国防科技大学
National University of Defense Technology

高等数理统计习题课

第三组

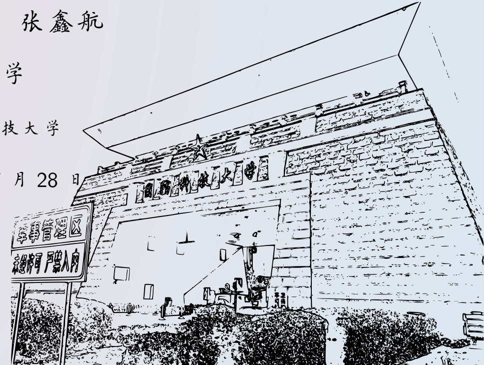
汇报人：张鑫航

数学

国防科技大学

2024 年 7 月 28 日

厚德博学
强军兴国



目录

1. 习题 1.27
   - 问题
   - 第一问
   - 第二问
2. 习题 2.1
   - 问题
   - 第一问
   - 第二问
   - 第三问
3. 习题 3.2
   - 题目
   - 解答

目录

1 习题 1.27
问题
第一问
第二问
2 习题 2.1
3 习题 3.2

习题 1.27

例 1.1: 1.27

设 $X_1 \sim Ga(\alpha_1, \lambda), X_2 \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$，且 X_1 与 X_2 独立，证明:

1. $Y_1 = X_1 + X_2$ 与 $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ 独立，且 $Y_2 \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$;
2. $Y_1 = X_1 + X_2$ 与 $Y_3 = X_1/X_2$ 独立，且 $Y_3 \sim Z(\alpha_1, \alpha_2)$.

目录

1. 习题 1.27
   - 问题
   - 第一问
   - 第二问
2. 习题 2.1
3. 习题 3.2

Y_1 和 Y_2 的密度函数 I

由 $X_1 \sim Ga(\alpha_1, \lambda), X_2 \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$ 知:
X_1, X_2 的联合分布为

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} {x_1}^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x_1} {x_2}^{\alpha_2-1} e^{-\lambda x_2}.$$

$Y_1 = X_1 + X_2 \sim Ga(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$，即

$$p_{Y_1}(y_1) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} {y_1}^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda y_1}$$

令 $U = X_1, V = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$，则

$$\begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U/V - U \end{cases},$$

Y_1 和 Y_2 的密度函数 II

且变换的行列式为

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/v - 1 & -u/v^2 \end{vmatrix} = -\frac{u}{v^2}.$$

U, V 的联合分布为:

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u,v) &= p_{X_1,X_2}(u,v)|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} u^{\alpha_1-1} e^{-\lambda u} (\frac{u}{v} - u)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(u/v-u)} \frac{u}{v^2}, \end{aligned}$$

则 V 的边缘分布为:

$$p_V(v) = \int_0^\infty p_{U,V}(u,v)\,du = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1},$$

即 $Y_2 \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$.

Y_1 和 Y_2 独立性 I

以下求 Y_1, Y_2 的联合分布.

令 $U = X_1 + X_2, V = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ ，则

$$\begin{cases} X_1 = UV \\ X_2 = U - UV \end{cases},$$

且变换的行列式为

$$J = \begin{vmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

U, V 的联合分布为:

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= p_{X_1,X_2}(u, v)|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda u} v^{\alpha_1-1}(1 - v)^{\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

Y_1 和 Y_2 独立性 II

由

$$p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\cancel{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}{y_1}^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1}\frac{\cancel{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{y_2}^{\alpha_1-1}(1-y_2)^{\alpha_2-1},$$

$$p_{Y_1}(y_1)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{y_1}^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1},$$

$$p_{Y_2}(y_2)=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{y_2}^{\alpha_1-1}(1-y_2)^{\alpha_2-1},$$

显然有 $p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=p_{Y_1}(y_1)p_{Y_2}(y_2)$，独立性得证.

目录

1 习题 1.27
问题
第一问
第二问
2 习题 2.1
3 习题 3.2

Y_3 的密度函数

令 $U = X_1, V = \dfrac{X_1}{X_2}$，则

$$\begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U/V \end{cases}$$

，且变换的行列式为

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix} = -\frac{u}{v^2}.$$

U, V 的联合分布为:

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= p_{X_1,X_2}(u, v)|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} u^{\alpha_1-1} e^{-\lambda u} \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda u/v} \frac{u}{v^2}. \end{aligned}$$

Y_3 的密度函数 II

则 V 的边缘分布为：

$$p_V(v) = \int_0^{\infty} p_{U,V}(u,v)\,du = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{v^{\alpha_1-1}}{(1+v)^{\alpha_1+\alpha_2}},$$

即 $Y_3 \sim Z(\alpha_1, \alpha_2)$.

Y_1 和 Y_3 独立性 I

令 $U = X_1 + X_2, V = \dfrac{X_1}{X_2}$ ，则

$$\begin{cases} X_1 = UV/(1+V) \\ X_2 = U/(1+V) \end{cases}$$

，且变换的行列式为

$$J = \begin{vmatrix} v/(1+v) & u/(1+v)^2 \\ 1/(1+v) & -u/(1+v)^2 \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2}.$$

U, V 的联合分布为:

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u,v) &= p_{X_1,X_2}(u,v)|J| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{\alpha_1-1} e^{-\lambda\frac{uv}{1+v}} \left(\frac{u}{1+v}\right)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda\frac{u}{1+v}} \frac{u}{(1+v)^2} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} u^{\alpha_1+\alpha 2-1} e^{-\lambda u} \frac{v^{\alpha_1-1}}{(1+v)^{\alpha_1+\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Y_1 和 Y_3 独立性 II

由

$$p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3) = {y_3}^{\alpha_1-1}(1-y_3)^{\alpha_2-1}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\cancel{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}{y_1}^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1}\frac{\cancel{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{y_3^{\alpha_1-1}}{(1+y_3)^{\alpha_1+\alpha_2}},$$

$$p_{Y_1}(y_1) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{y_1}^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1},$$

$$p_{Y_3}(y_3) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{y_3^{\alpha_1-1}}{(1+y_3)^{\alpha_1+\alpha_2}},$$

显然有 $p_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3) = p_{Y_1}(y_1)p_{Y_3}(y_3)$，独立性得证.

目录

1. 习题 1.27
   - 第一问
   - 第二问
   - 第三问
2. 习题 2.1
   - 问题
3. 习题 3.2

习题 2.1

例 2.1: 习题 2.1

设 X_1, X_2 独立同分布，其共同的密度函数为 $p(x;\theta) = 3x^2/\theta^3$，$0 < x < \theta$，$\theta > 0$.

1. 证明 $T_1 = \frac{2}{3}(X_1 + X_2)$ 和 $T_2 = \frac{7}{6}\max(X_1, X_2)$ 都是 θ 的无偏估计；
2. 计算 T_1 和 T_2 的均方误差并进行比较；
3. 证明：在均方误差意义下，在形如 $T_c = c\max(X_1, X_2)$ 的估计中，$T_{8/7}$ 最优.

目录

1 习题 1.27

2 习题 2.1
问题
第一问
第二问
第三问

3 习题 3.2

第一问

由

$$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \int_0^\theta x\frac{3x^2}{\theta^3}\,dx = \frac{1}{\theta^3}\left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^\theta = \frac{3}{4}\theta$$

得 $\mathrm{E}(T_1) = \frac{2}{3}\mathrm{E}(X_1) + \frac{2}{3}\mathrm{E}(X_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\theta\cdot 2 = \theta.$

令 $Y = \max(X_1, X_2)$，因为

$$P(Y \leqslant y) = P(X_1 \leqslant y)P(X_2 \leqslant y) = P^2(X_1 \leqslant y)$$

且有

$$P(X_1 \leqslant y) = \int_0^y 3x^2/\theta^3\,dx = \frac{y^3}{\theta^3}$$

故 $p_Y(y) = [P^2(X_1 \leqslant y)]' = \dfrac{6y^5}{\theta^6},$

则

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\theta y\frac{6y^5}{\theta^6}\,dy = \frac{1}{\theta^6}\left[\frac{6}{7}y^7\right]_0^\theta = \frac{6}{7}\theta.$$

第一问 II

故 $\mathrm{E}(T_2) = \frac{7}{6}\,\mathrm{E}(Y) = \theta$. 证毕.

目录

1 习题 1.27

2 习题 2.1

问题

第一问

第二问

第三问

3 习题 3.2

第二问

由

$$\mathrm{E}(X_1^2)=\mathrm{E}(X_2^2)=\int_0^\theta x^2\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{1}{\theta^3}\left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^\theta=\frac{3}{5}\theta^2$$

得

$$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\mathrm{E}(X_1^2)-\mathrm{E}^2(X_1)=\frac{3}{5}\theta^2-\left[\frac{3}{4}\theta\right]^2=\frac{3}{80}\theta^2$$

故

$$\mathrm{Var}(T_1)=\frac{4}{9}\mathrm{Var}(X_1)+\frac{4}{9}\mathrm{Var}(X_2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{80}\theta^2\cdot 2=\frac{1}{30}\theta^2.$$

由

$$\mathrm{E}(Y^2)=\int_0^\theta y^2\frac{6y^5}{\theta^6}dy=\frac{1}{\theta^6}\left[\frac{6}{8}y^8\right]_0^\theta=\frac{3}{4}\theta^2$$

第二问 II

得

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}^2(Y)=\frac{3}{4}\theta^2-\left[\frac{6}{7}\theta\right]^2=\frac{3}{4\cdot 49}\theta^2,$$

故 $\mathrm{Var}(T_2)=\frac{49}{36}\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{48}\theta^2.$

故有

$$\mathrm{MSE}(T_1)=\mathrm{Var}(T_1)=\frac{1}{30}\theta^2>\frac{1}{48}\theta^2=\mathrm{Var}(T_2)=\mathrm{MSE}(T_2).$$

目录

1 习题 1.27

2 习题 2.1
问题
第一问
第二问
第三问

3 习题 3.2

第三问 I

由 $\mathrm{E}(T_c) = c\,\mathrm{E}(Y)$，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(T_c) &= \mathrm{E}(T_c-\theta)^2 = \mathrm{Var}(T_c) + \mathrm{E}^2(T_c-\theta) \\
&= c^2\,\mathrm{Var}(Y) + [c\,\mathrm{E}(Y)-\theta]^2 \\
&= c^2\frac{3}{4\cdot 49}\theta^2 + [c\frac{6}{7}\theta-\theta]^2 \\
&= \left[\frac{3}{4\cdot 49}c^2 + \left(\frac{6}{7}c-1\right)^2\right]\theta^2 \\
&= \left[\frac{3}{4}c^2 - \frac{12}{7}c + 1\right]\theta^2,
\end{aligned}$$

故当 $c = -\dfrac{-\frac{12}{7}}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{8}{7}$ 时，上述 $\mathrm{MSE}(T_c)$ 取得最小值 $\dfrac{1}{49}\theta^2$. 证毕.

目录

1. 习题 1.27
2. 习题 2.1
3. 习题 3.2
   - 题目
   - 解答

题目

例 3.1: 习题 3.2

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自正态分布族 $\{N(0,\sigma^2):0<\sigma^2<\infty\}$ 的样本，考虑原假设 $H_0:\sigma^2=1$ 对备择假设 $H_1:\sigma^2=\sigma_1^2(\sigma_1^2>1)$ 的检验问题，取水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$，试求其 MPT.

目录

1. 习题 1.27
2. 习题 2.1
3. 习题 3.2
   - 题目
   - 解答

解答

密度函数：

$$p(x;\sigma^2)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\{x^2/(2\sigma^2)\}$$

似然函数：

$$L(x;\sigma^2)=(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2/(2\sigma^2)\}$$

由因子分解定理知，$T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 为该分布的完备充分统计量.
构造似然比统计量：

$$\begin{aligned}\lambda(x)&=\frac{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;\sigma_1^2\right)}{\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i;\sigma_0^2\right)}=\frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\right\}\\&=\frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n}\exp\left\{T(x)\left(\frac{1}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\right\},\end{aligned}$$

解答 II

$\lambda(x)$ 关于 $T(x)$ 严格单调上升，根据 N-P 基本引理，MPT 的拒绝域形式为

$$W = \{x : T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant c\}.$$

当 H_0 成立时，$T \sim \chi^2(n)$, 所以对给定的水平 α ， $c = \chi^2_{1-\alpha}(n)$.
MPT 检验仅与水平 α 有关，而与 σ_1^2 的具体数值无关，只要求 $\sigma_1^2 > 1$ 就行了.
故 MPT 为:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & T \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(n), \\ 0, & T < \chi^2_{1-\alpha}(n). \end{cases}$$

谢谢

Thank you for listening!

提问

Questions