Chỉ sử dụng nội bộ MathDash

Dãy số và Chuỗi

MathDash

Cập nhật lần cuối: 14-07-2025

Xin chào! Chúng ta sẽ nói về hai ý tưởng đơn giản nhưng âm thầm tạo nên một phần lớn của toán học:

- **Dãy số:** danh sách có thứ tự tuân theo một quy luật.
- **Chuỗi:** những gì bạn có được khi cộng các phần tử của một dãy số.

1 Dãy số là danh sách có quy luật

Hãy bắt đầu chính xác từ nơi dãy số xuất hiện tự nhiên nhất—trong những câu chuyện hàng ngày.

Câu chuyện 1: Xếp lon

Ngày 1 bạn xếp 3 lon nước ngọt trên bàn. Mỗi ngày mới bạn thêm 2 lon so với ngày hôm trước.

Vậy độ cao sẽ là:

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Câu chuyện 2: Gấp giấy

Bạn gấp một dải giấy làm đôi. Mỗi lần gấp sẽ nhân đôi số lớp. Sau lần gấp đầu tiên có 2 lớp, sau lần gấp thứ hai có 4, rồi 8, rồi 16, và cứ thế.

Danh sách đó trông như thế này:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Dừng lại và chú ý hai ý tưởng lớn đang len lỏi vào:

1. Tăng trưởng theo kiểu **cộng-cùng-một-số** (+2 lon mỗi ngày).
2. Tăng trưởng theo kiểu **nhân-với-cùng-một-số** ($\times 2$ lớp mỗi lần gấp).

Hai hương vị đơn giản đó—cộng một số cố định so với nhân với một số cố định—sẽ chi phối toàn bộ tài liệu này.

2 Từ danh sách đến dãy số

Hiện tại chúng ta chỉ có những danh sách số rời rạc. Các nhà toán học đặt tên đặc biệt cho một danh sách có thứ tự mà về nguyên tắc có thể tiếp tục mãi mãi: một **dãy số**. Nhưng thay vì nhảy thẳng vào một định nghĩa gọn gàng, trước tiên hãy vật lộn với một câu hỏi thực tế.

Ví dụ 2.1. *Nếu ngày 17 của cuộc sống xếp lon sắp đến, sẽ có bao nhiêu lon trong chồng mà không cần viết ra từng bước?*

Hãy suy luận cùng nhau. Ngày 1 có 3 lon. Mỗi ngày mới là +2 lon. Có bao nhiêu bước nhảy +2 từ ngày 1 đến ngày 17? Đếm chúng: từ 1 đến 17 là 16 bước tiến. Vậy ta cộng 16 lần số 2.

$$\text{Số lon ngày 17} = 3 + 16 \cdot 2 = 3 + 32 = 35 \text{ lon}.$$

Ví dụ 2.2. *Tìm độ cao của chồng lon vào Ngày 50.*

Lời giải
Ngày 1 bắt đầu từ 3. Từ Ngày 1 đến Ngày 50 chúng ta di chuyển 49 bước. Mỗi bước đẩy số lượng lên 2. Vậy

$$\text{Số lon ngày 50} = 3 + 49 \cdot 2 = 3 + 98 = 101.$$

Dễ thôi!
Bây giờ một quy luật đang hét lên: "Tôi là tổng quát!". Bất cứ khi nào bạn bắt đầu từ một giá trị đầu tiên nào đó (gọi là a_1) và cộng cùng một số (gọi là d cho "hiệu số") liên tục, giá trị thứ n có thể được viết là

$$a_1 + (n-1)d$$

Công thức đó chính xác là những gì lời nói của chúng ta đã làm: một phần bắt đầu, cộng $(n-1)$ bước nhảy có kích thước d. Hãy tôn vinh ý tưởng một cách chính thức sau khi đã cảm nhận được nó.

Định nghĩa 2.1 (Dãy số Cấp số cộng)**.** *Một dãy số được gọi là **cấp số cộng** nếu mỗi số hạng được tạo ra từ số hạng trước đó bằng cách cộng cùng một số cố định d (gọi là **công sai**). Nếu số hạng đầu tiên là a_1, số hạng thứ n là*

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Một bài tập thở nhanh
Viết ra ba dãy số cấp số cộng khác nhau của riêng bạn ngay bây giờ. Làm cho một trong số chúng giảm (điều đó chỉ có nghĩa là d âm). Kiểm tra rằng mỗi phần tử mới thực sự là "phần tử cũ cộng với cùng d". Bài kiểm tra nhỏ đó sẽ củng cố khái niệm.

3 Mô tả tăng trưởng số học & từ vựng chính

Chúng ta đã len lỏi đưa vào những từ quan trọng. Hãy làm chậm bộ phim và chỉ vào từng nhân vật:

- a_1 – **số hạng đầu tiên**. Cái gì khởi động danh sách.
- d – **công sai**. "Kích thước bước" cố định.
- n – **vị trí số hạng**. "Thứ tự nào trong hàng?"
- a_n – **số hạng thứ n**. Giá trị nằm ở vị trí đó.

Không có gì kỳ lạ, nhưng việc rõ ràng về từ ngữ và ký hiệu ngăn ngừa 90% những nhức đầu sau này.

Tại sao $(n-1)$ chứ không phải n trong công thức?
Bởi vì vào Ngày 1 (hoặc vị trí 1) chúng ta muốn có không bước nhảy của d đã xảy ra. Nó chỉ cảm thấy buồn cười cho đến khi bạn vẽ một dòng thời gian nhỏ:

1	2	3	4
a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d

Thấy chưa? Vị trí thứ hai sử dụng một d, vị trí thứ ba sử dụng hai, ..., vị trí thứ n sử dụng $(n-1)d$.

4 Đếm có bao nhiêu số hạng

Giả sử ai đó đưa cho bạn điểm đầu và điểm cuối của một danh sách cấp số cộng và hỏi: "Có bao nhiêu số hạng nằm giữa và bao gồm chúng?" Chồng lon lại tình nguyện làm chuột bạch.

Ví dụ 4.1. *Các số vào Ngày 1 đến 17 là $3, 5, 7, \ldots, 35$. Có bao nhiêu số hạng?*

Chắc chắn, chúng ta có thể đếm bằng ngón tay. Nhưng nếu dãy chạy từ 3 đến 1203 với cùng hiệu số $d = 2$ thì sao? Đếm bằng ngón tay sẽ kết thúc vào thế kỷ tới.

Nghĩ về một đoạn đơn giản hơn: Có bao nhiêu số nguyên từ 5 đến 11 bao gồm cả hai đầu?

$$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

Lấy số cuối trừ số đầu, sau đó chia cho kích thước bước, rồi cộng một (vì chúng ta đếm cả hai đầu). Vậy

$$\frac{11-5}{1}+1=6+1=7.$$

Phương pháp mới chỉ là phiên bản "đếm các bước nhảy, rồi cộng một" được trang trí lại.

Chủ đề 4.1 (Đếm số hạng trong Cấp số cộng)**.** *Nếu một dãy số tiến hành với công sai d, và bạn biết số hạng đầu a_1 và số hạng cuối a_n, thì số lượng số hạng n là*

$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1.$$

Ví dụ 4.2. *Có bao nhiêu số chẵn từ 14 đến 92?*

Lời giải
Số hạng đầu $a_1=14$, số hạng cuối $a_n=92$, công sai $d=2$.

$$n=\frac{92-14}{2}+1=\frac{78}{2}+1=39+1=40.$$

Vậy có bốn mươi số chẵn trong khối đó.

5 Tổng của cấp số cộng: hai cách thân thiện

Một danh sách thì tốt, nhưng thường chúng ta muốn tổng của nó. Hình dung mỗi số như một đồng xu được đặt thành hàng và bây giờ chúng ta quét chúng vào một đống duy nhất. Chúng ta đã thu được bao nhiêu tiền?

Cách 1: Câu chuyện ghép cặp của Gauss trẻ tuổi

Thủ thuật "ghép cặp hai đầu" đến từ một truyền thuyết về Carl Friedrich Gauss, một cậu bé xuất sắc được cho là đã làm giáo viên kinh ngạc bằng cách cộng $1+2+3+\cdots+100$ chỉ trong vài giây.

Xếp danh sách xuôi trên bàn

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 100$$

và ngay bên dưới xếp danh sách ngược

$$100 \quad 99 \quad 98 \quad \ldots \quad 1.$$

Mỗi cặp xếp dọc tạo thành 101. Có 100 cặp như vậy. Vậy hai bản sao của tổng ban đầu bằng $101\cdot 100$. Một nửa của nó là một bản sao:

$$S_{100}=\frac{101\cdot 100}{2}=5050.$$

Ý tưởng lớn: số đầu + số cuối = hằng số khi bước đi đồng đều.

Cách 2: Công thức gọn gàng

Quy luật rõ ràng là "tổng là số cặp nhân với giá trị của mỗi cặp". Số cặp là $n/2$ vì mỗi cặp chứa hai số hạng ban đầu.

Giá trị của mỗi cặp đều giống nhau, vì vậy chúng ta chỉ cần tính giá trị của cặp đầu tiên: $a_1 + a_n$.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ở đây S_n (đọc là "S dưới n") có nghĩa là tổng riêng phần của n số hạng đầu tiên. Công thức chỉ đơn giản là phép ghép cặp của Gauss được gói trong ký hiệu: lấy n cặp, mỗi cặp có giá trị $(a_1 + a_n)$, sau đó chia cho 2 vì mỗi cặp chứa hai số hạng ban đầu.

Định nghĩa 5.1 (Tổng riêng phần)**.** ***Tổng riêng phần*** *S_n của một dãy số là tổng thu được bằng cách cộng n số hạng đầu tiên:*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ví dụ 5.1. *Một phà thực hiện 12 chuyến vào thứ Hai. Vào thứ Ba nó thực hiện 14 chuyến, vào thứ Tư 16 chuyến, và cứ thế, thêm hai chuyến mỗi ngày. Có bao nhiêu chuyến từ thứ Hai đến Chủ nhật?*

Lời giải

Đây là cấp số cộng với $a_1 = 12$, $d = 2$. Đầu tiên tìm a_7 (Chủ nhật):

$$a_7 = 12 + (7-1) \cdot 2 = 12 + 12 = 24.$$

Bây giờ tính tổng:

$$S_7 = \frac{7(12+24)}{2} = \frac{7 \cdot 36}{2} = 7 \cdot 18 = 126.$$

Vậy có 126 chuyến trong cả tuần.

Tại sao công thức hoạt động

Chúng ta đã ghép cặp số đầu với số cuối, số thứ hai với số áp cuối, và cứ thế. Mọi cặp đều có tổng bằng cùng một giá trị, vì vậy nhân và chia đôi là hợp lý. Nếu độ dài danh sách n là lẻ, số hạng ở giữa sẽ ghép cặp với chính nó, nhưng công thức vẫn cho ra tổng đúng.