Numerikus módszerek II
Gyakorlat jegyzet és elméleti kérdések kidolgozása

Készült Bozsik József előadásai és gyakorlatai alapján

Sárközi Gergő, 2022-23-1. félév

Nincsen lektorálva!

Tartalomjegyzék

1. Interpoláció

1.1. Lagrange interpoláció

- Legyenek $x_0, ...x_n$ alappontok és $y_0, ..., y_n$ függvényértékek
- Lagrange-alappolinom: $\ell_k(x) = \Pi_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ ahol $0 \leq k \leq n$
  - x-es zárójelek (számláló) felbontása nem elvárás
  - $\ell_k(x_i)$ csak akkor nem 0 (hanem 1), ha $i = k$
- Lagrange-alak: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$
  - Alsó index jelentése: fokszám

1.2. Interpoláció hibabecslés, hibaformula

- Legyen f az eredeti függvény és p_n az interpolációs polinom
- Legyen $[a;b]$ az $x_0, ..., x_n$ és az x pontok által kifeszített intervallum
- Hibabecslés x pontban: $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} * |\omega_n(x)|$
  - $M_{n+1} = \max_{\xi\in[a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$, azaz az eredeti függvény $n+1$-edik deriváltjának a maximuma az $[a;b]$ intervallumon
  - $\omega_n(x) = \Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)$
  - $x = x_i$ esetén, azaz alappontban, a hiba 0
- Hibabecslés $[a;b]$ intervallumon: $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} * |\omega_n(x)|$
  - $|\omega_n(x)|$-re felső becslés kell:
    * Deriváljuk és keressük meg a gyököket
    * Gyökökhöz tartozó behelyettesítési értéket számoljuk ki
    * Válasszuk ki az abszolút értékben legnagyobb értéket
    * Nem baj, ha $[a;b]$-n kívülre esnek, stb., ez így jó

1.3. Osztott differencia

- Elsőrendű osztott differencia: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$
- k-adrendű osztott differencia: $f[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},...,x_{i+k}]-f[x_i,...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$

x_i	y_i	$f[x_1; x_{i+1}]$	$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$
1	1		
4	2	$\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$	
9	3	$\frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$	$\frac{1/5-1/3}{9-1} = \frac{-1}{60}$

- Új alappont esetén az osztott differencia táblázatot legalul bővítjük
- Számláló $(a - b)$ számolása:
  - Első tag (a): balra vízszintesen az első érték (y_i vagy $f[...]$)
  - Második tag (b): bal felfelé átlósan az első érték (y_i vagy $f[...]$)
- Nevező $(a - b)$ számolása:
  - Első tag (a): sor x_i értéke, avagy balra első cella a értéke
  - Második tag (b): bal felfelé átlósan az y_i oszlopig és ott az x_i
    - Avagy bal felfelé átlósan az első cella b értéke

1.4. Newton interpoláció

- $N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k] * \omega_{k-1}(x)$
  - Azonos alappontok esetén L_n-nel azonos végeredmény
  - Új alapponthoz: $N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, ..., x_{n+1}] * \omega_n(x)$
  - ω_n definíciója: lásd hibabecslés, hibaformula
- A nullával megszorzott tagokat is kötelező felírni
- Zárójeleket nem kötelező felbontani

1.5. Csebisev polinomok

- Cél: hiba minimalizálása optimális alappontok választásával
- n-ed fokú Csebisev polinom $\Longrightarrow$ n db gyök (alappont)
  - Gyökök 0-ra szimmetrikusak
- Optimális alappontok meghatározása:
  - A polinomot a rekurzív képlettel állítjuk elő:
    $T_0(x) = 1$ és $T_1(x) = x$ és $T_{n+1}(x) = 2x * T_n(x) - T_{n-1}(x)$
    * $x_0, ..., x_n$ alappontok esetén $T_n(x)$-et kell előállítani
  - Kiszámoljuk a polinom gyökeit
  - Ha nem a $[-1; 1]$ intervallumon dolgozunk: transzformálni kell
    * $\varphi(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$ ahol x egy gyök
- Gyökök megadása közvetlenül:
  - $[-1; 1]$ intervallum esetén: $x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$ ahol $0 \le k \le n-1$
  - Másik intervallumra transzformálás: lásd feljebb
- Hibabecslés az optimális alappontokra épített interpolációra:
  - A képlet nem változik: $|f(x) - p_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} * |\omega_n(x)|$
  - M_{n+1} továbbra is az eredeti függvény $n+1$-edik deriváltjának a maximuma az $[a; b]$ intervallumon
  - Ha $[a; b] = [-1; 1]$ akkor $|\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}$
  - Ha $[a; b] \neq [-1; 1]$ akkor $|\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n} * (\frac{b-a}{2})^{n+1}$

1.6. Hermite interpoláció

- Newton interpoláció pár különbséggel
- Alappontokat annyiszor vesszük (m_i multiplicitás), ahány deriváltját ismerjük (plusz a deriválás nélküli változat)
  - Ezeket kötelező közvetlenül egymás után írni a táblázatba
- Osztott differencia azonos alappontok esetén:
  $f[x_i, ..., x_i] = f[x_i \text{ k-szor}] = f^{(k)}(x_i) \ / \ k!$
- Hibabecslés: ω_m helyett $\Omega_m = \Pi_{i=0}^{k}(x - x_i)^{m_i}$
  - Azaz gyakorlatilag ugyan az: multiplicitás-szor vesszük bele
- Hézagos interpoláció nem lehetséges: nem működik a Hermite, ha $f^{(k)}(x)$-et ismerjük, de $f^{(k-1)}(x)$-et nem
  - Ilyenkor határozatlan együtthatók módszere alkalmazható
- Fejér-Hermite interpoláció: minden multiplicitás 2 ($f(x)$ és $f'(x)$ ismert)
  - Ilyenkor hibabecslésnél a négyzetre emelés kiemelhető és egy segédfüggvényt elég deriválni a szélsőérték kereséshez
    - Példa: $(x(x-1))^2 \implies g(x) := x(x-1)$ szélsőértéke elég

1.7. Spline interpoláció

1.7.1. Spline interpoláció

- Részintervallumonként polinomok:
  $p_k(x) = \sum_{j=0}^{\ell} a_j^{(k)} * (x - x_{k-1})^j$ ahol $x \in l_k$

- Megoldás alakja: $S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(x - x_0) + ... & x \in [x_0; x_1] \\ P_2(x) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}(x - x_1) + ... \\ ... \end{cases}$

- Szerintem ezt az előbbi kettőt soha nem hasznákjuk

1.7.2. Spline interpoláció intervallumonkénti interpolációval

- Elsőfokú spline $\Longrightarrow$ Lagrange/Newton interpoláció minden intervallumon
  - Csak az alappontokra és a helyettesítési értékre van szükségünk
- Másodfokú spline $\Longrightarrow$ Hermite interpoláció minden intervallumon
  - Előzőeken felül szükségünk van egy deriváltra, pl. $S'(x_0)$-ra
  - Minden intervallumon kell egy derivált, ehhez felhasználható:
    $P_k'(x) = P_{k+1}'(x)$ ahol P_k-t deriválnunk kell és $x = x_k$ helyettesítéssel megkapjuk a keresett hiányzó deriváltat a következő intervallumhoz
    - Lehet, hogy P_{k+1}'-et ismerjük és ebből kell P_k'-t kiszámolni

1.7.3. Spline interpoláció egyenletrendszer megoldásával

- Például $x_j = 0$ esetén lehet jó megoldási módszer

- Megoldás alakja: $S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 + ... & x \in [x_0; x_1] \\ P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 + ... & x \in [x_1; x_2] \\ ... \end{cases}$

- Interpolációs feltételek: $S(x_k) = P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = y_k$
  - P_k vagy P_{k+1} nem létezik a két szélső x_k érték esetén
  - Szóban: intervallumok találkozásánál $P_i(x)$ értékek megegyeznek és a kapott (x_i, y_i) párokra illeszkedik a polinom

- Belső pontokban simasági feltételek: $P_k^{(l)}(x_k) = P_{k+1}^{(l)}(x_k)$ ahol $1 \leq l < \ell$
  - Szóban: intervallumok találkozásánál derivált értékek megegyeznek
  - Másodfokúnál első-, harmadfokúnál első- és másodfokú derivált

- Peremfeltétel: kétféle létezik, az egyiket kell használni (feladat mondja)
  - Hermite-féle peremfeltétel: legalább másodfokú spline esetén
    * Feltétel: $P_1'(a) = f'(a)$ és $P_n'(b) = f'(b)$
    * Szóban: két legszélén deriváltak eredeti függvényével egyeznek
    * Akkor is működhet, ha nem ismerjük mindkét $f'(x)$ értéket
  - Természetesen peremfeltétel: legalább harmadfokú spline esetén
    * Feltétel: $P_1''(a) = 0$ és $P_n''(b) = 0$

1.7.4. Spline globális bázisban

- Ahányad fokú a spline, annyi x^k bázis elem kell (pl. $2 \implies 1, x, x^2$)

- Két szélső alappont elhagyásával a maradék bázis elemek, pl. harmadfokú spline és $1, 2, 3, 4, 5 \implies (x-2)_+^3, (x-3)_+^3, (x-4)_+^3$

- Megoldást más alapban keressük: $S(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \beta(x - x_1)_+^\ell + ...$
  - Egyenletrendszer megoldásával ugyan úgy megoldható
  - $(x - x_k)_+^\ell = 0$, ha $x < x_k$ (egyébként pedig simán számolandó)
  - Azaz intervallumonként mindig egy újabb $(x - x_k)_+^\ell$ jön be

1.8. B-Spline interpoláció

- h: alappontok (x_i és x_{i+1}) távolsága
- ℓ: fokszám, ennél 2-vel több alappontra támaszkodik minden "komponens"
- $B_{a,b}$ jelölés: első szám a fokszám, második a legbaloldalibb alappont
  - Ezeknek az értékét valójában csak alappont x-ek esetén kell tudni
- $B_{1,i}(x) = \frac{1}{h}\begin{cases} x - x_i & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ x_{i+2} - x & \text{ha } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B_{1,i}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i+1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
- $B_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} (x - x_i)^2 & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{i+1}) - 2(x - x_{i+1})^2 & \text{ha } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+3} - x)^2 & \text{ha } x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B_{2,i}(x_k) = \begin{cases} 1/2 & \text{ha } k = i+1 \text{ vagy } k = i+2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B'_{2,i}(x_k) = \begin{cases} 1/h & \text{ha } k = i+1 \\ -1/h & \text{ha } k = i+2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

- $B_{3,i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_i)^3 & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i+1}) + 3h(x - x_{i+1})^2 - 3(x - x_{i+1})^3 & \text{ha } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x) + 3h(x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+3} - x)^3 & \text{ha } x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+4} - x)^3 & \text{ha } x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B_{3,i}(x_k) = \begin{cases} 1/6 & \text{ha } k = i+1 \\ 4/6 & \text{ha } k = i+2 \\ 1/6 & \text{ha } k = i+3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B'_{3,i}(x_k) = \begin{cases} 1/2h & \text{ha } k = i+1 \\ 0 & \text{ha } k = i+2 \\ -1/2h & \text{ha } k = i+3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
  - Ha x egy alappont: $B''_{3,i}(x_k) = \begin{cases} 1/h^2 & \text{ha } k = i+1 \\ -2/h^2 & \text{ha } k = i+2 \\ 1/h^2 & \text{ha } k = i+3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

1.8.1. Spline interpoláció B-Spline-okból

- $f(x_i) = S_\ell(x_i) = \sum_{k=-\ell}^{n-1} c_k * B_{\ell,k}(x_i)$
  - Ebből kiszámíthatóak a c_k értékek alappontok behelyettesítésével

2. Approximáció

2.1. Általánosított inverz

- Teljes rangú $\Leftrightarrow$ oszlopok lineáris függetlenek
  - Azaz ha lineáris kombinációjuk csak $\forall i : \lambda_i = 0$ esetben nullvektor
- Túlhatározott teljes rangú eset: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
  - Akkor túlhatározott, ha több sor van, mint oszlop
- Alulhatározott teljes rangú eset: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$
  - Akkor alulhatározott, ha kevesebb sor van, mint oszlop

2.2. Legkisebb négyzetek módszere

- Legyen N a függvényértékek száma és n a keresett polinom fokszáma
- Ezt kell meghatározni: $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$
  - Ez a négyzetesen legjobban közelítő polinom
- Ez legyen minimális: $\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2$
- Feltétel: $N > n$

2.2.1. Megoldás Gauss-féle normálegyenlettel

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^0 & \sum x_i^1 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^0 y_i \\ \sum x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

2.2.2. Négyzetesen legjobban közelítő egyenes

- $p_1(x) = a_1 x + a_0$
- $\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$

2.3. Hilbert-tér

- $H = \mathbb{R}^3$ vagy hasonló Hilbert tér
- f a közelíteni kívánt Hilbert térbeli elem (pont)
- $H' = \{\dots \mid \dots\}$ a valami által generált altér
  - Dimenziószám: szabad változók száma mínusz egyenletek száma
    - Egy dimenziós példa: $\{c{*}v \mid c \in \mathbb{R}\}$ ahol v az adott irányvektora egy origón átmenő egyenesnek
    - Két dimenziós példa: $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$
  - Dimenziószám darab lineáris független g_i kell az altérről
    - Egy dimenziós altér esetén $g_1 = v$ megfelelő
- $f' = \sum c_i g_i$ a legjobban közelítő elem
  - c_i értékek kiszámítása: $G * c = b$
    $$\begin{bmatrix} < g_1; g_1 > & < g_2; g_1 > & ... \\ < g_1; g_2 > & < g_2; g_2 > & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f; g_1 > \\ < f; g_2 > \\ ... \end{bmatrix}$$
- Legjobban közelítő elem távolsága altértől: $d = ||f''||_2 = ||f - f'||_2$
  - $||x||_2$ jelentése: euklideszi norma
- Altérre vonatkozó tükörkép: $f^T = f - 2 * f'' = f' - f''$

2.4. Polinom paraméterek, amelyre egy integrál minimális

- Feladat: mely $a, b, c, ...$ esetén lesz $\int_\alpha^\beta (... + x^3 + ax^2 + bx + c)^2 * w(x)dx$ minimális, ahol a $w(x)$ függvény és α, β ismert
  - Azaz a főegyüttható ismert (például 1)
- Megoldás: a $w(x)$, α és β alapján egy megfelelő polinomot kell konstruálni
  - Ezt megszorozzuk, hogy a főegyütthatója megegyezzen a feladatban látott értékkel
    * Ha eddig $P_n(x)$ volt a polinom, akkor hívjuk $\widetilde{P}_n(x)$-nek
  - Utána csak ki kell olvasni a többi együtthatót

2.4.1. Klasszikus ortogonális polinomok

- Legendre polinom: $[\alpha; \beta] = [-1; 1]$, $w(x) \equiv 1$
  - $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$
  - $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x * P_n(x) - \frac{n}{n+1} * P_{n-1}(x)$
- Csebisev 1. fajú polinom: $[-1; 1]$, $w(x) \equiv 1/\sqrt{1 - x^2}$
  - $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$
  - $T_{n+1}(x) = 2x * T_n(x) - T_{n-1}(x)$
- Csebisev 2. fajú polinom: $[-1; 1]$, $w(x) \equiv \sqrt{1 - x^2}$
  - $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$
  - $U_{n+1}(x) = 2x * U_n(x) - U_{n-1}(x)$
- Ez nincs a példatárban: Hermite polinom: $(-\infty; +\infty)$, $w(x) \equiv e^{-x^2}$
  - $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$
  - $H_{n+1}(x) = 2x * H_n(x) - 2n * H_{n-1}(x)$
- Ez nincs a példatárban: Laguerre polinom: $(0; +\infty)$, $w(x) \equiv e^{-x}$
  - $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - 1$
  - $P_{n+1}(x) = (x - (2n + 1)) * P_n(x) - n^2 * P_{n-1}(x)$

2.4.2. Klasszikus ortogonális polinomok transzformációval

- Egy megfelelő $\varphi(x) = \ldots$ függvény szükséges: φ alkalmazva a klasszikus ortogonális polinom α, β értékére adja ki a feladat α, β értékét
- Ezután a klasszikus ortogonális polinomban x-et cseréljük ki $\varphi(x)$-re
- Ebből az új polinomból olvassuk le az együtthatókat
  - Előtte a főegyütthatót egyeztessük
  - Máshol már nem kell alkalmazni a φ függvényt

2.4.3. Ortogonális polinomok, Gram-Schmidt-ortogonalizáció

- Bármely α, β és $w(x)$ esetén működik
- $\widetilde{p}_0(x) \equiv 1$
- $\widetilde{p}_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(k)} \widetilde{p}_j(x)$ ahol $c_j^{(k)} = \frac{\int_\alpha^\beta x^k * \widetilde{p}_j(x) * w(x) dx}{\int_\alpha^\beta (\widetilde{p}_j(x))^2 * w(x) dx}$

2.5. Numerikus integrálás

- Feladat: $\int_a^b f$ közelítő értékének meghatározása
  - Megoldás: az egyik (a kért) formulának az alkalmazása
- Ha meg van adva a pontos érték, akkor lehet hibát számolni
  - Megoldás: M_k kiszámolása és hibaformula alkalmazása
- Feladat kérhető adott m-re összetett formula készítését
  - Megoldás: az egyik (a kért) összetett formulának az alkalmazása
- Feladat kérdezheti m szükséges értékét, hogy adott pontosság meglegyen
  - Megoldás: összetett formula hibaformula egyenlet rendezése m-re

2.5.1. Formulák

- $M_k = ||f^{(k)}||_\infty$ jelentése: $f^{(k)}(x)$ maximuma $x \in [a; b]$ esetén
- Érintő formula
  - $\int_a^b f \approx E(f) = (b-a) * f(\frac{a+b}{2})$
  - Hiba: $\frac{(b-a)^3}{24} * ||f''||_\infty$
- Trapéz formula
  - $\int_a^b f \approx T(f) = \frac{b-a}{2} * (f(a) + f(b))$
    - Hiba: $\frac{(b-a)^3}{12} * ||f''||_\infty$
  - Összetett: $T_m(f) = \frac{b-a}{2m} * (f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + k * \frac{b-a}{m}) + f(b))$
    - Hiba: $\frac{(b-a)^3}{12m^2} * ||f''||_\infty$
- Simpson formula
  - $\int_a^b f \approx S(f) = \frac{b-a}{6} * (f(a) + 4 * f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$
    - Hiba: $\frac{(b-a)^5}{4!*5!} * ||f^{(4)}||_\infty$
  - Öt.: $S_m(f) = \frac{b-a}{3m}(f(a)+4\sum_{k=1}^{m/2} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{m/2-1} f(x_{2k})+f(b))$
    - Hiba: $\frac{(b-a)^5}{180m^4} * ||f^{(4)}||_\infty$

3. Elméleti kérdések

3.1. Első ZH

3.1.1. Definiálja az interpoláció feladatát! 2p.

Olyan max n-edfokú polinomot (p_n) keresünk, melyre $p_n(x_i) = y_i$ ahol x_i különböző alappontok és y_i függvényértékek ($x_i \in [a, b]$ és $0 \leq i \leq n$)

3.1.2. Definiálja a Lagrange-alappolinomokat! 2p.

x_i alappontok esetén a Lagrange-alappolinomok: $\ell_k(x) = \Pi_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ ahol $0 \leq k \leq n$

3.1.3. Írja le a Lagrange-alappolinomok tulajdonságait! 2p.

- $\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 \text{ ha } k = i \\ 0 \text{ ha } k \neq i \end{cases}$
- $\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)w_n'(x_k)}$ ahol $w_n(x) = \Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)$

3.1.4. Írja fel az interpolációs polinom Lagrange-alakját! 2p.

$p_n(x) \equiv L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$

3.1.5. Milyen tételt tanult az interpoláció hibájáról? 4p.

- Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $[a; b]$ az $x_0, ..., x_n, x$ által kifeszített intervallum
- Legyen $f \in C^{n+1}[a; b]$
- Ekkor $\exists \xi_x \in [a; b] : f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} * \omega_n(x)$
- Hibabecslés: $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} * |\omega_n(x)|$
    - Ahol $M_{n+1} = \max_{\xi\in[a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$

3.1.6. Definiálja az elsőrendű és k-adrendű osztott differencia fogalmát! 2p.

- Elsőrendű osztott differencia: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \quad (0 \leq i \leq n-1)$
  - Rekurzívan számolható, ha nulladrendűt definiáljuk: $f[x_i] = f(x_i)$
- k-adrendű osztott differencia: $f[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},...,x_{i+k}]-f[x_i,...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$ ahol $1 \leq k \leq n$ és $0 \leq i \leq n-k$

3.1.7. Írja fel az interpolációs polinom Newton-alakját! 2p.

$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k] * \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$

3.1.8. Írja fel a Newton-alak rekurzióját új alappont felvétele esetén! 2p.

$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, ..., x_{n+1}] * \omega_n(x)$

3.1.9. Definiálja a Csebisev-polinomot! 2p.

n-edfokú, elsőfajú Csebisev-polinom: $T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$ $(x \in [-1; 1])$

3.1.10. Írja fel a Csebisev-polinomok rekurziós formuláját! 2p.

$T_0(x) = 1$ és $T_1(x) = x$ és $T_{n+1}(x) = 2x * T_n(x) - T_{n-1}(x)$

3.1.11. Írja fel az n-edfokú Csebisev-polinomok gyökeit! 1p.

$x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$ ahol $0 \leq k \leq n-1$ (n db gyök, 0-ra szimmetrikus)

3.1.12. Írja fel a Csebisev-polinomok extremális tulajdonságáról tanult tételt! 2p.

$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} ||\widetilde{Q}||_\infty = ||\widetilde{T}_n||_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ ahol $||\widetilde{Q}||_\infty = \max_{x \in [-1;1]} |\widetilde{Q}(x)|$

3.1.13. Definiálja az Hermite-interpoláció feladatát! 3p.

- (Cél: magasabb deriváltakra is pontos legyen)
- Adott $x_0, ..., x_k \in [a;b]$ különböző alappont
- Adott $y_0^{(j)}, ..., y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, ..., m_i - 1)$
  - Ahol $m_i \in \mathbb{N}$ a multiplicitás érték
- Legyen $m = \sum_{i=0}^{k} m_i - 1$
- Feladat: olyan H_m polinom keresése, amelyre: $H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$
  - Ahol $i = 0, ..., k$ és $j = 0, ..., m_i - 1$

3.1.14. Milyen tételt tanult az Hermite-interpoláció hibájáról? 5p.

- Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $[a;b]$ az $x_0, ..., x_n, x$ által kifeszített intervallum
- Legyen $f \in C^{m+1}[a;b]$
- Ekkor $\exists \xi_x \in [a;b] : f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} * \Omega_m(x)$
- Hibabecslés: $|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} * |\Omega_m(x)|$
  - Ahol $M_{m+1} = \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(m+1)}(\xi)|$
  - $\Omega_m(x) = \Pi_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}$

3.1.15. Definiálja a Fejér–Hermite-interpolációt! 2p.

Hermite-interpoláció speciális esete, ahol minden $m_i = 2$.

3.1.16. Hogyan definiáljuk azonos alappontok esetén az osztott differenciákat? 2p.

- Különböző alappontok esetén az eddigiekkel azonos módon járunk el.
- Elsőrendű osztott differenciák: $f[x_i, x_i] = f'(x_i) \quad (i = 0, ..., k)$
- k-adrendű osztott differenciák: $(i = 0, ..., m_k - 1)$
  - $f[x_i, ..., x_i] = f[x_i \text{ k-szor}] = f^{(k)}(x_i) \ / \ k!$

3.1.17. Definiálja az interpolációs spline-okat! 4p.

- Legyen $a = x_0 < ... < x_n = b$ és $l_k = [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum
- $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ egy ℓ-edfokú interpolációs spline, ha:
  - $S_\ell|_{l_k} \in P_\ell$ (intervallumra szűkítése egy ℓ-edfokú polinom)
  - $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$
  - $S_\ell(x_i) = f(x_i)$ (ez nem teljesül $\implies$ sima spline, nem interpolációs)

3.1.18. Írja le köbös spline-ok esetén a természetes peremfeltételt! 2p.

- $S_3''(a) = 0$ és $S_3''(b) = 0$
- Jelentése: spline a végpontokban nem kanyarodik

3.1.19. Írja le köbös spline-ok esetén az Hermite-féle peremfeltételt! 2p.

- $S_3'(a) = f'(a)$ és $S_3'(b) = f'(b)$
- Jelentése: spline a végpontokba megy

3.1.20. Írja le köbös spline-ok esetén a periodikus peremfeltételt! 2p.

- Csak periodikus függvények közelítése esetén érvényes, ha $[a; b]$ a periódus többszöröse (ekkor $f(a) = f(b)$)
- Feltétel: $S_3'(a) = S_3'(b)$ és $S_3''(a) = S_3''(b)$

3.1.21. Adja meg az $(x - x_k)_+^\ell$-el jelölt függvény definícióját! 2p.

- Neve: jobb oldali hatványfüggvény
- $(x - x_k)_+^\ell = \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$

3.2. Második ZH

- Ezeket nem tanultam meg végül, így könnyen lehet, hogy hibásak: nem volt lehetőségem észre venni a hibákat bennük.

3.2.1. Definiálja a B-spline-okat a tulajdonságaival! 4p.

- $B_{\ell,k} \in S_\ell(\Omega_\infty)$ spline-ok B-spline-ok, ha:
  - $\forall x \in \mathbb{R} : B_{\ell,k}(x) \geq 0$
  - $\mathrm{supp}(B_{\ell,k})$ minimális
  - $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{\ell,k}(x) \equiv 1$

3.2.2. Írja fel az elsőfokú B-spline képletét! 2p.

$$B_{1,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} & \text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}) \\ \frac{x_{k+2}-x}{x_{k+2}-x_{k+1}} & \text{ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

3.2.3. Írja le a B-spline-okkal történő előállításról szóló tételt! 2p.

$$\forall S \in S_\ell(\Omega_\infty) : \exists k \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{R} : S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * B_{\ell,k}(x)$$

$$\forall S \in S_\ell(\Omega_n) : \exists c_{-\ell}, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R} : S(x) = \sum_{k=-\ell}^{n-1} c_k * B_{\ell,k}(x)$$

3.2.4. Milyen tételt tanult a Hilbert-térbeli approximációra? 4p.

- Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér
- Ekkor $\exists! f' \in H' : ||f - f'|| = \inf\{||f - h'|| \ : \ h' \in H'\}$ és $f - f' \perp H'$

3.2.5. Véges dimenziós esetben hogyan oldható meg a Hilbert-térbeli approximációs feladat? Írja fel a távolság képletét is! 5p.

- $Gc = b$ ahol $G = (< g_i, g_j >)_{j,i=1}^n$ és $c = (c_i)_{i=1}^n$ és $b = (< f, g_j >)_{j=1}^n$
- Legjobban közelítő elem távolsága: $d^2 = ||f - f'||^2 = ||f||^2 - b^T c$

3.2.6. Mit nevezünk Gauss-féle normálegyenleteknek? 2p.

- n: keresett polinom fokszáma
- N: alappontok száma, $i \in [1; N]$

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^0 & \sum x_i^1 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i^1 & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^0 y_i \\ \sum x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

3.2.7. Definiálja a legkisebb négyzetek módszerének feladatát! 2p.

- Adottak $x_1, ..., x_N \in [a, b]$ különböző alappontok és $y_i, ..., y_N \in \mathbb{R}$ függvényértékek
- Feladat: $p_n \in P_n$ polinom meghatározása, hogy:
  - $n + 1 \leq N$, általában $n << N$
  - $\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2$ minimális

3.2.8. Milyen két tételt tanult az ortogonális polinomok gyökeiről? 2p.

- $n \geq 1$ esetén $\tilde{p_n}$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a, b]$-n
- $\tilde{p_{n-1}}$ és $\tilde{p_n}$ gyökei váltakozva helyezkednek el

3.2.9. Definiálja az interpolációs típusú kvadratúra formulákat! 2p.

- Kvadratúra formula: $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$
- Interpolációs típusa, ha ez is teljesül: $A_k = \int_a^b \ell_k(x)dx \quad (k = 0, ..., n)$

3.2.10. Milyen tételt tanult az interpolációs típusú kvadratúra formulák pontosságáról? 2p.

$$\forall f \in P_n : \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)dx \quad (k = 0, ..., n)$$

3.2.11. Mi a jellemzője a Newton–Cotes-típusú kvadratúra formuláknak? 2p.

Az $\{x_i \mid i = 0, ..., n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.

3.2.12. Mi a jellemzője a Csebisev-típusú kvadratúra formuláknak? 2p.

$A_k \equiv A \quad (k = 0, ..., n)$

3.2.13. Mi a jellemzője a Gauss-típusú kvadratúra formuláknak? 2p.

Maximális $(2n + 1)$ fokszámig pontos formulák.

3.2.14. Írja fel az érintő formulát! 2p.

$$\int_a^b f \approx (b - a) * f(\frac{a + b}{2}) = E(f)$$

3.2.15. Írja fel a trapéz formulát! 2p.

$$\int_a^b f \approx \frac{b - a}{2} * (f(a) + f(b)) = T(f)$$

3.2.16. Írja fel a Simpson-formulát! 2p.

$$\int_a^b f \approx \frac{b - a}{6} * (f(a) + 4 * f(\frac{a + b}{2}) + f(b)) = S(f)$$

3.2.17. Írja fel az érintő formula hibabecslését! 3p.

Legyen $f \in C^2[a; b]$, ekkor: $\exists \eta \in [a; b] : \int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} * f''(\eta)$

3.2.18. Írja fel a trapéz formula hibabecslését! 3p.

Legyen $f \in C^2[a; b]$, ekkor: $\exists \eta \in [a; b] : \int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} * f''(\eta)$

3.2.19. Írja fel a Simpson-formula hibabecslését! 3p.

Legyen $f \in C^4[a; b]$, ekkor: $\exists \eta \in [a; b] : \int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} * f^{(4)}(\eta)$

3.2.20. Milyen tételt tanult a Gauss típusú kvadratúra formulák pontosságáról? 3p.

- Előadás diákon tétel kimondást nem találtam, csak az alábbit
- Maximálisan $2n + 1$ fokszámig pontosak