

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

**по домашнему заданию**

**Дисциплина:** Дискретная математика

(И.О. Фамилия)

(И.О. Фамилия)

Москва, 2021

# Задание

16 вариант

*Общая формулировка задания:*

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей  $\Omega$  пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток  $\varphi_{\max}$ , доставляемый от источника  $s = x_1$  к стоку  $t = x_{12}$  и указать минимальный разрез, отделяющий  $t$  от  $s$ .

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица  $\Omega$ : см. по номеру варианта.

*Матрица весов:*

**Вариант 16.**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
$x_1$	–	17	23	8	14	–	–	–	–	–	–	–
$x_2$	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	5
$x_3$	–	–	–	30	–	21	11	–	–	–	–	–
$x_4$	–	–	–	–	–	5	–	14	–	–	–	–
$x_5$	–	–	–	2	–	–	–	5	–	26	–	–
$x_6$	–	8	–	–	–	–	6	–	–	–	–	15
$x_7$	–	–	–	–	–	–	–	–	13	–	7	–
$x_8$	–	–	–	–	–	–	6	–	2	1	–	–
$x_9$	–	–	–	–	–	22	–	–	–	–	9	11
$x_{10}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6
$x_{11}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	–	16
$x_{12}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

## Теоретические сведения

Теорема 1: Если  $(s, \dots, x_i, \dots, t)$  — путь от источника к стоку и все ребра на этом пути ненасыщенные, то величину потока на этом пути и, следовательно, во всей сети, можно увеличить на значение  $\delta^*$ .

$$\text{Где } \delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}.$$

Теорема 2: Если  $(s, \dots, x_i, \dots, t)$  — маршрут от источника к стоку, такой, что все прямые ребра на нем ненасыщенные, а поток по всем обратным ребрам строго  $>0$  (такой маршрут назовем увеличивающим), тогда на всех прямых ребрах такого маршрута поток  $\varphi$  можно увеличить на  $\varepsilon^*$ , а на все обратных — уменьшить на  $\varepsilon^*$ . При этом поток в сети возрастет на  $\varepsilon^*$ .

$$\text{Где } \varepsilon^* = \min\{\delta^*, \varphi^*\},$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_i, x_j)\}$$

Теорема 3: Поток в сети достигает максимального значения  $\varphi_{\max}$  тогда и только тогда, когда в сети не существует ни одного увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (теорема Форда-Фалкерсона): Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока  $\varphi_{\max}$  от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

# Решение

Изобразим заданную сеть графически в соответствии с матрицей  $\Omega$  пропускных способностей ориентированных ребер.

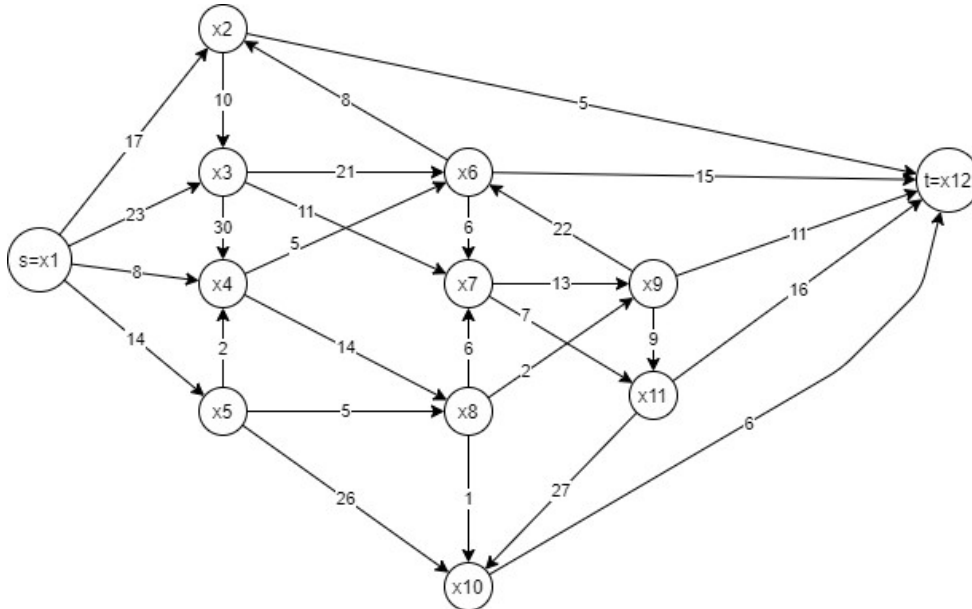


Рисунок 1 — вид исходной сети

## I. Достижение полного потока

1) Зададим начальное значение потока через все дуги (и соответственно через всю сеть)  $\varphi_i = 0$  для  $\forall i \in [1;12]$ . Далее будем увеличивать поток в сети согласно теореме 1.

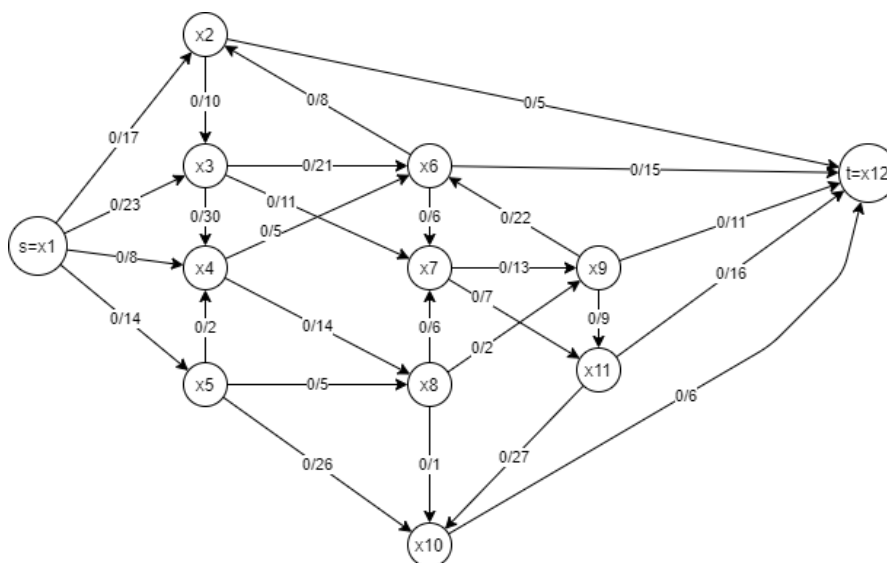


Рисунок 2 — сеть с нулевым потоком

2) Рассмотрим путь  $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$ , увеличив поток на пути  $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_6), \delta(x_6, x_{12}) \} = \min \{ 23, 11, 13, 22, 15 \} = 11$$

Дуга  $(x_3, x_7)$  стала насыщенной.

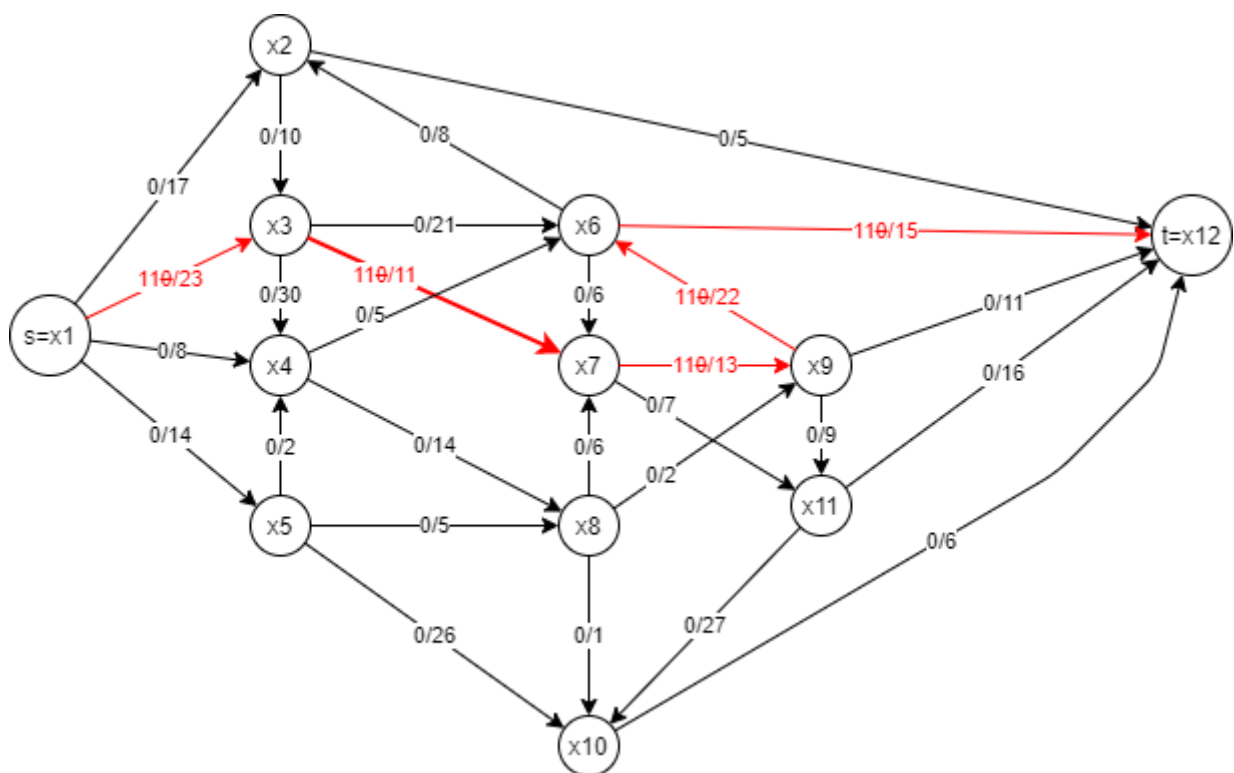


Рисунок 3 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_3, x_7, x_9, x_6, x_{12})$

3) Рассмотрим путь  $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_6), \delta(x_6, x_2), \delta(x_2, x_{12}) \} = \min \{ 8, 5, 8, 5 \} = 5$$

Дуги  $(x_4, x_6)$  и  $(x_2, x_{12})$  стали насыщенными.

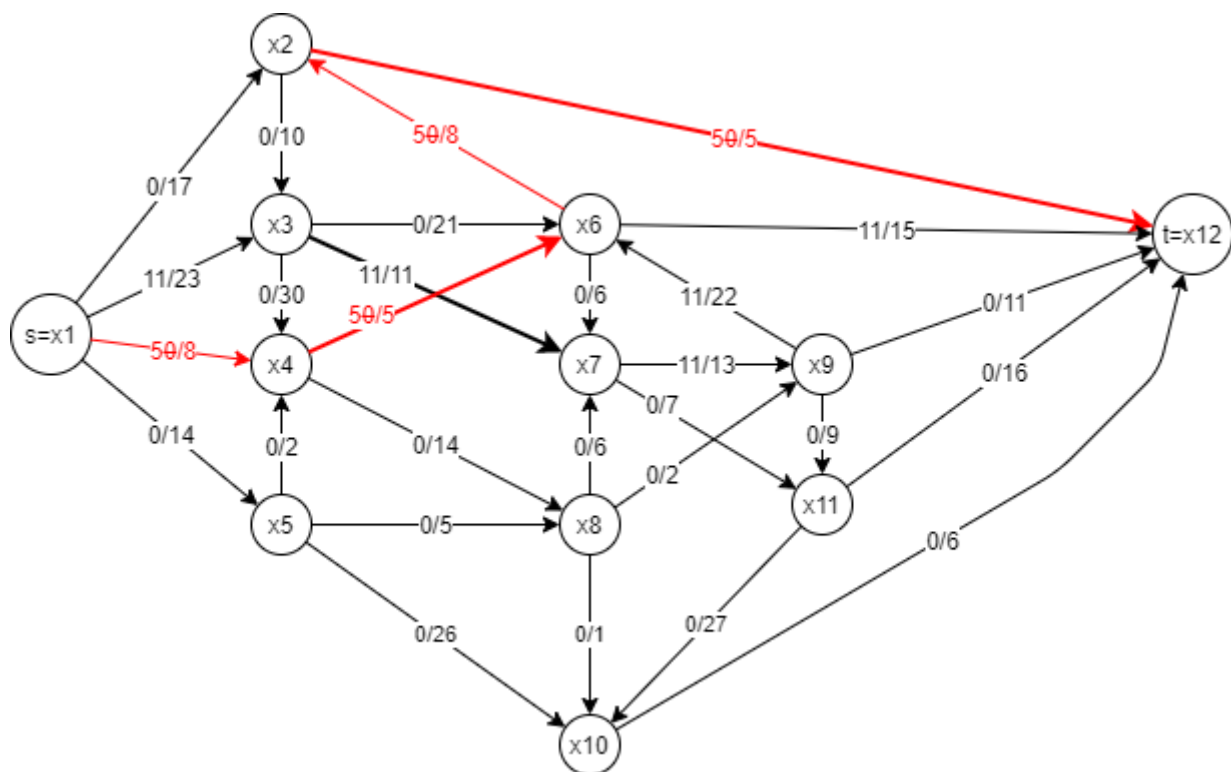


Рисунок 4 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_4, x_6, x_2, x_{12})$

4) Рассмотрим путь  $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ .

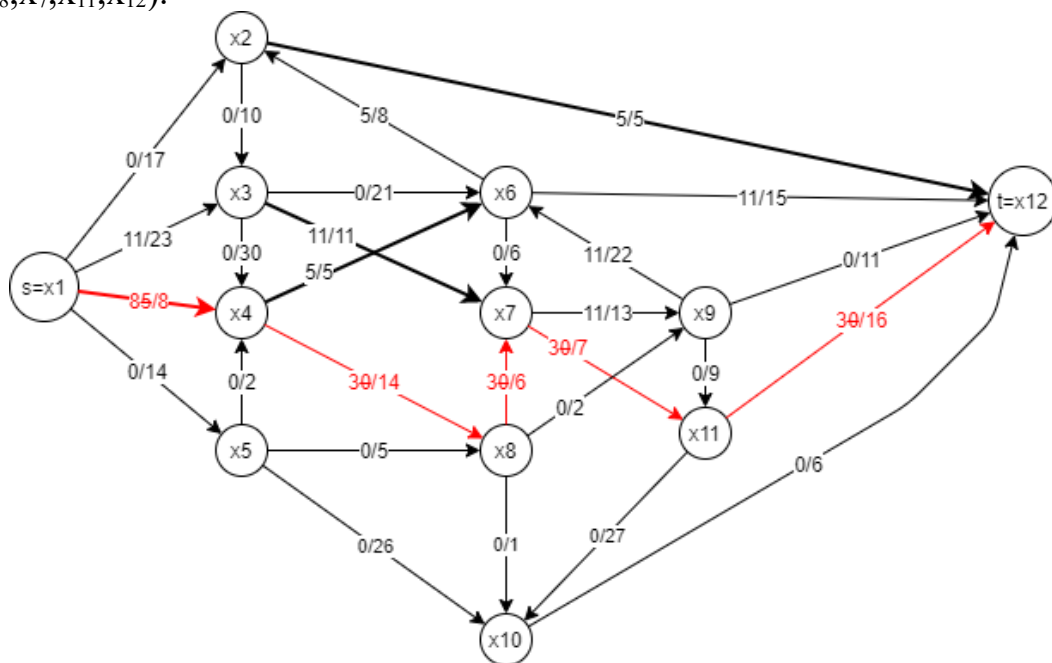


Рисунок 5 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$

$$\delta^*(x_1, x_4, x_8, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{3, 14, 6, 7, 16\} = 3$$

Дуга  $(x_1, x_4)$  стала насыщеннной

5) Рассмотрим путь  $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_4), \delta(x_4, x_8), \delta(x_8, x_9), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{14, 2, 11, 2, 11\} = 2$$

Дуги  $(x_5, x_4)$  и  $(x_8, x_9)$  стали насыщенными.

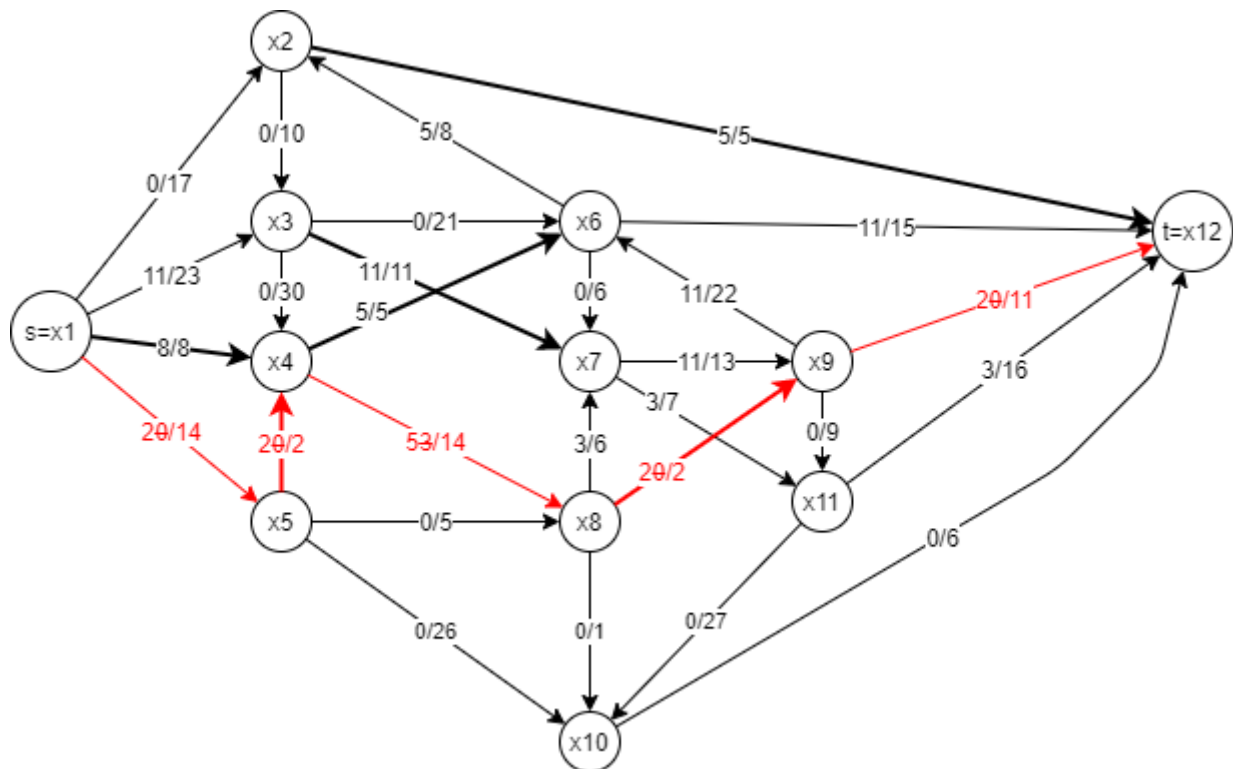


Рисунок 6 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_5, x_4, x_8, x_9, x_{12})$

б) Рассмотрим путь  $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_5, x_{10}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_{10}), \delta(x_{10}, x_{12})\} = \min\{12, 26, 6\} = 6$$

Дуга  $(x_{10}, x_{12})$  стала насыщенной.

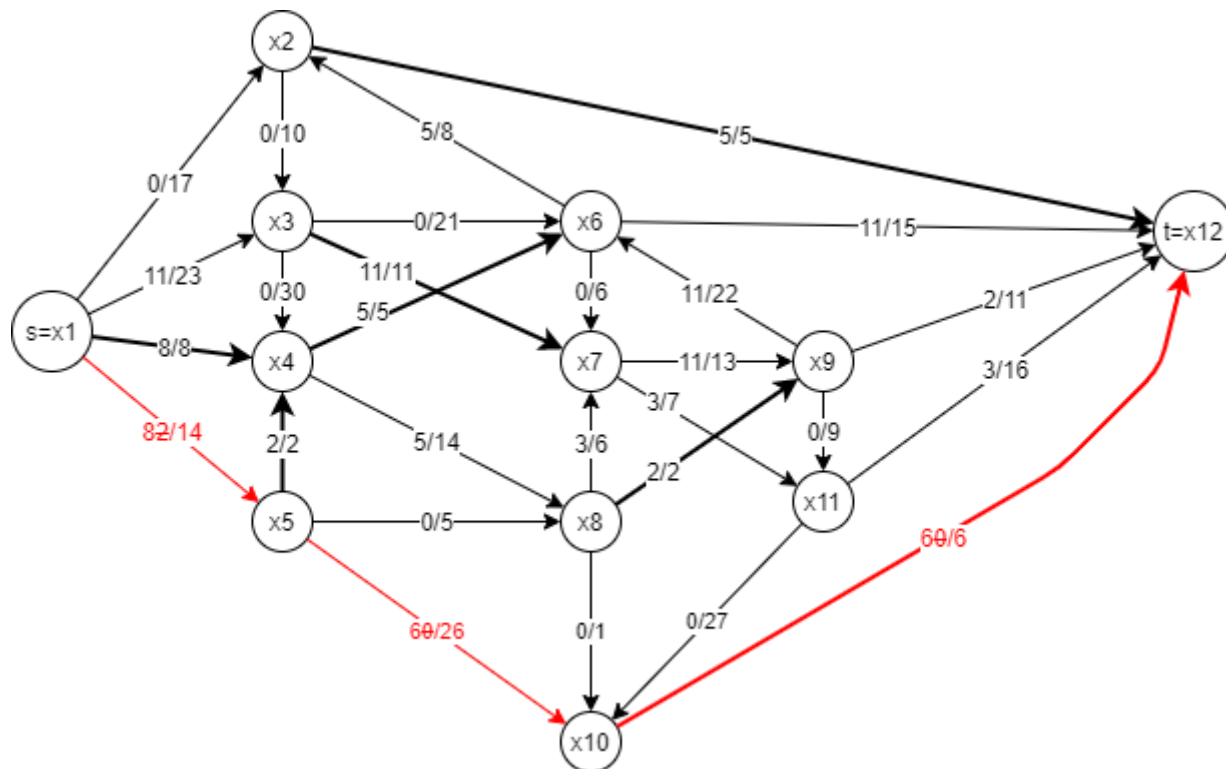


Рисунок 7 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_5, x_{10}, x_{12})$

7) Рассмотрим путь  $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_5), \delta(x_5, x_8), \delta(x_8, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{6, 5, 3, 4, 13\} = 3$$

Дуга  $(x_8, x_7)$  стала насыщенной.



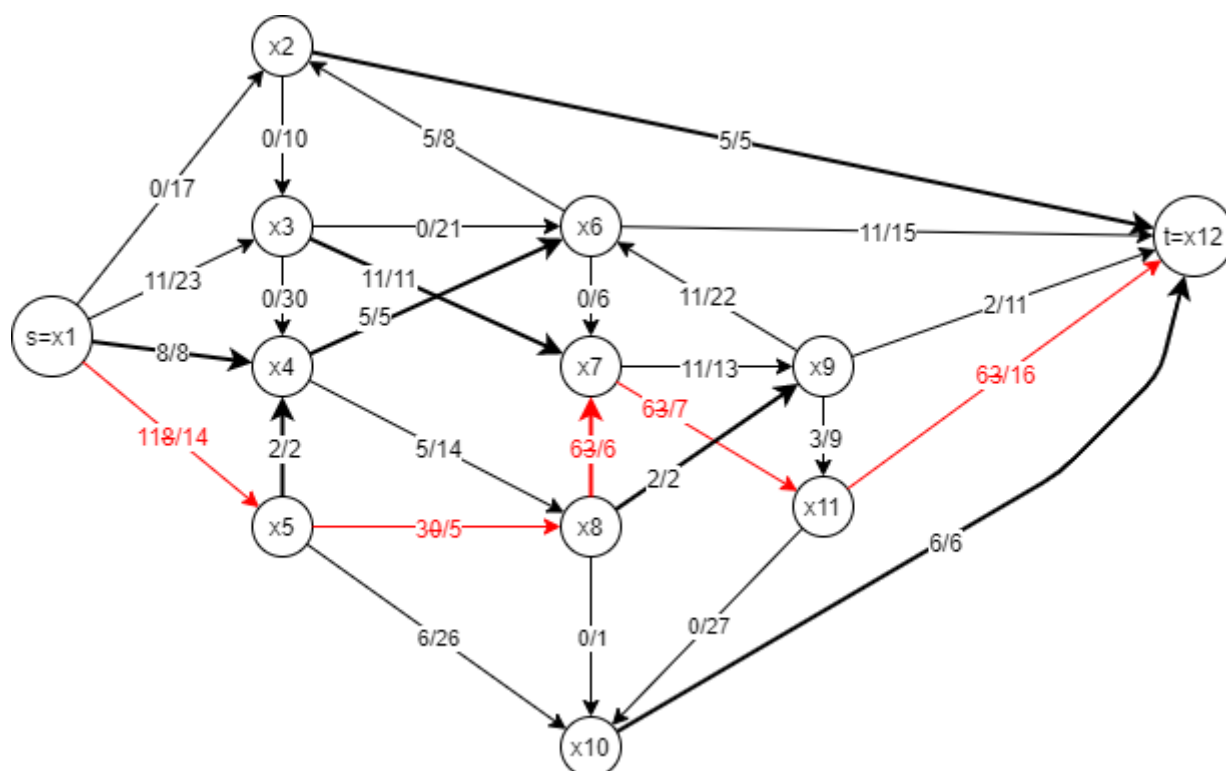


Рисунок 8 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_5, x_8, x_7, x_{11}, x_{12})$

8) Рассмотрим путь  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12}) = \min \{ \delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_{12}) \} = \min \{ 17, 10, 21, 4 \} = 3$$

Дуга  $(x_6, x_{12})$  стала насыщенной.

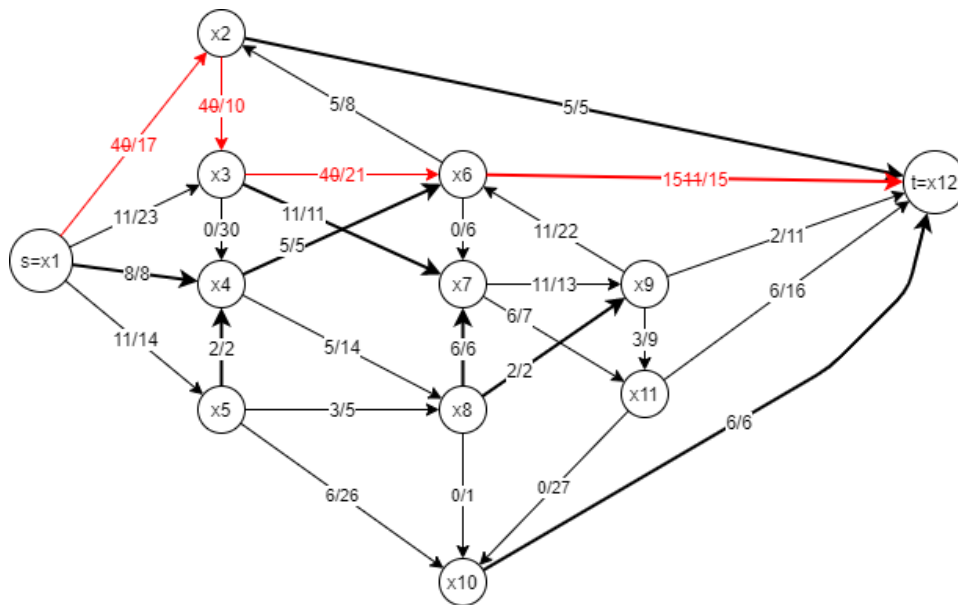


Рисунок 9 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_{12})$

9) Рассмотрим путь  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_{11}), \delta(x_{11}, x_{12})\} = \min\{13, 6, 17, 6, 1, 10\} = 1$$

Дуга  $(x_7, x_{11})$  стала насыщенной.

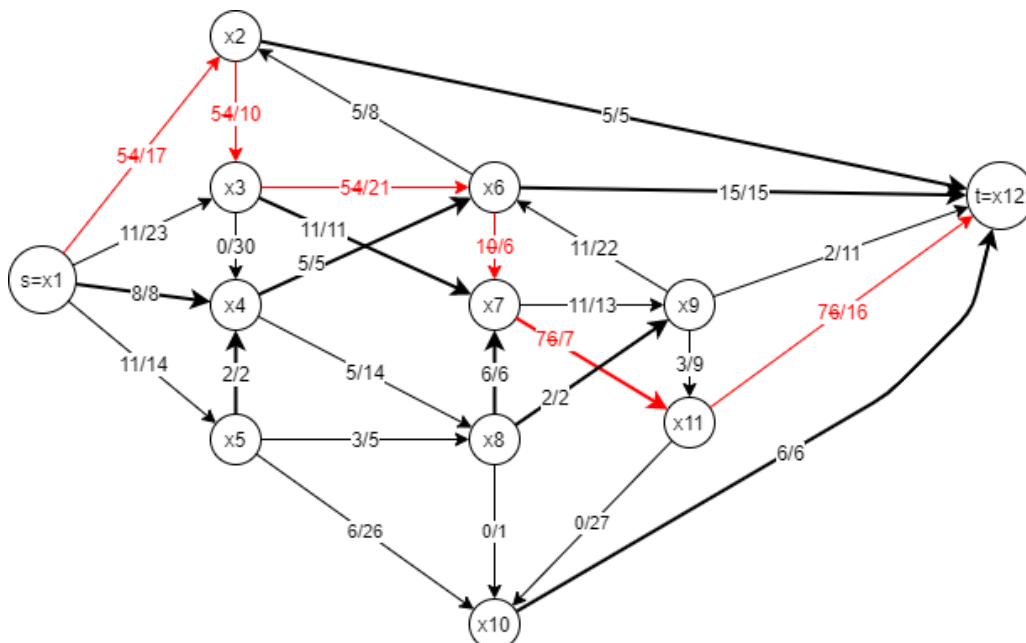


Рисунок 10 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_{11}, x_{12})$

10) Рассмотрим путь  $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$  от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на  $\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$  увеличив поток на пути  $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$  на значение  $\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$ .

$$\delta^*(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12}) = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_6, x_7), \delta(x_7, x_9), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{12, 16, 5, 2, 9\} = 2$$

Дуга  $(x_7, x_9)$  стала насыщенной.

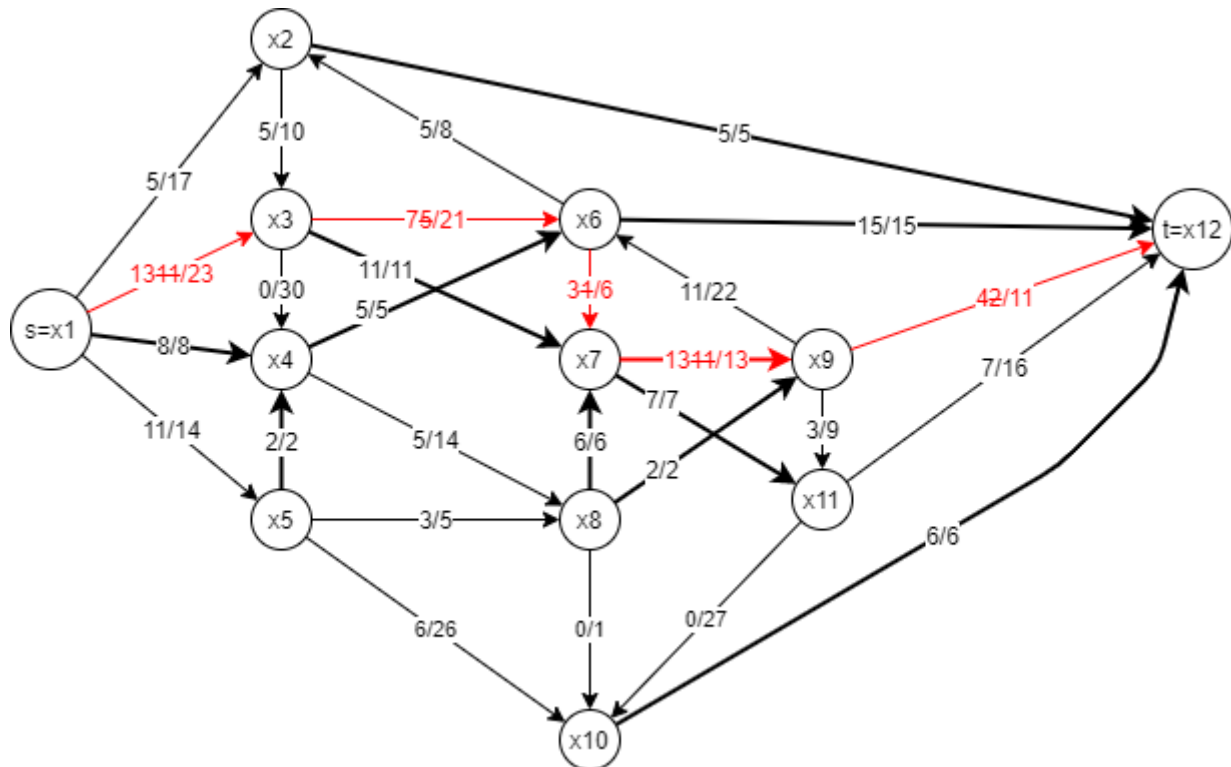


Рисунок 11 — увеличение потока на пути  $(x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{12})$

Итак, не существует путей из источника в сток, не включающих насыщенных дуг, следовательно, был получен полный поток в сети:

$$\varphi_{\text{полн}} = \sum \varphi(s, x_i) = \sum \varphi(x_i, t) = 5 + 13 + 8 + 11 = 5 + 15 + 4 + 7 + 6 = 37$$

Теперь проведем оптимизацию сети, опираясь на теоремы 2 и 3.

## II. Достижение максимального потока

Для достижения максимального потока посредством оптимизации сети согласно теореме 2 будем искать увеличивающие маршруты в сети и корректировать значение потока в их дугах.

11) Рассмотрим маршрут  $(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$ . Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на величины  $\varepsilon^*(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$  согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину  $\varepsilon^*(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9, x_6)\} = \min\{11\} = 11$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{12})\} = \min\{10, 14, 7\} = 7$$

$$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{11, 7\} = 7$$

Дуга  $(x_9, x_{12})$  стала насыщенной

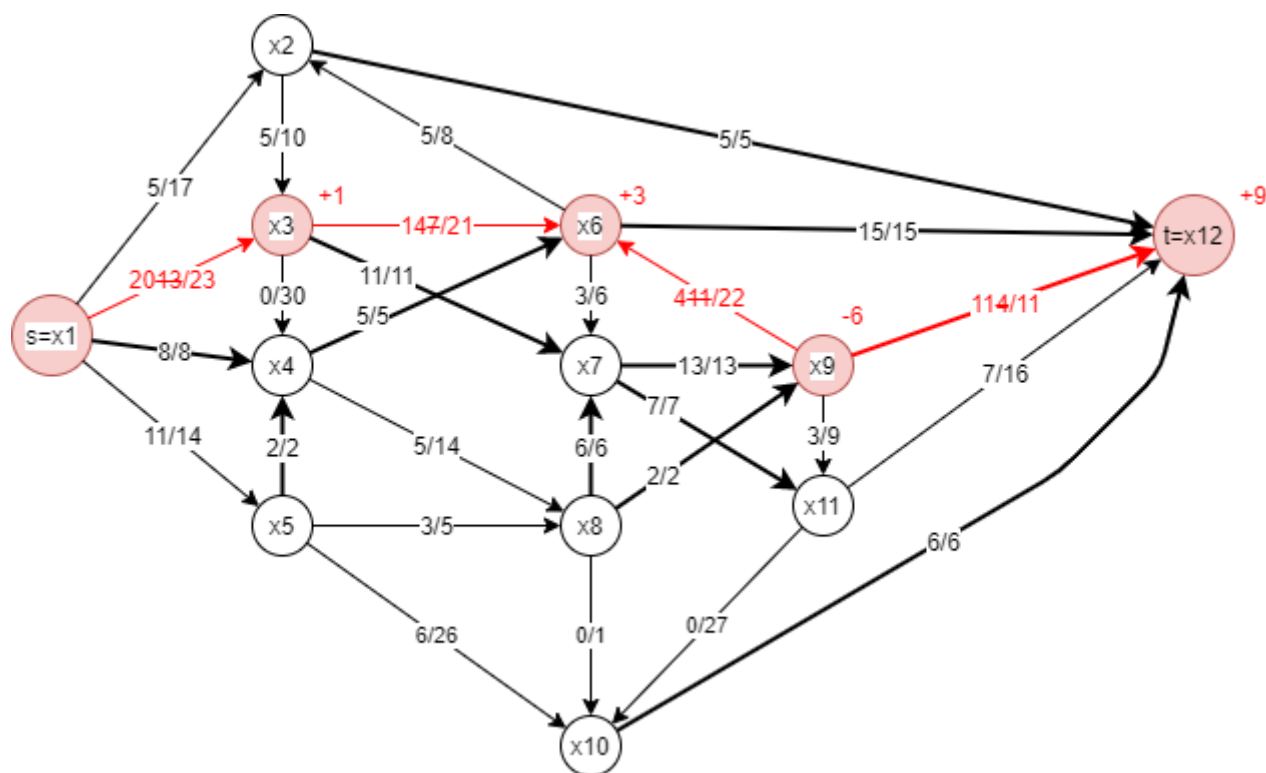


Рисунок 12 — увеличивающий маршрут  $(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{12})$

12) Рассмотрим маршрут  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$ . Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на  $\varepsilon^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$  согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину  $\varepsilon^*(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$

$$\varphi^* = \min\{\varphi(x_9, x_6)\} = \min\{4\} = 4$$

$$\delta^* = \min\{\delta(x_1, x_2), \delta(x_2, x_3), \delta(x_3, x_6), \delta(x_9, x_{11})\} = \min\{12, 5, 7, 6, 9\} = 6$$

$$\varepsilon^* = \min\{\varphi^*, \delta^*\} = \min\{4, 6\} = 4$$

Дуга  $(x_9, x_6)$  имеет теперь  $\varphi(x_9, x_6) = 0$

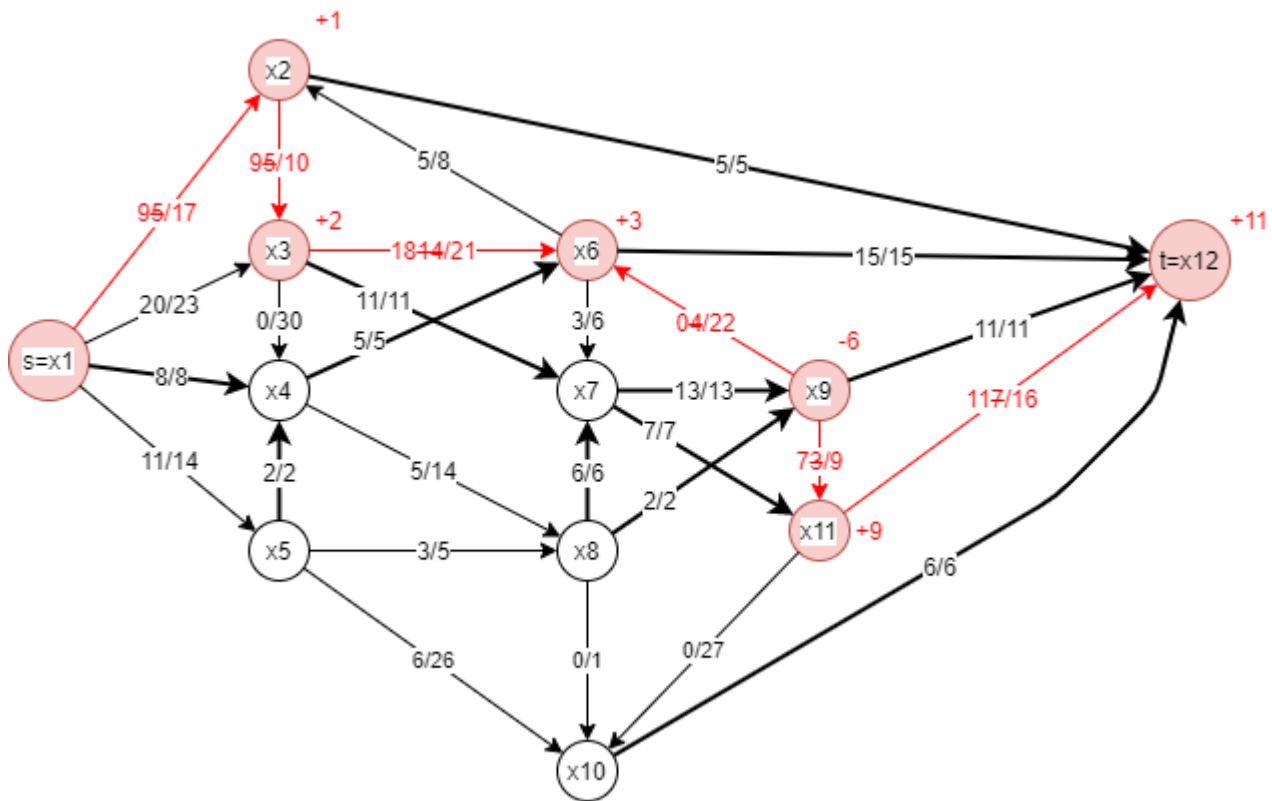


Рисунок 13 — увеличивающий маршрут  $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{11}, x_{12})$

13) Как видно на рисунке 14, найти еще один увеличивающий маршрут не удалось, следовательно, по теореме 3, был достигнут максимальный поток  $\varphi_{\max}$

$$\varphi_{\max} = \sum \varphi(s, x_i) = \sum \varphi(x_i, t) = 9 + 20 + 8 + 11 = 5 + 15 + 11 + 11 + 6 = 48$$

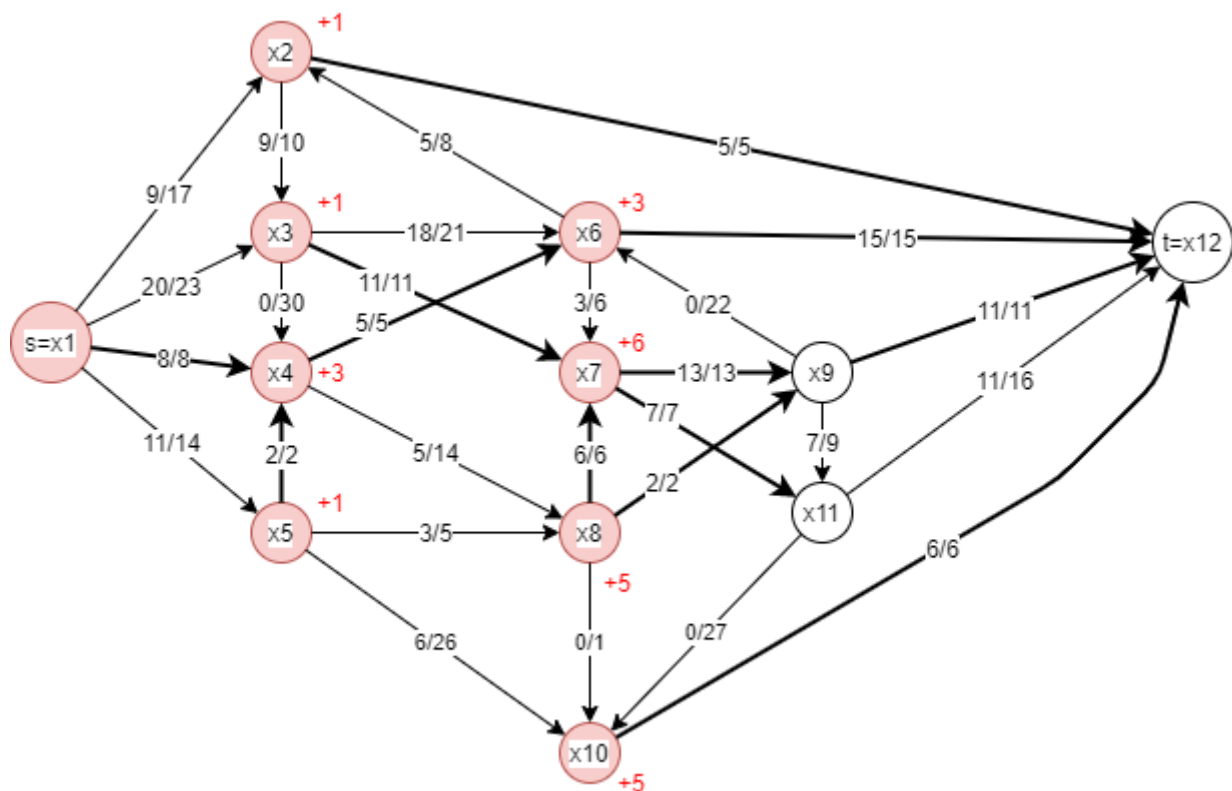


Рисунок 14 — поиск увеличивающего маршрута

### III. Построение минимального разреза

Отделим помеченные вершины от непомеченных (рисунок 15) и выпишем насыщенные дуги, составляющие минимальный разрез.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$$

$$A' = \{x_9, x_{11}, x_{12}\}$$

$$\text{Минимальный разрез: } (A \rightarrow A') = \{(x_2, x_{12}), (x_6, x_{12}), (x_7, x_9), (x_7, x_{11}), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{12})\}$$

Согласно теореме Форда-Фалкерсона, величина  $\varphi_{\max}$  максимального потока в сети равна  $c(A' \rightarrow A)$ .

$$c(A \rightarrow A') = c(x_2, x_{12}) + c(x_6, x_{12}) + c(x_7, x_9) + c(x_7, x_{11}) + c(x_8, x_9) + c(x_{10}, x_{12}) = 5 + 15 + 13 + 7 + 2 + 6 = 48$$

Значение совпало с величиной  $\varphi_{\max}$ , найденной в пункте II, следовательно, согласно теореме 4, задача решена верно.

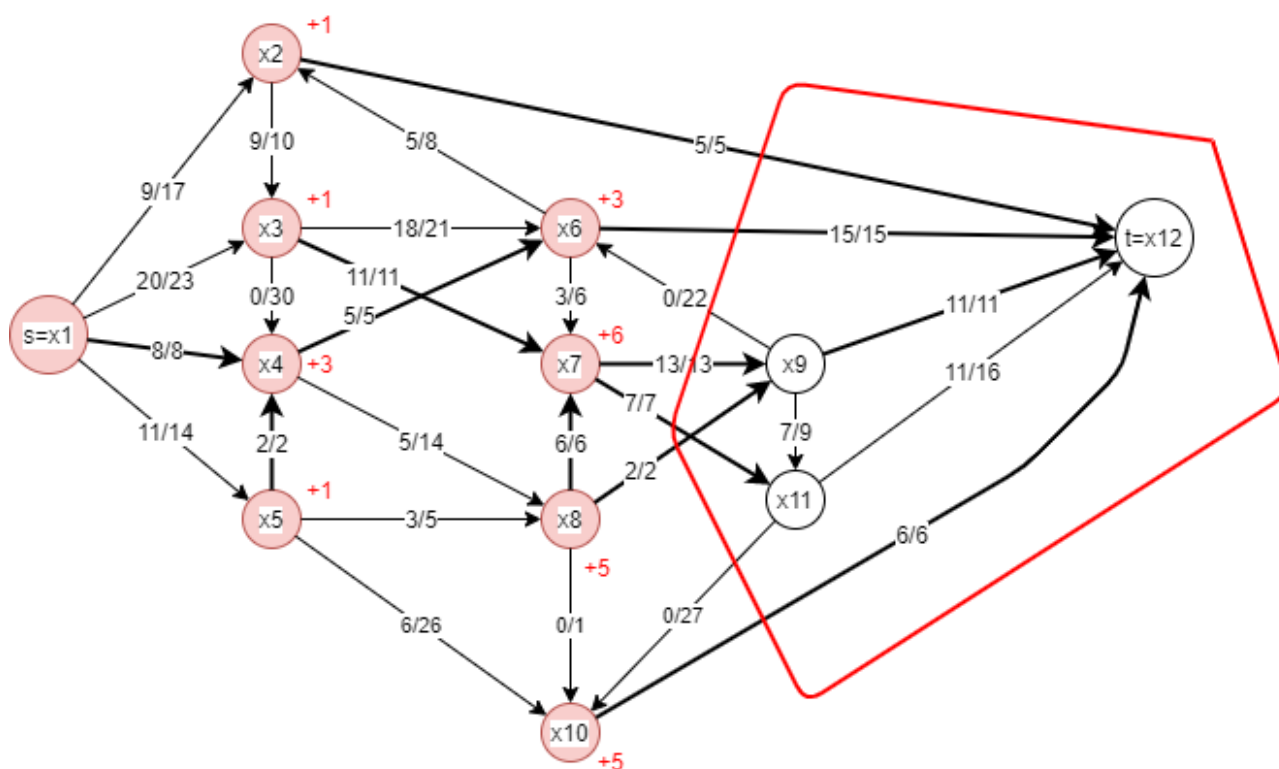


Рисунок 15 — построение минимального разреза

Вывод:

- В ходе данной работы с помощью теоремы 1 за 10 шагов был найден полный поток сети  $\varphi_{\text{полн.}}$ . Затем, за еще 3 шага с помощью теорем 2 и 3 был найден максимальный поток в сети  $\varphi_{\text{max.}}$ . Затем был найден минимальный разрез сети, его пропускная способность совпала с максимальным потоком в сети, следовательно задача была решена верно (в соответствии с теоремой 4).

Максимальный поток в сети:  $\varphi_{\text{max}} = 48$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}\}$

$A' = \{x_9, x_{11}, x_{12}\}$

Минимальный разрез:  $(A \rightarrow A') = \{(x_2, x_{12}), (x_6, x_{12}), (x_7, x_9), (x_7, x_{11}), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{12})\}$

- В ходе данной работы были освоены навыки применения алгоритма Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока и минимального разреза в сети (с помощью теорем, перечисленных в теоретической части).