Lasso estimatoren og dens generaliseringer

20. juni 2018

Louise N. Christensen Trine Graff

Aalborg universitet



Lasso estimatoren



The Least Absolute Shrinkage Selection Operator (lasso) løser optimeringsproblemet

$$\widehat{\beta}^{\text{lasso}} = \arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j \right)^2 \right\}, \text{ u.h.t. at } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leqslant t,$$

som kan omskrives til et lagrange problem

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{lasso}} = \mathop{\text{arg min}}_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} \left\{ \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta} \|_2^2 + \lambda \| \boldsymbol{\beta} \|_1 \right\},$$

hvor $\lambda\geqslant$ 0. Ridge regression estimatoren findes ud fra

$$\begin{split} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ridge}} &= \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{\rho}}{\text{erg min}} \left\{ \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta} \|_2^2 + \lambda \| \boldsymbol{\beta} \|_2^2 \right\} \\ &= \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X} + \lambda \boldsymbol{I}_{\rho} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{y}. \end{split}$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

varians testen

Benchmark modellen

asso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

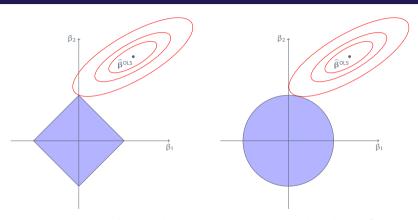
LARS

Krydsvalidering



Lasso estimatoren





Figur: Estimations illustration for lasso (venstre) og ridge regression (højre). De blå arealer er betingelsesområderne $|\beta_1| + |\beta_2| \le t$ og $\beta_1^2 + \beta_2^2 \le t^2$, mens de røde ellipser er konturkurver for SSR. Konturkurverne har centrum i OLS estimatoren. $\widehat{\mathbf{G}}^{\text{OLS}}$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

LARS



Generaliseringer af lasso estimatoren Naiv elastisk net



Selvom lasso har vist succes i mange tilfælde, har den også nogle begrænsninger:

- ▶ Hvis p > n, da udvælger lasso højst n variable.
- ► Hvis der eksisterer en gruppe af variable med høj parvis korrelation, da vil lasso blot udvælge én variabel fra denne gruppe og denne variabel udvælges tilfældigt.

Naiv elastisk net løser optimeringsproblemet

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{naivEN}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p}{\text{min}} \left\{ \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta} \|_2^2 + \lambda \left[\frac{1}{2} (1 - \alpha) \| \boldsymbol{\beta} \|_2^2 + \alpha \| \boldsymbol{\beta} \|_1 \right] \right\}.$$

- ▶ Hvis $\alpha = 0$, da reduceres strafleddet til den kvadrerede ℓ_2 -norm svarende til strafleddet for ridge regression.
- ▶ Hyis $\alpha = 1$ reduceres strafleddet til ℓ_1 -normen svarende til strafleddet for lasso.

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

generaliseringer



Generaliseringer af lasso estimatoren



Antag variablerne er opdelt i J grupper, hvor p_j er antallet af variable i gruppe j. Group lasso løser følgende optimeringsproblem

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{j}^{\text{group lasso}} = \underset{\boldsymbol{\theta}_{1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{J}}{\min} \left\{ \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \sum_{j=1}^{J} \mathbf{Z}_{j} \boldsymbol{\theta}_{j} \|_{2}^{2} + \lambda \sum_{j=1}^{J} \sqrt{p_{j}} \| \boldsymbol{\theta}_{j} \|_{2} \right\}.$$

- ► Alle indgange i $\widehat{\theta}_j^{\text{group lasso}}$ vil være lig nul eller ikke-nul afhængig af λ .
- ▶ Når $p_j = 1$, da har vi, at $\|\theta_j\|_2 = |\theta_j|$, således at alle grupper består af én prædiktor, dermed reduceres optimeringsproblemet til standard lasso.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske varjable

MAOK9 5.2018

 Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

BIC

Krydsvalidering



Generaliseringer af lasso estimatoren



Ideen bag adaptive lasso er at tildele koefficienterne individuelle straffe, istedet for at alle koefficienter straffes ligeligt.

Antag $\widetilde{\beta}$ er rod-n konsistent til β^* . Vælg $\gamma>0$, da er adaptive lasso estimaterne givet ved

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathsf{AL}} = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} \left\{ \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta} \|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \frac{|\beta_j|}{|\widetilde{\beta}_j|^{\gamma}} \right\}.$$

 $\blacktriangleright \ \ \text{opfylder orakelegenskaberne, hvilket betyder, at variabeludv} \\ \text{ælgelsen er konsistent.}$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske varjable

MAOK9 5.2018

5 Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

varians testen

G tester

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

oordinate descent

Krydsvalidering

LARS

Krydsvalidering



- ► Anvendes for lasso løst med LARS algoritmen
- ▶ Vi betragter

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{\beta} + \mathbf{\epsilon}, \, \mathbf{\epsilon} \sim N\left(0, \, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right),$$

hvor \mathbf{y} er en $n \times 1$ vektor med responsvariablen, \mathbf{X} er en $n \times p$ matrix med prædiktorer og β er $p \times 1$ vektor.

- ▶ Vi antager, at *X* er i general position
 - ► Løsningen til lasso problemet bliver entydigt
- ▶ Vi ønsker, at teste om prædiktoren j, som tilføjes i A_k i trin k, er signifikant

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer



Kovarians testen

.

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

Krydsvalidering

LARS

Krydsvalidering

ac or sumpte



► Teststørrelsen:

Kovarians testen

$$T_k^{\mathsf{cov}} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\left\langle \mathbf{y}, \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathsf{lasso}} \left(\lambda_{k+1} \right) \right\rangle - \left\langle \mathbf{y}, \mathbf{X}_{\mathcal{A}_{k-1}} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\mathsf{lasso}} \left(\lambda_{k+1} \right) \right\rangle \right)$$

- ▶ Lad A_{k-1} være den aktive mængde i trin k-1 inden den j'te prædiktorer tilføjes
- $\blacktriangleright \ \ \mathsf{Lad} \ \widetilde{\beta}^{\mathsf{lasso}}_{\mathcal{A}_{k-1}}(\lambda_{k+1}) \ \mathsf{være} \ \mathsf{løsningen} \ \mathsf{i} \ \lambda_{k+1} \ \mathsf{ved} \ \mathsf{at} \ \mathsf{kun} \ \mathsf{anvende} \ \mathsf{prædiktorerne} \ \mathsf{i} \ \mathcal{A}_{k-1}, \ \mathsf{dvs}$

$$\widetilde{\beta}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\text{lasso}}\left(\lambda_{k+1}\right) = \underset{\beta_{\mathcal{A}_{k-1}} \in \mathbb{R}^{\left|\mathcal{A}_{k-1}\right|}}{\text{arg min}} \left\{ \left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\textit{X}}_{\mathcal{A}_{k-1}} \beta_{\mathcal{A}_{k-1}} \right\|_{2}^{2} + \lambda_{k+1} \left\| \beta_{\mathcal{A}_{k-1}} \right\|_{1} \right\}$$

▶ Lad $\widehat{\beta}^{lasso}(\lambda_{k+1})$ betegne løsningen i λ_{k+1} ud fra prædiktorerne i $\mathcal{A}_{k-1} \cup \{j\}$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

3 testen

ita

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate desce

LARS

Krydsvalidering



▶ Under \mathcal{H}_0 : $\mathcal{A}_{k-1} \supseteq \text{supp}(\beta^*)$, har teststørrelsen en asymptotisk standard eksponentiel fordeling

$$T_k^{\text{cov}} \stackrel{d}{\to} Exp(1)$$

- ► Tilfælde hvor vi har ukendt σ^2 og n > p:
 - ▶ Teststørrelsen

$$\begin{split} F_k &= \frac{T_k}{\widehat{\sigma}^2/\sigma^2} \\ &= \frac{1}{\widehat{\sigma}^2} \left(\left\langle \mathbf{y}, \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{lasso}} \left(\lambda_{k+1} \right) \right\rangle - \left\langle \mathbf{y}, \mathbf{X}_{\mathcal{A}_{k-1}} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{\text{lasso}}_{\mathcal{A}_{k-1}} \left(\lambda_{k+1} \right) \right\rangle \right) \overset{d}{\to} F_{2,n-p}, \end{split}$$

hvor
$$\widehat{\sigma}^2 = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS} \right\|_2^2 / (n - p)$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer



Kovarians testen

ta

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

LARS

Krydsvalidering



Polyede lemma



 \blacktriangleright Variableudvælgelse af LARS og lasso med en fast værdi af λ kan karakteriseres som et polvede

► Giver p-værdier og konfidensintervaller efter et polyede variableudvælgelse

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

TG testen

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer



Polyeder lemma



► Vi antager at

$$y = \mu + \varepsilon$$
,

hvor $\mathbf{y} \sim N(\mu, \Sigma)$, μ er en ukendt $n \times 1$ vektor, og Σ er en kendt $n \times n$ matrix.

▶ Betragt polyeder

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{y} : \Gamma \mathbf{y} \geqslant \mathbf{u} \},$$

hvor Γ er en $m \times n$ matrix, \boldsymbol{u} er en fast $m \times 1$ vektor.

- ▶ Vi ønsker, at lave inferens om $η^T μ$ givet y ∈ P, hvor η er en givet n × 1 vektor
 - $\blacktriangleright \ \mathcal{H}_0: \boldsymbol{\eta}^{\scriptscriptstyle T}\boldsymbol{\mu} = 0, \text{givet } \boldsymbol{y} \in \mathcal{P}$
 - Ved et specifikt valg af η får vi at

$$\eta^T \mu = \beta_k$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

TG testen

TG testen

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

....

Krydsvalide

-



Polyeder lemma



Polyeder lemma

For ethvert Σ og η , hvor $\eta^T \Sigma \eta \neq 0$, gælder der at

$$\Gamma \textbf{\textit{y}} \geqslant \textbf{\textit{u}} \Leftrightarrow \mathcal{V}^{-}\left(\textbf{\textit{y}}\right) \leqslant \boldsymbol{\eta}^{T} \textbf{\textit{y}} \leqslant \mathcal{V}^{+}\left(\textbf{\textit{y}}\right), \quad \mathcal{V}^{0}\left(\textbf{\textit{y}}\right) \leqslant \textbf{\textit{0}},$$

hvor

$$\mathcal{V}^{-}(\mathbf{y}) = \max_{j:\rho_{j}>0} \frac{u_{j} - (\Gamma \mathbf{y})_{j} + \rho_{j} \mathbf{\eta}^{T} \mathbf{y}}{\rho_{j}}$$

$$\mathcal{V}^{+}(\mathbf{y}) = \min_{j:\rho_{j}<0} \frac{u_{j} - (\Gamma \mathbf{y})_{j} + \rho_{j} \mathbf{\eta}^{T} \mathbf{y}}{\rho_{j}}$$

$$\mathcal{V}^{0}(\mathbf{y}) = \max_{j:\rho_{j}=0} u_{j} - (\Gamma \mathbf{y})_{j},$$

hvor $\rho = \frac{\Gamma \Sigma \eta}{\eta^{7} \Sigma \eta}$. Yderligere er $\eta^{7} y$ og $\left(\mathcal{V}^{-} \left(y \right), \mathcal{V}^{+} \left(y \right) \mathcal{V}^{0} \left(y \right) \right)$ uafhængige.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

tatistisk inferens

Kovarians testen

lata

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer
Coordinate descent

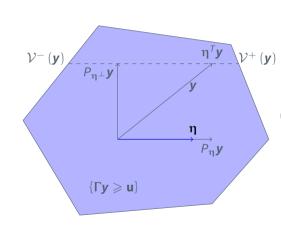
BIC

LARS



PARADONG UNIVERSITA

- ► Illustrationen er for p = 2, og $\Sigma = I_n$
- $> y = P_{\eta} y + P_{\eta^{\perp}} y$
- ► $P_{η}y = \frac{ηη^{T}y}{||η||_{2}^{2}}$ er projektionen af y på η



Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

formulana kankan

12 TG testen

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Krydsvalidering BIC

LARS

Krydsvalidering



► Af polyede lemmaet kan fordeling af enhver lineær funktion $\eta^T y$ givet $\Gamma y \geqslant u$ skrives som en følgende betinget fordeling

$$\eta^{T} y \mid \mathcal{V}^{-}(y) \leqslant \eta^{T} y \leqslant \mathcal{V}^{+}(y)$$
.

Da $\eta^T y$ er normalfordeling, er overstående trunkeret normalfordelt.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5,2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Covarians testen

TG testen

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

rydsvalidering

LARS

Krydsvalidering





Lemma

Polyeder lemma

Lad $\Phi(x)$ betegne fordelingsfunktionen af en standard normalfordeling, da er fordelingsfunktionen af en trunkeret normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og varians σ^2 indenfor intervallet [a, b] givet ved

$$F_{\mu,\sigma^2}^{[a,b]}(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Hvis $\eta^T \Sigma \eta \neq 0$, da er

$$F_{\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}^{\left[\mathcal{V}^-,\mathcal{V}^+\right]}\left(\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{y}\right)\,\left|\,\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{u}\sim\textit{Unif}(0,1)\right.$$

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer



Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer



Aalborg universitet

Statistisk inferens Polyeder lemma



▶ Overstående lemma anvendes til at lave betinget inferens af enhver lineær funktion $\eta^T y$. Vi kan udregne p-værdier for nulhypotesen $\mathcal{H}_0: \eta^T \mu = 0$ og tilhørende betingede konfidensintervaller

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5,2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen



Data

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

ΔRS

Krydsvalideri



Prodong university

TG testen

- ► Antager at **X** er i general position
- ▶ Vi laver inferens om $\eta^T \mu \mid \Gamma y \geqslant 0$

$$\mathcal{H}_0: \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{imod} \quad \mathcal{H}_1: \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} \neq 0$$

► Teststørrelsen er givet ved

$$T_k^{TG} = 2 \min \left\{ T_k^{tg}, 1 - T_k^{tg} \right\}$$

og er standard uniform fordelt, hvor

$$T_k^{tg} = 1 - F_{0,\sigma^2 \parallel \boldsymbol{\eta} \parallel_2^2}^{[\mathcal{V}^-,\mathcal{V}^+]} \left(\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{y} \right)$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen



Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

oordinate descent

ADC

Krydsvalideri



Data



- ▶ Datasæt fra FRED
 - ► 128 variable
 - ► 1. januar 1959 1. november 2017 (707 observationer)
 - ► Opdelt i 8 grupper:
 - Output og indkomst ■
 - Arbejdsmarked ■
 - 3. Bolig
 - Forbrug, ordrer og varebeholdninger
- ► Transformerede datasæt
 - ► 123 variable
 - ► 1. januar 1960 1. juli 2017 (691 observationer)
 - ► Træningsmængde: 1. januar 1960 1. december 2005 (552 observationer)

5. Penge og kredit

8 Aktiemarked

7. Priser

6. Renter og valutakurser

- ► Testmængde: 1. januar 2006 1. juli 2017 (139 observationer)
- ► Vi centrerer responsvariablen og standardiserer prædiktorerne.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

tatistisk inferens

Kovarians tester

Data

Benchmark modellen Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

Grydsvalidering BIC

LARS

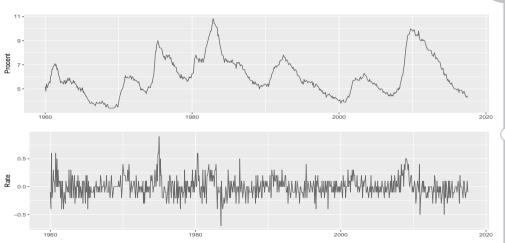
Out-of-samr

Out-of-sample



Aalborg universitet





Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens Kovarians testen

B Data

- Dutu

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descen

Krydsvalidering

ARS

Krydsvalidering

Figur: Arbejdsløshedsraten og 1. differensen af arbejdsløshedsraten fra 1. januar 1960 til 1. juli 2017.



Benchmark modellen

Den autoregressive model



▶ Ordenen bestemmes ud fra BIC, hvor p = 1, ..., 12.

| $\widehat{\varphi}_1$ | -0.0162 |
|-----------------------|-----------|
| $\widehat{\Phi}_2$ | 0.1992*** |
| $\widehat{\Phi}_3$ | 0.1873*** |
| $\widehat{\Phi}_4$ | 0.1686*** |
| BIC | -3.5651 |
| R_{adj}^2 | 12.31% |
| LogLik | 211.8617 |
| | |

Tabel: Estimations resultater for en AR (4), BIC, justeret R² og log-likehood. Det opløftede symbol betegner signifikans ved henholdsvis *** 0.1%, **1%, *5% og †10%.

- ▶ afviser normalitet samt at de første 10 autokorrelationer er nul for de standardiserede residualer.
- \blacktriangleright MAE = 0.1312 og MSE = 0.0272.

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

LARS

Aalborg universitet



- ► Antallet af faktorer bestemmes ud fra følgende informationskriterier, hvor $k = 1, \dots, 20$:
 - ► IC₁ (k) = ln V (k, $\hat{\mathbf{F}}$) + $k \frac{p+T}{pT} \ln \left(\frac{pT}{p+T} \right)$, ► IC₂ (k) = ln V (k, $\hat{\mathbf{F}}$) + $k \frac{p+T}{pT} \ln \left(\min\{p, T\} \right)$,
 - $\blacktriangleright \mathsf{IC}_3(k) = \mathsf{In}\,V\left(k,\widehat{\mathbf{F}}\right) + k\frac{\mathsf{In}\left(\mathsf{min}\left\{p,T\right\}\right)}{\mathsf{min}\left\{p,T\right\}},$

hvor
$$0 < k < 20$$
 og $V\left(k, \widehat{\mathbf{F}}\right) = (pT)^{-1} \sum_{j=1}^{p} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{jt} - \lambda_{j} \widehat{\mathbf{F}}_{t}\right)^{2}$.

- ► Lad $\widehat{\mathbf{Z}} = (\widehat{\mathbf{F}}^T \mathbf{\omega}^T)^T$ være en $(k+m) \times T$ matrix, hvor $\widehat{\mathbf{F}}$ er en $T \times k$ matrix af estimerede faktorer og ω er en $T \times m$ matrix af laggede værdier af arbejdsløshedsraten. Lad m=4, da fjernes de første 4 rækker i $\hat{\mathbf{Z}}$.
- $\blacktriangleright \ \ \text{Parametrene} \ \widehat{\beta} = \left(\widehat{\beta}_{\textbf{F}}^{\, \intercal} \ \widehat{\beta}_{\textbf{G}}^{\, \intercal}\right)^{\! \intercal} \text{ estimeres med OLS}.$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer

Benchmark modellen

generaliseringer



Benchmark modellen

Faktor modellen



| | | Faktor mo | del (IC ₁) | | | |
|---------------------------------|-------|-----------------|------------------------|----------|--|--|
| k | Værdi | IC ₁ | R _{adj} | LogLik | | |
| | 6 | -0.3519 | 15.79% | 224.3621 | | |
| Faktor model (IC ₂) | | | | | | |
| k | Værdi | IC ₂ | R _{adj} | LogLik | | |
| | 11 | -0.5314 | 16.85% | 230.3414 | | |
| | | Faktor mo | del (IC ₃) | | | |
| k | Værdi | IC ₃ | R _{adj} | LogLik | | |
| | 20 | -0.6931 | 17.87% | 238.3753 | | |

Tabel: Antal faktorer, værdien af informationskriteriet, justeret R^2 samt log-likehood for faktormodellerne valgt ud fra IC_1 , IC_2 og IC_3 , som betegnes faktor model (IC_1), faktor model (IC_2) og faktor model (IC_3).

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

atistisk inferens

Kovarians testen

ata

Benchmark modellen

Benchmark modeller

Lasso og dens generaliseringer

oordinate descent

LARS

Krydsvalidering





- ► Faktor model (IC₁): afviser normalitet, men kan ikke afvise at de første 10 autokorrelationer er nul
- ► Faktor model (IC₂): kan ikke afvise normalitet samt at de første 10 autokorrelationer er nul

| | Faktor model (IC ₁) | Faktor model (IC ₂) |
|-----|---------------------------------|---------------------------------|
| MAE | 0.1190 | 0.1111 |
| MSE | 0.0221 | 0.0187 |

Tabel: MAE og MSE for faktor modellerne valgt ud fra IC_1 og IC_2 .

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5,2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

atistisk inferens

Ovarians testen

) oto

2 Banchmark madallan

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

IIC.

LARS

.



Lasso og dens generaliseringer



- ► Datasættet med 4 laggede værdier
 - ► 126 variabler
 - ► Træningsmængde: 1. maj 1960 1. december 2005 (548 observationer)
 - ► Testmængde: 1. januar 2006 1. juli 2017 (139 observationer)
- Lasso problemet og dens generaliseringer kan løses med coordinate descent algoritmen og LARS algoritmen
 - ► Valg af tuning parameter
 - Krydsvalidering
 - ► BIC

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

tatistisk inferen:

atistisk inferen

Data

Benchmark modellen

Lassa og dans

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

Krydsvalidering

LARS

Krydsvalider

Out of comple





▶ Coordinate descent

Algoritmen opdaterer fra β_t til β_{t+1} ved at vælge en koefficient, som opdateres, og da udføres en univariat minimering. Koefficienten k opdateres i iteration t, da er opdatering givet ved

$$\beta_k^{t+1} = \underset{\beta_k}{\operatorname{arg\,min}} f\left(\beta_1^t, \dots, \beta_{k-1}^t, \beta_k, \beta_{k+1}^t, \dots, \beta_p^t\right),\,$$

hvor
$$\beta_i^{t+1} = \beta_i^t$$
 for $j \neq k$

- ► Lasso, ridge regression, elastik net og adaptive lasso
- Dette kan generaliseres til block coordinate descent, hvor prædiktorerne er opdelt i ikke-overlappende blocks, og da udføres en minimering over en enkelt block for hvert koordinat
 - Group lasso

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

LADC

Krydsvalidering

. . .



Coordinate descent Krydsvalidering



- Fitter en model for hver λ
 - \triangleright λ_{min} : mindste gennemsnitlige krydsvalideringsfejl
 - \triangleright λ_{1sd} : største værdi af λ , således at fejlen stadig er inden for en standard afvigelse af minimum
- ► Elastisk net og adaptive lasso har to tuning parametre
 - ▶ Elastisk net: $\alpha \in [0,1]$
 - ▶ Elastisk net (CV): $\alpha = 1$
 - ▶ Adaptive lasso: $\gamma \in \{0.5, 1, 2\}$
 - Adaptive lasso med OLS vægte (CV): $\gamma = 0.5$
 - Adaptive lasso med lasso vægte (CV): $\gamma = 0.5$

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Krydsvalidering



Coordinate descent Krydsvalidering



| | | Lass | o (CV) | | | | | Ridge regr | ession | (CV) | |
|------------------------|----------------|------------|---------|------------------|----------|------------------------|----------------|-------------|--------|------------------|----------|
| | $log(\lambda)$ | MSE | р | R_{adj}^2 | LogLik | | $log(\lambda)$ | MSE | р | R _{adi} | LogLik |
| λ_{min} | -6.6361 | 0.0019 | 28 | 94.52% | 983.956 | λ_{min} | -4.3800 | 0.0045 | 126 | 93.96% | 1014.633 |
| λ_{1sd} | -5.7057 | 0.0020 | 14 | 94.46% | 973.765 | λ_{1sd} | -4.1939 | 0.0047 | 126 | 93.96 % | 1014.633 |
| | | Group l | asso ((| CV) | | | Adaj | o. lasso m. | OLS va | ægte (CV) | |
| | log (\lambda) | MSE | р | R _{adj} | LogLik | | log (\lambda) | MSE | р | R _{adi} | LogLik |
| λ_{min} | -8.2644 | 0.0022 | 126 | 93.96% | 1014.633 | λ_{min} | -5.1333 | 0.0018 | 5 | 94.44% | 968.274 |
| λ_{1sd} | -7.6365 | 0.0023 | 119 | 94.03% | 1013.333 | λ_{1sd} | -3.4586 | 0.0019 | 2 | 94.28% | 959.0402 |
| | Adap | . lasso m. | lassov | vægte (CV) | | | | | | | |
| | $log(\lambda)$ | MSE | р | R_{adj}^2 | LogLik | | | | | | |
| λ_{min} | -6.3897 | 0.0017 | 6 | 94.48% | 970.5874 | | | | | | |
| λ_{1sd} | -3.5057 | 0.0018 | 2 | 94.28% | 959.0402 | | | | | | |

Tabel: Logaritmen af λ_{min} og λ_{1sd} , gennemsnitlig krydsvalideringsfejl, som er målt i MSE, antallet af parametre, justeret R² og log-likelihood for lasso og dens generaliseringer. De valgte tuning parametre er markeret med tykt.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

varians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descen

BIC

LARS

_ . .



Coordinate descent Krydsvalidering



- ► Group lasso (CV)
 - ► Ikke valgte variable tilhører alle gruppe 5 (penge og kredit)
- ► Adaptive lasso med OLS vægte (CV) og adaptive lasso med lasso vægte (CV)
 - ► Vælger variablerne CLF16OV: Civilarbejdsstyrke, CE16OV: Civilbeskæftigelse
 - ► Konsistent i variableudvælgelse

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens

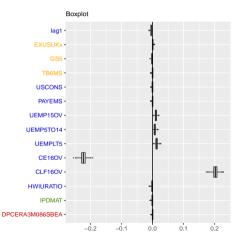
generaliseringer Krydsvalidering

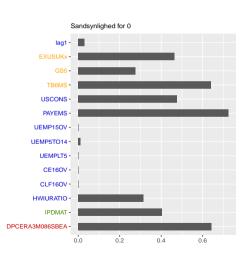


Coordinate descent Krydsvalidering

Prison G UNIVERSIT

▶ 1000 bootstrap relisationer af $\widehat{\beta}$ (λ_{1sd})





Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

Date

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descen

Krydsvalidering

ARS

Krydsvalide

Out-of-sample

46

Aalborg universitet

Coordinate descent Krydsvalidering



► Polyede variableudvælgelse

| Prædiktor | Koefficient | Z-score | <i>p</i> -værdi | Konfidensinterval | $[\mathcal{V}^-,\mathcal{V}^+]$ |
|-----------------|-------------|---------|-----------------|-------------------|---------------------------------|
| DPCERA3M086SBEA | -0.002 | -1.362 | 0.671 | [-0.009, 0.027] | [0.002, 0.004] |
| IPDMAT | -0.003 | -1.113 | 0.265 | [-0.012, 0.006] | [0.000, 0.004] |
| HWIURATIO | 0.002 | 0.717 | 0.199 | [-0.003, 0.014] | [-0.002, 0.004] |
| CLF16OV | 0.243 | 36.671 | 0 | [0.232, 0.259] | [0.203, 0.252] |
| CE16OV | -0.266 | -37.393 | 0 | [-0.280, -0.254] | [0.230, 0.278] |
| UEMPLT5 | 0.001 | 0.240 | 0.402 | [-0.005, 0.008] | [-0.011, 0.009] |
| UEMP5TO14 | 0.000 | -0.118 | 0.430 | [-0.006, 0.004] | [-0.010, 0.005] |
| UEMP15OV | 0.004 | 1.593 | 0.056 | [0.000, 0.009] | [-0.006, 0.013] |
| PAYEMS | 0.001 | 0.280 | 0.219 | [-0.007, 0.030] | [-0.002, 0.002] |
| USCONS | -0.002 | -0.883 | 0.566 | [-0.009, 0.016] | [0.001, 0.004] |
| TB6MS | -0.001 | -0.480 | 0.682 | [-0.009, 0.026] | [0.000, 0.004] |
| GS5 | -0.003 | -1.130 | 0.219 | [-0.025, 0.007] | [0.001, 0.004] |
| EXUSUKx | 0.003 | 1.307 | 0.870 | [-0.071, 0.003] | [0.002, 0.006] |
| lag 1 | -0.009 | -4.065 | 0.003 | [-0.013, -0.004] | [0.005, 0.015] |

Tabel: Koefficienter, *Z*-scores, *p*-værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for lasso₇₆ (CV). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $\lambda_{76} = \lambda_{1sd} \cdot 548 \approx 1.823$ med $\alpha = 0.1$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

tatistisk inferen:

5 testen

LO.

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate desce

RS

LARS Krudevalid





- Fitter en værdi for hver λ
 - \triangleright λ_{BIC} : mindste BIC
- ► Elastik net og adaptive lasso har to tuning parametre
 - ▶ Elastisk net: $\alpha \in [0,1]$
 - ► Elastisk net (BIC): $\alpha = 1$
 - Adaptive lasso: $\gamma \in \{0.5, 1, 2\}$
 - Adaptive lasso med OLS vægte (BIC): $\gamma = 2$
 - Adaptive lasso med lasso vægte (BIC): $\gamma = 0.5$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer





| | | Lasso | (BIC) | | | | | Ridge regre | ession | (BIC) | |
|-----------------|---|----------------|---------|----------------------------|-----------------------------------|-----|---|----------------|-----------------|----------------------------|--------------------|
| λ_{BIC} | log (λ) -6.2639 | BIC -6.1608 | р 17 | R _{adj} 94.46% | LogLik 974.9938 λ _ε | BIC | log (λ) -4.4730 | BIC -3.3230 | <i>p</i> 126 | R _{adj} 93.96% | LogLik 1014.633 |
| | | Group las | so (B | IC) | | | Ada | o. lasso m. (| OLS va | egte (BIC) | |
| λ_{BIC} | $\begin{array}{c} \log{(\lambda)} \\ -7.2876 \end{array}$ | BIC -5.0721 | р 99 | R _{adj} 94.17% | LogLik 1007.311 λ _ε | BIC | $\begin{array}{c} \log{(\lambda)} \\ -4.3308 \end{array}$ | BIC -6.3143 | р 2 | R _{adj} 94.28% | Loglik 959.0402 |
| | Adap. | lasso m. la | sso va | ægte (BIC) | | | | | | | |
| λ_{BIC} | log (λ) -4.9440 | BIC 6.3191 | р 3 | R _{adj} 94.4% | LogLik 965.2423 | | | | | | |

Tabel: Logaritmen af λ_{BIC} , antallet af parametre, BIC, justerede R^2 og log-likelihood for lasso og dens generaliseringer.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

ovarians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

oi C

LARS

Out of comple





- ► Group lasso (CV)
 - ► Ikke valgte variable
 - ► 11 / 14 variable fra penge og kredit
 - ► 12 /20 variable fra priser
 - ► 3/30 variable fra arbejdsmarked
- ► Adaptive lasso med OLS vægte (CV)
 - ► Vælger variablerne CLF16OV: Civilarbejdsstyrke, CE16OV: Civilbeskæftigelse
 - Konsistent i variableudvælgelse
- ► Adaptive lasso med lasso vægte (CV)
 - Vælger variablerne CLF16OV: Civilarbejdsstyrke, CE16OV: Civilbeskæftigelse og lag1:Tidligere værdi af arbejdsløshedsrate
 - ► Konsistent i variableudvælgelse

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

tatistisk inferens

varians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

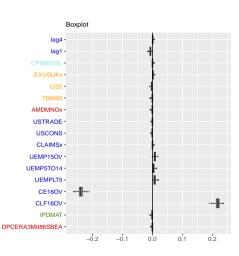
Krydsvaliderii

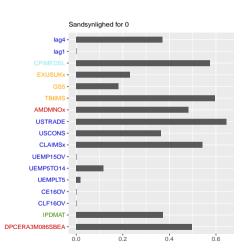
IARS

Krydsvalidering









Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistick informs

- Kanadana taatan

Benchmark modellen

enchinark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate desce

33 BIC

LARS

Krydsvalidering

or-sample



► Polyede variableudvælgelse

| Prædiktor | Koefficient | Z-score | p-værdi | Konfidensinterval | $\left[\mathcal{V}^{-}$, $\mathcal{V}^{+} ight]$ |
|-----------------|-------------|---------|---------|-------------------|---|
| DPCERA3M086SBEA | -0.002 | -0.960 | 0.093 | [-0.071, 0.003] | [0.001, 0.002] |
| IPDMAT | -0.002 | -0.680 | 0.159 | [-0.032, 0.005] | [-0.001, 0.002] |
| CLF16OV | 0.241 | 36.686 | 0 | [0.235, 0.350] | [0.200, 0.242] |
| CE160V | -0.264 | -37.339 | 0 | [-0.455, -0.260] | [0.142, 0.264] |
| UEMPLT5 | 0.000 | 0.027 | 0.777 | [-0.029, 0.005] | [-0.001, 0.013] |
| UEMP5TO14 | -0.001 | -0.266 | 0.599 | [-0.007, 0.014] | [-0.001, 0.004] |
| UEMP15OV | 0.004 | 1.299 | 0.249 | [-0.005, 0.008] | [0.001, 0.010] |
| CLAIMSx | 0.001 | 0.387 | 0.689 | [-0.030, 0.011] | [0.000, 0.002] |
| USCONS | -0.001 | -0.591 | 0.100 | [-0.088, 0.004] | [0.000, 0.001] |
| USTRADE | 0.000 | -0.118 | 0.988 | $[0.007, \infty)$ | [0.000, 0.006] |
| AMDMNOx | -0.002 | -0.813 | 0.641 | [-0.008, 0.020] | [0.001, 0.004] |
| TB6MS | -0.001 | -0.415 | 0.677 | [-0.008, 0.023] | [0.000, 0.005] |
| GS5 | -0.003 | -1.207 | 0.144 | [-0.032, 0.005] | [0.001, 0.004] |
| EXUSUKx | 0.003 | 1.449 | 0.303 | [-0.007, 0.012] | [0.002, 0.004] |
| | 0.002 | 0.855 | 0.865 | [-0.054, 0.003] | [0.001, 0.009] |
| lag 1 | -0.010 | -4.362 | 0.499 | [-0.011, 0.033] | [0.009, 0.021] |
| lag 4 | 0.002 | 1.106 | 0.311 | [-0.014, 0.028] | [0.001, 0.003] |

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p-værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for lasso $_{TG}$ (BIC). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $\lambda_{TG} = \lambda_{BIC} \cdot 548 \approx 1.0432$ med $\alpha = 0.1$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

LARS



LARS



- ► Fitter en model for hvert trin
 - ► LARS algoritmen foretager 127 trin
 - ► LARS algoritmen med lasso modifikationen udfører 192 trin
- ▶ Igen anvendes krydsvalidering og BIC til at estimere tuning parameteren, som for LARS algoritmen er fraktionen af ℓ_1 -normen $f = \frac{|\beta|}{\max |\beta|}$, hvor $f \in [0, 1]$.
 - ightharpoonup f = 0: ingen variabler tilføiet til den aktive mængde
 - ightharpoonup f = 1: alle variable inkluderet

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

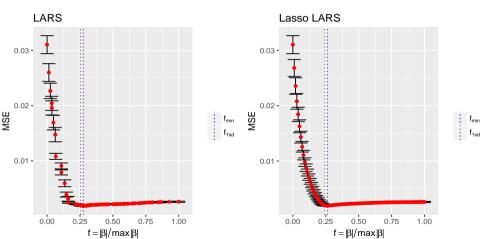
Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

LARS







Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

LARS

Krydsvalidering

Figur: 10-fold krydsvalideringsfeil som funktion af fraktionen af ℓ_1 -normen LARS og lasso LARS.





| | LAR | S (CV |) | | | | Las | so LA | RS (CV) | |
|--------|-----|-------|--------|---------------------------------------|------------|--------|--------|-------|---------|----------|
| 0.2753 | | 27 | 94.43% | LogLik 974.8317 967.2669 | f_{\min} | 0.2626 | 0.0019 | 21 | 94.52% | 980.0982 |

Tabel: Værdien af f_{\min} og f_{1sd} , gennemsnitlig krydsvalideringsfejl, som er målt i MSE, antallet af parametre, justeret R^2 og log-likelihood for LARS og lasso LARS. De valgte tuning parametre er markeret med tykt.

► 22 trin udføres for lasso LARS (CV), hvor variablerne CUMFNS, MANEMP og GS1 tilføjes og fjernes igen og variablen TB6MS bliver tilføjet, fjernet og så tilføjet igen.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferen

Kovarians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

Coordinate descent

LARS

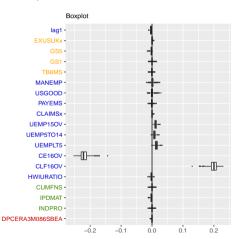
LARS

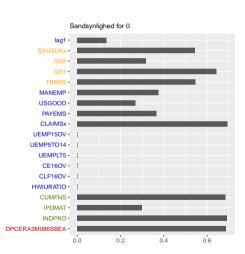
Krydsvalidering





Bootstrap resultater af LARS (CV)





Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate descent

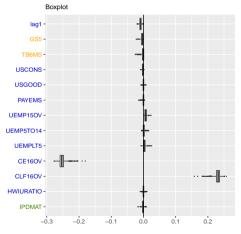
LARS

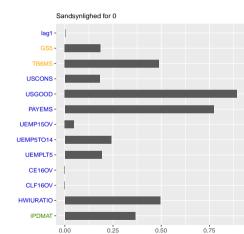
Krydsvalidering





Bootstrap resultater af lasso LARS (CV)





Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

TG testen

Data

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Coordinate des

LARS

LARS

Krydsvalidering





| Prædiktor | Cov test | <i>p</i> -værdi |
|-----------------|----------|-----------------|
| HWIURATIO | 864.6317 | 0 |
| UEMP15OV | 161.3770 | 0 |
| UEMPLT5 | 163.0670 | 0 |
| UEMP5TO14 | 122.3840 | 0 |
| CE16OV | 14.7416 | 0 |
| PAYEMS | 0.3356 | 0.7151 |
| USGOOD | 5.0872 | 0.0066 |
| CLF16OV | 221.9181 | 0 |
| IPDMAT | 0.0668 | 0.9354 |
| GS5 | 0.3856 | 0.6803 |
| lag1 | 0.8897 | 0.4115 |
| TB6MS | 0.0419 | 0.9590 |
| USCONS | 0.0132 | 0.9869 |

Tabel: Kovarians testen for lasso LARS (CV). Vi viser kun p-værdier for prædiktorer som medtages og bliver i modellen, dvs hvis en prædiktor medtages i et trin og senere forlader modellen, vises denne prædiktor ikke. p-værdier $< 2.2 \cdot 10^{-16}$ sættes lig 0.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

atistisk inferens

ovarians testen

ata

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Loordinate descent Krydsvalidering

LARS

Krydsvalidering





| Prædiktor | Koefficient | Z-score | <i>p</i> -værdi | Konfidensinterval | $\left[\mathcal{V}^{-},\mathcal{V}^{+} ight]$ |
|-----------------|-------------|---------|-----------------|---------------------|---|
| HWIURATIO | 0.002 | 0.694 | 0.160 | $(-\infty, \infty)$ | [0.002, 0.002] |
| UEMP15OV | 0.004 | 1.606 | 0.923 | $(-\infty, 0.032]$ | [0.004, 0.005] |
| UEMPLT5 | 0.001 | 0.149 | 0.064 | $[-0.018, \infty)$ | [0.000, 0.001] |
| MANEMP | 0.002 | 0.486 | 0.273 | $[-0.171, \infty)$ | [0.002, 0.003] |
| UEMP5TO14 | -0.001 | -0.242 | 0.077 | $(-\infty, 0.016]$ | [0.000, 0.001] |
| CE16OV | -0.267 | -37.446 | 0.130 | $(-\infty, 0.532]$ | [0.267, 0.267] |
| PAYEMS | 0.000 | 0.006 | 0.563 | $(-\infty, \infty)$ | [0.000, 0.000] |
| USGOOD | -0.003 | -0.498 | 0.638 | $(-\infty, \infty)$ | [0.003, 0.003] |
| CUMFNS | 0.002 | 0.404 | 0.478 | $(-\infty, \infty)$ | [0.002, 0.002] |
| CLF16OV | 0.243 | 36.643 | 0.179 | $(-\infty, \infty)$ | [0.243, 0.243] |
| IPDMAT | -0.006 | -1.626 | 0.874 | $[-0.125, \infty)$ | [0.006, 0.006] |
| TB6MS | -0.005 | -0.715 | 0.569 | $(-\infty, \infty)$ | [0.005, 0.006] |
| INDPRO | 0.003 | 0.513 | 0.328 | $(-\infty, \infty)$ | [0.003, 0.003] |
| GS1 | 0.006 | 0.577 | 0.473 | $(-\infty, \infty)$ | [0.006, 0.006] |
| GS5 | -0.005 | -1.146 | 0.037 | $(-\infty, -0.025]$ | [0.005, 0.005] |
| lag1 | -0.009 | -3.949 | 0.910 | $(-\infty, \infty)$ | [0.009, 0.009] |
| DPCERA3M086SBEA | -0.003 | -1.436 | 0.233 | $(-\infty, \infty)$ | [0.003, 0.003] |
| EXUSUKx | 0.003 | 1.383 | 0.964 | $(-\infty, -0.053]$ | [0.003, 0.003] |
| CLAIMSx | 0.002 | 0.813 | 0.226 | $(-\infty, \infty)$ | [0.002, 0.002] |

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p-værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for LARS_{TG} (CV). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $f_{1sd} = 0.2542$ med $\alpha = 0.1$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

LARS

Krydsvalidering



Oversigt over in-sample resultater



| Inkluderingsrate | Variable | Beskrivelse |
|------------------|-----------------|--|
| 100% | CLF16OV | Civilarbejdsstyrke |
| 100% | CE16OV | Civilbeskæftigelse |
| 83.33% | lag 1 | Den tidligere værdi af arbejdsløshedsrater |
| 77.78% | IPDMAT | Holdbart materiale |
| 77.78% | UEMPLT5 | Civile arbejdsløse - mindre end 5 uger |
| 77.78% | UEMP5TO14 | Civile arbejdsløse i 5 - 14 uger |
| 77.78% | UEMP150V | Civile arbejdsløse i 15 - 26 uger |
| 77.78% | TB6MS | 6-måneders statsskat |
| 77.78% | GS5 | 5-årig statsobligationsrente |

Tabel: Inkluderingsraten af de 9 hyppigst valgte variable for de ialt 18 modeller samt beskrivelse af variablerne.

- $ightharpoonup R_{\rm adi}^2$ er mindst for ridge regression modellerne og størst for lasso modellerne med undtagelse af lasso LARS (CV)
- ► For lasso problemet vælger lasso (CV) 14 variable, lasso LARS (CV) 13 variable mens lasso (BIC) og lasso LARS (BIC) vælger 17 variable, dvs antallet af variable er ikke specielt påvirket af hvilken optimeringsalgoritme som anvendes.

Inferens i lasso modellen med anyendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer

Benchmark modellen

generaliseringer

Krydsvalidering



Aalborg universitet

Out-of-sample



| | MAE | R^{MAE} | MSE | R^{MSE} |
|----------------------------------|--------|-----------|--------|-----------|
| Benchmark model | 0.1111 | 1 | 0.0187 | 1 |
| AR(4) | 0.1312 | 1.1811 | 0.0272 | 1.454 |
| Faktor model (IC ₁) | 0.119 | 1.0717 | 0.0221 | 1.1798 |
| Lasso (CV) | 0.032 | 0.2877 | 0.0016 | 0.0876 |
| Lasso (BIC) | 0.0308 | 0.277 | 0.0015 | 0.0795 |
| Ridge regression (CV) | 0.0582 | 0.5239 | 0.0052 | 0.28 |
| Ridge regression (BIC) | 0.0573 | 0.5155 | 0.0051 | 0.2706 |
| Group lasso (CV) | 0.0352 | 0.3168 | 0.0019 | 0.1042 |
| Group lasso (BIC) | 0.0382 | 0.3437 | 0.0022 | 0.1202 |
| Adap. lasso m. OLS vægte (CV) | 0.0304 | 0.2733 | 0.0014 | 0.0729 |
| Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) | 0.0310 | 0.2787 | 0.0014 | 0.0743 |
| Adap. lasso m. lasso vægte (CV) | 0.0298 | 0.2684 | 0.0013 | 0.0716 |
| Adap. lasso m. lasso vægte (BIC) | 0.0304 | 0.274 | 0.0014 | 0.0729 |
| $Lasso_{TG}$ (CV) | 0.0303 | 0.2724 | 0.0014 | 0.0744 |
| $Lasso_{TG}$ (BIC) | 0.031 | 0.279 | 0.0014 | 0.0767 |
| LARS (CV) | 0.0307 | 0.2761 | 0.0015 | 0.0802 |
| LARS (BIC) | 0.0305 | 0.2747 | 0.0015 | 0.0793 |
| Lasso LARS (CV) | 0.0352 | 0.317 | 0.002 | 0.1089 |
| Lasso LARS (BIC) | 0.0322 | 0.2901 | 0.0017 | 0.0903 |
| $LARS_{TG}$ (CV) | 0.0300 | 0.2701 | 0.0014 | 0.0745 |
| $LARS_{TG}$ (BIC) | 0.0301 | 0.2708 | 0.0014 | 0.0750 |

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

ovarians testen

laka.

Benchmark modellen

ncnmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

oordinate descent

Crydsvalidering

LARS

Krydsvaliderin

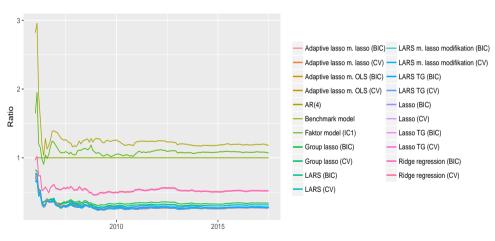
Out-of-sample

Tabel: Den gennemsnitlige absolutte og kvadrerede fejl samt gennemsnitlig tabs ratio mellem hver model og benchmark modellen.



Out-of-sample





Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

LARS

Out-of-sample





Figur: Rullende gennemsnitlig absolut tabs ratio.

Out-of-sample Diebold-Mariano testen



| | Absolutte fejl | Kvadrerede fej |
|----------------------------------|------------------------|------------------------|
| AR(4) | 0.0021 | 0.0032 |
| Faktor model (IC ₁) | 0.1692 | 0.1183 |
| Lasso (CV) | 0 | $2.933 \cdot 10^{-12}$ |
| Lasso (BIC) | 0 | $2.728 \cdot 10^{-12}$ |
| Ridge regression (CV) | $6.418 \cdot 10^{-13}$ | $3.551 \cdot 10^{-9}$ |
| Ridge regression (BIC) | $2.85 \cdot 10^{-13}$ | $2.507 \cdot 10^{-9}$ |
| Group lasso (CV) | 0 | $5.999 \cdot 10^{-12}$ |
| Group lasso (BIC) | 0 | $8.845 \cdot 10^{-12}$ |
| Adap. lasso m. OLS vægte (CV) | 0 | $2.797 \cdot 10^{-12}$ |
| Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) | 0 | $2.905 \cdot 10^{-12}$ |
| Adap. lasso m. lasso vægte (CV) | 0 | $2.676 \cdot 10^{-12}$ |
| Adap. lasso m. lasso vægte (BIC) | 0 | $2.814 \cdot 10^{-12}$ |
| Lasso _{TG} (CV) | 0 | 0 |
| Lasso _{TG} (BIC) | 0 | 0 |
| LARS (CV) | 0 | $2.64 \cdot 10^{-12}$ |
| LARS (BIC) | 0 | $2.615 \cdot 10^{-12}$ |
| Lasso LARS (CV) | 0 | $4.694 \cdot 10^{-12}$ |
| Lasso LARS (BIC) | 0 | $3.328 \cdot 10^{-12}$ |
| LARS _{TG} (CV) | 0 | 0 |
| LARS _{TG} (BIC) | 0 | 0 |

Tabel: p-værdier for Diebold-Mariano testen for hver model imod benchmark modellen. p-værdier $< 2.2 \cdot 10^{-16}$ sættes til 0.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Benchmark modellen

Lasso og dens generaliseringer

LARS

Out-of-sample



Aalborg universitet

Out-of-sample



| T_R | | T_{max} | |
|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ |
| Benchmark model | Benchmark model | Benchmark model | Benchmark model |
| AR(4) | AR(4) | AR(4) | AR(4) |
| Lasso (CV) | Lasso (CV) | Faktor (IC ₁) | Lasso (CV) |
| Lasso (BIC) | Lasso (BIC) | Lasso (CV) | Lasso (BIC) |
| Group lasso (CV) | Group lasso (CV) | Lasso (BIC) | Ridge regression (CV) |
| Group lasso (BIC) | Group lasso (BIC) | Ridge regression (CV) | Ridge regression (BIC) |
| Adap. lasso m. OLS vægte (CV) | Adap. lasso m. OLS vægte (CV) | Ridge regression (BIC) | Group lasso (CV) |
| Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) | Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) | Group lasso (CV) | Group lasso (BIC) |
| Adap. lasso m. lasso vægte (CV) | Adap. lasso m. lasso vægte (CV) | Group lasso (BIC) | Adap. lasso m. OLS vægte (CV) |
| Adap. lasso m. lasso vægte (BIC) | Adap. lasso m. lasso vægte (BIC) | Adap. lasso m. OLS vægte (CV) | Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) |
| Lasso _{TG} (BIC) | $Lasso_{TG}$ (BIC) | Adap. lasso m. OLS vægte (BIC) | Adap. lasso m. lasso vægte (CV |
| LARS (CV) | LARS (CV) | Adap. lasso m. lasso vægte (CV) | Adap. lasso m. lasso vægte (BIC |
| LARS (BIC) | LARS (BIC) | Adap. lasso m. lasso vægte (BIC) | $Lasso_{TG}$ (CV) |
| Lasso LARS (CV) | Lasso LARS (CV) | $Lasso_{TG}$ (CV) | $Lasso_{TG}$ (BIC) |
| Lasso LARS (BIC) Lasso LARS (BIC) | Lasso LARS (BIC) | Lasso $_{TG}$ (BIC) | LARS (CV) |
| | | LARS (CV) | LARS (BIC) |
| | | LARS (BIC) | Lasso LARS (CV) |
| | | Lasso LARS (CV) | Lasso LARS (BIC) |
| | | Lasso LARS (BIC) | $LARS_{TG}$ (CV) |
| | | $LARS_{TG}$ (CV) | $LARS_{TG}$ (BIC) |
| | | $LARS_{TG}$ (BIC) | |

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

dens generaliseringer

Statistisk inferens

Benchmark modellen

Lasso og dens

generaliseringer

Out-of-sample



Tabel: 80% og 90% model confidence set for arbejdsløshedsraten for absolutte og kvadrerede fejl.