|  |  |
| --- | --- |
| **Gerb-BMSTU_01** | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **им. Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ **Информатика и системы управления**

КАФЕДРА **Компьютерные системы и сети (ИУ6)**

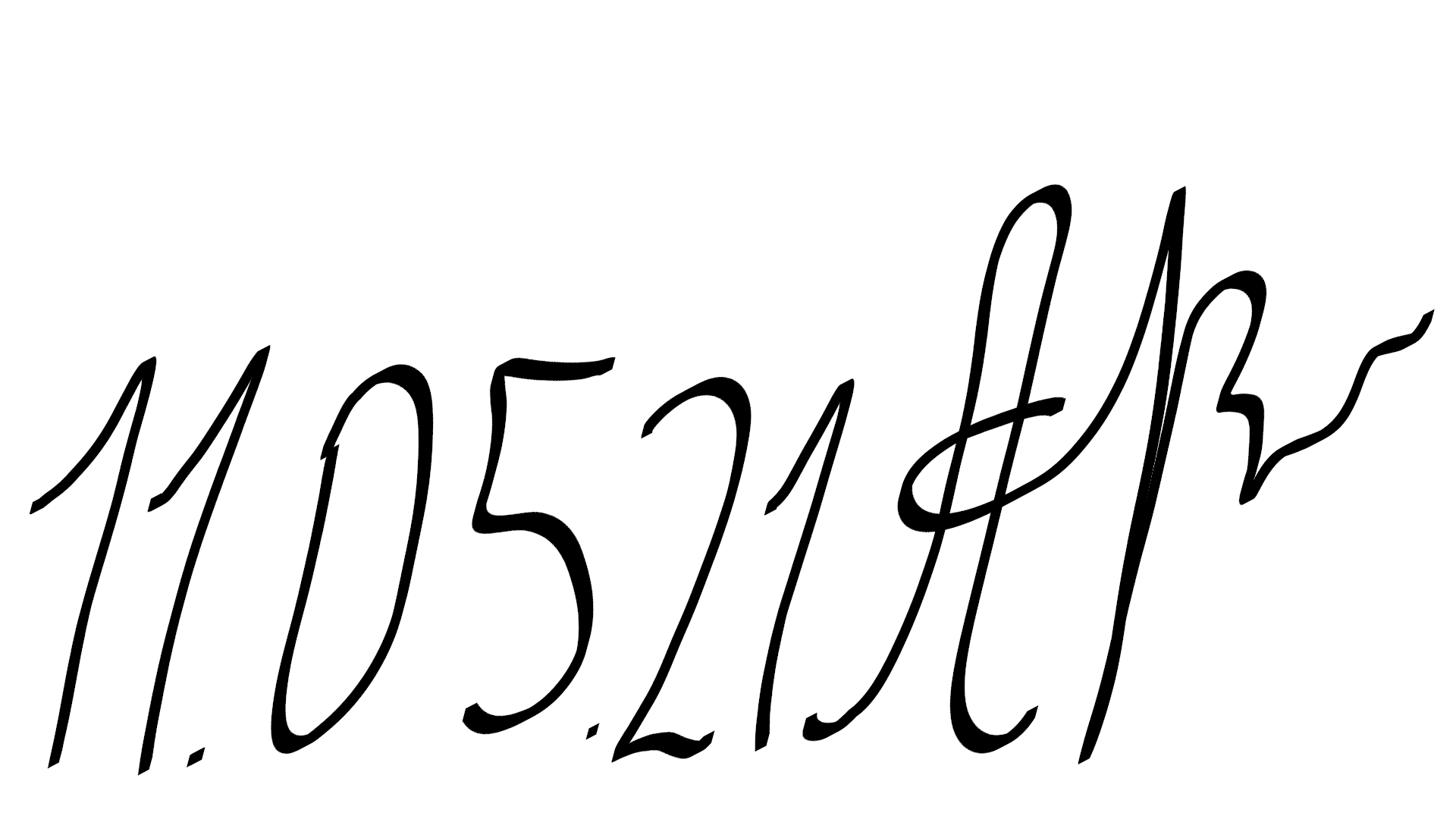
НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

**Отчет**

**по домашнему заданию**

**Тема:** Поток в транспортной сети. Алгоритм Форда-Фалкерсона

**Дисциплина:** Дискретная математика



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Студент | ИУ6-42Б |  |  | С.В. Астахов |
|  | (Группа) |  | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |
|  |  |  |  |  |
| Преподаватель |  |  |  | В.В. Гуренко |
|  |  |  | (Подпись, дата) | (И.О. Фамилия) |

Москва, 2021

Задание

16 вариант

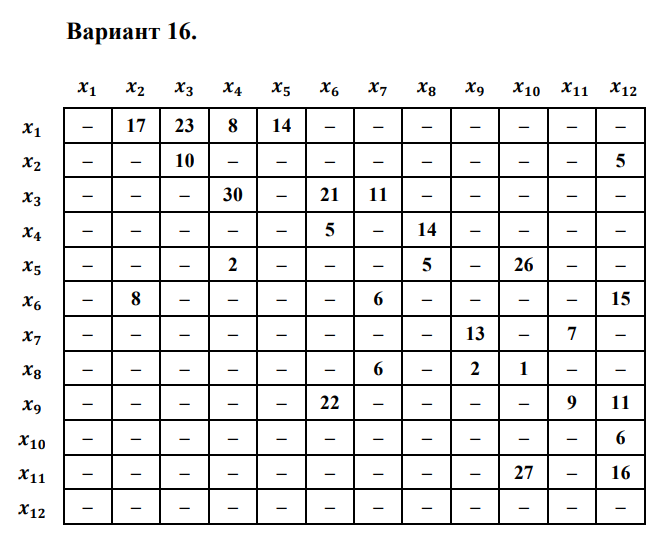
*Общая формулировка задания:*

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток 𝜑𝑚𝑎𝑥 , доставляемый от источника 𝑠 = 𝑥1 к стоку 𝑡 = 𝑥12 и указать минимальный разрез, отделяющий 𝑡 от 𝑠.

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Матрица Ω: см. по номеру варианта.

*Матрица весов:*



Теоретические сведения

Теорема 1: Если (s, …, xi, …, t) — путь от источника к стоку и все ребра на этом пути ненасыщенные, то величину потока на этом пути и, следовательно, во всей сети, можно увеличить на значение δ\*.

Где δ\* = min{δ(xi, xj)} = min{c(xi, xj) - 𝜑(xi, xj)}.

Теорема 2: Если (s, …, xi, …, t) — маршрут от источника к стоку, такой, что все прямые ребра на нем ненасыщенные, а поток по всем обратным ребрам строго >0 (такой маршрут назовем увеличивающим), тогда на всех прямых ребрах такого маршрута поток 𝜑 можно увеличить на ε\*, а на все обратных — уменьшить на ε\*. При этом поток в сети возрастет на ε\*.

Где ε\*= min{δ\*, 𝜑\*},

δ\* = min{δ(xi, xj)} = min{c(xi, xj) - 𝜑(xi, xj)}

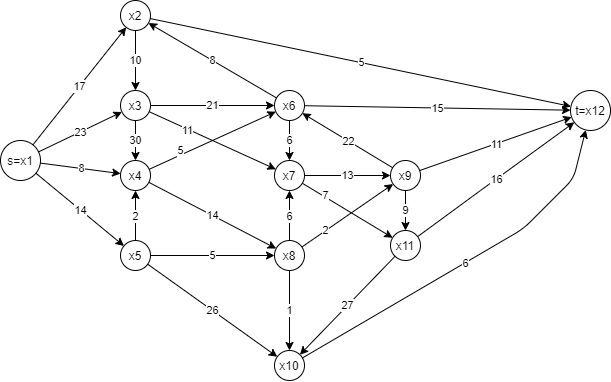
𝜑\* = min{𝜑(xi, xj)}

Теорема 3: Поток в сети достигает максимального значения 𝜑max тогда и только тогда, когда в сети не существует ни одного увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (теорема Форда-Фалкерсона): Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока 𝜑max от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.

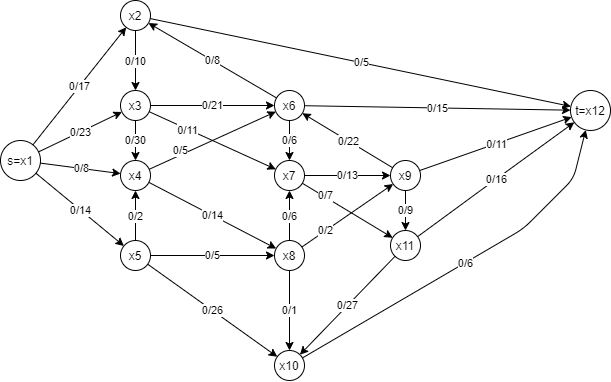
Решение

Изобразим заданную сеть графически в соответствии с матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер.

Рисунок 1 — вид исходной сети

I. Достижение полного потока

1) Зададим начальное значение потока через все дуги (и соответственно через всю сеть) 𝜑i = 0 для . Далее будем увеличивать поток в сети согласно теореме 1.

Рисунок 2 — сеть с нулевым потоком

2) Рассмотрим путь (x1,x3,x7,x9,x6,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x3,x7,x9,x6,x12), увеличив поток на пути (x1,x3,x7,x9,x6,x12) на значение δ\*(x1,x3,x7,x9,x6,x12).

δ\*(x1,x3,x7,x9,x6,x12) = min{δ(x1, x3), δ(x3, x7), δ(x7, x9), δ(x9, x6), δ(x6,x12)} = min{23, 11, 13, 22, 15} = 11

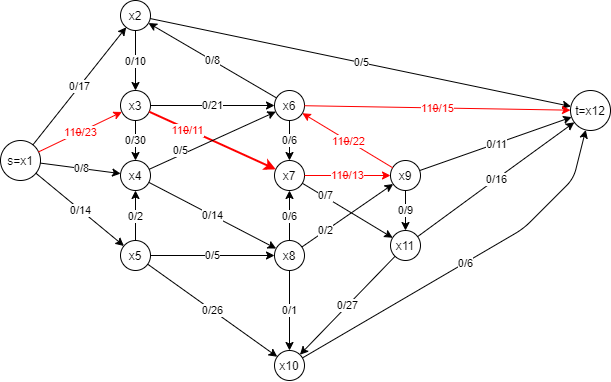
Дуга (x3,x7) стала насыщенной.

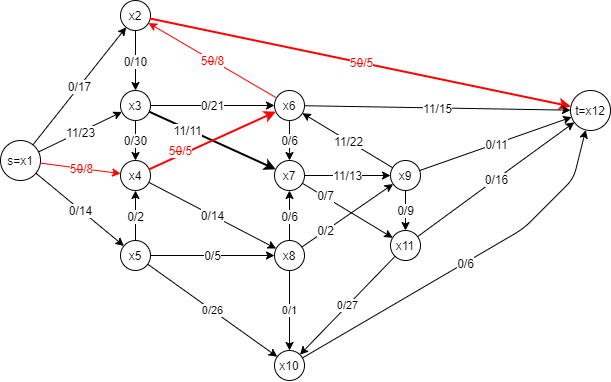
Рисунок 3 — увеличение потока на пути (x1,x3,x7,x9,x6,x12)

3) Рассмотрим путь (x1,x4,x6,x2,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x4,x6,x2,x12) увеличив поток на пути (x1,x4,x6,x2,x12) на значение δ\*(x1,x4,x6,x2,x12).

δ\*(x1,x4,x6,x2,x12) = min{δ(x1, x4), δ(x4, x6), δ(x6, x2), δ(x2, x12)} = min{8, 5, 8, 5} = 5

Дуги (x4,x6) и (x2,x12) стали насыщенными.

Рисунок 4 — увеличение потока на пути (x1,x4,x6,x2,x12)

4) Рассмотрим путь (x1,x4,x8,x7,x11,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

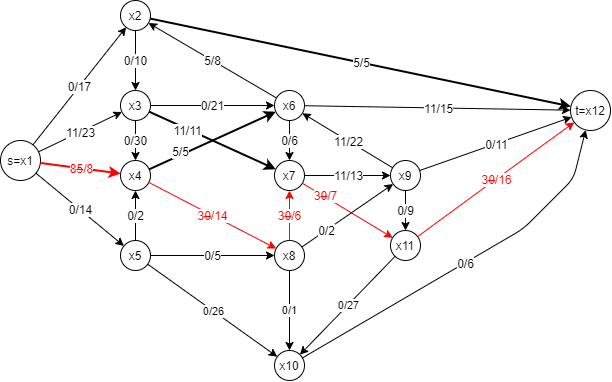
δ\*(x1,x4,x8,x7,x11,x12) увеличив поток на пути (x1,x4,x8,x7,x11,x12) на значение δ\*(x1,x4,x8,x7,x11,x12).

Рисунок 5 — увеличение потока на пути (x1,x4,x8,x7,x11,x12)

δ\*(x1,x4,x8,x7,x11,x12)= min{δ(x1, x4), δ(x4, x8), δ(x8, x7), δ(x7, x11), δ(x11, x12)} = min{3, 14, 6, 7, 16} = 3

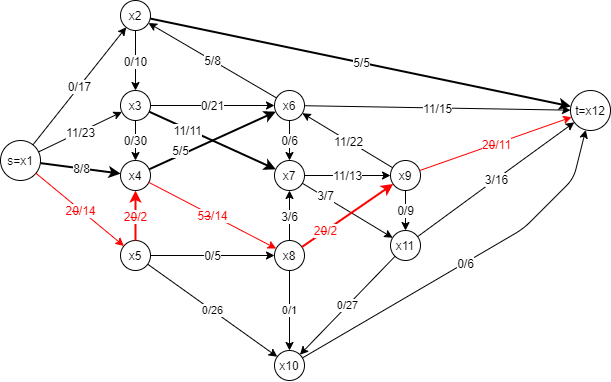
Дуга (x1,x4) стала насыщенной

5) Рассмотрим путь (x1,x5,x4,x8,x9,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x5,x4,x8,x9,x12) увеличив поток на пути (x1,x5,x4,x8,x9,x12) на значение δ\*(x1,x5,x4,x8,x9,x12).

δ\*(x1,x5,x4,x8,x9,x12) = min{δ(x1, x5), δ(x5, x4), δ(x4, x8), δ(x8, x9), δ(x9, x12)} = min{14, 2, 11, 2, 11} = 2

Дуги (x5,x4) и (x8,x9) стали насыщенными.

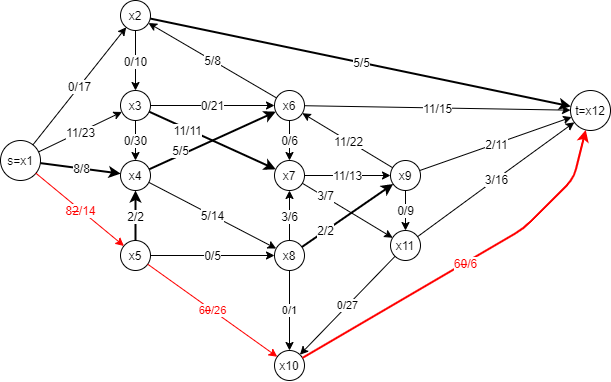
Рисунок 6 — увеличение потока на пути (x1,x5,x4,x8,x9,x12)

6) Рассмотрим путь (x1,x5,x10,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x5,x10,x12) увеличив поток на пути (x1,x5,x10,x12) на значение δ\*(x1,x5,x10,x12).

δ\*(x1,x5,x10,x12) = min{δ(x1, x5), δ(x5, x10), δ(x10, x12)} = min{12, 26, 6} = 6

Дугa (x10,x12) стала насыщенной.

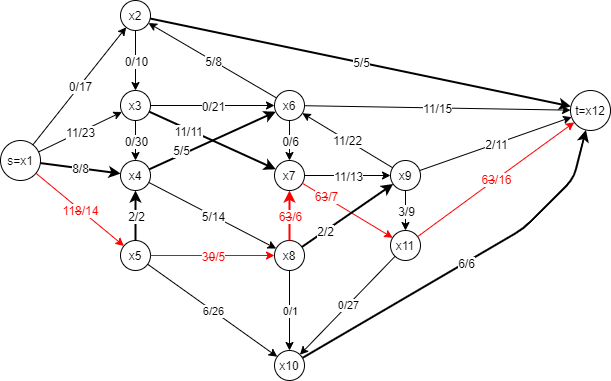
Рисунок 7 — увеличение потока на пути (x1,x5,x10,x12)

7) Рассмотрим путь (x1,x5,x8,x7,x11,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x5,x8,x7,x11,x12) увеличив поток на пути (x1,x5,x8,x7,x11,x12) на значение δ\*(x1,x5,x8,x7,x11,x12).

δ\*(x1,x5,x8,x7,x11,x12) = min{δ(x1, x5), δ(x5, x8), δ(x8, x7), δ(x7, x11), δ(x11, x12)} = min{6, 5, 3, 4, 13} = 3

Дугa (x8,x7) стала насыщенной.

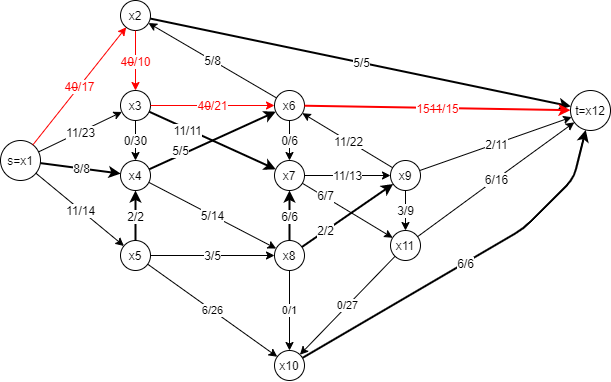
Рисунок 8 — увеличение потока на пути (x1,x5,x8,x7,x11,x12)

8) Рассмотрим путь (x1,x2,x3,x6,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x2,x3,x6,x12) увеличив поток на пути (x1,x2,x3,x6,x12) на значение δ\*(x1,x2,x3,x6,x12).

δ\*(x1,x2,x3,x6,x12) = min{δ(x1, x2), δ(x2, x3), δ(x3, x6), δ(x6, x12)} = min{17, 10, 21, 4} = 3

Дугa (x6,x12) стала насыщенной.

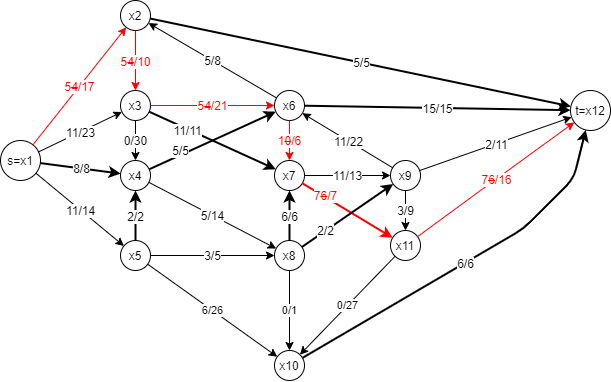
Рисунок 9 — увеличение потока на пути (x1,x2,x3,x6,x12)

9) Рассмотрим путь (x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12) увеличив поток на пути (x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12) на значение δ\*(x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12).

δ\*(x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12) = min{δ(x1, x2), δ(x2, x3), δ(x3, x6), δ(x6, x7), δ(x7, x11), δ(x11, x12)} = min{13, 6, 17, 6, 1, 10} = 1

Дугa (x7,x11) стала насыщенной.

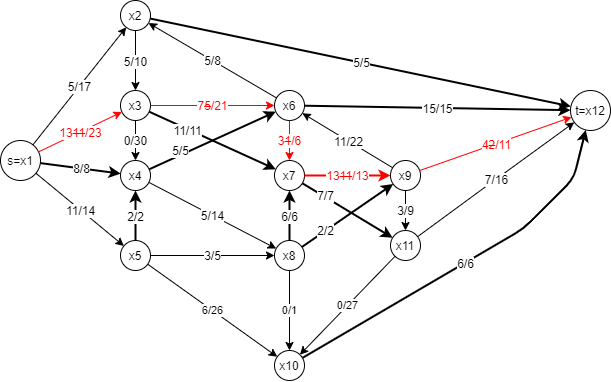
Рисунок 10 — увеличение потока на пути (x1,x2,x3,x6,x7,x11,x12)

10) Рассмотрим путь (x1,x3,x6,x7,x9,x12) от источника к стоку, состоящий из ненасыщенных дуг. Согласно теореме 1 можно увеличить поток во всей сети на

δ\*(x1,x3,x6,x7,x9,x12) увеличив поток на пути (x1,x3,x6,x7,x9,x12) на значение δ\*(x1,x3,x6,x7,x9,x12).

δ\*(x1,x3,x6,x7,x9,x12) = min{δ(x1, x3), δ(x3, x6), δ(x6, x7), δ(x7, x9), δ(x9, x11)} = min{12, 16, 5, 2, 9} = 2

Дугa (x7,x9) стала насыщенной.

Рисунок 11 — увеличение потока на пути (x1,x3,x6,x7,x9,x12)

Итак, не существует путей из источника в сток, не включающих насыщенных дуг, следовательно, был получен полный поток в сети:

𝜑полн= ∑𝜑(s, xi) = ∑𝜑(xi, t) = 5 + 13 + 8 + 11 = 5 + 15 + 4 +7 + 6 = 37

Теперь проведем оптимизацию сети, опираясь на теоремы 2 и 3.

II. Достижение максимального потока

Для достижения максимального потока посредством оптимизации сети согласно теореме 2 будем искать увеличивающие маршруты в сети и корректировать значение потока в их дугах.

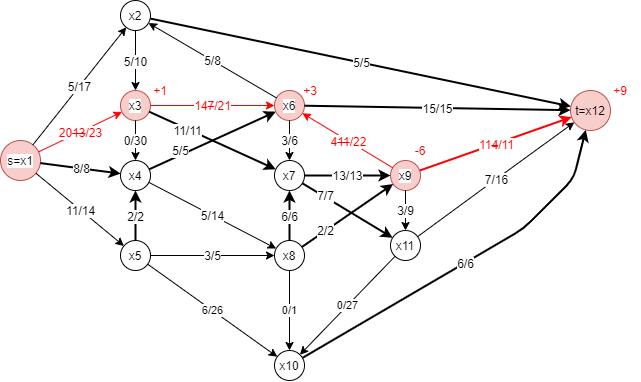
11) Рассмотрим маршрут (x1,x3,x6,x9,x12). Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на величины ε\*(x1,x3,x6,x9,x12) согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину ε\*(x1,x3,x6,x9,x12)

𝜑\* = min{𝜑(x9,x6)} = min{11} = 11

δ\* = min{δ(x1, x3), δ(x3, x6), δ(x9, x12)} = min{10, 14, 7} = 7

ε\* = min{𝜑\*, δ\*} = min{11, 7} = 7

Дуга (x9, x12) стала насыщенной

Рисунок 12 — увеличивающий маршрут (x1,x3,x6,x9,x12)

12) Рассмотрим маршрут (x1,x2,x3,x6,x9,x11,x12). Он является увеличивающим. Скорректируем величину потока в его дугах на ε\*(x1,x2,x3,x6,x9,x11,x12) согласно теореме 2. Тогда поток в сети вырастет так же на величину ε\*(x1,x2,x3,x6,x9,x11,x12)

𝜑\* = min{𝜑(x9,x6)} = min{4} = 4

δ\* = min{δ(x1, x2), δ(x2, x3), δ(x3, x6), δ(x9, x11)} = min{12, 5, 7, 6, 9} = 6

ε\* = min{𝜑\*, δ\*} = min{4, 6} = 4

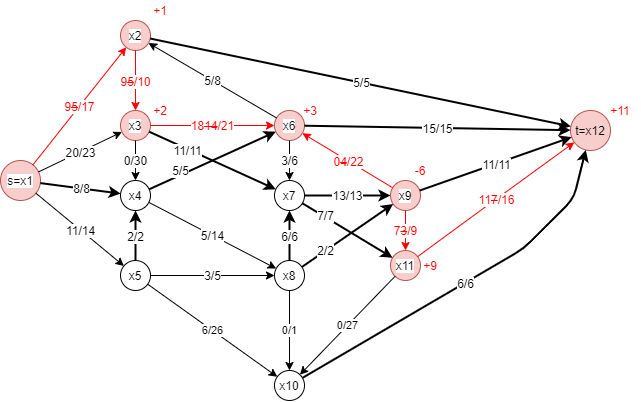
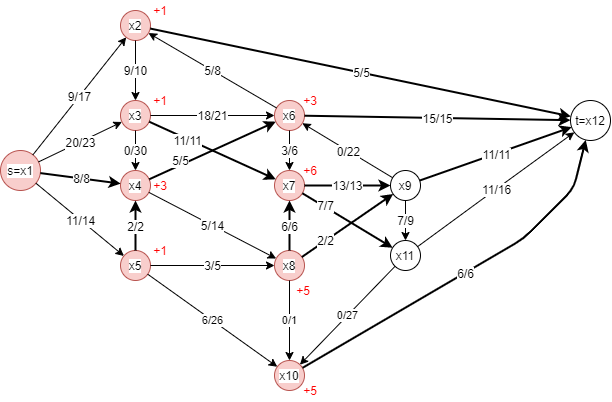
Дуга (x9,x6) имеет теперь 𝜑(x9,x6) = 0

Рисунок 13 — увеличивающий маршрут (x1,x2,x3,x6,x9,x11,x12)

13) Как видно на рисунке 14, найти еще один увеличивающий маршрут не удалось, следовательно, по теореме 3, был достигнут максимальный поток 𝜑max

𝜑max= ∑𝜑(s, xi) = ∑𝜑(xi, t) = 9 + 20 + 8 +11 = 5 + 15 + 11 + 11 + 6 = 48

Рисунок 14 — поиск увеличивающего маршрута

III. Построение минимального разреза

Отделим помеченные вершины от непомеченных (рисунок 15) и выпишем насыщенные дуги, составляющие минимальный разрез.

A = {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x10}

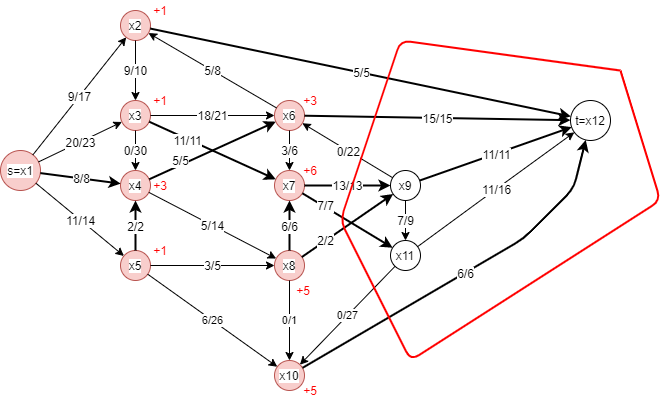
A’ = {x9,x11,x12}

Минимальный разрез: (A→A’) = {(x2,x12), (x6,x12), (x7,x9), (x7,x11), (x8,x9), (x10,x12)}

Согласно теореме Форда-Фалкерсона, величина 𝜑max максимального потока в сети равна c(A’ →A).

c(A→A’) = c(x2,x12) + c(x6,x12) + c(x7,x9) + c(x7,x11) + c(x8,x9) + c(x10,x12) = 5 + 15 + 13 + 7 + 2 + 6 = 48

Значение совпало с величиной 𝜑max, найденной в пункте II, следовательно, согласно теореме 4, задача решена верно.

Рисунок 15 — построение минимального разреза

Вывод:

* В ходе данной работы с помощью теоремы 1 за 10 шагов был найден полный поток сети 𝜑полн. Затем, за еще 3 шага с помощью теорем 2 и 3 был найден максимальный поток в сети 𝜑max. Затем был найден минимальный разрез сети, его пропускная способность совпала с максимальным потоком в сети, следовательно задача была решена верно (в соответствии с теоремой 4).

Максимальный поток в сети: 𝜑max = 48

A = {x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x10}

A’ = {x9,x11,x12}

Минимальный разрез: (A→A’) = {(x2,x12), (x6,x12), (x7,x9), (x7,x11), (x8,x9), (x10,x12)}

c(A→A’) = 48

* В ходе данной работы были освоены навыки применения алгоритма Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока и минимального разреза в сети (с помощью теорем, перечисленных в теоретической части).