

初学者が学んだスパース最適制御

ざきまつ

機械システムコース 修士 2 年

March 2, 2024

はじめに

- ざきまつ (X: santana_hammer)
 - ▶ ネットワーク化制御系の制御理論をやってます
 - ▶ 理論と応用実装の橋渡しをするのが夢（特にロボット，ドローン）
- 経歴
 - ▶ 地方公立大学大学院 機械システムコース 博士前期課程 *Apr 2022–Present*
 - ★ 疎構造学習 (Sparse Structure Learning) による合意ネットワークの解析
 - ★ 最適化問題とかスパース性とか触った初心者
 - ▶ 地方公立大学 機械システム工学科 *Apr 2018–Mar 2022*
 - ★ マルチエージェントシステムに対するフォーメーション制御
 - ★ 数学わからない私が理論研究を始めるきっかけ
- 数学がとても苦手です (理論屋としてあるまじき状態), 生暖かい目で見てください

スパースって何だろう

スパースモデリング（ざっくり）

多数のデータの中から本質的な依存関係を抽出する手法．（sparse: まばらな，低密度の）

機械学習では：

- 過学習を回避するための手法のひとつ
- 学習モデル内のパラメータから本質的でないものを削ぎ落とし、推定解に 0 がいっぱいになること（スパースな解）を想定

画像圧縮では：

- JPEG 等にも，スパース性の概念を利用
- 圧縮された不完全なデータから，画像を再構築（圧縮センシング）[1]
- 医療用 MRI への適応など

その他，様々な信号処理やデータ処理の分野で応用されている．

スパース最適制御

これからお話しする内容は，基本的に永原先生の本 [2, 3] や解説論文 [4] を基にしています．
もし，気になった方や興味がわいて勉強してみたくなった方がいらっしゃいましたら

- スパースモデリング - 基礎から動的システムへの応用 - (コロナ社)
- Sparsity Methods for Systems and Control (now publishers) ← 無料で読めちゃう !!
- 最適制御とスパースモデリング (電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review)

を是非読んでみてください．

スパース最適制御

スパース最適制御

- 最適制御：全制約条件を満たす制御入力のうち、評価関数を最小化する制御入力を求める
- 有限時間において、非零な信号の時間区間の長さを最も短くする

制御入力が 0 である区間は、稼働のための燃料や電力の消費が発生しない。

⇒ エンジン等から排出される CO₂ や騒音，振動等を抑制することが可能

⇒ グリーンな制御 (Green control) と呼ばれたり。

以降，次に示す連続時間の微分方程式を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0$$

主問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \int_0^T u(t)^2 dt \\ & \text{subject to} && \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ & && x(0) = x_0, \quad x(T) = x_f \end{aligned}$$

- 評価関数：入力の ℓ^2 ノルム（各時刻での 2 乗の値を，時間で積分）
- 別名：最小エネルギー制御 (Minimum-energy control)
- 共状態を解析的に記述することが可能（一般的には不可能）

Pontryagin の最小原理

最適制御解を $u^*(t)$ と仮定し、それに対応する状態を $x^*(t)$ とおく。このとき、以下の満たす変数 $p^*(t)$ が存在する。

- 以下の正準方程式を満たす。

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) + Bu^*(t) \\ \dot{p}^*(t) &= -A^\top p^*(t), \quad \forall t \in [0, T]\end{aligned}\tag{1}$$

- 最適制御 $u^*(t)$ は各時刻 t でハミルトニアンを最小にする。

$$u^*(t) = \operatorname{argmin}_{|u| \leq 1} H(x^*(t), p^*(t), u), \quad \forall t \in [0, T]\tag{2}$$

- ハミルトニアンは次を満たす。

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = c, \quad \forall t \in [0, T]\tag{3}$$

主問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \int_0^T |u(t)| dt \\ & \text{subject to} && \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ & && x(0) = x_0, && x(T) = x_f \\ & && u(t) \in [-1, 1] && \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

- 評価関数：入力の ℓ^1 ノルム（各時刻での絶対値を，時間で積分）
- 別名：最小燃料制御 (Minimum-fuel control)
- MPC を用いて制御を実現する方法が提案されたり [5]

主問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \int_0^T \|u(t)\|_{\ell^0} dt \\ & \text{subject to} && \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ & && x(0) = x_0, && x(T) = x_f \\ & && u(t) \in [-1, 1] && \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

- 評価関数：入力の ℓ^0 ノルム（非零の要素の個数）
- 別名：スパース最適制御 (Sparse optimal control)
最大無干渉制御 (Maximum Hands-off Control)
- フォーメーション制御に導入されている [6]
- 系が可制御かつ行列 A が正則のとき、 L^1 最適制御解と一致

L^0 最適制御

L^0 最適制御と L^1 最適制御の等価性 [7]

制御対象が可制御であり、 L^1 最適制御に少なくとも一つ解が存在すると仮定する．行列 A が正則なら、 L^0 最適制御の解と L^1 最適制御の解は一致する．

ℓ^0 最適化問題：総当たり法を使えば解くことは可能

→ 組み合わせ最適化問題となり、計算量オーダーは指数的に増大する．

→ L^0 最適制御は、非常に難しい最適化問題

上述した等価性の条件を満たせば、凸最適化問題である L^1 最適制御に帰着することが可能

凸関数

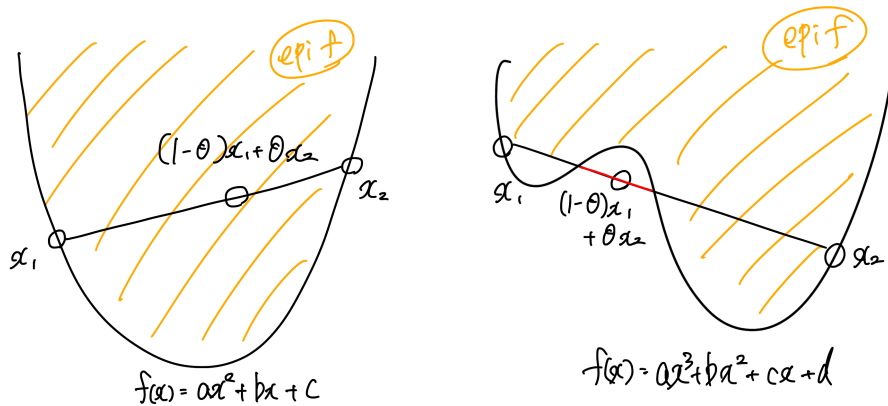


図 1: 凸関数と非凸関数

凸最適化の何が嬉しいのか

大域的な最適値を得ることができる

一般に、勾配情報を利用した最適化手法では、局所的な最適値に収束することが多い．凸最適化では、評価関数の凸性が担保されているため、大域的な最適値を得ることができる．

最適化計算の速度が速い

凸最適化特有の最適化手法を用いることで、汎用の最適化手法よりも計算時間を短縮することができる．何か、最近では更に高速化を目指した手法があるとか何とか．

Reference I

- [1] D.L. Donoho.
Compressed sensing.
IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 52, No. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [2] 永原正章.
スパースモデリング - 基礎から動的システムへの応用 -.
コロナ社, September 2017.
- [3] Masaaki Nagahara.
Sparsity Methods for Systems and Control.
Boston-Delft: now publishers, September 2020.
- [4] 永原正章.
最適制御とスパースモデリング.
電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol. 10, No. 3, pp. 176–185, 2017.
- [5] 岩田拓海, 大石泰章, 永原正章.
モデル予測制御方式を用いたスパース制御の実現—制御則のオフライン計算とその表現法—.
計測自動制御学会論文集, Vol. 56, No. 3, pp. 74–80, 2020.
- [6] Takuya Ikeda, Daniel Zelazo, and Kenji Kashima.
Maximum hands-off distributed bearing-based formation control.
In *58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4459–4464, 2019.

Reference II

- [7] Masaaki Nagahara, Daniel E. Quevedo, and Dragan Nešić.
Maximum hands-off control: A paradigm of control effort minimization.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 61, No. 3, pp. 735–747, 2016.