Numerikus módszerek I
Gyakorlat jegyzet

Készült Bozsik József előadásai és gyakorlatai alapján

Sárközi Gergő, 2021-22-2. félév
Nincsen lektorálva!

Tartalomjegyzék

1. Gépi számábrázolás, hibaszámítás

1.1. Gépi számok, lebegőpontos számábrázolás egy modellje

- Normalizált lebegőpontos szám: $a = \pm m * 2^k = \pm[m_1 ... m_t|k]$
  - m: mantissza, hossza t, $m = \sum_{i=1}^{t} m_i * 2^{-i} \quad (m_1 = 1;\ m_i \in \{0, 1\})$
  - k: karakterisztika, $k^- \leq k \leq k^+$
- Gép számok halmaza: $M = M(t, k^-, k^+) \quad (k^-, k^+ \in \mathbb{Z}$ és $t \in \mathbb{N})$
  - $M(t, k^-, k^+) = \{\pm 2^k * \sum_{i=1}^{t} m_i * 2^{-i}\} \cup \{0\}$
  - Gyakran hozzávesszük: $+\infty, -\infty, NaN$
- Gép számok halmazának tulajdonságai:
  - $\frac{1}{2} \leq m < 1$ és M szimmetrikus 0-ra
  - ϵ_0: legkisebb pozitív elem: $\epsilon_0 = [100...0|k^-] = \frac{1}{2} * 2^{k^-} = 2^{k^- - 1}$
  - M_∞: legnagyobb elem: $M_\infty = [111...1|k^+] = (1 - 2^{-t}) * 2^{k^+}$
  - M-ben az 1 után következő gépi szám és az 1 különbsége:
    $\epsilon_1 = [100...01|1] - [100....00|1] = 2^{-t} * 2^1 = 2^{1-t}$
  - $|M|$: M számossága: $|M| = 2 * 2^{t-1} * (k^+ - k^- + 1) + 1$

1.2. Valós számok ábrázolása gépi számmal

- Ábrázolható számok tartománya: $\mathbb{R}_M = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M_\infty\}$
- Input függvény, $fl : \mathbb{R}_M \to M$: x-hez $\widetilde{x}$-et rendel
  - $\widetilde{x}$ az x-hez legközelebbi gépi szám, kerekítés szabályai szerint
  - $fl(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < \epsilon_0 \\ \widetilde{x} & \text{ha } \epsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \\ +\infty & \text{ha } |x| > M_\infty \end{cases}$

1.2.1. Hibakorlátok

- Input hiba: $\forall x \in \mathbb{R}_M : |x - fl(x)| \leq \begin{cases} \epsilon_0 & \text{ha } |x| < \epsilon_0 \\ 0.5 * |x| * \epsilon_1 & \text{ha } \epsilon \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$
- Abszolút hibakorlát: $\Delta_x = 0.5 * 2^k * 2^{-t}$
- Relatív hibakorlát: $\delta_x = 2^{-t}$

1.2.2. Input függvény a gyakorlatban

- Feladat: $M(5, -4, 4)$-ben $fl(10, 85) = ?$
- Első lépés: szám átalakítása 2-es számrendszerbe
  - Táblázatban lehet egyből törtet is átalakítani, pl. 1/6
  - Kezdő nullákat elhagyjuk, a karakterisztikát annyival eltoljuk

10	5	2	1	0
$(:2)$	0	1	0	1
$1010_{(2)}$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$

1. táblázat. Egészrész binárisba alakítása

85	70	40	80	60	20	40	80
$(*2)$	1	1	0	1	1	0	0
$\approx 0.11011_{(2)}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

2. táblázat. Törtrész binárisba alakítása

  - Eredmény: $10,85 \approx 1010.11011_{(2)} = 1010.1|1011_{(2)}$
- Második lépés: kerekítés
  - Eredmény: $fl(10,85) = [10110|4] = \frac{22}{32} * 2^4 = 11$
- Harmadik lépés: hibaszámolás: $|10,85 - fl(10,85)| = 0,15$

1.3. Gépi számok összeadása

- Azonos karakterisztikájú számok összeadása: mantisszák összeadása, szükség esetén normalizálás (kerekítéssel)
- Eltérő karakterisztikájú számok összeadása: kisebbik karakterisztikát a nagyobbikhoz igazítjuk (kerekítünk, ha kell), majd normál összeadás
- Van rá példa: $b \neq 0 \wedge a \oplus b = a$
  - pl. b karakterisztikája $\leq a$ karakterisztikája + mantissza + 1 $[10011|4] \oplus [10010|-2] \implies 0.10010_{(2)} * 2^{-2} = 0.00000010010_{(2)} * 2^4$
- Van rá példa: asszociativitás nem teljesül
  - pl. (nagy+kicsi)+kicsi vs nagy+(kicsi+kicsi)
- ZH-ban részletesen le kell vezetni pl. a karakterisztika váltást

1.4. Hibaszámítás elemei

1.4.1. Hibák jellemzése

- Legyen A egy pontos érték, a pedig egy közelítő érték
- $\Delta a = A - a$: közelítő érték pontos hibája
- $|\Delta a| = |A - a|$: közelítő érték abszolút hibája
- $\Delta_a \geq |\Delta a|$: közelítő érték abszolút hibakorlátja
- $\delta a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$: közelítő érték relatív hibája
- $\delta_a \geq |\delta a|$: közelítő érték relatív hibakorlátja
- Kerekítés abszolút hibakorlát: 2 tizedesjegyes kerekítés esetén 0.005

1.4.2. Alapműveletek hibakorlátai

- Tétel: alapműveletek hibakorlátai
  - $\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$ $\quad$ $\delta_{a \pm b} = (|a|\delta_a + |b|\delta_b)\ /\ |a \pm b|$
  - $\Delta_{a*b} = |b|\Delta_a + |a|\Delta_b$ $\quad$ $\delta_{a*b} = \delta_a + \delta_b$
  - $\Delta_{a/b} = (|b|\Delta_a + |a|\Delta_b)\ /\ b^2$ $\quad$ $\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$
- Két esetben van nagyságrendileg nagyobb hiba, ezeket érdemes elkerülni:
  - $\delta_{a \pm b}$: közeli számok kivonása egymásból
  - $\Delta_{a/b}$: kicsi számmal osztás

1.4.3. Függvényérték hibája, kondíciószáma

- Függvényérték relatív hibája: Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|} * \delta_a$
- f függvény a-beli kondíciószáma: $c(f, a) = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$

2. Mátrixokról általánosságban

- a_{ij} jelentése: i. sor, j. oszlop az A mátrixban
- $\mathcal{U}$: felső háromszögmátrixok
- $\mathcal{L}_1$: alsó háromszögmátrixok; főátlójukban csupa 1-es van
- A^T jelentése: főátlóra tükrözés
- Szimmetrikus mátrix: $A = A^T$
- Sorokra/oszlopokra szigorúan diagonálisan domináns mátrix: főátlóban lévő elemek abszolútértéke szigorúan nagyobb, mint az adott sorban/oszlopban lévő elemek abszolútértékének összege (átlót nem beleszámítva)

2.1. Pozitív definit mátrix definíció

- Legyen szimmetrikus (TODO ebben a tárgyban ez feltétel vagy sem?)
- Ezek közül legyen egy igaz (ha egy igaz, az akkor az összes is):
  - $< Ax, x >= x^T Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén
  - minden főminorjának determinánsa pozitív
  - minden sajátértéke pozitív
- Példa pozitív definit mátrixra: diagonális és minden eleme pozitív

2.2. Ortogonális mátrix, ortonormált rendszer

- Ortogonális mátrix: $Q^T = Q^{-1}$
  - Oszlopaik, mint vektorok, ortonormált rendszert alkotnak
  - Ortogonális mátrixok szorzata is ortogonális
- Ortonormált rendszer: $< q_i, q_j >= \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$
  - Ortogonális rendszer: $i = j$ esetében lehet bármi, nem csak 1

2.3. Sajátérték számolás

- $|A - \lambda I| = 0$, azaz főátlón mindenhol kivonunk λ-t, kiszámoljuk a paraméteres determinánst és megoldunk egy egyenlőséget ($det = 0$)

2.4. Determináns számolás

- 1×1 mátrix: a szám maga
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix: $ad - bc$
- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ mátrix: $a * \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b * \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c * \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
  - Lehet sor helyett oszlop szerint is kibontani
- Determináns tartó műveletek:
  - egy sorhoz hozzáadni egy másik sor konstans-szorosát
- Determináns meg kell szorozni $(-1)^n$-szer: oszlop, sorcserék száma
- Kapcsolat önmagával:
  - $\det(A^T) = \det(A)$
  - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  - $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
  - $n \times n$-es mátrix: $\det(cA) = c^n * \det(A)$
- Háromszög mátrix: determináns a főátlón lévő elemek szorzata
- Főminorok: egy mátrix bal felső almátrixjainak a determinánsai
  - D_k a $k \times k$ bal felső részmátrix determinánsa

2.5. Invertálás

- Diagonális mátrix: (főátló) elemeinek reciproka
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/(ad) & (be - cd)/(afd) \\ 0 & 1/d & -e/(fd) \\ 0 & 0 & 1/f \end{bmatrix}$
  - Alsó háromszögmátrix: ugyan így

3. Gauss-elimináció (GE)

- Alak: [A|b]
- Első rész: főátló alatt nullázás, balról jobbra
  - Ezután már egyből lehet determinánst számolni
- Második rész: főátló fölött nullázás, jobbról balra, sor osztása magával
  - Kihagyható: egyenletrendszerrel enélkül is megoldható az $Ax = b$
- Nullázás: a pillanatnyi sor konstans-szorosát hozzáadjuk egy másikhoz
- Inverz számolás: b helyett az identitásmátrix legyen a jobb oldalon. Ekkor amikor bal oldalon identitásmátrix van: jobb oldalon az inverz.
- Sorcsere: nem változik a megoldás
- Oszlopcsere: a megoldás komponensei cseréjének megfelelően változnak
- Főátlón 0 van, alatta/felette nem: oszlop/sorcsere kell
- Nincs megoldás: ha bal oldalon 0-k vannak a sorban, jobb oldalon nem
- Függő paraméter: ha egy sorban csak 0-k vannak mindkét oldalt

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/5 & 2/5 & 14/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 - 7/5r - 2/5s \\ -1/5 + 3/5r + 3/5s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} -7/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1. Főelemkiválasztás

- Részleges főelemkiválasztás: adott oszlopban maximális abszolút értékű elem (sor) kiválasztása (ami a főátlón vagy az alatt van), áthelyezése a főátlóra, és a többi sor azzal való eliminálása
- Teljes főelemkiválasztás: részleges főelemkiválasztás, csak bármelyik oszlopból választunk (de mindig csak a jobb alsó részmátrixból)

4. LU felbontás ($A = LU$, ahol $L \in \mathcal{L}_1$ és $U \in \mathcal{U}$)

- Felhasználás: $Ax = b$ helyett $Ly = b$ (alsó Δ) és $Ux = y$ (felső Δ)

4.1. Gauss-eliminációval (GE-vel)

- $L_{n-1} * ... * L_2 * L_1 * A = U \implies A = L_1^{-1} * L_2^{-1} * ... * L_{n-1}^{-1} * U = LU$
- Minden GE lépés egy $L_i \in \mathcal{L}_1$, elemei: hányszorost adtunk a sorhoz
- L_i invertálásakor az elemek előjelet cserélnek, ekkor elemek: $\frac{\text{adott sorbeli érték}}{\text{elemináló sor értéke}}$
- Tömör írásmód: nem hozunk létre L_i mátrixokat, hanem a GE-ben használt mátrix alsó részét vastag vonallal leválasztjuk és oda írjuk be a végső L értékeit, folyamatosan, ahogy kiszámoljuk őket

4.2. Létezés (ami $\neq$ LER megoldhatóság)

- GE végrehajtható sor- és oszlopcsere nélkül $\implies$ létezik LU felbontás
- D_k főminorok $\neq 0 \implies$ létezik LU felbontás (és $u_{kk} \neq 0$)
- $\det(A) \neq 0 \implies$ az LU felbontás egyértelmű

4.3. LU mátrixok közvetlen kiszámolása (GE nélkül)

- Írjuk fel az L, U mátrixokat változókkal (minden elem 0 vagy egy változó)
  - Segítség: U és A első sora megegyezik
  - Segítség: A első oszlopa leosztva a_{11}-gyel egyezik L első oszlopával
- Egy jó sorrendben (lásd kép) számoljuk ki a változókat: mátrixszorzás eredményét tudjuk, vissza kell fejtenünk a változókat
  - Ellentmondás $\implies$ az LU felbontás nem létezik

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan — oszlopfolytonosan — parkettaszerűen

5. LDU felbontás ($L \in \mathcal{L}_1$, $U \in \mathcal{U}_1$, D diagonális)

- Előállítás LU felbontásból: $A = L\widetilde{U} = LD * (D^{-1}\widetilde{U}) = LDU$
  - $\widetilde{U}$ főátlóját átmásoljuk D-be, helyére 1-esek kerülnek
  - $\widetilde{U}$ minden többi elemét leosztjuk $\widetilde{U}$ azonos sorának főátlóbeli elemével
  - Így megkaptuk az U mátrixot, L mátrixot pedig békén hagyjuk

5.1. Szimmetrikus A mátrix, LDL^T felbontás

- Szimmetrikus az A mátrix $\implies LDU = LDL^T$
- GE-vel elég csak a főátlót (D) és az alsó részt (L) tárolni

6. Cholesky (LL^T) felbontás ($L \in \mathcal{L}$)

- Felhasználás: $Ax = b$ helyett $Ly = b$ (alsó Δ) és $L^T x = y$ (felső Δ)
- A szimmetrikus és A pozitív definit $\implies$ létezik és egyértelmű
- Előállítás LDU felbontásból: $A = \widetilde{L}D\widetilde{L}^T = \widetilde{L}\sqrt{D}\sqrt{D}\widetilde{L}^T = LL^T$
  D minden eleméből gyököt vonunk, ezzel megszorozzuk $\widetilde{L}$-t:
  $L = \widetilde{L} * \sqrt{D}$ és $L^T = \sqrt{D} * \widetilde{L}^T$ (L: oszlop; L^T: sor szorzás D elemével)
- Előállítás GE-vel: minden lépésben osztjuk az oszlopot $\sqrt{a_{kk}}$-val

7. QR felbontás, Gram-Schmidt féle ortogonalizáció

- Q ortogonális mátrix, $R \in \mathcal{U}$
- Felhasználás: $Qy = b \implies y = Q^T b$ és $Rx = y$ (felső Δ)
  - Egybe írva: $Rx = Q^T b$
- $\det(A) \neq 0 \implies$ létezik QR felbontás
  - $\forall r_{ii} > 0 \implies$ egyértelmű a QR felbontás

7.1. Gram-Schmidt féle ortogonalizáció, folyamatos normálás

- a_i jelentése: A mátrix i. oszlopa
- $r_{11} = ||a_1||$ és $q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1$
- k: hányadik lépés van most ($k = 2, .., n$); valamint: $j = 1, ..., k-1$
- $r_{jk} =< a_k, q_j >$ és $s_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} * q_j$ és $r_{kk} = ||s_k||$ és $q_k = \frac{1}{r_{kk}} s_k$

7.2. Gram-Schmidt féle ortogonalizáció, normálás utólag

- $\widetilde{r}_{11} = \widetilde{r}_{kk} = 1$ és $\widetilde{q}_1 = a_1$
- $\widetilde{r}_{jk} =< a_k, \widetilde{q}_j > / < \widetilde{q}_j, \widetilde{q}_j >$ és $\widetilde{q}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{r}_{jk} * \widetilde{q}_j$
- Ilyenkor már $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, de Q nem ortonormált
- Q elkészítése: $\widetilde{Q}$ oszlopait ($\widetilde{q}_i$) le kell osztani $||\widetilde{q}_i||$-vel
- R elkészítése: $\widetilde{R}$ sorait meg kell szorozni $||\widetilde{q}_i||$-vel
  (A legfelső sort a leg bal oldalibb oszloppal kell szorozni.)

8. Householder transzformáció

- Householder mátrix: $H(v) = I - 2vv^T$ ahol $||v|| = 1$
  - $H(v)$ tükröző mátrix, v normálvektorú, $n-1$ dim. altérre tükröz
  - Szimmetrikus ($H^T = H$), ortogonális ($H^{-1} = H$ és $||x|| = ||H(v)x||$)
  - $H(v) * v = -v$ és $\forall y \perp v : H(v) * y = y$
  - Nem kell előállítani, a Householder transzformáció anélkül is alkalmazható:
    $H(v)x = (I - 2vv^T)x = x - 2v(v^T x)$ ahol $v^T x \in \mathbb{R}$ és $x \in R^n$
    $y^T H(v) = y^T(I - 2vv^T) = y^T - 2(y^T v)v^T$ ahol $y^T v \in \mathbb{R}$ és $y \in R^n$
- Tükrözés: $v = \pm\frac{a-b}{||a-b||}$, $a \neq b$, $||a|| = ||b|| \neq 0$ esetén: $H(v)a = b$

8.1. Egy a vektor $b = k * e_1$ alakúra hozása

- $k = -1 * signum(a_1) * ||a||$ és $v = \frac{a-ke_1}{||a-ke_1||}$
- Ekkor: $H(v) * a = a - 2v(v^T a) = a - 2(v^T a)v = ke_1$ $(2(v^T a) \in \mathbb{R})$

8.2. LER megoldás Householder transzformációval

- Cél: felső háromszög alakra hozás
- Minden lépésben egy oszlopot $k * e_1$ alakúra hozunk
- A transzformációt a többi oszlopon és b-n is elvégezzük:
  $c := c - 2(v^T c)v$ ahol c egy tetszőleges oszlop (vagy b)
  - Ha c az az oszlop, amivel létrehoztuk v-t: az eredmény $k * e_1$
- Következő lépésben eggyel kisebb mátrixon folytatjuk

8.3. QR felbontás Householder transzformációkkal

- TODO nem sikerült felfognom/megértenem, de minta ZH-ban sem volt

9. Mátrixnormák, vektornormák, kondíciószám

9.1. Vektornormák

9.1.1. Axiómák

- Az alábbi tulajdonságok mindegyikével bíró függvények a vektornormák
- $||x|| \geq 0$
- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||\lambda * x|| = |\lambda| * ||x||$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

9.1.2. Tudnivalók

- $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$ de $\exists c_1, c_2 : c_1 * ||x||_b \leq ||x||_a \leq c_2 * ||x||_b$
  - Azaz ekvivalensek a normák

9.1.3. Gyakori vektornormák

- Manhattan norma: $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Euklideszi norma: $||x||_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Csebisev norma: $||x||_\infty = \max |x_i|$
- p-norma: $||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$

9.2. Mátrixnormák

9.2.1. Axiómák

- Vektorok axiómái
- És egy extra: $||A * B|| \leq ||A|| * ||B||$

9.2.2. Tudnivalók

- Indukált norma, természetes mátrixnorma: $||A|| = \sup \frac{||Ax||_v}{||x||_v} \quad (x \neq 0)$
- Illeszkedő norma: $||Ax||_v \leq ||A|| * ||x||_v$
- Természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz

9.2.3. Gyakori mátrixnormák

- Frobenius-norma (nem indukált): $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$
  - Illeszkedik a kettes vektornormához
- Oszlopnorma: $||A||_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlop szummák maximuma)
- Sornorma: $||A||_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (sor szummák maximuma)
  - Szimmetrikus mátrix esetén megegyezik az oszlopnormával
- Spektrálnorma: $||A||_2 = \sqrt{\max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\varrho(A^T A)}$
  - $\lambda_i(A^T A)$ az $A^T A$ mátrix különböző sajátértékeket jelenti
  - Spektrálsugár: $\varrho(A) = \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$
  - Szimmetrikus mátrix esetén: $||A||_2 = \varrho(A)$

9.3. Mátrixok kondíciószáma

- $\kappa(A) = cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$
- Csak invertálható mátrixokra értelmes
- Értéke függ a választott normától
- Jellemzi LER feladat érzékenységét a (bemeneti, számábrázolási) hibára
  - Minél nagyobb a kondíciószám, annál rosszabb

9.3.1. Tulajdonságok

- Indukált norma esetén: $cond(A) \geq 1$
- $c \neq 0 \implies cond(c * A) = cond(A)$

9.3.2. Speciális esetek

- Ha Q ortogonális: $cond_2(Q) = 1$
- Ha A szimmetrikus: $cond_2(A) = \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$
- Ha A invertálható: $cond(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$

9.4. Reziduumvektor, maradékvektor

- Legyen $\widetilde{x}$ az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása
- Ekkor $r = b - A\widetilde{x}$ a reziduum- vagy maradékvektor
- Jellemzi megoldó módszer érzékenységét (bemeneti/számábrázolási) hibára
  - Kondíciószám a feladat érzékenységét jellemzi, ez a megoldás módszerét
- Relatív maradék: $\eta = \frac{||r||}{||A|| * ||\widetilde{x}||}$
  - Ha A invertálható, akkor illeszkedő normában: $\eta \leq \frac{||\Delta A||}{||A||}$
  - Egyenlőség áll fenn kettes norma esetén

10. Iterációs módszerekről általánosságban

- $\varphi(x) = Bx + c$
  - B: átmenet mátrix
  - $x^{(0)}$ tetszőleges, $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$
- Vektorsorozat akkor konvergens, ha
  $\exists x^* \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : ||x^{(k)} - x^*|| < \epsilon$
- Iteráció és LER: $x^* = Bx^* + c \quad \Leftrightarrow \quad (I - B)x^* = c \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$
- Fixponttétel: x^* az φ leképezés fixpontja, ha $x^* = \varphi(x^*)$

10.1. Kontrakció

- φ kontrakció, ha $\exists q \in [0, 1) : ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq q * ||x - y|| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$
- q neve: kontrakciós együttható (minél kisebb, annál gyorsabb a kontrakció)
- Kontrakció esetén létezik egyértelmű fixpont
- Nézzük a $\varphi(x) = Bx + c$ leképezést (ekkor $q = ||B||$, azonos normában)
  - Elégséges feltétel kontrakcióra bármilyen kezdőértékkel: $||B|| < 1$
  - Szükséges és elégséges feltétel, bármilyen kezdőérték: $\varrho(B) < 1$
  - Ha a fenti állítások igazak, akkor $\forall x^{(0)}$ esetén kontrakció
  - Ha nem igazak, akkor is létezhez $x^{(0)}$, amire kontrakció

10.2. Hibabecslés

- Ugyan azt a normát használjuk, mint a kontrakciós együtthatóhoz
- $||x^{(k)} - x^*|| \leq q^k * ||x^{(0)} - x^*||$
- $||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{q^k}{1-q} * ||x^{(1)} - x^{(0)}||$
- Hány (k) lépést kell tenni adott (α) pontossághoz adott x_0 esetén?
  - $||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{q^k}{1-q} * ||x^{(1)} - x^{(0)}|| \leq \alpha$ (itt q, $x^{(1)}$, $x^{(0)}$, α ismert)
  - Rendezve: $||x^{(k)} - x^*|| \leq q^k \leq ... * \alpha \implies k \geq \log_q(... * \alpha)$
    - Reláció megfordult, mert $q < 1$

11. Jacobi-iteráció

- Eredeti feladat: $Ax = b$
- Legyen $A = L + D + U$ (semmi köze az LDU-felbontáshoz)
- Iteráció: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b = B_J * x^{(k)} + c_J$
- Koordinátás, komponensenkénti alak
  - $x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i)$
  - pl. $x_2^{(1)} = \frac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2)$
- Reziduum vektoros alak
  - $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ és $k = 1, ...$
  - $s^{(k)} = D^{-1}r^{(k)}$
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ és $r^{(k+1)} = r^{(k)} - As^{(k)}$
- Ha A szig. diag. dom. a soraira, akkor az iteráció mindig konvergens
- Relaxált, csillapított Jacobi-iteráció: nem szokott lenni ZH-ban

12. Gauss-Seidel-iteráció

- Eredeti feladat: $Ax = b$
- Legyen $A = L + D + U$ (semmi köze az LDU-felbontáshoz)
- Iteráció: $x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b = B_S * x^{(k)} + c_S$
- Koordinátás, komponensenkénti alak
  - $x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i)$
  - pl. $x_2^{(1)} = \frac{-1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2)$
- Reziduum vektoros alak
  - $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ és $k = 1, ...$
  - $s^{(k)} = (D+L)^{-1}r^{(k)}$
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ és $r^{(k+1)} = r^{(k)} - As^{(k)}$
- Az iteráció minden $x^{(0)}$ esetén konvergens, ha
  - ha A szigorúan diagonális domináns a soraira
  - vagy ha A pozitív definit mátrix
- Csillapított, relaxált Gauss-Seidel-iteráció: nem szokott lenni ZH-ban

13. Richardson-iteráció

- Legyen A egy pozitív definit mátrix és $p \in \mathbb{R}$
  - Pozitív definit $\Leftrightarrow$ minden sajátértéke pozitív
- Eredeti feladat: $Ax = b \implies p * Ax = p * b$
- Iteráció: $x^{(k+1)} = (I - pA)x^{(k)} + pb = B_{R(p)} * x^{(k)} + c_{R(p)}$
- Reziduum vektoros alak
  - $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ és $k = 1, ...$
  - $s^{(k)} = pr^{(k)}$
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ és $r^{(k+1)} = r^{(k)} - As^{(k)}$

13.1. Konvergencia

- Legyenek A sajátértékei $m = \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n = M$
- $R(p)$ pontosan $p \in (0; \frac{2}{M})$ esetén konvergens $(\forall x^{(0)})$
- Optimális paraméter: $p_0 = \frac{2}{M+m}$
  - Ekkor $q = \frac{M-m}{M+m} = ||B_{R(p_0)}||_2 = \varrho(B_{R(p_0)})$

14. Részleges LU-felbontás, ILU-iteráció

14.1. ILU-felbontás

- J: (mátrix) pozícióhalmaz, $(i,i) \notin J$
- $(i,j) \in J \implies l_{ij} = u_{ij} = 0$ valamint $(i,j) \notin J \implies a_{ij} = (LU)_{ij}$
  - Azaz rendes $A = LU$ felbontás, de pár elem 0
- Felbontás algoritmusa (L, U és Q kiszámolása)
  - $k = 1, ..., n-1$ és $\widetilde{A}_1 = A$
  - $\widetilde{A}_k = P_k - Q_k$
    - k-adik sor/oszlop van J-ben: Q-ba beletesszük A azon pozíciójának -1-szeresét és P-ban 0-ra állítjuk az értéket
  - $\widetilde{A}_{k+1} = L_k P_k$
    - GE-vel elimináljuk P k-adik oszlopát, "lépést" L_k^{-1}-be mentjük
    - Gyakorlatilag LU-felbontás: $\widetilde{A}_n \sim U$
    - Tömör írásmódra is van lehetőség: A, L, P egyben
- Felbontás befejezése (cél: $A = LU - Q$)
  - $U = \widetilde{A}_n$
  - $L = L_1^{-1} * ... * L_{n-1}^{-1}$ (összepakolás)
  - $Q = Q_1 + ... + Q_{n-1}$ (összepakolás)

14.2. ILU-iteráció

- Eredeti feladat: $Ax = b$
- Legyen $A = P - Q$ és $P = LU$
- Iteráció: $x^{(k+1)} = P^{-1}Qx^{(k)} + P^{-1}b = B_{ILU} * x^{(k)} + c_{ILU}$
- Koordinátás, komponensenkénti alak: nem volt a dián
- Reziduum vektoros alak
  - $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ és $k = 1, ...$
  - $s^{(k)} = P^{-1}r^{(k)}$
  - $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ és $r^{(k+1)} = r^{(k)} - As^{(k)}$

15. Kerekítési hibák hatása az iterációkra

- Legyen ϵ a lépésenkénti hiba felső korlátja: $||\epsilon^{(k)}|| \leq \epsilon$
- Ekkor $\lim\limits_{k \to \infty} ||z^{(k)}|| \leq \frac{\epsilon}{1-||B||}$

16. Maradék tananyag

- Nemlineáris dolgok és 12. előadás anyaga: rendes ZH-n nem lesz, de javító ZH-n és vizsgán lesz

17. ZH2 összefoglalás

17.1. Normák, spektrálsugár, kondíciószám

- Manhattan norma: $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- Euklideszi norma: $||x||_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Csebisev norma: $||x||_\infty = \max |x_i|$
- p-norma: $||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$
- Frobenius-norma (nem indukált, 2-höz illeszkedő): $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$
- Oszlopnorma: $||A||_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlop szummák maximuma)
- Sornorma: $||A||_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (sor szummák maximuma)
- Spektrálnorma: $||A||_2 = \sqrt{\max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\varrho(A^T A)}$
  - Spektrálsugár: $\varrho(A) = \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$
  - Szimmetrikus mátrix esetén: $||A||_2 = \varrho(A)$

17.1.1. Tulajdonságok, egyebek

- Normák ekvivalensek: $\exists c_1, c_2 : \quad c_1 * ||x||_b \ \leq \ ||x||_a \ \leq \ c_2 * ||x||_b$
- Indukált norma, természetes mátrixnorma: $||A|| = \sup \frac{||Ax||_v}{||x||_v} \quad (x \neq 0)$
- Illeszkedő norma: $||Ax||_v \leq ||A|| * ||x||_v$

17.1.2. Vektor- és mátrixnormák axiómái

- $||x|| \geq 0$ ◦ $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||\lambda * x|| = |\lambda| * ||x||$ ◦ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
- Csak mátrixnormákhoz: $||A * B|| \leq ||A|| * ||B||$

17.1.3. Kondíciószám

- $\kappa(A) = cond(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$
- A szimmetrikus $\implies cond_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$

17.2. Iterációkról általánosságban

- $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = Bx^{(k)} + c$ ahol B az átmenet mátrix és $x^{(0)}$ tetszőleges
- $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (I - B)x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = Bx + c$
- $q \in [0, 1)$ esetén φ kontrakció, $!\exists$ fixpont $(x = \varphi(x))$, minden $x^{(0)}$ jó
- Elégséges feltétel: $q = ||B|| < 1$
- Szükséges és elégséges feltétel: $q = \varrho(B) < 1$
- Hibabecslés: $||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{q^k}{1-q} * ||x^{(1)} - x^{(0)}||$ (illeszkedő normában)

17.3. Jacobi-iteráció

- $A = L + D + U$ (nem LDU-felbontás)
- Vektoros alak: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b = B_J * x^{(k)} + c_J$
- Koordinátás alak: $x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i)$
- A szig. diag. dom. soraira $\Longrightarrow$ mindig konvergens

17.4. Gauss-Seidel-iteráció

- $A = L + D + U$ (nem LDU-felbontás)
- Vektoros alak: $x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b = B_S * x^{(k)} + c_S$
- Koordinátás alak: $x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i)$
- A szig. diag. dom. soraira vagy A poz. definit $\Longrightarrow$ mindig konvergens

17.5. Richardson-iteráció

- Feltétel: A pozitív definit mátrix: $0 < m = \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n = M$
- $Ax = b \Longrightarrow p * Ax = p * b \quad (p \in \mathbb{R})$
- Vektoros alak: $x^{(k+1)} = (I - pA)x^{(k)} + pb = B_{R(p)} * x^{(k)} + c_{R(p)}$
- $R(p)$ konvergens minden $x^{(0)}$-ra $\quad \Leftrightarrow \quad p \in (0; \frac{2}{M})$
- Optimális p: $p_0 = \frac{2}{M+m} \Longrightarrow q = \frac{M-m}{M+m} = ||B_{R(p_0)}||_2 = \varrho(B_{R(p_0)})$

17.6. ILU felbontás, ILU-iteráció

17.6.1. ILU-felbontás

- J pozícióhalmaz, $(i,i) \notin J$
- $k = 1, .., n$
- $A \implies \widetilde{A}_1 = A$
- $\widetilde{A}_k \implies \widetilde{A}_k = P_k - Q_k$ hogy ha J-ben van k-adik oszlop/sor pozíció:
  - Q-ba beletesszük az érték -1-szeresét
  - P-ben 0-ra állítjuk azon értéket
- GE-vel P k-adik oszlopának eliminációja: $\widetilde{A}_{k+1} = L_k P_k$
  - Gyakorlatilag LU-felbontás, tömör írásmódra is van lehetőség
- Felbontás befejezése (cél: $A = LU - Q$)
  - $U = \widetilde{A}_n$
  - $L = L_1^{-1} * ... * L_{n-1}^{-1}$ (összepakolás)
  - $Q = Q_1 + ... + Q_{n-1}$ (összepakolás)

17.6.2. ILU-iteráció

- $A = P - Q$ és $P = LU$
- Vektoros alak: $x^{(k+1)} = P^{-1}Qx^{(k)} + P^{-1}b = B_{ILU} * x^{(k)} + c_{ILU}$