

Цели и задачи разработки и исследования

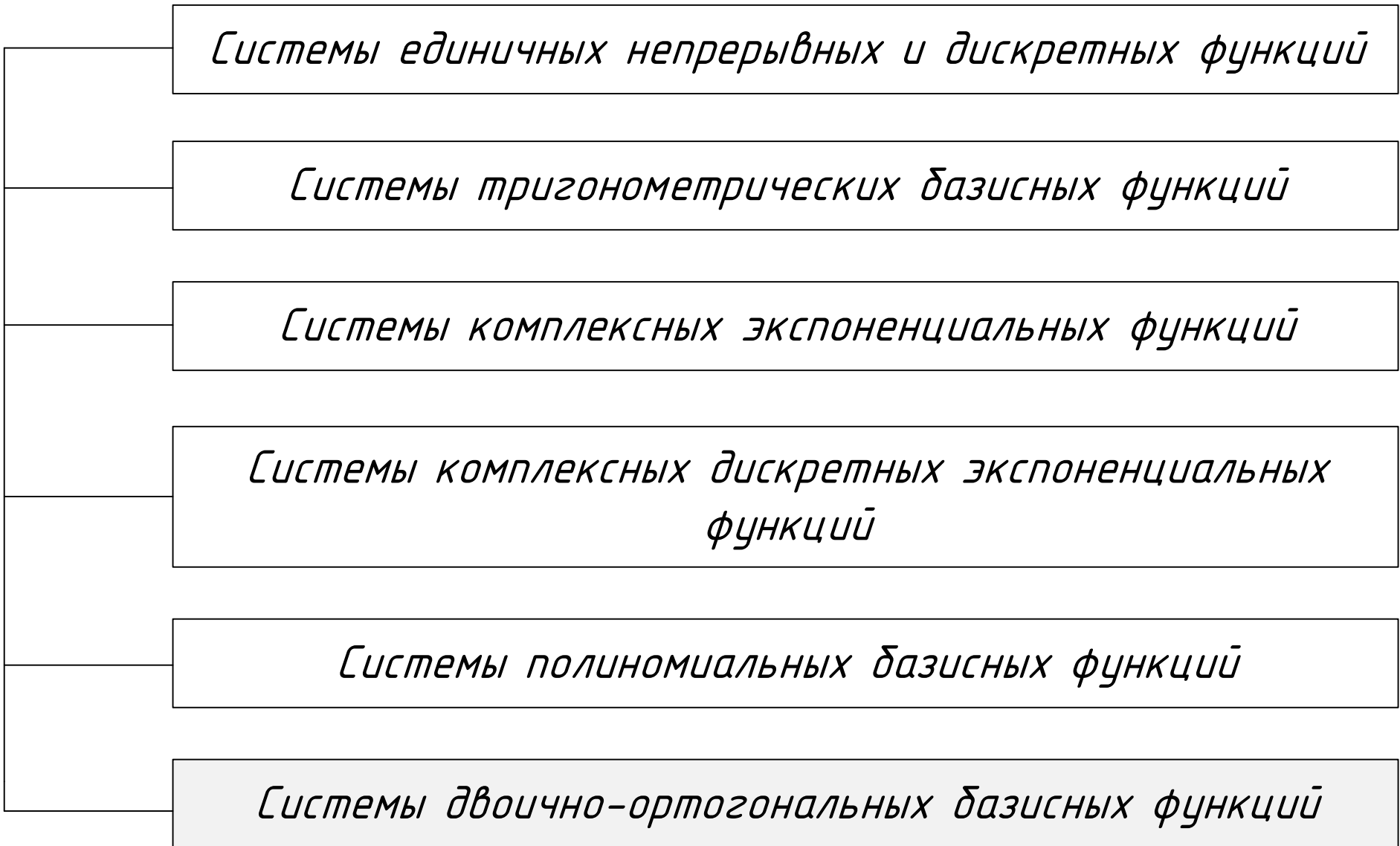
Цель работы – разработка и исследование Уолше-подобных функций и преобразований в четверичной системе счисления, составляющих основу программно-аналитического инструментария обработки сигналов в спектральной области

Области применения ортогональных систем базисных функций в спектральной обработке сигналов

Наиболее часто использующиеся системы базисных функций

Решаемые задачи:

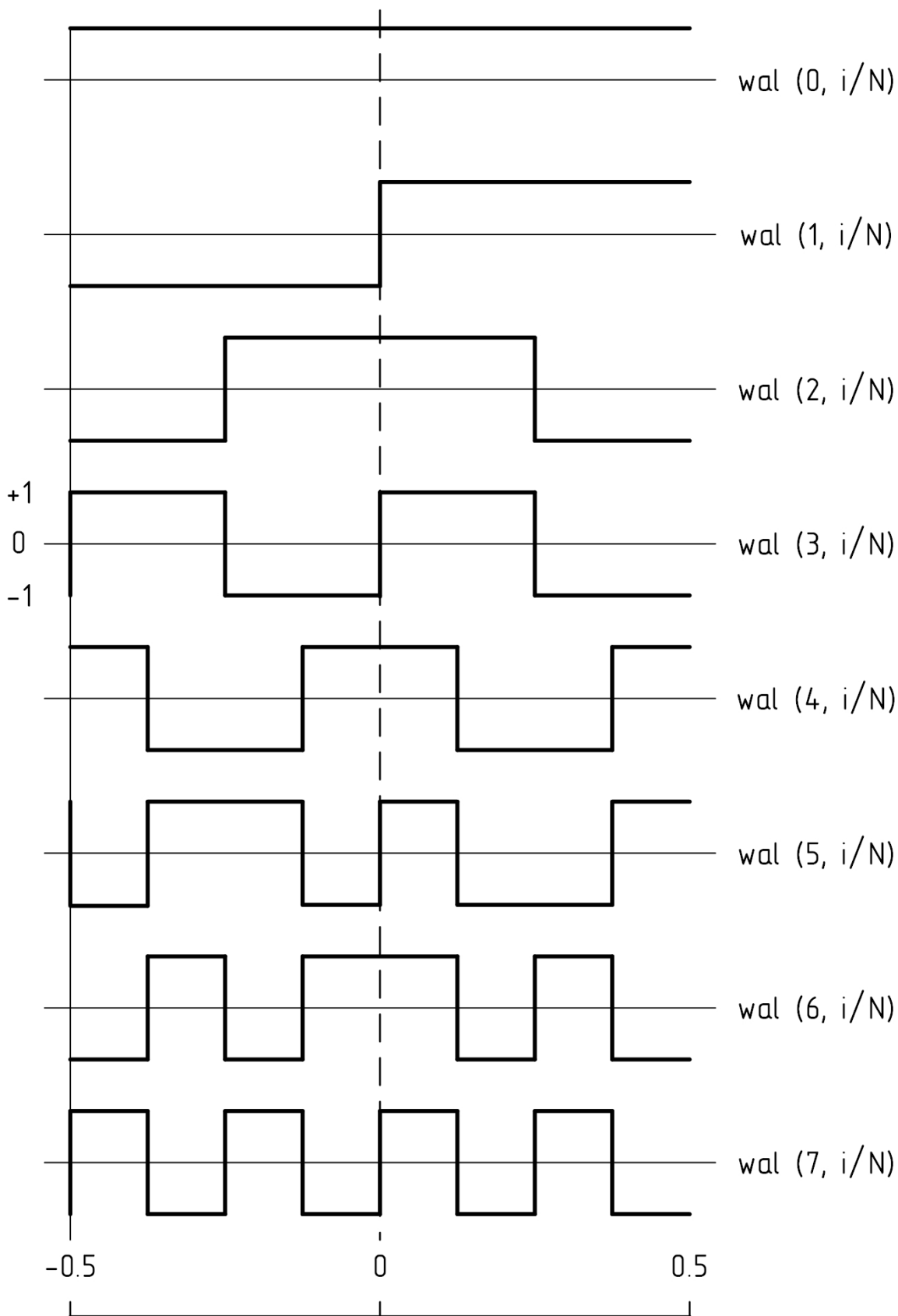
№	Область применения	Решаемые задачи
1	Радиолокация	Цифровая фильтрация; формирование сигналов, передаваемых по линиям связи (используются в качестве несущих при распространении сигналов в радиоканале над поверхностью Земли)
2	Гидролокация	
3	Математика	Исследование случайных процессов
4	Обработка изображений	Сжатие, кодирование и обработка изображений; автоматическое распознавание изображений; методы цифровой обработки изображения и цифровой голографии
5	Робототехника	Обработка речевых сигналов, усовершенствование машинного зрения
6	Системы автоматического управления	Анализ динамики линейных и нелинейных систем, разработка систем оптимального управления, моделирование процессов, идентификация объектов, разработка ряда специальных установок автоматики
7	Системы связи	Мультиплексирование, совершенствование методов помехоустойчивого кодирования сигналов, телевидение, космическая связь



- 1) Аналитическое описание базисных функций и систем;
- 2) Исследование свойств функций и систем;
- 3) Аналитический синтез алгоритмов дискретного преобразования Фурье в Уолше-подобных базисах;
- 4) Прямой спектральный анализ типовых сигналов;
- 5) Аналитический синтез алгоритмов прямого восстановления сигналов по заданному спектру;
- 6) Разработка быстрых алгоритмов анализа спектра и восстановления сигналов (быстрые преобразования Уолша);
- 7) Исследование операторов преобразования спектров в базисах Уолше-подобных функций;
- 8) Цифровая фильтрация в спектральной области Уолше-подобных базисов;
- 9) Разработка программной системы обработки сигналов в спектральной области для Уолше-подобных функций;
- 10) Оценка вычислительной сложности алгоритмов.

Известные системы базисных функций Уолша и методы их синтеза

Первые 8 функций Уолша



Формы записи систем функций Уолша

Аналитическая форма записи систем функций Уолша

Система Уолша-Адамара $\{had_2(k,i)\}$

$had_2(k,i) = \prod_{m=1}^n [r(m,i / N)]^{k_{n+1-m}} = (-1)^{\sum_{m=1}^n k_m i_m}$

Система Уолша-Пэли $\{pal_2(k,i)\}$

$pal_2(k,i) = \prod_{m=1}^n [r(m,i / N)]^{k_m} = (-1)^{\sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m}$

Система Уолша-Хармут $\{har_2(k,i)\}$

$har_2(k,i) = \prod_{m=1}^n [r(m,i / N)]^{<k_m>} = (-1)^{\sum_{m=1}^n <k_m> i_m}$

Матричная форма записи (на примере матрицы Адамара)

По рекуррентному соотношению: $H_{2^n} = H_{2^{n-1}} \times H_2$

Кронекеровское возведение в степень: $H_{2^n} = H_2^{[n]}$

Элементарная матрица

$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $H_{2^n} = \begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{bmatrix}$

Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Цели и задачи разработки и исследования		
Разраб.		Ким Т.А.					
Провер.		Сквозь В.В.					
Провер.		Гуренко В.В.					
Н.контр.оль					Лист 1		
Итб					Листов 10		
					МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУБ Группа ИУБ-826		

Матричная форма записи классических функций Уолша

Матрица Адамара для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
6	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
7	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
10	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
12	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
14	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
15	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

Матрица Пэли для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
5	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
6	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
8	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
9	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
10	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
11	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
12	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
13	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
14	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
15	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

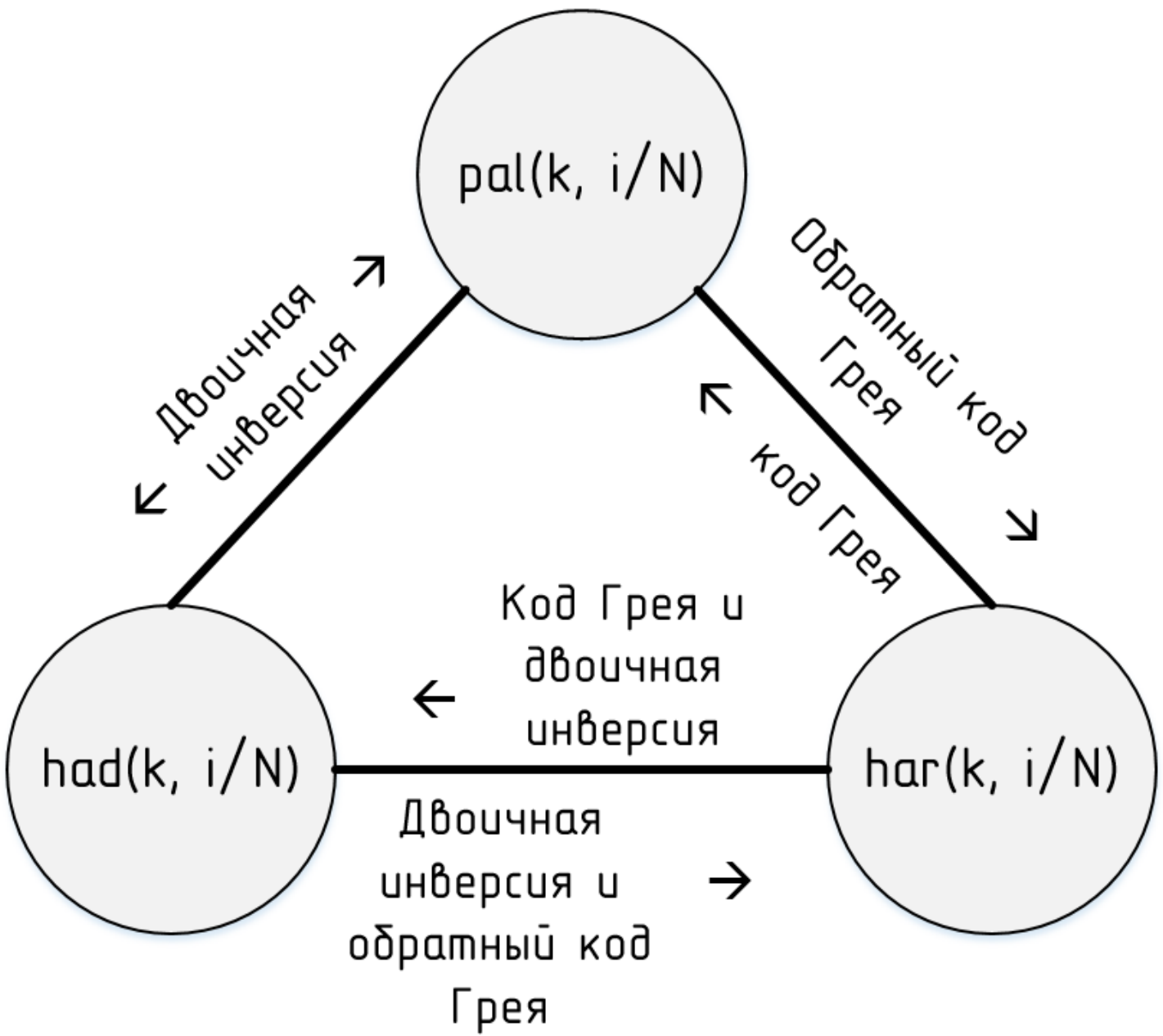
Матрица Хармута для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
5	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
6	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
9	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
10	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
12	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
14	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
15	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Таблица переходов между системами

N = 4			N = 8			N = 16		
pal	had	har	pal	had	har	pal	had	har
0=00	00=0	00=0	0=000	000=0	000=0	0=0000	0000=0	0000=0
1=01	10=2	01=1	1=001	100=4	001=1	1=0001	1000=8	0001=1
2=10	01=1	11=3	2=010	010=2	011=3	2=0010	0100=4	0011=3
3=11	11= 3	10=2	3=011	110=6	010=2	3=0011	1100=12	0010=2
			4=100	001=1	110=6	4=0100	0010=2	0110=6
			5=101	101=5	111=7	5=0101	1010=10	0111=7
			6=110	011=3	101=5	6=0110	0110=6	0101=5
			7=111	111=7	100=4	7=0111	1110=14	0100=4
						8=1000	0001=1	1100=12
						9=1001	1001=9	1101=13
						10=1010	0101=5	1111=15
						11=1011	1101=13	1110=14
						12=1100	0011=3	1010=10
						13=1101	1011=11	1011=11
						14=1110	0111=7	1001=9
						15=1111	1111=15	1000=8

Взаимосвязь номеров функций в различных системах функций Уолша



Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Матричная форма записи классических функций Уолша				Лит	Масса	Масштаб
Разраб.		Ким Т.А.									
Провер		Скзев В.В.									
Провер		Гуренко В.В.									
И.к.н.контроль		Бауман Ю.И.									
Учб.									Лист 2		
									Листов 10		
									МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-826		

Аналитическая форма записи Уолше-подобных функций

Общий вид Уолше-подобных функций в аналитической форме

$$Cas(k, i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m\right),$$

$$k_m = \sum_{m=1}^n k_m 4^{m-1}, \quad i_m = \sum_{m=1}^n i_m 4^{m-1}$$

Сжатая форма записи

$$Cas(k, i) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m - \frac{\pi}{4}\right)$$

Упорядочение по Адамару $\{had_4(k, i)\}$

$$had_4(k, i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m\right)$$

$$had_4(k, i) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_m i_m - \frac{\pi}{4}\right)$$

Упорядочение по Хармуту $\{har_4(k, i)\}$

$$har_4(k, i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m\right)$$

$$har_4(k, i) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m - \frac{\pi}{4}\right)$$

Упорядочение по Пэли $\{pal_4(k, i)\}$

$$pal_4(k, i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n \langle k_m \rangle i_m\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n \langle k_m \rangle i_m\right)$$

$$pal_4(k, i) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n \langle k_m \rangle i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n \langle k_m \rangle i_m - \frac{\pi}{4}\right)$$

Матрица Адамара для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
9	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
10	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
12	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
13	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
14	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
15	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1

Матрица Пэли для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
5	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
6	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
7	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
8	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
9	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
10	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
11	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
12	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
14	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
15	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1

Матрица Хармута для N = 16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
4	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
5	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
6	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
9	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
10	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
12	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
13	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1
14	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
15	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

Связь функций в новом базисе

Номер функции в системе Хармута		Номер функции в системе Пэли		Номер функции в системе Адамара	
Номер функции Хармута (10 СС)	Представление в четверичной системе счисления	Код Грея в четверичной системе счисления	Номер функции Пэли (10 СС)	Обратный код в четверичной системе счисления	Номер функции Адамара (10 СС)
0	000	00	0	00	0
1	001	01	1	10	4
2	002	02	2	20	8
3	003	03	3	30	12
4	010	11	5	11	5
5	011	12	6	21	9
6	012	13	7	13	7
7	013	10	4	01	1
8	020	22	10	22	10
9	021	23	11	32	14
10	022	20	8	02	2
11	023	21	9	12	6
12	030	33	15	33	15
13	031	30	12	03	3
14	032	31	13	13	7
15	033	32	14	23	11

Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Аналитическая форма записи Уолше-подобных функций				
Разраб.		Ким Т.А.							
Провер.		Скзев В.В.							
Провер.		Гуренко В.В.							
И.контр.ль					Лист 3		Листов 10		
Утв.					МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-826				

Основные теоремы и свойства спектральной обработки в УПФ

Основные свойства УПФ

1 В УПФ переменные k и i являются равноправными, поэтому, если их поменять местами, функция не изменится, т.е. справедливо следующее:

$$Cas(k, i) = Cas(i, k)$$

2 УПФ являются периодическими функциями с периодом $N = 4^n, n = 1, 2 \dots$.

3 Среднее значение любой УПФ, кроме нулевой, равно нулю, т.е.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Cas(k, i) = 0, k \neq 0$$

4 Мощность любой k -й УПФ равна единице:

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [Cas(k, i)]^2 = 1$$

5 УПФ являются ортогональными функциями, т.е.

Теоремы спектрального анализа для базиса УПФ

1 Теорема 1. О спектре сигналов с обобщенным сдвигом во времени

Спектр сигнала УПФ, сдвинутого по оси времени i на величину τ по закону операций прямого и обратного ит обобщенного сдвига, выполняемого с помощью поразрядного суммирования или вычитания по модулю 4 4-ичных кодов чисел i и τ , равен спектру УПФ несдвинутого сигнала, модулированному обобщенными тригонометрическими функциями в момент времени τ .

2 Теорема 2. О модуляции сигнала базисной функцией

Умножение сигнала на базисную функцию приводит к изменению порядка следования его спектральных составляющих

3 Теорема 3. О свертке

Спектр сигнала УПФ, являющегося результатом обобщенной свертки двух других сигналов, равен с точностью до постоянного множителя произведению спектров этих сигналов.

4 Теорема 4. О корреляции

Спектр УПФ обобщенной корреляционной функции сигнала равен спектру мощности этого сигнала

5 Теорема 5. О независимости спектра мощности и энергетического спектра сигнала от его обобщенного сдвига по оси времени

Спектр мощности и энергетический спектр сигнала в базисе УПФ не изменяются при его обобщенном сдвиге по оси времени

6 Теорема 6. Об умножении сигналов

В базисе УПФ спектр сигнала - произведения двух других сигналов представляется сумой обобщенных сверток спектров этих сигналов

Дискретное преобразование Фурье в базисах функций Чолша

Преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье

$$X(k) = \frac{1}{P_k} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi(k, i)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(k, i)$$

Дискретное преобразование Фурье для УПФ

Прямое преобразование Фурье:

$$X_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) Cas(k, i)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_X(k) Cas(k, i)$$

Матричная форма записи ДПФ

$$x = \varphi X,$$

$$X = \frac{1}{NP_k} \varphi x.$$

$$x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi(0,0) & \varphi(0,1) & \dots & \varphi(0,N-1) \\ \varphi(1,0) & \varphi(1,1) & & \varphi(1,N-1) \\ & & \dots & \\ \varphi(N-1,0) & \varphi(N-1,1) & \dots & \varphi(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi^2(k, i)$$

- мощность базисных функций

Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Чолше-подобном базисе			
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Основные теоремы и свойства УПФ, дискретное преобразование Фурье			
Разраб.	Ким Т.А.							
Провер.	Скзев В.В.							
Провер.	Гуренко В.В.							
Н.контр.	Бауман Ю.И.				МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-82Б			
Упр.								

Быстрое преобразование Фурье в базисах функций Уолша

БПФ для системы УПФ-Пэли с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и естественным порядком следования отсчетов спектра

Алгоритм БПФ-Пэли на первом уровне прореживания:

$$X_x(k_1 + 4q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^3 \left[X_x^{(\lambda_1)}(k_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} q_1 \lambda_1\right) + X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) \sin\left(\frac{\pi}{2} q_1 \lambda_1\right) \right],$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^3 x_{\lambda_1}(i_1) \text{Cas}(\overline{k_1}, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^3 x_{\lambda_1}(i_1) \text{Cas}(4 - \overline{k_1}, i_1)$$

$$\text{Cas}(\overline{k_1}, i_1) = \cos\left[\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k^{(n+1-m)} i^{(m)}\right] + \sin\left[\frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n k^{(n+1-m)} i^{(m)}\right]$$

Подвыборки:

$\lambda_1 = 0: \{x_0(i_1) = x(4i_1)\}$	$\lambda_1 = 2: \{x_2(i_1) = x(4i_1 + 2)\}$
$x_0(i_1) = \{x(0), x(4), x(8), x(12)\}$	$x_2(i_1) = \{x(2), x(6), x(10), x(14)\}$
$\lambda_1 = 1: \{x_1(i_1) = x(4i_1 + 1)\}$	$\lambda_1 = 3: \{x_3(i_1) = x(4i_1 + 3)\}$
$x_1(i_1) = \{x(1), x(5), x(9), x(13)\}$	$x_3(i_1) = \{x(3), x(7), x(11), x(15)\}$

Промежуточные $X_x^{(\lambda)}(\pm k)$ и результирующий X_x спектры:

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^3 x_{\lambda_1}(i_1) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} k_1 i_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} k_1 i_1\right) \right],$$

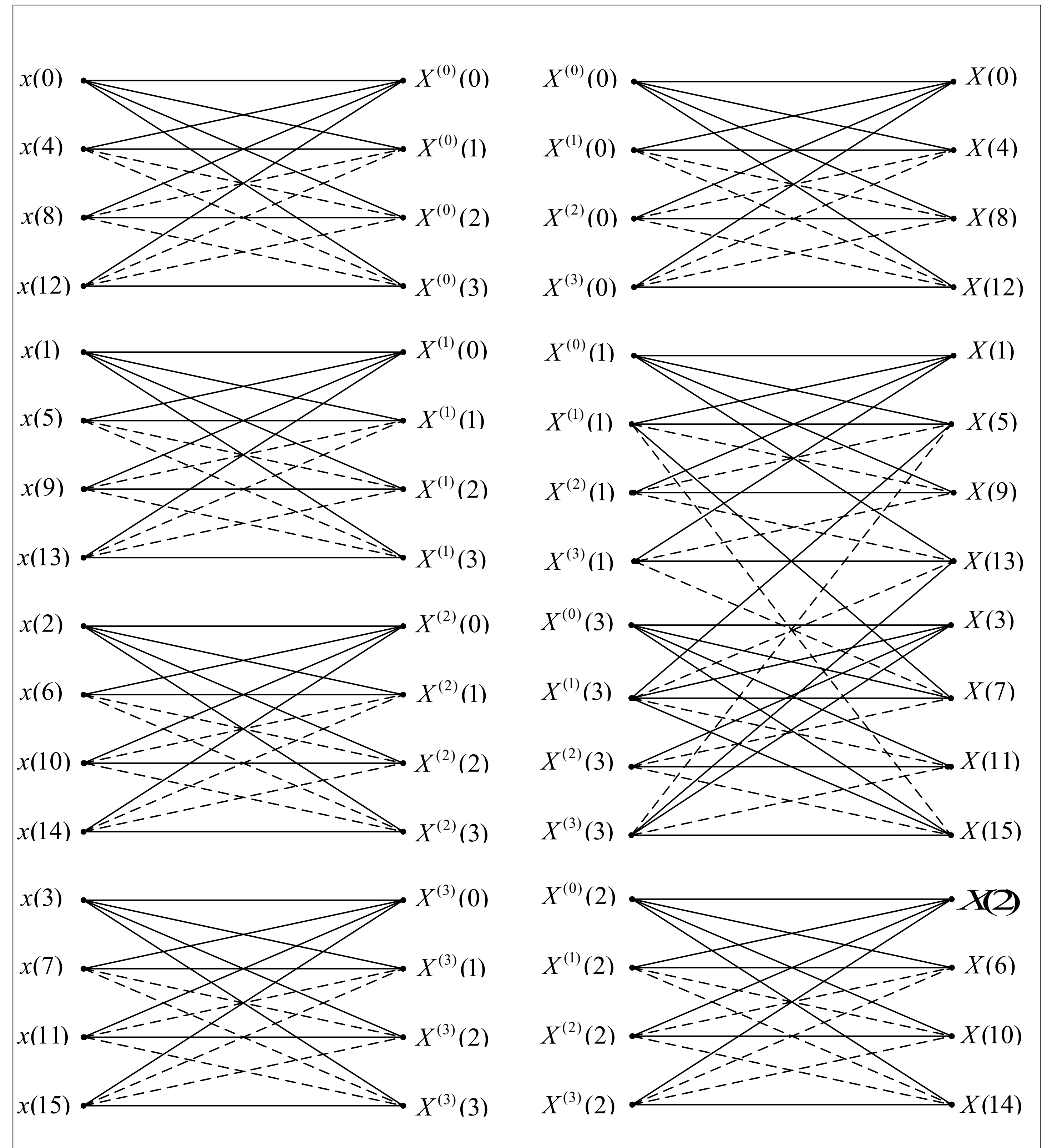
$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^3 x_{\lambda_1}(i_1) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} (4 - k_1) i_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} (4 - k_1) i_1\right) \right]$$

$$X_x(k_1 + 4q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^3 \left[X_x^{(\lambda_1)}(k_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} q_1 \lambda_1\right) + X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) \sin\left(\frac{\pi}{2} q_1 \lambda_1\right) \right]$$

Соответствие между спектрами:

$X^{(0)}(-1) = X^{(0)}(3)$	$X^{(0)}(-2) = X^{(0)}(2)$	$X^{(0)}(-3) = X^{(0)}(1)$
$X^{(1)}(-1) = X^{(1)}(3)$	$X^{(1)}(-2) = X^{(1)}(2)$	$X^{(1)}(-3) = X^{(1)}(1)$
$X^{(2)}(-1) = X^{(2)}(3)$	$X^{(2)}(-2) = X^{(2)}(2)$	$X^{(2)}(-3) = X^{(2)}(1)$
$X^{(3)}(-1) = X^{(3)}(3)$	$X^{(3)}(-2) = X^{(3)}(2)$	$X^{(3)}(-3) = X^{(3)}(1)$

Сигнальный граф для $N = 16$



Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Быстрое преобразование Фурье		
Разраб.		Ким Т.А.					
Провер.		Скворц В.В.					
Провер.		Гуренко В.В.					
Н.контр.		Бауман Ю.И.			МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-82Б		
Упр.							
					Лист	Масштаб	Масштаб
					5	10	

Операторы преобразования спектров Фурье и Чолша

Тригонометрическая базисная система

Оператор преобразования спектра

Уравнения оператора преобразования спектров Фурье и Чолша

Прямое и обратное ДПФ

$$x(i) = X_{\text{ч}}(0) + \sum_{\nu=1}^7 \left[X_{\text{ч}}(\nu) \cos\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right) + X_{\text{н}}(\nu) \sin\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right) \right] + X_{\text{ч}}(8) \cos(\pi i),$$

$$X_{\text{ч}}(0) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} x(i); \quad X_{\text{ч}}(8) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} x(i) \cos(\pi i),$$

$$X_{\text{ч}}(\nu) = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{15} x(i) \cos\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right); \quad X_{\text{н}}(\nu) = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{15} x(i) \sin\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right),$$

$\nu = 1, 2, \dots, 7$

Общий тригонометрический спектр

$$\{X_{\text{T}}(m)\} = \{X_{\text{ч}}(0), X_{\text{н}}(1), X_{\text{ч}}(1), \dots, X_{\text{н}}(7), X_{\text{ч}}(7), X_{\text{ч}}(8)\}$$

$$\mathbf{X_X} = \Phi \mathbf{X_T},$$

где $X_{\text{ч}}, X_{\text{н}}$ – матрицы-столбцы спектральных коэффициентов в базисах ТФФ и УПФ,
 Φ – матрица ядра Фурье

$$X_X(k) = \sum_{\nu=0}^8 X_{\text{ч}}(\nu) \Phi_{\text{ч}}(k, \nu) + \sum_{\nu=1}^7 X_{\text{н}}(\nu) \Phi_{\text{н}}(k, \nu), \quad k = 0, 1, \dots, 15$$

$$\Phi_{\text{ч}}(k, \nu) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \cos\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right) \text{Cas}(k, i),$$

$$\Phi_{\text{н}}(k, \nu) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \sin\left(\frac{\pi}{8} \nu i\right) \text{Cas}(k, i).$$

Равенство Парсеваля

$$\frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} x^2(i) = X_{\text{ч}}^2(0) + X_{\text{ч}}^2(8) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^7 [X_{\text{ч}}^2(\nu) + X_{\text{н}}^2(\nu)]$$

$$X_A(0) = X_{\text{ч}}(0), X_A(2) = X_{\text{ч}}(8);$$

$$X_A(1) = X_{\text{н}}(4) \Phi_{\text{н}}(1, 4) + X_{\text{ч}}(4) \Phi_{\text{ч}}(1, 4),$$

$$X_A(3) = X_{\text{н}}(4) \Phi_{\text{н}}(3, 4) + X_{\text{ч}}(4) \Phi_{\text{ч}}(3, 4);$$

$$X_A(4+j) = \sum_{i=0}^1 \left[\begin{array}{l} X_{\text{н}}(1+4i) \Phi_{\text{н}}(4+j, 1+4i) + \\ + X_{\text{ч}}(1+4i) \Phi_{\text{ч}}(4+j, 1+4i) + \\ + X_{\text{н}}(3+4i) \Phi_{\text{н}}(4+j, 3+4i) + \\ + X_{\text{ч}}(3+4i) \Phi_{\text{ч}}(4+j, 3+4i) \end{array} \right]$$

$$X_A(12+j) = \sum_{i=0}^1 \left[\begin{array}{l} X_{\text{н}}(1+4i) \Phi_{\text{н}}(12+j, 1+4i) + \\ + X_{\text{ч}}(1+4i) \Phi_{\text{ч}}(12+j, 1+4i) + \\ + X_{\text{н}}(3+4i) \Phi_{\text{н}}(12+j, 3+4i) + \\ + X_{\text{ч}}(3+4i) \Phi_{\text{ч}}(12+j, 3+4i) \end{array} \right]$$

$$X_A(8+j) = \sum_{i=0}^1 \left[\begin{array}{l} X_{\text{н}}(2+4i) \Phi_{\text{н}}(8+j, 2+4i) + \\ + X_{\text{ч}}(2+4i) \Phi_{\text{ч}}(8+j, 2+4i) \end{array} \right]$$

Ядро Фурье преобразования спектров для N = 16 (упорядочение по Пэли)

Правило получения групп для N = 16

	$X_{\text{ч}}(0)$	$X_{\text{н}}(1)$	$X_{\text{ч}}(1)$	$X_{\text{н}}(2)$	$X_{\text{ч}}(2)$	$X_{\text{н}}(3)$	$X_{\text{ч}}(3)$	$X_{\text{н}}(4)$	$X_{\text{ч}}(4)$	$X_{\text{н}}(5)$	$X_{\text{ч}}(5)$	$X_{\text{н}}(6)$	$X_{\text{ч}}(6)$	$X_{\text{н}}(7)$	$X_{\text{ч}}(7)$	$X_{\text{ч}}(8)$
$X_{\text{п}}(0)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$X_{\text{п}}(1)$	0	0,63	0,13	0	0	0,19	0,13	0	0	0,08	0,13	0	0	0,02	0,13	0
$X_{\text{п}}(2)$	0	0	0	0,60	0,25	0	0	0	0	0	0	0,1	0,25	0	0	0
$X_{\text{п}}(3)$	0	-0,13	0,63	0	0	0,13	-0,19	0	0	-0,13	0,08	0	0	0,13	-0,02	0
$X_{\text{п}}(4)$	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
$X_{\text{п}}(5)$	0	-0,19	0,13	0	0	0,02	0,13	0	0	0,63	0,13	0	0	-0,08	0,13	0
$X_{\text{п}}(6)$	0	0	0	-0,25	0,6	0	0	0	0	0	0	0,25	-0,10	0	0	0
$X_{\text{п}}(7)$	0	-0,13	0,08	0	0	0,13	0,63	0	0	-0,13	-0,02	0	0	0,13	-0,19	0
$X_{\text{п}}(8)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$X_{\text{п}}(9)$	0	-0,02	0,13	0	0	-0,08	0,13	0	0	-0,19	0,13	0	0	-0,63	0,13	0
$X_{\text{п}}(10)$	0	0	0	-0,1	0,25	0	0	0	0	0	0	-0,6	0,25	0	0	0
$X_{\text{п}}(11)$	0	-0,13	-0,02	0	0	0,13	0,08	0	0	-0,13	-0,19	0	0	0,12	0,63	0
$X_{\text{п}}(12)$	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
$X_{\text{п}}(13)$	0	0,08	0,13	0	0	-0,63	0,13	0	0	-0,02	0,13	0	0	0,19	0,13	0
$X_{\text{п}}(14)$	0	0	0	-0,25	-0,1	0	0	0	0	0	0	0,25	0,60	0	0	0
$X_{\text{п}}(15)$	0	-0,13	-0,19	0	0	0,13	-0,02	0	0	-0,13	0,63	0	0	0,13	0,08	0

Номер группы	Число коэффициентов в группе	Обобщенные коэффициенты Чолша–Пэли	Тригонометрические коэффициенты Фурье
0	1	$X_{\text{п}}(0)$	$X_{\text{п}}(0)$
1	1	$X_{\text{п}}(8)$	$X_{\text{ч}}(8)$
2	2	$X_{\text{п}}(4), X_{\text{п}}(12)$	$X_{\text{н}}(4), X_{\text{ч}}(4)$
3	8	$X_{\text{п}}(1), X_{\text{п}}(3), X_{\text{п}}(5), X_{\text{п}}(7),$ $X_{\text{п}}(9), X_{\text{п}}(11), X_{\text{п}}(13), X_{\text{п}}(15)$	$X_{\text{н}}(1), X_{\text{ч}}(1), X_{\text{н}}(3), X_{\text{ч}}(3),$ $X_{\text{н}}(5), X_{\text{ч}}(5), X_{\text{н}}(7), X_{\text{ч}}(7)$
4	4	$X_{\text{п}}(2), X_{\text{п}}(6), X_{\text{п}}(10), X_{\text{п}}(14)$	$X_{\text{н}}(2), X_{\text{ч}}(2), X_{\text{н}}(6), X_{\text{ч}}(6)$

Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Чолше–подобном базисе		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Операторы преобразования спектров Фурье и Чолша		
Разраб.	Ким Т.А.						
Провер.	Скляев В.В.						
Провер.	Гуренко В.В.						
					Лист 6		Листов 10
Н. контролер Утв.					МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-826		

Цифровая фильтрация в спектральной области базисов Чолша

На примере полиномиальных фильтров

Общий вид разностного уравнения:

$$y(i) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x(i-l) - \sum_{k=1}^{L-1} a_k y(i-k)$$

Представление входного сигнала полиномиального ЦФ:

$$x(i) = u(i) + n(i),$$

$u(i)$ – полезный детерминированный сигнал,
 $n(i)$ – случайная помеха

Полезная составляющая входного сигнала $u(i)$:

$$u(i) = \sum_{k=0}^r p_k g_k(i),$$

p_k – неизвестные коэффициенты,
 g_k – известные функции

Назначение полиномиального фильтра – определение параметров p_k , где $k = 0, 1, \dots, r$

$$\overline{p}_k(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) h_k^r(i),$$

где $x(j-i)$ – скользящая выборка входного сигнала,

h_k^r – импульсная характеристика (ИХ) k -го канала

полиномиального ЦФ,

r – порядок полиномиальных фильтров.

$$x(j-i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) \varphi(k, i),$$

где $X_j(k)$ – скользящий спектр,

$\varphi(k, i)$ – базисные функции.

Скользящий спектр $X_j(k)$ вычисляется по формуле:

$$X_j(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) \varphi(k, i),$$

где N – количество отсчетов,

P_k – мощность базисной функции,

$\varphi(k, i)$ – базисные функции.

Аналитический синтез полиномиального фильтра для линейного сигнала.

Общий вид уравнения

Запишем систему уравнений:

$$\overline{p}_1(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) h_1^1(i),$$

$$\overline{p}_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) + \frac{N-1}{2} \overline{p}_1(j) = X_j(0) + \frac{N-1}{2} \overline{p}_1(j).$$

где $x(j-i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) Wal_4(k, i),$

$$X_j(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) Wal_4(k, i),$$

$$h_1^1(i) = \frac{6(N-1) - 12i}{N(N^2-1)}.$$

Общий вид уравнения:

$$\overline{p}_1(j) = -\frac{12}{N^2-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k \neq 0) b_k^1,$$

где b_k^1 – значение спектра сигнала.

Уравнения спектрального ЦДСФ первого порядка (для $N = 16$):

$$\overline{p}_0(j) = X_j(0) + \frac{17}{2} \overline{p}_1(j),$$

где $\overline{p}_1(j)$:

для системы УПФ-Адамара:

$$\overline{p}_1(j) = \frac{12}{255} \left(X_j(1) + \frac{1}{2} X_j(2) + 4X_j(4) + 2X_j(8) \right).$$

для системы УПФ-Пэли:

$$\overline{p}_1(j) = \frac{12}{255} \left(4X_j(1) + 2X_j(2) + 1X_j(4) + \frac{1}{2} X_j(8) \right).$$

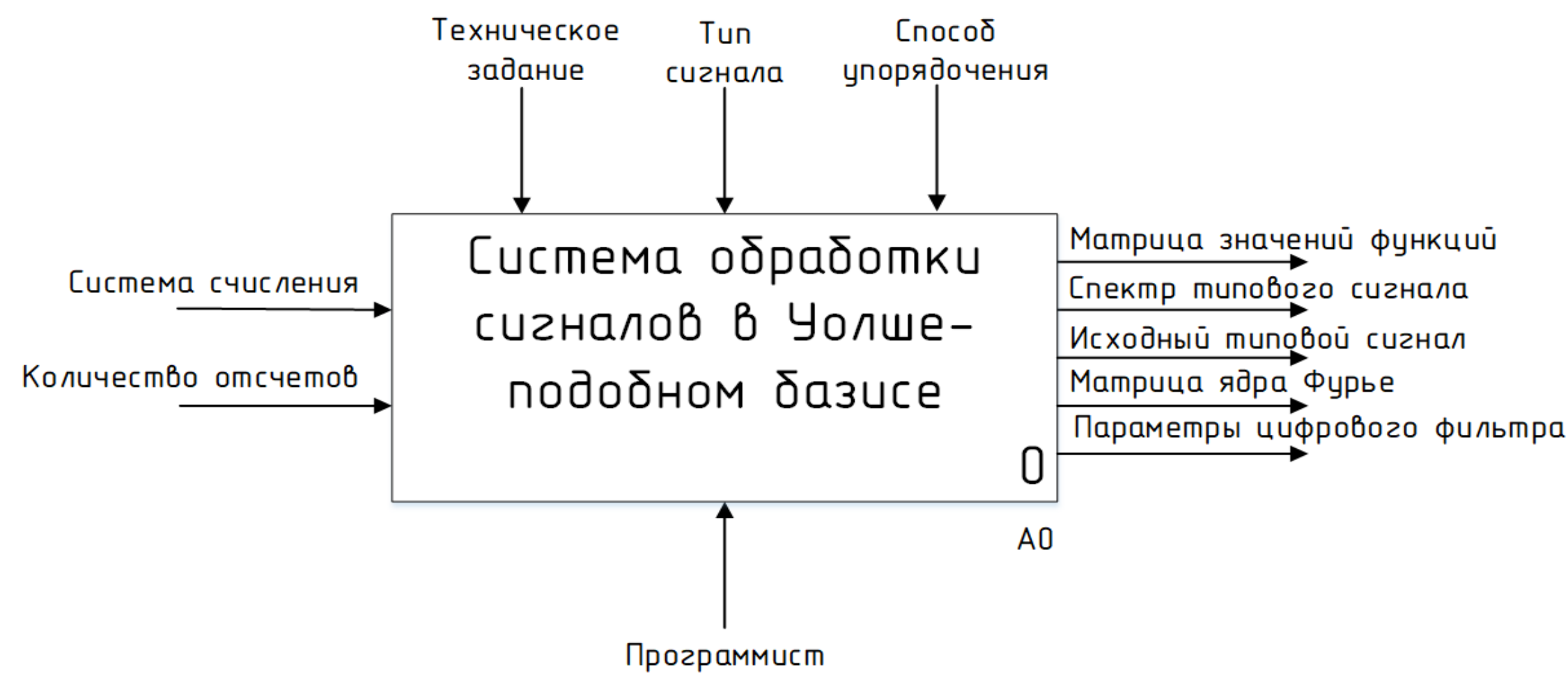
для системы УПФ-Хармута:

$$\overline{p}_1(j) = \frac{12}{255} \left(4X_j(1) + 2X_j(2) + 1X_j(7) + \frac{1}{2} X_j(10) \right).$$

Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе				
					Цифровая фильтрация в спектральной области базисов Уолша			Лит	Масса
Изм	Лист	№ докум	Подп.	Дата	Лист 7		Листов 10		
Разраб		Ким Т.А.							
Провер		Скляев В.В.							
Провер		Гуренко В.В.							
Н.контроль		Бауман В.И.			МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-826				
Чит									

Программная система обработки сигналов в Чолше-подобном базисе

Контекстная диаграмма A-0

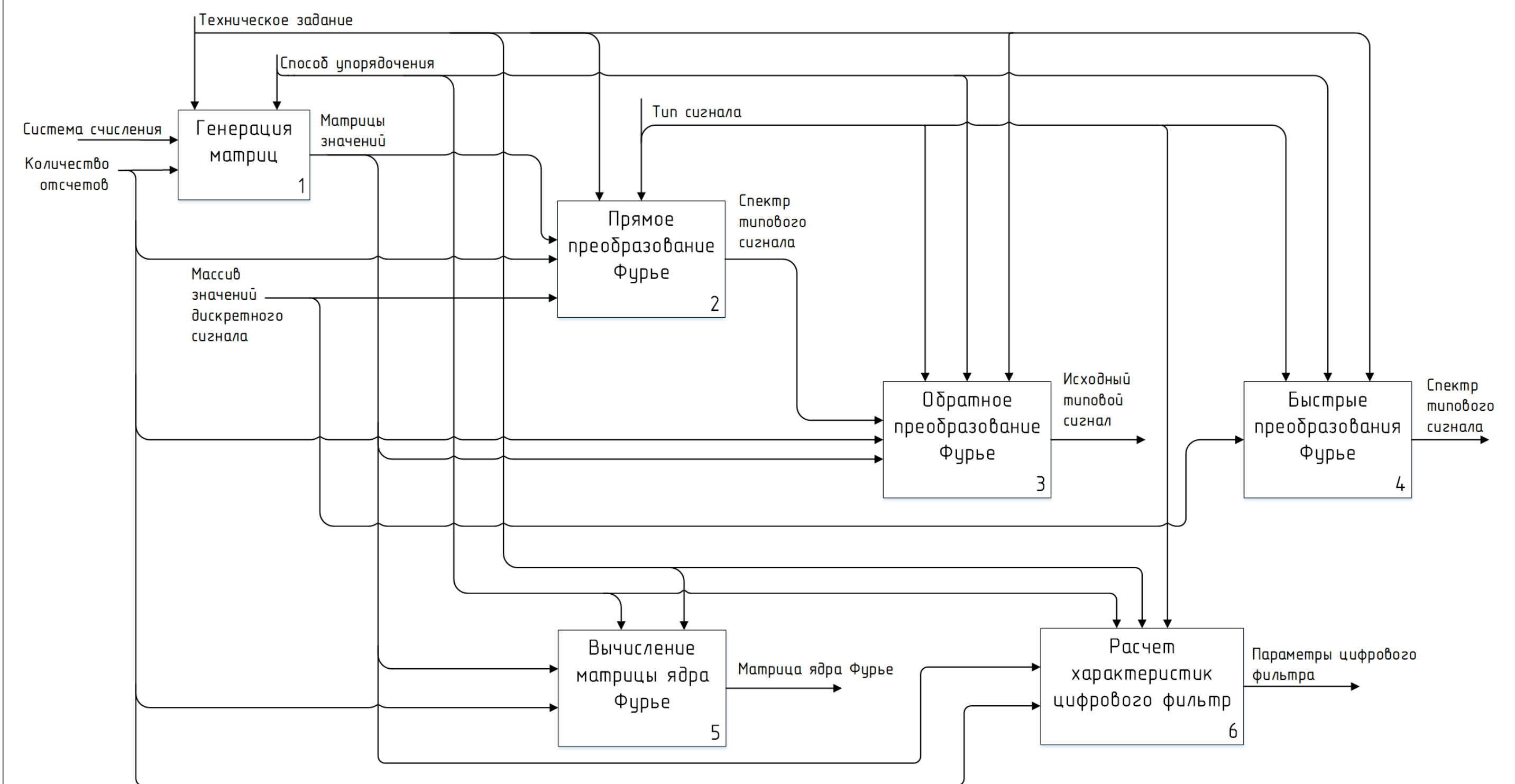


ЦЕЛЬ: произвести декомпозицию системы для выделения основных подсистем, определить потоки данных, связывающие подсистемы, определить выходные данные

ТОЧКА ЗРЕНИЯ: Программист

УЗЕЛ: A-0 ЗАГОЛОВОК: Система обработки сигналов в Чолше-подобном базисе НОМЕР:

Диаграмма уровня A0



УЗЕЛ: A0 ЗАГОЛОВОК: Система обработки сигналов в Чолше-подобном базисе НОМЕР:

Граф состояний интерфейса

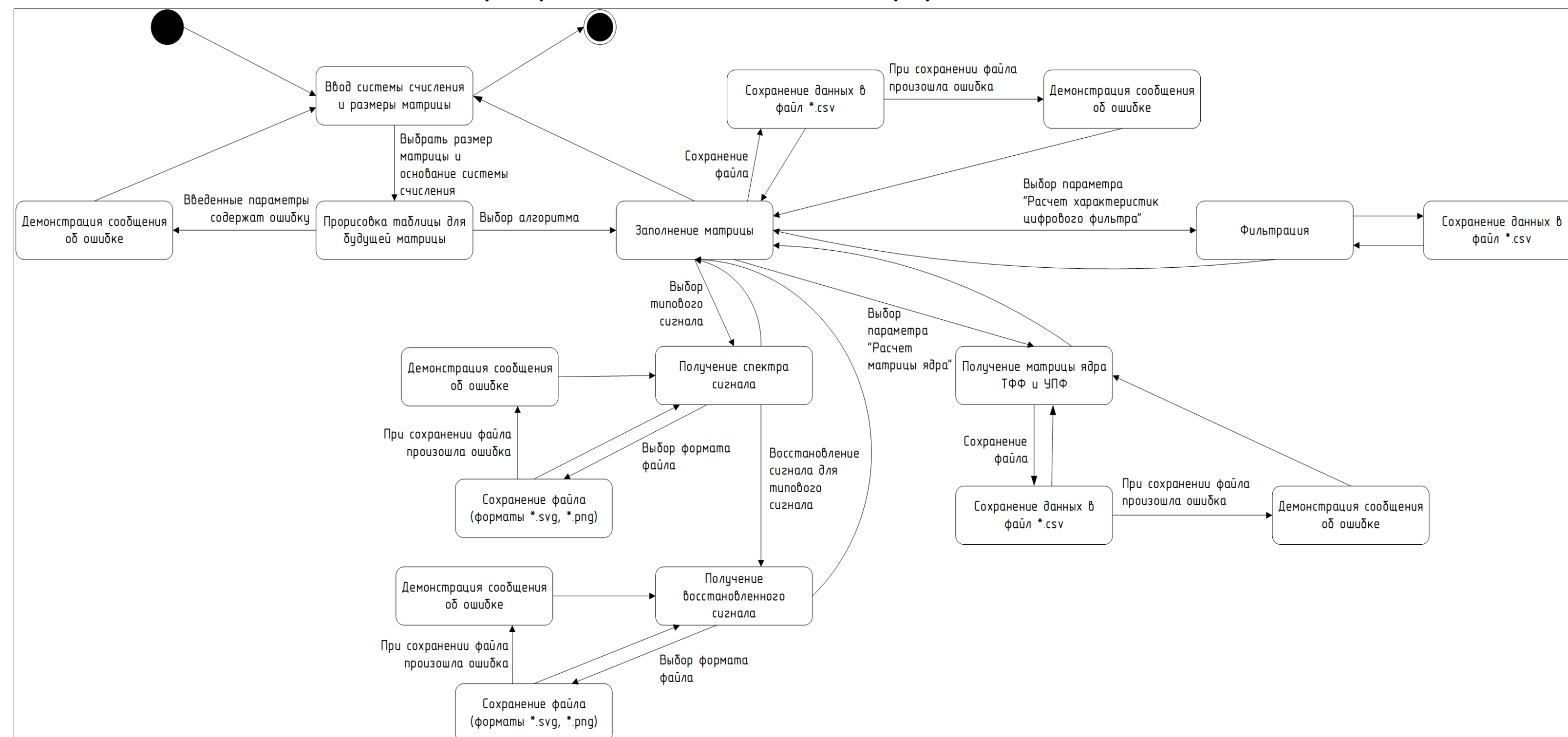
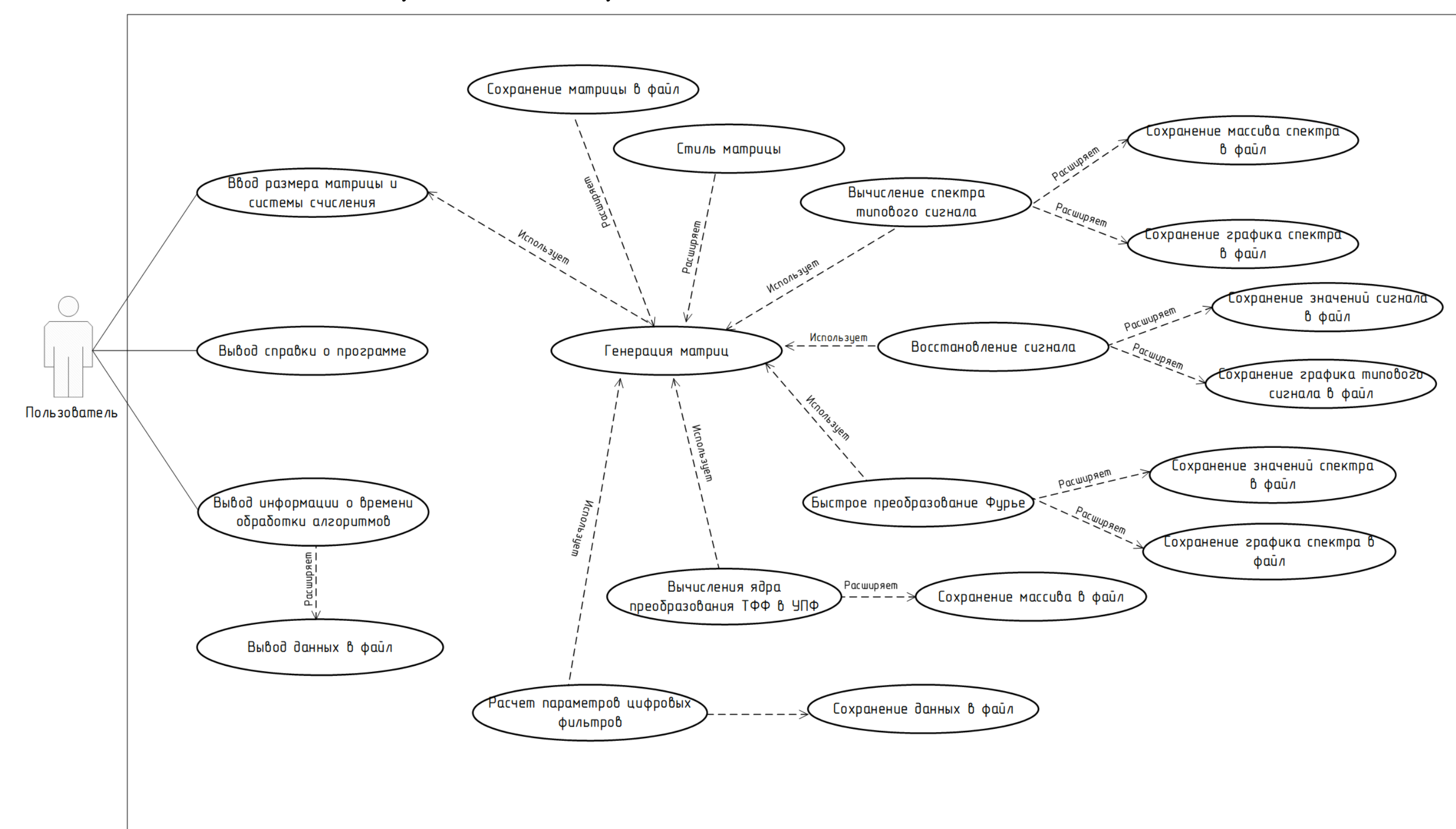


Диаграмма вариантов использования

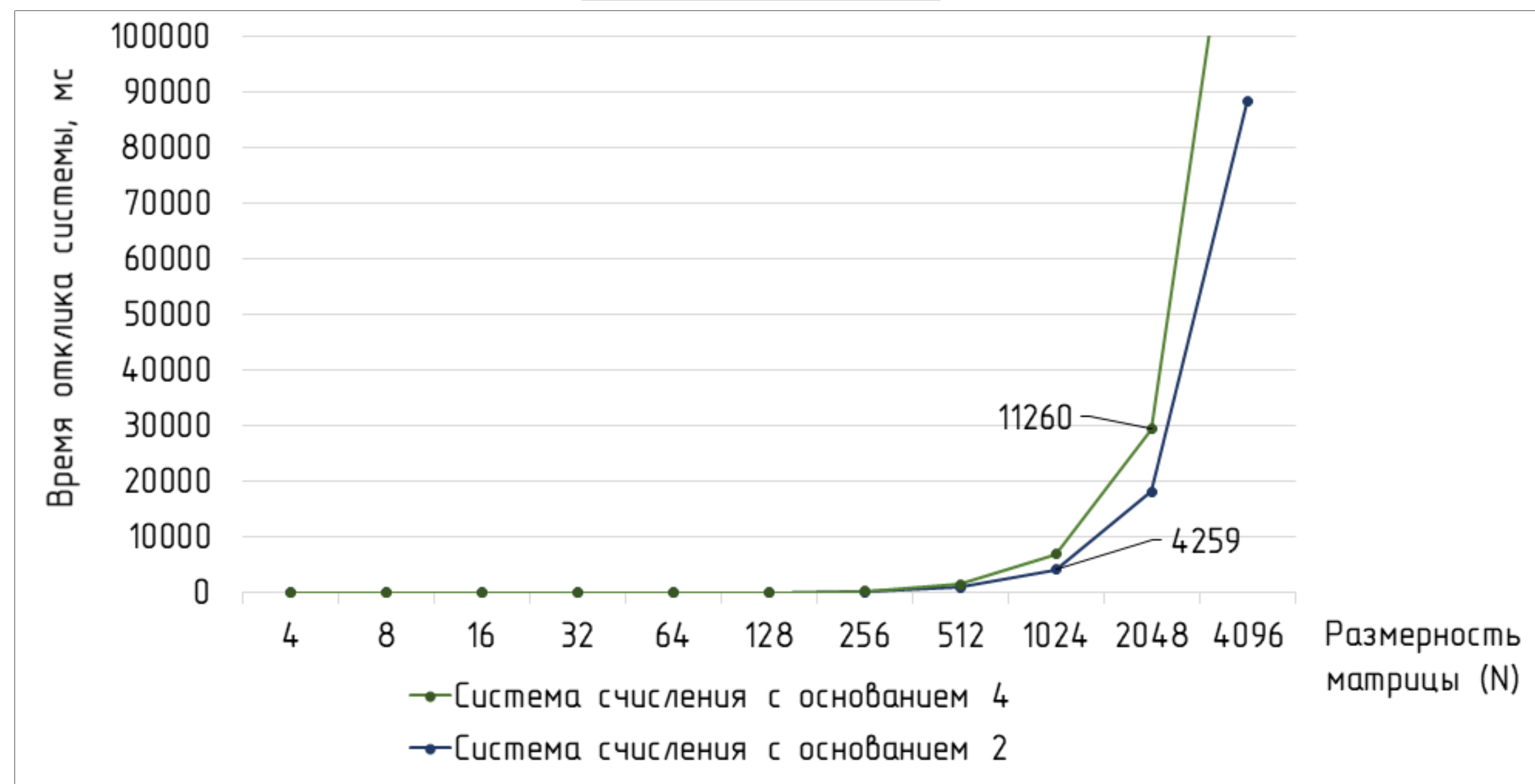


Выпускная квалификационная работа бакалавра					Система обработки сигналов в Чолше-подобном базисе					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Программная система обработки сигналов в Чолше- подобном базисе					
Разработ	Ким Т.А.				Лит	Масса	Масштаб			
Провер	Сквез В.В.									
Провер	Гуренко В.В.				Лист 8				Листов 10	
Н.контр.	Бауман Ю.И.				МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУБ Группа ИУБ-82Б					
Чит										

Схема алгоритма функции
получения степени

Оценочное тестирование на предельных объемах вычислений

График зависимости времени отклика системы в зависимости от N



Результаты экспериментов по подсчету времени в зависимости от N

Размер матрицы	Время расчета матрицы	
	Система счисления с основанием 2	Система счисления с основанием 4
4	0 мс	0 мс
8	0 мс	0 мс
16	0 мс	0 мс
32	2 мс	2 мс
64	11 мс	8 мс
128	49 мс	33 мс
256	224 мс	150 мс
512	988 мс	622 мс
1024	4259 мс	2716 мс
2048	18245 мс	11260 мс
4096	88256 мс	58526 мс
8192	Ошибка нехватки памяти	Ошибка нехватки памяти

Оценка вычислительной сложности алгоритмов

Алгоритм формирования операторов преобразования спектров

Общее число вычислительных операций для классической системы Уолша:

$$O_2 = \frac{2N^2 - 8}{3}$$

Общее число вычислительных операций для системы УПФ:

$$O_4 = \frac{10N^2 - 100}{15}$$

Выигрыш для новой системы относительно классической системы при $N \rightarrow \infty$ составит:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N^2 - 8)15}{3(10N^2 - 100)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{10N^2 - 40}{10N^2 - 100} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2(10 - \frac{40}{N^2})}{N^2(10 - \frac{100}{N^2})} = 1$$

Алгоритм формирования операторов преобразования спектров

Вычислительная сложность **быстрых алгоритмов**:

$$O_B = \log_p N * N(p - 1),$$

где p — основание системы счисления.

Вычислительная сложность **модифицированных алгоритмов**:

$$O_M = 2nN = 2N * \log_p N$$

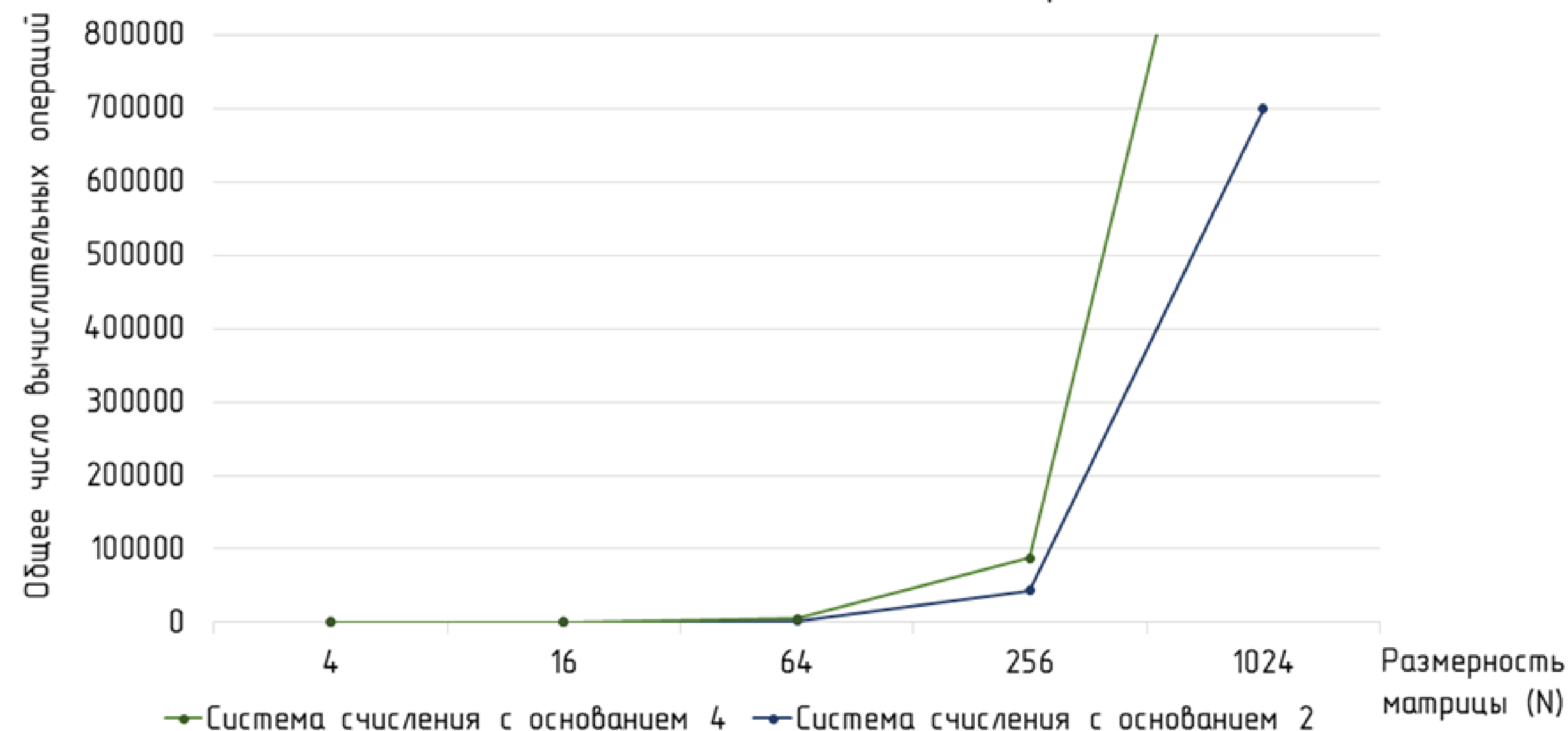
Выигрыш модифицированных алгоритмов быстрых преобразований для новой системы относительно классической системы Уолша:

$$\frac{O_{M_4}}{O_{M_2}} = \frac{2N * \log_4 N}{2N * \log_2 N} = 0.5$$

Выигрыш модифицированных алгоритмов относительно быстрых алгоритмов:

$$\frac{O_M}{O_B} = \frac{2N * \log_p N}{N * \log_p N(p - 1)} = \frac{2}{p - 1}$$

Зависимость количества вычислительных операций от N



Выпускная квалификационная работа бакалавра						Система обработки сигналов в Уолше-подобном базисе		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Оценка вычислительной сложности алгоритмов		
Разраб.	Ким Т.А.							
Провер.	Свзед В.В.							
Провер.	Гуренко В.В.							
Итого						Лист 10		
Итого						Листов 10		
Итого						МГТУ им.Н.Э.Баумана Кафедра ИУ6 Группа ИУ6-82Б		