

Imię i nazwisko	Sylwester Macura
Kierunek	Informatyka Stosowana
Rok	3
Grupa	2
Temat	Całkowanie w czterech wymiarach przy użyciu kwadratur Gaussa

1. Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne polega na zapieceniu całki $\int_a^b F(x) dx$ przez sumę

$\sum_{k=0}^N A_k f(x_k)$ wzór ten nosi nazwę kwadratury. Istnieją różne kwadratury, różnią się one doбором węzłów oraz współczynników wagowych.

Kwadratury Gaussa-Hermite'a stosujemy do całkowania przedziałów obustronnie otwartych $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

Funkcja wagowa przyjmuje postać $p(x) = e^{-x^2}$

a węzły są zerami wielomianu H_{n+1}

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Wzór przyjmuje postać

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k)$$

Wzór na A_k ma postać

$$A_k = \frac{2^{N+2} (N+1)!}{H'_{N+1}(x_k) H_{N+2}(x_k)}$$

Aby obliczyć całkę wielokrotną należy wybrać odpowiednie węzły interpolacyjne. Obliczając całkę

$$\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_1 \dots dx_m \quad \text{należy } M \text{ razy zastosować kwadratury jednowymiarowe}$$

Dla całki podwójnej otrzymujemy wzór

$$I(f) = \int_{\omega} \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{v=0}^{N_{2,n}} A_N B_{v,n} f(x_{1,n}, x_{2,v}) + R_{N_1}(g) + \sum_{n=0}^{N_{2,n}} A_n R_{N_{2,n}}(f_n)$$

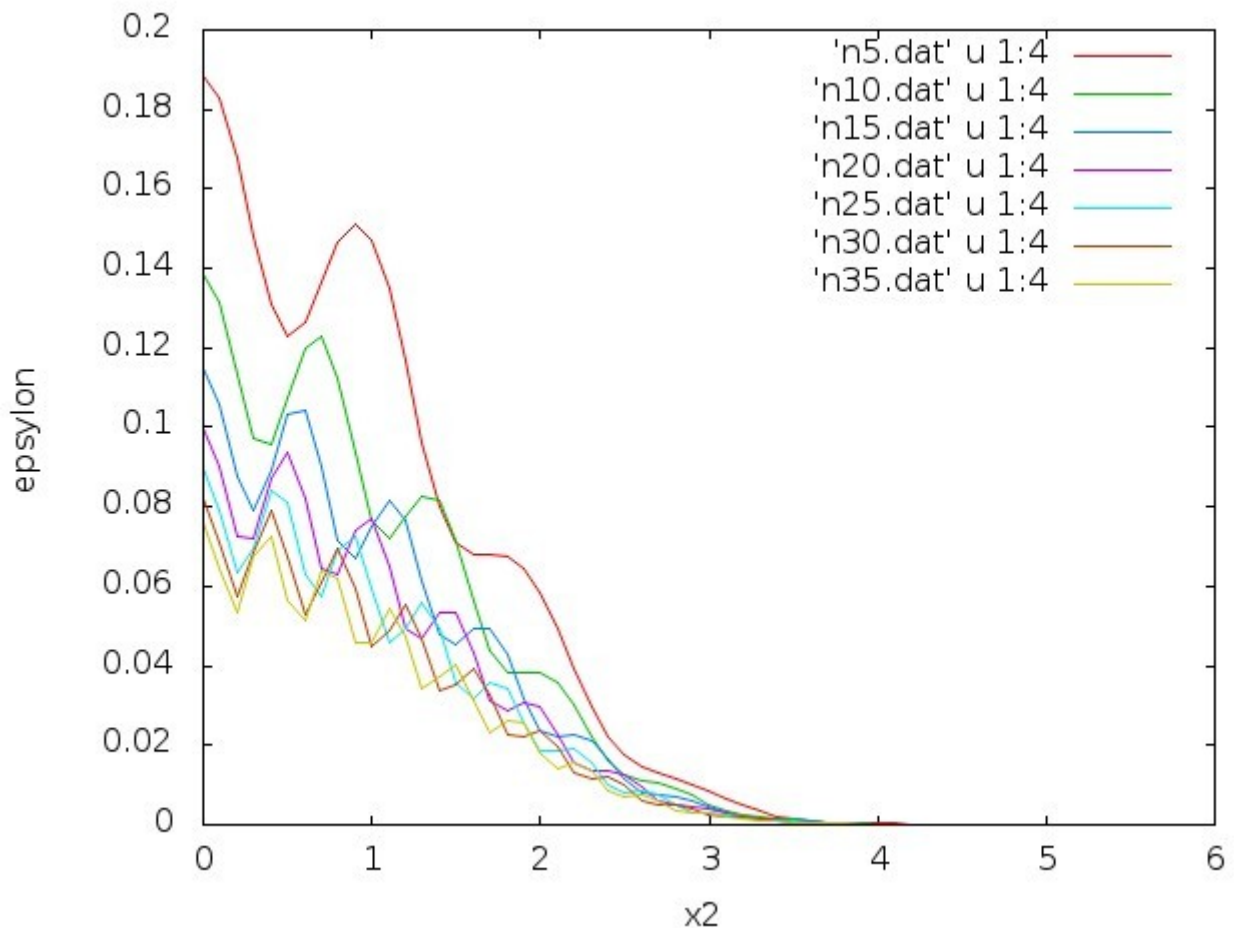
gdzie $R_{N_1}(g)$ reszta kwadratury $I_{N_1}(g)$ a $R_{N_{2,n}}(f_n)$ reszta kwadratury $I_{N_{2,n}}(g)$

2. Zadanie do wykonania

Numeryczne wyznaczenie całki
$$V = \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_1 d^2 r_2 \frac{\rho_1(r_1) \rho(r_2)}{r_1 r_2}$$

Gdzie $\rho_1(r_1) = \exp\left(\frac{-(r_1 - R_{10})^2}{2\sigma^2}\right)$ $\rho_2(r_2) = \exp\left(\frac{-(r_2 - R_{10})^2}{2\sigma^2}\right)$ dla 5,10,15,20,25,30,35 węzłów.

3. Wykonanie zadania



4. Wnioski

Metoda działa poprawnie ponieważ jej błąd bezwzględny zmierza do zera. Możemy również zauważyć że im bliżej węzły są osobliwości tym mniej dokładne wyniki otrzymujemy. Może być to spowodowane niedoskonałością metody. Można również zauważyć że metody dla mniejszej ilości węzłów są szybciej zbieżne. Na wykresie widać również że im procedura ma więcej węzłów tym startuje z dokładniejszego rozwiązania.