Imie i nazwisko	Sylwester Macura
Kierunek	Informatyka Stosowana
Rok	3
Grupa	2
Temat	Rozkład LU. Odwracanie macierzy

1. Wstęp teoretyczny

Metodę Gaussa można użyć do znalezienia takich macierzy L i U, które z macierzą A związane są relacją: A=L*U Procedura wyznaczania elementów tych macierzy nosi nazwę rozkładu LU. Sposób postępowania (wykorzystujemy metodę eliminacji Gaussa):
1) mnożenie wiersza pierwszego przez
czynnik $l_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ i odjęcie go od i-tego wiersza (i=2...n),
zastępujemy mnożeniem przez macierz:

$$L^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ -l_{21} & 1 & ... & 0 \\ -l_{31} & ... & 1 & ... \\ -l_{n1} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

co zapisujemy macierzowo:

$$L^{(1)}A(1)=A^{(2)} \qquad L^{(1)}b(1)=b^{(2)}$$

Eliminacja zmiennej z równań (i=3,4,...,n) wygląda podobnie. Mnożymy wiersze zmodyfikowanego układu równań o indeksach i=3,4,...,n przez czynnik

$$l_{i2}=\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{2}^{(2)}}$$

i odejmujemy od nich wiersz drugi. Operację tą można przeprowadzić mnożąc układ równań obustronnie przez macierz L(2):

$$L^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & -l_{32} & 1 & ... \\ 0 & -l_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Po wykonaniu (n-1) takich operacji dostajemy:

$$L^{(n-1)}L^{(n-2)}...L^{(1)}A^{(1)}=A^{(n)} \qquad L^{(n-1)}L^{(n-2)}...L^{(1)}b^{(1)}=b^{(n)}$$

wprowadzamy oznaczenia

$$L=(L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}...(L^{(n-1)})^{-1} \qquad U=L^{(n-1)}L^{(n-2)}...L^{(1)}A^{(1)}$$

A=LU

Macierz L jest macierzą dolno trójkątną z jedynkami na diagonali,macierz U jest macierzą górną z niezerowymi elementami na diagonali:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Aby znaleźć macierz odwrotną należy rozwiązać n układów równań dla wersorów wyrazów wolnych. Rozwiania kolejnych równań są kolumnami macierzy odwrotnej.

2. Problem

a. Znaleźć rozkłady LU macierzy A i B

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1.1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

b. Znaleźć macierze odwrotne do A i B

c. Obliczyć wskaźniki uwarunkowanie macierzy A i B stosując normę:

$$||A||_{1,\infty}=max|a_{i,j}|$$

3. Rozwiązanie

a. Do znaleźienia rozkładu LU stosujemy procedurę ludcmp(A,n,indx,&d). A jest naszą macierzą która zostanie nadpisana macierzami L i U n jest rozmiarem macierzy indx - wektorem permutacji typu int d-zmienna określająca parzystość permutacji.

b. Za pomocą procedury Lubksb znaleziono następujące macierz odwrotne

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -49999979011811311616 & 99999993207994712064 & -50000014196183400448 \\ 99999958023622623232 & -200000004008175468544 & 100000019596273778688 \\ -49999979011811311616 & 100000002004087734272 & -50000005400090378240 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 9.9999990 & -20.0000095 & 10.0000048 \\ -19.9999981 & 37.0000153 & -18.0000076 \\ 9.9999990 & -17.3333397 & 8.3333368 \end{bmatrix}$$

c. Wskaźnik uwarunkowania macierzy wynosi odpowiednio:

k(A)=9e+20 k(b)= 333

4.Wnioski

Macierz a jest macierzą osobliwa przez co odwrócenie macierzy daje ogromne liczby w poszczególnych komórkach. Powoduje to także duży wskaźnik uwarunkowania macierzy. Po pomnożeniu macierzy a i jej odwrotności również wychodzą sprzeczne wyniki, natomiast po wymnożeniu macierzy B i jej odwrotności otrzymujemy macierz jednostkową. Przypadek macierzy A nie udowadnia że algorytm jest błędny, macierz A jest osobliwa i nie da się jej odwrócić. Algorytm nie sprawdza własności macierzy tylko star się ją a jak największą dokładnością odwrócić, a że jet to niemożliwe otrzymane wyniki są bez sensu.