制御工学勉強会 SICE FES 2024 出張特別版

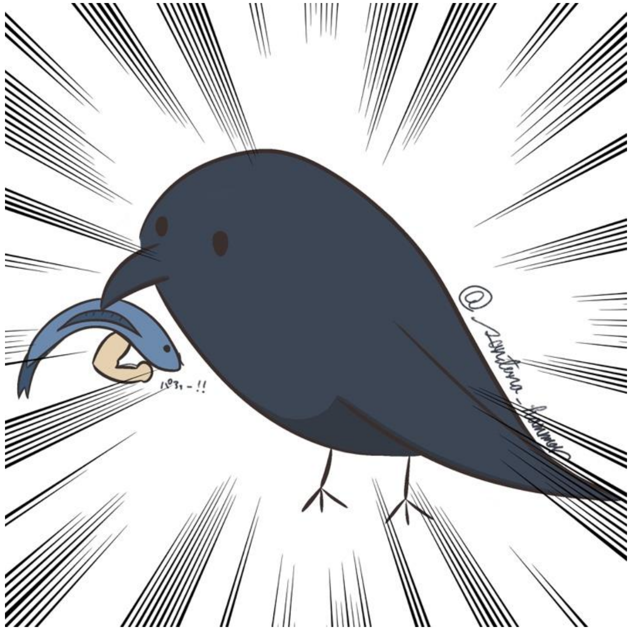
僕の制御工学での躓きポイント

～学部時代を思い出しながら～

ざきまつ　（X: @santana_hammer）

はじめに

- ざきまつ
- 大学（院）（博士課程）新1年生
- 制御理論（？）
  - フォーメーション制御（学士）
  - 合意ネットワーク系（修士）
  - サンプル値系（博士）
- 現地参加したかった，I have no money…



Discordの姿

Twitterの姿

人には人の躓きポイント

Q.　制御工学における，あなたの躓きはどこから？

友人A「ブロック線図と，それを使ったシステム表現」

友人B「ラプラス変換」

友人C「ステップ応答とインパルス応答」

ざきまつ「**周波数応答特性とその周辺**」

僕の躓きポイント：周波数応答

参考書「周波数応答：正弦波状信号を与えた時の定常応答」

ざきまつ「ほうほう，入力に対する反応を見る感じやな．」

参考書「それでは，以下の愉快な仲間を紹介します」

やぁ．

$\angle \mathcal{G}(j\omega)$

位相差

$|\mathcal{G}(j\omega)|$

ゲイン

ざきまつ「え，$s = j\omega$ って何者…？曲者…？」

僕の躓きポイント：周波数応答

参考書「正弦波入力に対する定常応答を求めれる便利なパラメータ（？）」

ざきまつ「腑に落ちない」

「まぁでも，一旦スルーでいっか．」

「わからんでも，もう出てこんやろ．」

参考書「この後いっぱい出てきます」

「伝達関数が陽にわかる場合，$s = j\omega$ とすると周波数特性わかります」

ざきまつ「*Oh my gosh…*」

そのまま進めてしまい，古典制御をあまり理解できないまま現代制御へ…

$s = j\omega$ って，結局何者なん？？？？？

$s = j\omega$の正体

ちょっとした下準備：ヘビサイドの展開定理（部分分数分解）

共通因子を持たない実数係数多項式 $P(s)$ および $Q(s)$ を用いて，有理関数 $F(s)$ を定義する．

$$F(s) \triangleq \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{\boxed{(s-a_1)^{n_1}(s-a_2)^{n_2}\ldots(s-a_i)^{n_r}}}$$

これを部分分数分解することで，次の形になる．

$$F(s) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{(s-a_i)^j}$$

ここで，係数は次の形で表現できる．

$$A_{ij} = \frac{1}{(n_i-j)!}\lim_{s\to a_i}\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left((s-a_i)^{n_i}F(s)\right)$$

$s = j\omega$の正体

ヘビサイドの展開定理：制御に近い感じで書き換え

次に有理関数 $F(s)$ を定義する.

$$F(s) \triangleq \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad m < n$$

上式において，分母多項式が $p_1, p_2, \ldots, p_n$ という解を持つとする.

このとき，$F(s)$ は以下のように部分分数に展開が可能である.

$$F(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n}$$

定式の分子の定数k_iは以下のように求めることができる.

$$k_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s)$$

$s = j\omega$の正体

正弦波のラプラス変換より

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] \\
&= \mathcal{L}[A\sin(\omega t)] \\
&= \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{G}(s)U(s) \\
&= \mathcal{G}(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

安定なシステムの場合，安定極をもっている

$$
Y(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} + \frac{d_1}{s+j\omega} + \frac{d_2}{s-j\omega}
$$

ここで，ヘビサイドの展開定理より

$$
d_1 = \lim_{s\to j\omega} \mathcal{G}(s)A\frac{\omega}{s+j\omega} = \frac{1}{2j}\mathcal{G}(j\omega)A,\ d_2 = -\frac{1}{2j}\mathcal{G}(j\omega)A
$$

$s = j\omega$の正体

出力関数を逆ラプラス変換すると

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t} + d_1 e^{j\omega t} + d_2 e^{-j\omega t}$$

全ての極の実部が負であることから，時間が十分経過すると

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= d_1 e^{j\omega t} + d_2 e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2j}\mathcal{G}(j\omega)Ae^{j\omega t} - \frac{1}{2j}\mathcal{G}(-j\omega)Ae^{-j\omega t} \end{aligned}$$

複素数表現，三角関数合成の組み合わせ技により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2j}\mathcal{G}(j\omega)Ae^{j\omega t} - \frac{1}{2j}\mathcal{G}(-j\omega)Ae^{-j\omega t} &= A(\mathrm{Im}[\mathcal{G}(j\omega)]\cos\omega t + \mathrm{Re}[\mathcal{G}(j\omega)]\sin\omega t) \\ &= |\mathcal{G}(j\omega)|A\sin(\omega t + \angle\mathcal{G}(j\omega)) \end{aligned}$$

$s = j\omega$の正体

元々の入力はどんなのだった？

$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

それに対する出力は？

$$y(t) = |\mathcal{G}(j\omega)|A\sin(\omega t + \angle\mathcal{G}(j\omega))$$

入力に対して，**出力では振幅が $|\mathcal{G}(j\omega)|$ だけ増幅し，位相が $\angle\mathcal{G}(j\omega)$ だけズレる**

⇒ $\mathcal{G}(s)$ がわかっている場合，正弦波を入力した時の定常応答は
$s = j\omega$ とした周波数伝達関数 $\mathcal{G}(j\omega)$ で調べることが可能！！

Happy end forever...

最後に

人には人の躓きポイント

Q.　制御工学における，あなたの躓きはどこから？

「ブロック線図と，それを使ったシステム表現」

「数学的にどうしてそうなるのかわからない」

「イメージできない」

「ラプラス変換」

「実機で役に立つのかわからない」

「ステップ応答とインパルス応答」

つまづいた先，わからない先におもろい世界が待っている…はず…

違う，そうじゃない（CV：鈴木雅之）

参考文献

- 佐藤和也，平元和彦，平田研二．はじめての制御工学．講談社サイエンティフィック，2018.
- 吉川恒夫．古典制御論．昭晃堂，2004.
- 南裕樹，石川将人．制御系設計論．コロナ社，2022.
- こんとろ，古典制御のいろんなページ，こんとろラボ，だいたい2020-2023？