

Количество линейных функций от n переменных равно 2^{n+1}.

53. Двойственность булевых функций. Способ отыскания функции, двойственной к заданной. Теоремы о двойственности. Класс Поста самодвойственных функций.

Определение:

Функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **двойственной** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$. Другими словами самодвойственная функция на противоположных друг другу наборах значений аргументов принимает противоположные значения.

Функция называется самодвойственной, если она совпадает с двойственной себе. Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения. Для опровержения самодвойственности достаточно найти хотя бы одну пару взаимно противоположных наборов σ1 и σ2, таких, что f (σ1) = f (σ2)

Теоремы о двойственности.

T1: Если булева функция реализована формулой fi(), то формула f*() реализует функцию, двойственную к исходной.

T2 Принцип двойственности. Пусть базису F = {f1...fn} сопоставлен двойственный базис F*(f1*,...fn*). Если формула fi над базисом F реализует булеву функцию f(fi:F=f), то fi*: F*=f* при том, что ф-ия fi-ая принадлежащая F заменяется на fi*, принадлежащую F*

Получение таблицы истинности двойственной функции:

- Построить таблицу истинности исходной функции
- Инвертировать все значения

Получение формулы двойственной функции:

- Написать формулу исходной функции
- Поставить инверсию перед каждой переменной и перед всей функцией.

54. Замкнутый класс. Полные системы булевых функций. Теорема Поста. Примеры полных систем булевых функций.

Замкнутый класс -- такой класс булевых функций, в котором любая функция, выраженная функциями из этого класса входит в этот же класс.
(Система булевых функций называется **функционально полной**, если в ней можно выразить любую булеву функцию.)

Класс функций сохраняющих ноль K_0

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет ноль**, если $f(0,0,\ldots,0)=0$.

Класс функций сохраняющих единицу K_1

Определение:

Говорят, что функция **сохраняет единицу**, если $f(1,1,\ldots,1)=1$.

Класс самодвойственных функций K_S

Определение:

Говорят, что функция **самодвойственна**, если $f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})=\overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$. Иными словами, функция называется самодвойственной, если на противоположных наборах она принимает противоположные значения.

Класс монотонных функций K_M

Определение:

Говорят, что функция **монотонна**, если
$\forall i(a_i\leqslant b_i)\Rightarrow f(a_1,\ldots,a_n)\leqslant f(b_1,\ldots,b_n)$.

Класс линейных функций K_L

Определение:

Говорят, что функция **линейна**, если существуют такие $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$, где $a_i\in\{0,1\},\forall i=\overline{1,n}$, что для любых $x_1,x_2,\ldots,x_n$ имеет место равенство (полином Жегалкина первой степени): $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_0\oplus a_1\cdot x_1\oplus a_2\cdot x_2\oplus\ldots\oplus a_n\cdot x_n$.

Количество линейных функций от n переменных равно 2^{n+1}.

Теорема

Набор булевых функций K является полным тогда и только тогда, когда он не содержится полностью ни в одном из классов K_0, K_1, K_S, K_M, K_L, иными словами, когда в нем имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна не самодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

Согласно критерию Поста система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов.

В частности, если функция не входит ни в один из классов Поста, она сама по себе формирует полную систему. В качестве примера можно назвать штрих Шеффера или стрелку Пирса.

Широко известны такие полные системы булевых функций:

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание);

$\{\wedge, \oplus, 1\}$ (конъюнкция, сложение по модулю два, константа один).

Первая система используется, например, для представления функций в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм, вторая — для представления в виде полиномов Жегалкина.

Множество Σ булевых функций называется замкнутым, если любая суперпозиция функций из Σ дает булеву функцию, принадлежащую Σ. Всякая система Σ порождает некоторый замкнутый класс, состоящий из всех формул, которые можно получить суперпозицией функций из Σ. Такой класс называют замкнутым и обозначают $[\Sigma]$. Система булевых функций называется полной, если её замыкание образует множество всех функций. То есть если суперпозиция функций замыкания образуют любую булеву функцию вообще, то оно обладает полнотой. Теорема Поста. Формулировка 1. Для того чтобы система булевых функций был полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну из следующих функций: 1. Не сохраняющих константу 0. 2. Не сохраняющих константу 1. 3. Не самодвойственных 3. 4. Не монотонных. 5. Не линейную. Формулировка 2. Система F из булевых функций является полной тогда и только тогда, когда это множество не содержится целиком ни в одном классе Поста. Примеры полных систем:

$F_1 = \{ \wedge, \bar{} \}$; $\wedge \notin K_S, K_L$; $\bar{} \notin K_0, K_1, K_M$.

$F_2 = \{ \vee, \bar{} \}$; $\vee \notin K_S, K_L$

$F_3 = \{ \wedge, \vee \}$

$F_4 = \{ \vee, \oplus \}$; $\oplus \notin K_1, K_S$

$F_5 = \{ \downarrow \}$

$F_6 = \{ \mid \}$

55. Порядок доказательства полноты произвольной системы булевых функций.

Коротко говоря, показываем, что для каждого из классов K0, K1, Ks, Kl, Km, найдется такая функция из системы, не принадлежащая ему. Если в наборе функций для каждого класса есть 0, т.е. есть такие функции,

fi	k0	k1	ks	kl	km
f1	+	-	-	-	-
f2	-	+	+	-	+

Если есть “-” для каждого класса - функционально полная, иначе нет, надо добавлять функцию

Для доказательства полноты системы функций достаточно вычислить их принадлежность классам Поста: 1. Принадлежность K_0 - поставим во все функции нулевой набор и сравним значения функций с 0. 2. Принадлежность K_1 - аналогично K_0, но подставим единичный набор и сравним с 1. 3. Принадлежность классу K_S - Для опровержения принадлежности функций (проверка выполнения для каждой) достаточно найти два противоположных набора σ_1 и σ_2, таких, что $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$. Если таких наборов нет, функция принадлежит классу. 4. Принадлежность классу K_M - для опровержения принадлежности классу достаточно двух наборов σ_1 и σ_2 таких, что $\sigma_1 \geq \sigma_2$, а $f(\sigma_1) < f(\sigma_2)$. Если таких наборов нет, функция принадлежит классу. 5. Принадлежность классу K_L - необходимо для каждой функции найти полином Жегалкина. Если полином линеен, функция принадлежит классу. Для этого используется метод неопределенных коэффициентов. Записывается общий полином неопределенными коэффициентами порядка n. Далее подставляются такие значения, чтобы найти коэффициенты, учитывая правила: $x \wedge 0 = 0$; $x \oplus 0 = x$. 6. Определение полноты - если хотя бы в 1 класс Поста входят все функции системы, она неполная.

ТЫ

ПИДОР)