

Imię i nazwisko	Sylwester Macura
Kierunek	Informatyka Stosowana
Rok	3
Grupa	2
Temat	Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położenia węzłów

## 1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja jest to wyznaczanie wartości funkcji w punktach nie będącymi węzłami interpolacyjnymi na podstawie węzłów interpolacyjnych. Węzeł interpolacyjny jest to wartość funkcji interpolowanej którą znamy. Wartość funkcji interpolującej musi być równa wartości funkcji interpolowanej w węzłach. Interpolacja służy do wyznaczania wartości funkcji tablicowych pomiędzy wartościami tablicowymi, przybliżanie złożonej funkcji prostszą, całkowanie numeryczne, modelowanie powierzchni. Do interpolacji najczęściej wykorzystujemy wielomiany algebraiczne, funkcje trygonometryczne oraz funkcje sklejane.

Zasada interpolacji wielomianowej

Dane n punktów(węzłów) istnieje dokładnie jeden wielomian co najwyżej stopnia n który pasuje do węzłów. Można to udowodnić następująco. Szukamy nieznanych współczynników wielomianu, na podstawie znanych położenia węzłów. Możemy skonstruować na tej podstawie układ równań liniowych

$$a_0 + a_1 * x_0 + a_2 * x_0^2 + \dots + a_n * x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 * x_1 + a_2 * x_1^2 + \dots + a_n * x_1^n = y_1$$

$$\dots = \dots$$

$$a_0 + a_1 * x_n + a_2 * x_n^2 + \dots + a_n * x_n^n = y_n$$

Możemy stworzyć układ równań  $A * x = y$ . Macierz A tego układu wygląda następująco.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy  $\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$  i jest różny od zera.  $a_i = \sum_{j=0}^n y_j * D_{ij}$  gdzie  $D_{ij}$  jest wyznacznikiem macierzy dopełnień algebraicznych.

Interpolacja Lagrange'a

Korzystając z poprzedniego wyniku podstawiamy  $a_i = \sum_{j=0}^n y_j * D_{ij}$  do

$$W_n(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \dots + a_n * x^n \quad \text{grupujemy składniki przy } y$$

$$W_n(x) = y_0 * \Phi_0(x) + y_1 * \Phi_1(x) + \dots + y_n * \Phi_n(x)$$

możemy oznaczyć  $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a ma postać

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{y_j * \omega_n(x)}{(x - x_j) * \omega_n'(x_j)}$$

Aby zoptymalizować algorytm możemy do wyznaczania węzłów użyć zer wielomianu Czebyszewa. Zera wyznaczamy za pomocą wzoru.

$$x_m = \frac{1}{2} * [(x_{max} - x_{min}) * \cos(\frac{\pi * 2m + 1}{2n + 2}) + (x_{min} + x_{max})]$$

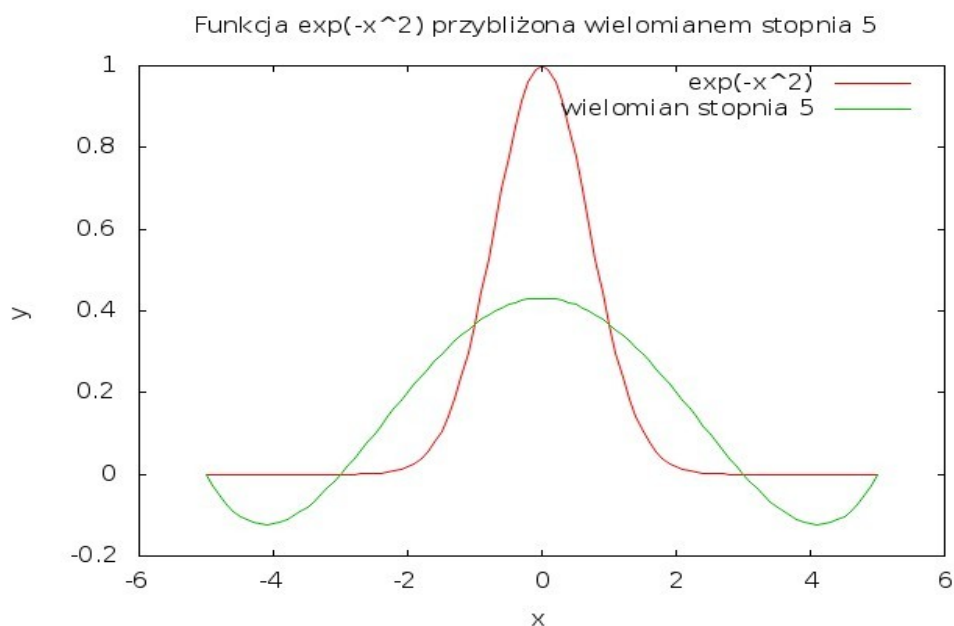
## 2. Zadanie do wykonania

- Przeprowadzić interpolację funkcji  $f(x) = \exp(-x^2)$  dla równo odległych węzłów dla 10, 15, 20 węzłów
- Przeprowadzić interpolację funkcji  $f(x) = \exp(-x^2)$  dla 10, 15, 20 węzłów, położenia węzłów są zerami wielomianu Czebyszewa.
- Narysować wykres funkcji interpolowanej i interpolującej

## 2.Rozwiązanie

- Dla  $n=5$  i równo odległych węzłów

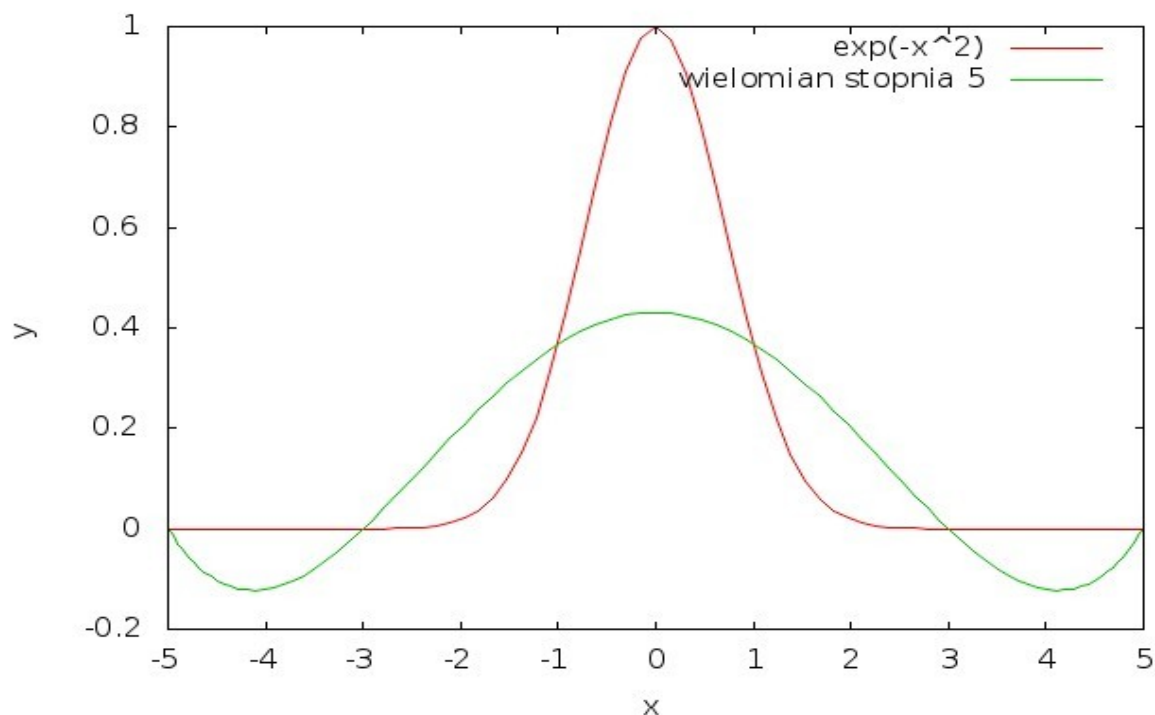
x	F(x)	W(x)	x	F(x)	W(x)	x	F(x)	W(x)
-5.00000	0.000000	0.000000	-1.70000	0.055576	0.258882	1.60000	0.077305	0.276927
-4.90000	0.000000	-0.028450	-1.60000	0.077305	0.276927	1.70000	0.055576	0.258882
-4.80000	0.000000	-0.052685	-1.50000	0.105399	0.294259	1.80000	0.039164	0.240199
-4.70000	0.000000	-0.072926	-1.40000	0.140858	0.310806	1.90000	0.027052	0.220958
-4.60000	0.000000	-0.089394	-1.30000	0.184520	0.326501	2.00000	0.018316	0.201245
-4.50000	0.000000	-0.102300	-1.20000	0.236928	0.341283	2.10000	0.012155	0.181149
-4.40000	0.000000	-0.111855	-1.10000	0.298197	0.355093	2.20000	0.007907	0.160764
-4.30000	0.000000	-0.118263	-1.00000	0.367879	0.367879	2.30000	0.005042	0.140190
-4.20000	0.000000	-0.121724	-0.90000	0.444858	0.379594	2.40000	0.003151	0.119530
-4.10000	0.000000	-0.122432	-0.80000	0.527293	0.390192	2.50000	0.001930	0.098891
-4.00000	0.000000	-0.120580	-0.70000	0.612627	0.399636	2.60000	0.001159	0.078386
-3.90000	0.000000	-0.116353	-0.60000	0.697676	0.407890	2.70000	0.000682	0.058133
-3.80000	0.000001	-0.109933	-0.50000	0.778801	0.414924	2.80000	0.000394	0.038253
-3.70000	0.000001	-0.101496	-0.40000	0.852144	0.420714	2.90000	0.000223	0.018873
-3.60000	0.000002	-0.091215	-0.30000	0.913931	0.425239	3.00000	0.000123	0.000123
-3.50000	0.000005	-0.079258	-0.20000	0.960790	0.428483	3.10000	0.000067	-0.017860
-3.40000	0.000010	-0.065787	-0.10000	0.990050	0.430434	3.20000	0.000036	-0.034937
-3.30000	0.000019	-0.050962	0.00000	1.000000	0.431085	3.30000	0.000019	-0.050962
-3.20000	0.000036	-0.034937	0.10000	0.990050	0.430434	3.40000	0.000010	-0.065787
-3.10000	0.000067	-0.017860	0.20000	0.960789	0.428483	3.50000	0.000005	-0.079258
-3.00000	0.000123	0.000123	0.30000	0.913931	0.425239	3.60000	0.000002	-0.091215
-2.90000	0.000223	0.018873	0.40000	0.852144	0.420714	3.70000	0.000001	-0.101496
-2.80000	0.000394	0.038253	0.50000	0.778801	0.414924	3.80000	0.000001	-0.109933
-2.70000	0.000682	0.058133	0.60000	0.697676	0.407890	3.90000	0.000000	-0.116353
-2.60000	0.001159	0.078386	0.70000	0.612626	0.399635	4.00000	0.000000	-0.120580
-2.50000	0.001930	0.098891	0.80000	0.527292	0.390192	4.10000	0.000000	-0.122432
-2.40000	0.003151	0.119530	0.90000	0.444858	0.379594	4.20000	0.000000	-0.121724
-2.30000	0.005042	0.140190	1.00000	0.367879	0.367879	4.30000	0.000000	-0.118263
-2.20000	0.007907	0.160764	1.10000	0.298197	0.355093	4.40000	0.000000	-0.111855
-2.10000	0.012155	0.181149	1.20000	0.236928	0.341283	4.50000	0.000000	-0.102300
-2.00000	0.018316	0.201245	1.30000	0.184519	0.326501	4.60000	0.000000	-0.089394
-1.90000	0.027052	0.220958	1.40000	0.140858	0.310806	4.70000	0.000000	-0.072926
-1.80000	0.039164	0.240199	1.50000	0.105399	0.294259	4.80000	0.000000	-0.052685
						4.90000	0.000000	-0.028450
						5.00000	0.000000	0.000000



- Dla  $n=5$  i węzłów Czebyszewa

4.999396	0.000000	-0.000185	2.389323	2.389324	2.389325	-2.650878	0.000887	0.068043
4.994564	0.000000	-0.001659	2.251641	2.251642	2.251643	-2.781376	0.000437	0.041921
4.984906	0.000000	-0.004573	2.111784	2.111785	2.111786	-2.909186	0.000211	0.017122
4.970429	0.000000	-0.008865	1.969886	1.969887	1.969888	-3.034185	0.000100	-0.006117
4.951149	0.000000	-0.014439	1.826084	1.826085	1.826086	-3.156251	0.000047	-0.027586
4.927084	0.000000	-0.021170	1.680517	1.680518	1.680519	-3.275267	0.000022	-0.047104
4.898257	0.000000	-0.028908	1.533326	1.533327	1.533328	-3.391117	0.000010	-0.064523
4.864696	0.000000	-0.037476	1.384653	1.384654	1.384655	-3.503690	0.000005	-0.079727
4.826434	0.000000	-0.046676	1.234642	1.234643	1.234644	-3.612877	0.000002	-0.092636
4.783507	0.000000	-0.056292	1.083438	1.083439	1.083440	-3.718572	0.000001	-0.103207
4.735957	0.000000	-0.066094	0.931186	0.931187	0.931188	-3.820673	0.000000	-0.111431
4.683830	0.000000	-0.075839	0.778035	0.778036	0.778037	-3.919082	0.000000	-0.117335
4.627176	0.000000	-0.085280	0.624132	0.624133	0.624134	-4.013703	0.000000	-0.120979
4.566050	0.000000	-0.094164	0.469625	0.469626	0.469627	-4.104445	0.000000	-0.122457
4.500512	0.000000	-0.102243	0.314665	0.314666	0.314667	-4.191221	0.000000	-0.121893
4.430624	0.000000	-0.109273	0.159400	0.159401	0.159402	-4.273945	0.000000	-0.119440
4.356453	0.000000	-0.115020	0.003982	0.003983	0.003984	-4.352540	0.000000	-0.115276
4.278073	0.000000	-0.119267	-0.151441	-0.151442	-0.151443	-4.426927	0.000000	-0.109600
4.195558	0.000000	-0.121812	-0.306717	-0.306718	-0.306719	-4.497036	0.000000	-0.102631
4.108988	0.000000	-0.122476	-0.461696	-0.461697	-0.461698	-4.562799	0.000000	-0.094600
4.018447	0.000000	-0.121106	-0.616230	-0.616231	-0.616232	-4.624153	0.000000	-0.085751
3.924022	0.000000	-0.117576	-0.770168	-0.770169	-0.770170	-4.681037	0.000000	-0.076333
3.825805	0.000000	-0.111790	-0.923361	-0.923362	-0.923363	-4.733397	0.000000	-0.066597
3.723891	0.000001	-0.103685	-1.075662	-1.075663	-1.075664	-4.781183	0.000000	-0.056792
3.618377	0.000002	-0.093235	-1.226924	-1.226925	-1.226926	-4.824347	0.000000	-0.047160
3.509367	0.000004	-0.080444	-1.376999	-1.377000	-1.377001	-4.862850	0.000000	-0.037934
3.396965	0.000010	-0.065356	-1.525744	-1.525745	-1.525746	-4.896652	0.000000	-0.029328
3.281279	0.000021	-0.048049	-1.673015	-1.673016	-1.673017	-4.925723	0.000000	-0.021544
3.162423	0.000045	-0.028635	-1.818668	-1.818669	-1.818670	-4.950032	0.000000	-0.014757
3.040510	0.000097	-0.007262	-1.962564	-1.962565	-1.962566	-4.969558	0.000000	-0.009121
2.915659	0.000203	0.015892	-2.104563	-2.104564	-2.104565	-4.984281	0.000000	-0.004761
2.787990	0.000421	0.040617	-2.244528	-2.244529	-2.244530	-4.994187	0.000000	-0.001773
2.657626	0.000856	0.066676	-2.382324	-2.382325	-2.382326	-4.999266	0.000000	-0.000225
2.524694	0.001705	0.093810	-2.517818	-2.517819	-2.517820			

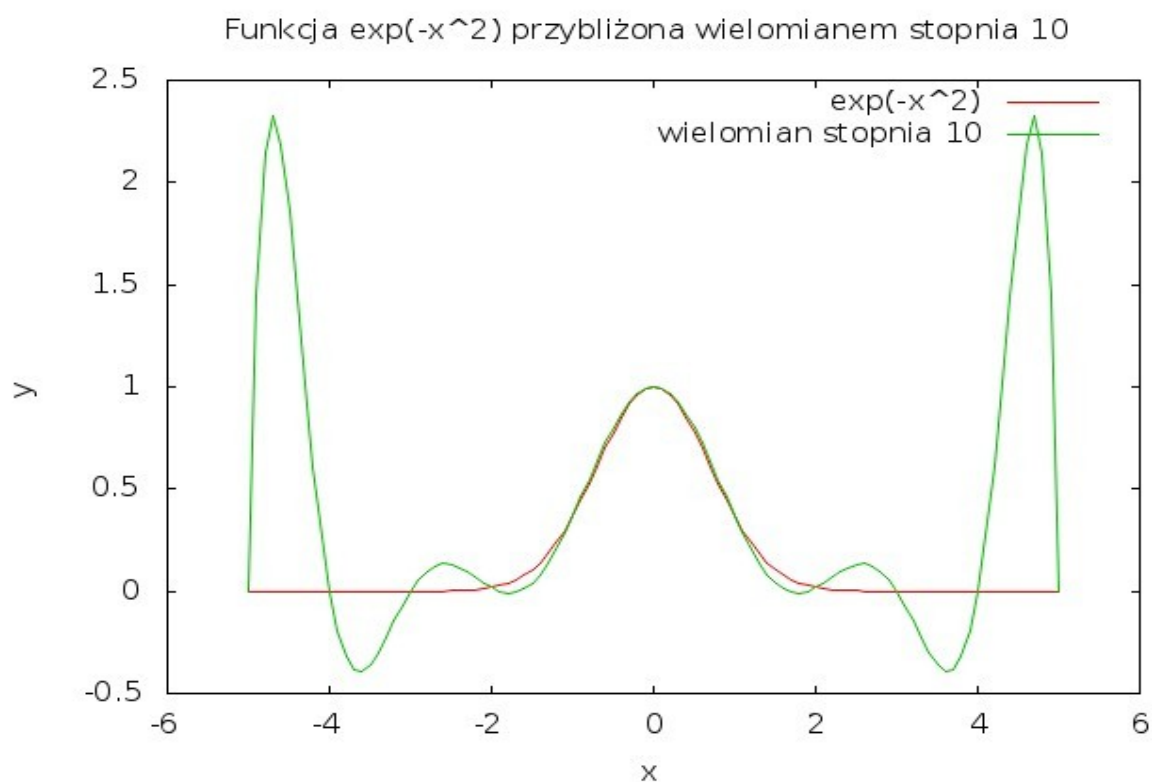
Funkcja  $\exp(-x^2)$  przybliżona wielomianem stopnia 5



- Dla  $n=10$  i równo odległych węzłów

x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
-5.000000	0.000000	0.000000	-1.600000	0.077305	0.011259	1.700000	0.055576	-0.004403
-4.900000	0.000000	1.450330	-1.500000	0.105399	0.040431	1.800000	0.039164	-0.007338
-4.800000	0.000000	2.145812	-1.400000	0.140858	0.083177	1.900000	0.027052	0.000958
-4.700000	0.000000	2.329521	-1.300000	0.184520	0.138857	2.000000	0.018316	0.018316
-4.600000	0.000000	2.187368	-1.200000	0.236928	0.206187	2.100000	0.012155	0.041979
-4.500000	0.000000	1.858330	-1.100000	0.298197	0.283307	2.200000	0.007907	0.068714
-4.400000	0.000000	1.443266	-1.000000	0.367879	0.367879	2.300000	0.005042	0.094971
-4.300000	0.000000	1.012502	-0.900000	0.444858	0.457194	2.400000	0.003151	0.117065
-4.200000	0.000000	0.612286	-0.800000	0.527293	0.548293	2.500000	0.001930	0.131405
-4.100000	0.000000	0.270255	-0.700000	0.612627	0.638090	2.600000	0.001159	0.134738
-4.000000	0.000000	0.000000	-0.600000	0.697676	0.723501	2.700000	0.000682	0.124421
-3.900000	0.000000	-0.195135	-0.500000	0.778801	0.801563	2.800000	0.000394	0.098700
-3.800000	0.000001	-0.318951	-0.400000	0.852144	0.869551	2.900000	0.000223	0.056987
-3.700000	0.000001	-0.379889	-0.300000	0.913931	0.925083	3.000000	0.000123	0.000123
-3.600000	0.000002	-0.389049	-0.200000	0.960790	0.966208	3.100000	0.000067	-0.069390
-3.500000	0.000005	-0.358654	-0.100000	0.990050	0.991477	3.200000	0.000036	-0.147220
-3.400000	0.000010	-0.300895	0.000000	1.000000	1.000000	3.300000	0.000019	-0.227111
-3.300000	0.000019	-0.227111	0.100000	0.990050	0.991477	3.400001	0.000010	-0.300896
-3.200000	0.000036	-0.147220	0.200000	0.960789	0.966208	3.500000	0.000005	-0.358654
-3.100000	0.000067	-0.069389	0.300000	0.913931	0.925083	3.600000	0.000002	-0.389049
-3.000000	0.000123	0.000123	0.400000	0.852144	0.869551	3.700000	0.000001	-0.379889
-2.900000	0.000223	0.056987	0.500000	0.778801	0.801563	3.800000	0.000001	-0.318951
-2.800000	0.000394	0.098700	0.600000	0.697676	0.723501	3.900001	0.000000	-0.195134
-2.700000	0.000682	0.124421	0.700000	0.612626	0.638090	4.000000	0.000000	0.000000
-2.600000	0.001159	0.134738	0.800000	0.527292	0.548293	4.100000	0.000000	0.270256
-2.500000	0.001930	0.131405	0.900000	0.444858	0.457194	4.200000	0.000000	0.612286
-2.400000	0.003151	0.117065	1.000000	0.367879	0.367879	4.300000	0.000000	1.012502
-2.300000	0.005042	0.094971	1.100000	0.298197	0.283307	4.400001	0.000000	1.443269
-2.200000	0.007907	0.068714	1.200000	0.236928	0.206187	4.500000	0.000000	1.858330
-2.100000	0.012155	0.041979	1.300000	0.184519	0.138857	4.600000	0.000000	2.187369
-2.000000	0.018316	0.018316	1.400000	0.140858	0.083177	4.700000	0.000000	2.329520
-1.900000	0.027052	0.000958	1.500000	0.105399	0.040431	4.800000	0.000000	2.145812
-1.800000	0.039164	-0.007338	1.600000	0.077305	0.011259	4.900001	0.000000	1.450325
-1.700000	0.055576	-0.004403				5.000000	0.000000	0.000000

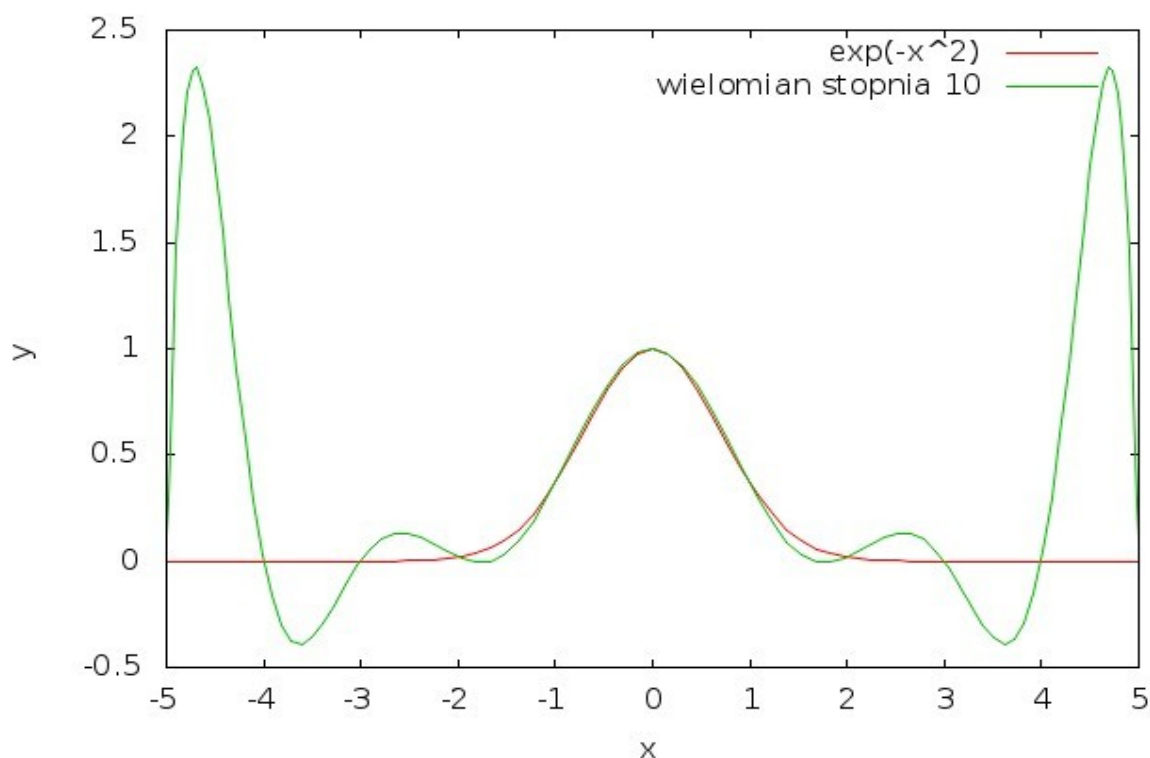
- 



- Dla  $n=10$  i węzłów Czebyszewa

x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
4.999396	0.000000	0.011613	2.389323	0.003316	0.115014	-2.650878	0.000887	0.131329
4.994564	0.000000	0.103105	2.251641	0.006283	0.082565	-2.781376	0.000437	0.104702
4.984906	0.000000	0.278744	2.111784	0.011567	0.045036	-2.909186	0.000211	0.052370
4.970429	0.000000	0.524487	1.969886	0.020642	0.012289	-3.034185	0.000100	-0.022395
4.951149	0.000000	0.820682	1.826084	0.035629	-0.006180	-3.156251	0.000047	-0.112503
4.927084	0.000000	1.143760	1.680517	0.059360	-0.002384	-3.275267	0.000022	-0.207572
4.898257	0.000000	1.468121	1.533326	0.095265	0.029190	-3.391117	0.000010	-0.294833
4.864696	0.000000	1.768212	1.384653	0.147009	0.090907	-3.503690	0.000005	-0.360334
4.826434	0.000000	2.020587	1.234642	0.217765	0.181649	-3.612877	0.000002	-0.390350
4.783507	0.000000	2.205740	1.083438	0.309178	0.296868	-3.718572	0.000001	-0.372842
4.735957	0.000000	2.309583	0.931186	0.420165	0.429007	-3.820673	0.000000	-0.298839
4.683830	0.000000	2.324455	0.778035	0.545890	0.568237	-3.919082	0.000000	-0.163600
4.627176	0.000000	2.249564	0.624132	0.677368	0.703454	-4.013703	0.000000	0.032580
4.566050	0.000000	2.090851	0.469625	0.802079	0.823396	-4.104445	0.000000	0.283994
4.500512	0.000000	1.860304	0.314665	0.905730	0.917800	-4.191221	0.000000	0.579646
4.430624	0.000000	1.574768	0.159400	0.974912	0.978442	-4.273945	0.000000	0.903877
4.356453	0.000000	1.254402	0.003982	0.999984	0.999986	-4.352540	0.000000	1.237451
4.278073	0.000000	0.920915	-0.151441	0.977327	0.980527	-4.426927	0.000000	1.559021
4.195558	0.000000	0.595712	-0.306717	0.910214	0.921785	-4.497036	0.000000	1.846852
4.108988	0.000000	0.298180	-0.461696	0.808024	0.828933	-4.562799	0.000000	2.080662
4.018447	0.000000	0.044190	-0.616230	0.684040	0.710063	-4.624153	0.000000	2.243392
3.924022	0.000000	-0.155005	-0.770168	0.552579	0.575359	-4.681037	0.000000	2.322777
3.825805	0.000000	-0.293418	-0.923361	0.426307	0.436058	-4.733397	0.000000	2.312544
3.723891	0.000001	-0.370483	-1.075662	0.314413	0.303302	-4.781183	0.000000	2.213129
3.618377	0.000002	-0.390700	-1.226924	0.221941	0.187009	-4.824347	0.000000	2.031851
3.509367	0.000004	-0.362847	-1.376999	0.150149	0.094875	-4.862850	0.000000	1.782486
3.396965	0.000010	-0.298838	-1.525744	0.097501	0.031614	-4.896652	0.000000	1.484297
3.281279	0.000021	-0.212348	-1.673015	0.060872	-0.001476	-4.925723	0.000000	1.160568
3.162423	0.000045	-0.117353	-1.818668	0.036606	-0.006585	-4.950032	0.000000	0.836794
3.040510	0.000097	-0.026714	-1.962564	0.021244	0.010919	-4.969558	0.000000	0.538615
2.915659	0.000203	0.049040	-2.104563	0.011924	0.043158	-4.984281	0.000000	0.289776
2.787990	0.000421	0.102635	-2.244528	0.006487	0.080684	-4.994187	0.000000	0.110144
2.657626	0.000856	0.130595	-2.382324	0.003429	0.113624	-4.999266	0.000000	0.014110
2.524694	0.001705	0.133366	-2.517818	0.001765	0.132890			

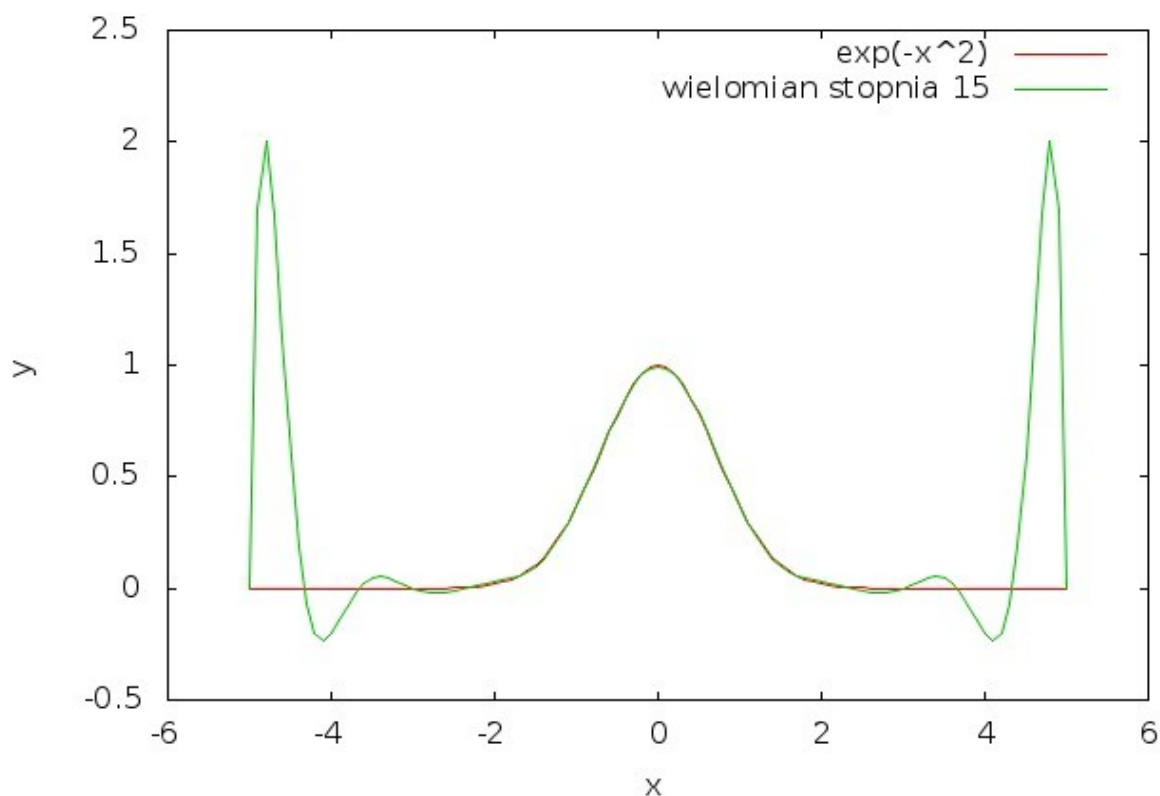
Funkcja  $\exp(-x^2)$  przybliżona wielomianem stopnia 10



- Dla  $n=15$  i równo odległych węzłów

x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
-5.000000	0.000000	0.000000	-1.600000	0.077305	0.074647	1.800000	0.039164	0.044762
-4.900000	0.000000	1.696142	-1.500000	0.105399	0.099576	1.900000	0.027052	0.036054
-4.800000	0.000000	2.004474	-1.400000	0.140858	0.133326	2.000000	0.018316	0.029095
-4.700000	0.000000	1.668451	-1.300000	0.184520	0.176965	2.100000	0.012155	0.022463
-4.600000	0.000000	1.122137	-1.200000	0.236928	0.230927	2.200000	0.007907	0.015252
-4.500000	0.000000	0.595407	-1.100000	0.298197	0.294920	2.300000	0.005042	0.007167
-4.400000	0.000000	0.189326	-1.000000	0.367879	0.367879	2.400000	0.003151	-0.001444
-4.300000	0.000000	-0.070981	-0.900000	0.444858	0.447993	2.500000	0.001930	-0.009662
-4.200000	0.000000	-0.200769	-0.800000	0.527293	0.532782	2.600000	0.001159	-0.016158
-4.100000	0.000000	-0.232595	-0.700000	0.612627	0.619228	2.700000	0.000682	-0.019444
-4.000000	0.000000	-0.202352	-0.600000	0.697676	0.703953	2.800000	0.000394	-0.018202
-3.900000	0.000000	-0.141637	-0.500000	0.778801	0.783420	2.900000	0.000223	-0.011645
-3.800000	0.000001	-0.074329	-0.400000	0.852144	0.854146	3.000000	0.000123	0.000123
-3.700000	0.000001	-0.015926	-0.300000	0.913931	0.912924	3.100000	0.000067	0.015815
-3.600000	0.000002	0.025623	-0.200000	0.960790	0.957022	3.200000	0.000036	0.032798
-3.500000	0.000005	0.048271	-0.100000	0.990050	0.984353	3.300000	0.000019	0.047155
-3.400000	0.000010	0.054019	0.000000	1.000000	0.993612	3.400001	0.000010	0.054019
-3.300000	0.000019	0.047155	0.100000	0.990050	0.984353	3.500000	0.000005	0.048271
-3.200000	0.000036	0.032798	0.200000	0.960789	0.957021	3.600000	0.000002	0.025623
-3.100000	0.000067	0.015815	0.300000	0.913931	0.912924	3.700000	0.000001	-0.015925
-3.000000	0.000123	0.000123	0.400000	0.852144	0.854146	3.800000	0.000001	-0.074328
-2.900000	0.000223	-0.011645	0.500000	0.778801	0.783420	3.900001	0.000000	-0.141633
-2.800000	0.000394	-0.018202	0.600000	0.697676	0.703953	4.000000	0.000000	-0.202351
-2.700000	0.000682	-0.019444	0.700000	0.612626	0.619227	4.100000	0.000000	-0.232592
-2.600000	0.001159	-0.016158	0.800000	0.527292	0.532781	4.200000	0.000000	-0.200767
-2.500000	0.001930	-0.009662	0.900000	0.444858	0.447993	4.300000	0.000000	-0.070982
-2.400000	0.003151	-0.001444	1.000000	0.367879	0.367879	4.400001	0.000000	0.189323
-2.300000	0.005042	0.007167	1.100000	0.298197	0.294920	4.500000	0.000000	0.595397
-2.200000	0.007907	0.015252	1.200000	0.236928	0.230927	4.600000	0.000000	1.122130
-2.100000	0.012155	0.022464	1.300000	0.184519	0.176965	4.700000	0.000000	1.668410
-2.000000	0.018316	0.029095	1.400000	0.140858	0.133326	4.800000	0.000000	2.004438
-1.900000	0.027052	0.036054	1.500000	0.105399	0.099576	4.900001	0.000000	1.696125
-1.800000	0.039164	0.044762	1.600000	0.077305	0.074647	5.000000	0.000000	0.000000
-1.700000	0.055576	0.056989	1.700000	0.055576	0.056988			

Funkcja  $\exp(-x^2)$  przybliżona wielomianem stopnia 15

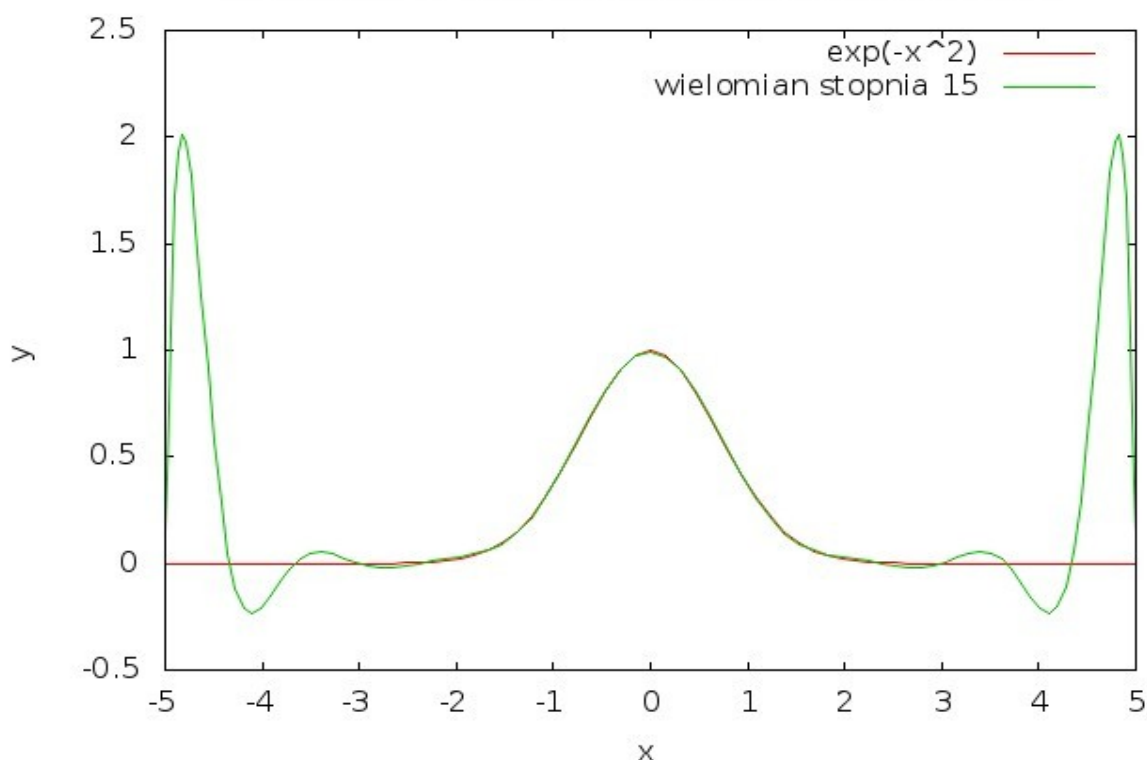




- Dla  $n=15$  i węzłów Czebyszewa

x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
4.999396	0.000000	0.016522	2.389323	0.003316	-0.000523	-2.650878	0.000887	-0.018322
4.994564	0.000000	0.145376	2.251641	0.006283	0.011178	-2.781376	0.000437	-0.018823
4.984906	0.000000	0.385940	2.111784	0.011567	0.021655	-2.909186	0.000211	-0.010771
4.970429	0.000000	0.706415	1.969886	0.020642	0.031100	-3.034185	0.000100	0.005150
4.951149	0.000000	1.064660	1.826084	0.035629	0.042228	-3.156251	0.000047	0.025433
4.927084	0.000000	1.414267	1.680517	0.059360	0.059943	-3.275267	0.000022	0.044103
4.898257	0.000000	1.710665	1.533326	0.095265	0.090357	-3.391117	0.000010	0.053847
4.864696	0.000000	1.917179	1.384653	0.147009	0.139362	-3.503690	0.000005	0.047757
4.826434	0.000000	2.009551	1.234642	0.217765	0.211067	-3.612877	0.000002	0.021338
4.783507	0.000000	1.978616	1.083438	0.309178	0.306424	-3.718572	0.000001	-0.025645
4.735957	0.000000	1.830822	0.931186	0.420165	0.422379	-3.820673	0.000000	-0.087904
4.683830	0.000000	1.586293	0.778035	0.545890	0.551741	-3.919082	0.000000	-0.154344
4.627176	0.000000	1.275434	0.624132	0.677368	0.683855	-4.013703	0.000000	-0.208934
4.566050	0.000000	0.933972	0.469625	0.802079	0.805982	-4.104445	0.000000	-0.232753
4.500512	0.000000	0.597830	0.314665	0.905730	0.905164	-4.191221	0.000000	-0.206958
4.430624	0.000000	0.298299	0.159400	0.974912	0.970232	-4.273945	0.000000	-0.116220
4.356453	0.000000	0.058328	0.003982	0.999984	0.993597	-4.352540	0.000000	0.047918
4.278073	0.000000	-0.109626	-0.151441	0.977327	0.972488	-4.426927	0.000000	0.284415
4.195558	0.000000	-0.203991	-0.306717	0.910214	0.909409	-4.497036	0.000000	0.581366
4.108988	0.000000	-0.232787	-0.461696	0.808024	0.811726	-4.562799	0.000000	0.916349
4.018447	0.000000	-0.211065	-0.616230	0.684040	0.690467	-4.624153	0.000000	1.258392
3.924022	0.000000	-0.157581	-0.770168	0.552579	0.558545	-4.681037	0.000000	1.571719
3.825805	0.000000	-0.091323	-0.923361	0.426307	0.428758	-4.733397	0.000000	1.820444
3.723891	0.000001	-0.028533	-1.075662	0.314413	0.311908	-4.781183	0.000000	1.973808
3.618377	0.000002	0.019410	-1.226924	0.221941	0.215386	-4.824347	0.000000	2.011006
3.509367	0.000004	0.046920	-1.376999	0.150149	0.142461	-4.862850	0.000000	1.924859
3.396965	0.000010	0.053971	-1.525744	0.097501	0.092370	-4.896652	0.000000	1.723734
3.281279	0.000021	0.044882	-1.673015	0.060872	0.061139	-4.925723	0.000000	1.431118
3.162423	0.000045	0.026488	-1.818668	0.036606	0.042926	-4.950032	0.000000	1.083205
3.040510	0.000097	0.006125	-1.962564	0.021244	0.031595	-4.969558	0.000000	0.724229
2.915659	0.000203	-0.010129	-2.104563	0.011924	0.022152	-4.984281	0.000000	0.400750
2.787990	0.000421	-0.018623	-2.244528	0.006487	0.011754	-4.994187	0.000000	0.155196
2.657626	0.000856	-0.018536	-2.382324	0.003429	0.000082	-4.999266	0.000000	0.020071
2.524694	0.001705	-0.011483	-2.517818	0.001765	-0.010988			

Funkcja  $\exp(-x^2)$  przybliżona wielomianem stopnia 15

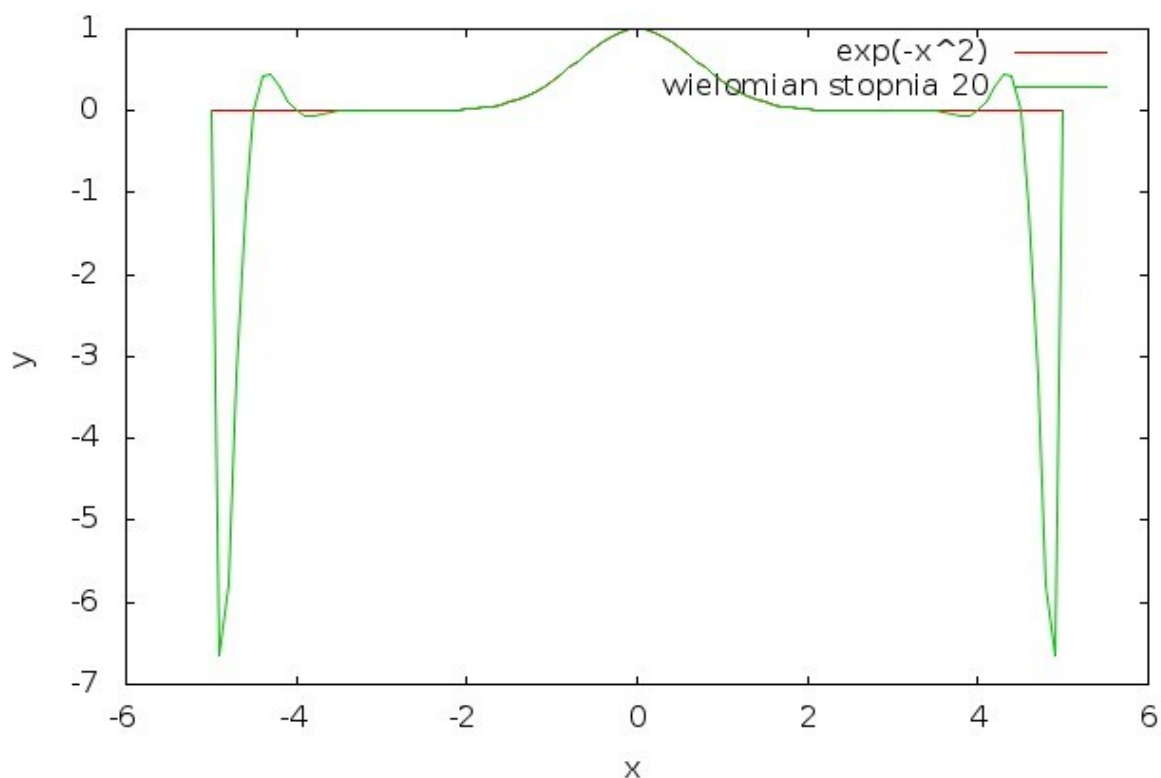




- Dla  $n=20$  i równo odległych węzłów

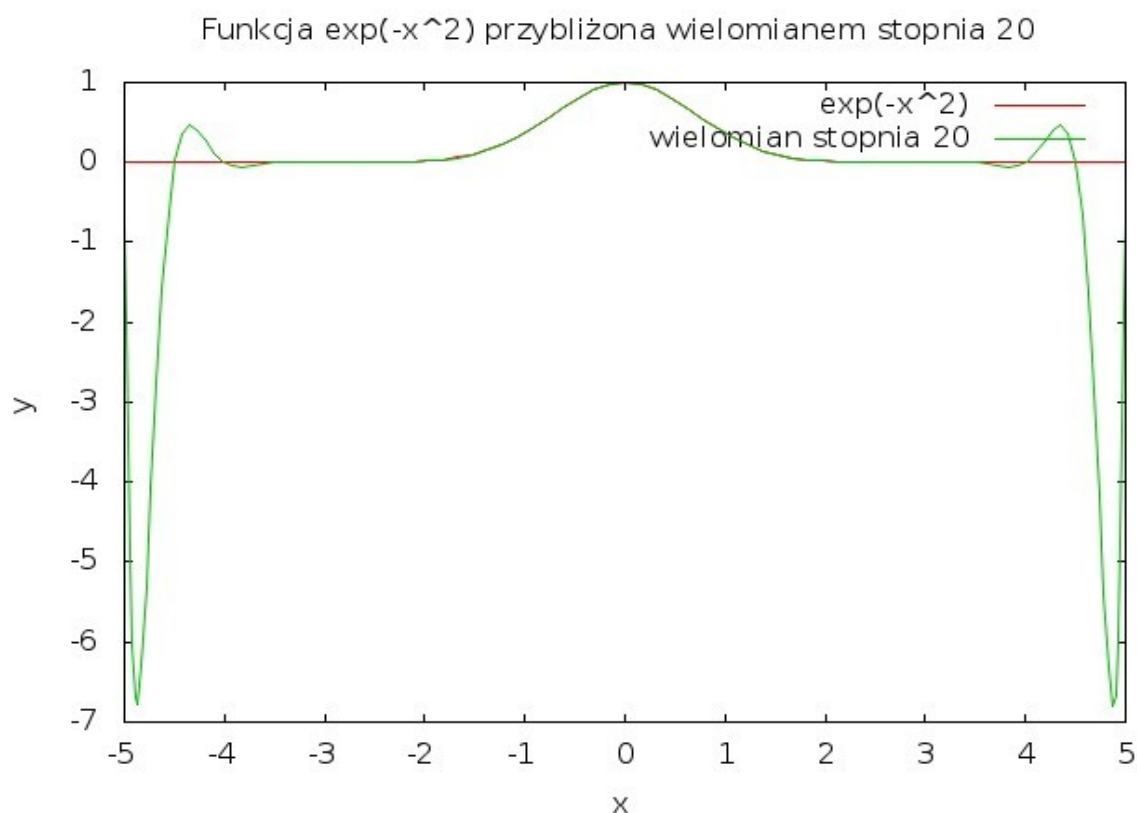
x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
-5.000000	0.000000	0.000000	-1.600000	0.077305	0.077089	1.800000	0.039164	0.038685
-4.900000	0.000000	-6.654663	-1.500000	0.105399	0.105399	1.900000	0.027052	0.026703
-4.800000	0.000000	-5.777134	-1.400000	0.140858	0.141017	2.000000	0.018316	0.018316
-4.700000	0.000000	-3.236407	-1.300000	0.184520	0.184741	2.100000	0.012155	0.012649
-4.600000	0.000000	-1.162231	-1.200000	0.236928	0.237119	2.200000	0.007907	0.008866
-4.500000	0.000000	0.000000	-1.100000	0.298197	0.298299	2.300000	0.005042	0.006200
-4.400000	0.000000	0.429685	-1.000000	0.367879	0.367879	2.400000	0.003151	0.004022
-4.300000	0.000000	0.439475	-0.900000	0.444858	0.444783	2.500000	0.001930	0.001930
-4.200000	0.000000	0.284130	-0.800000	0.527293	0.527190	2.600000	0.001159	-0.000161
-4.100000	0.000000	0.115913	-0.700000	0.612627	0.612540	2.700000	0.000682	-0.001979
-4.000000	0.000000	0.000000	-0.600000	0.697676	0.697632	2.800000	0.000394	-0.002954
-3.900000	0.000000	-0.053405	-0.500000	0.778801	0.778801	2.900000	0.000223	-0.002403
-3.800000	0.000001	-0.060162	-0.400000	0.852144	0.852172	3.000000	0.000123	0.000123
-3.700000	0.000001	-0.042541	-0.300000	0.913931	0.913965	3.100000	0.000067	0.004426
-3.600000	0.000002	-0.018864	-0.200000	0.960790	0.960811	3.200000	0.000036	0.009266
-3.500000	0.000005	0.000005	-0.100000	0.990050	0.990057	3.300000	0.000019	0.012241
-3.400000	0.000010	0.010130	0.000000	1.000000	1.000000	3.400001	0.000010	0.010129
-3.300000	0.000019	0.012240	0.100000	0.990050	0.990056	3.500000	0.000005	0.000005
-3.200000	0.000036	0.009268	0.200000	0.960789	0.960811	3.600000	0.000002	-0.018865
-3.100000	0.000067	0.004426	0.300000	0.913931	0.913965	3.700000	0.000001	-0.042542
-3.000000	0.000123	0.000123	0.400000	0.852144	0.852172	3.800000	0.000001	-0.060160
-2.900000	0.000223	-0.002403	0.500000	0.778801	0.778801	3.900001	0.000000	-0.053402
-2.800000	0.000394	-0.002954	0.600000	0.697676	0.697632	4.000000	0.000000	0.000000
-2.700000	0.000682	-0.001980	0.700000	0.612626	0.612540	4.100000	0.000000	0.115909
-2.600000	0.001159	-0.000161	0.800000	0.527292	0.527189	4.200000	0.000000	0.284132
-2.500000	0.001930	0.001930	0.900000	0.444858	0.444783	4.300000	0.000000	0.439430
-2.400000	0.003151	0.004022	1.000000	0.367879	0.367879	4.400001	0.000000	0.429660
-2.300000	0.005042	0.006200	1.100000	0.298197	0.298299	4.500000	0.000000	0.000000
-2.200000	0.007907	0.008866	1.200000	0.236928	0.237118	4.600000	0.000000	-1.162263
-2.100000	0.012155	0.012649	1.300000	0.184519	0.184741	4.700000	0.000000	-3.236617
-2.000000	0.018316	0.018316	1.400000	0.140858	0.141017	4.800000	0.000000	-5.777217
-1.900000	0.027052	0.026703	1.500000	0.105399	0.105399	4.900001	0.000000	-6.654982
-1.800000	0.039164	0.038685	1.600000	0.077305	0.077089	5.000000	0.000000	0.000000
-1.700000	0.055576	0.055168	1.700000	0.055576	0.055168			

Funkcja  $\exp(-x^2)$  przybliżona wielomianem stopnia 20



- Dla  $n=15$  i węzłów Czebyszewa

x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)	x	f(x)	W(x)
4.999396	0.000000	-0.084106	2.389323	0.003316	0.004246	-2.650878	0.000887	-0.001151
4.994564	0.000000	-0.731325	2.251641	0.006283	0.007394	-2.781376	0.000437	-0.002868
4.984906	0.000000	-1.895562	2.111784	0.011567	0.012121	-2.909186	0.000211	-0.002256
4.970429	0.000000	-3.345151	1.969886	0.020642	0.020516	-3.034185	0.000100	0.001432
4.951149	0.000000	-4.797235	1.826084	0.035629	0.035163	-3.156251	0.000047	0.007211
4.927084	0.000000	-5.978554	1.680517	0.059360	0.058983	-3.275267	0.000022	0.011848
4.898257	0.000000	-6.679075	1.533326	0.095265	0.095197	-3.391117	0.000010	0.010607
4.864696	0.000000	-6.790931	1.384653	0.147009	0.147184	-3.503690	0.000005	-0.000543
4.826434	0.000000	-6.322517	1.234642	0.217765	0.217975	-3.612877	0.000002	-0.021798
4.783507	0.000000	-5.384339	1.083438	0.309178	0.309263	-3.718572	0.000001	-0.046726
4.735957	0.000000	-4.156362	0.931186	0.420165	0.420109	-3.820673	0.000000	-0.061487
4.683830	0.000000	-2.844770	0.778035	0.545890	0.545787	-3.919082	0.000000	-0.047477
4.627176	0.000000	-1.637100	0.624132	0.677368	0.677313	-4.013703	0.000000	0.012033
4.566050	0.000000	-0.667935	0.469625	0.802079	0.802090	-4.104445	0.000000	0.122510
4.500512	0.000000	-0.003821	0.314665	0.905730	0.905764	-4.191221	0.000000	0.268416
4.430624	0.000000	0.356930	0.159400	0.974912	0.974927	-4.273945	0.000000	0.406952
4.356453	0.000000	0.468290	0.003982	0.999984	0.999984	-4.352540	0.000000	0.468742
4.278073	0.000000	0.412675	-0.151441	0.977327	0.977341	-4.426927	0.000000	0.368075
4.195558	0.000000	0.276195	-0.306717	0.910214	0.910248	-4.497036	0.000000	0.021754
4.108988	0.000000	0.129369	-0.461696	0.808024	0.808037	-4.562799	0.000000	-0.626276
4.018447	0.000000	0.016485	-0.616230	0.684040	0.683988	-4.624153	0.000000	-1.580723
3.924022	0.000000	-0.045648	-0.770168	0.552579	0.552477	-4.681037	0.000000	-2.779044
3.825805	0.000000	-0.061631	-0.923361	0.426307	0.426246	-4.733397	0.000000	-4.089431
3.723891	0.000001	-0.047877	-1.075662	0.314413	0.314489	-4.781183	0.000000	-5.326353
3.618377	0.000002	-0.023076	-1.226924	0.221941	0.222148	-4.824347	0.000000	-6.284820
3.509367	0.000004	-0.001410	-1.376999	0.150149	0.150331	-4.862850	0.000000	-6.780261
3.396965	0.000010	0.010300	-1.525744	0.097501	0.097448	-4.896652	0.000000	-6.700138
3.281279	0.000021	0.011970	-1.673015	0.060872	0.060509	-4.925723	0.000000	-6.027551
3.162423	0.000045	0.007513	-1.818668	0.036606	0.036134	-4.950032	0.000000	-4.866430
3.040510	0.000097	0.001696	-1.962564	0.021244	0.021091	-4.969558	0.000000	-3.421940
2.915659	0.000203	-0.002143	-2.104563	0.011924	0.012442	-4.984281	0.000000	-1.965098
2.787990	0.000421	-0.002904	-2.244528	0.006487	0.007582	-4.994187	0.000000	-0.779994
2.657626	0.000856	-0.001274	-2.382324	0.003429	0.004393	-4.999266	0.000000	-0.102141
2.524694	0.001705	0.001410	-2.517818	0.001765	0.001555			



#### 4. Wnioski

Dokładność interpolacji wielomianowej zależy od paru czynników. Widzimy że gdy zwiększamy ilość węzłów mamy coraz dokładniejsze przybliżenie ale na krańcach przedziału mamy do czynienia z efektem Rungego, czyli z oscylacją wielomianu. Ciężko jest również przybliżać funkcje wielomianem jeśli przebieg tej funkcji różni się przebiegiem od wielomianu. Kolejnym problemem jest położenie węzłów, jeśli węzły będą źle ułożone to otrzymamy mniej dokładne wyniki.