

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

20. juni 2018

Louise N. Christensen
Trine Graff

Aalborg universitet



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Lasso estimatoren



The Least Absolute Shrinkage Selection Operator (lasso) løser optimeringsproblemet

$$\hat{\beta}^{\text{lasso}} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j \right)^2 \right\}, \text{ u.h.t. at } \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t,$$

som kan omskrives til et lagrange problem

$$\hat{\beta}^{\text{lasso}} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1 \right\}.$$

Ridge regression estimatoren findes ud fra

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\text{ridge}} &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_2^2 \right\} \\ &= \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I}_p \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

1

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

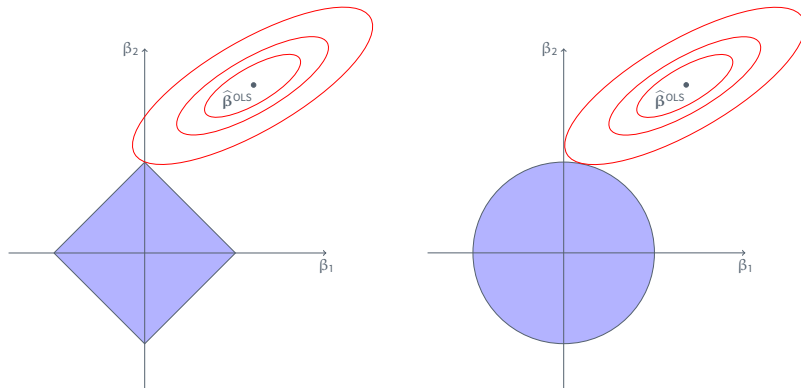
LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Lasso estimatoren



Figur: Estimations illustration for lasso (venstre) og ridge regression (højre). De blå arealer er betingelsesområderne $|\beta_1| + |\beta_2| \leq t$ og $\beta_1^2 + \beta_2^2 \leq t^2$, mens de røde ellipser er konturkurver for SSR. Konturkurverne har centrum i OLS estimatoren, $\hat{\beta}^{\text{OLS}}$.

Generaliseringer af lasso estimatoren

Naiv elastisk net



Selvom lasso har vist succes i mange tilfælde, har den også nogle begrænsninger:

- ▶ Hvis $p > n$, da udvælger lasso højst n variable.
- ▶ Hvis der eksisterer en gruppe af variable med høj parvis korrelation, da vil lasso blot udvælge én variabel fra denne gruppe og denne variabel udvælges tilfældigt.

Naiv elastisk net løser optimeringsproblemet

$$\hat{\beta}^{\text{naivEN}} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \lambda \left[\frac{1}{2}(1 - \alpha)\|\beta\|_2^2 + \alpha\|\beta\|_1 \right] \right\}.$$

- ▶ Hvis $\alpha = 0$, da reduceres strafleddet til den kvadrerede ℓ_2 -norm svarende til strafleddet for ridge regression.
- ▶ Hvis $\alpha = 1$ reduceres strafleddet til ℓ_1 -normen svarende til strafleddet for lasso.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

3

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Generaliseringer af lasso estimatoren

Group lasso



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Antag variablerne er opdelt i J grupper, hvor p_j er antallet af variable i gruppe j .
Group lasso løser følgende optimeringsproblem

$$\hat{\theta}_j^{\text{group lasso}} = \arg \min_{\theta_1, \dots, \theta_J} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \sum_{j=1}^J \mathbf{z}_j \theta_j\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^J \sqrt{p_j} \|\theta_j\|_2 \right\}.$$

- ▶ Alle indgange i $\hat{\theta}_j^{\text{group lasso}}$ vil være lig nul eller ikke-nul afhængig af λ .
- ▶ Når $p_j = 1$, da har vi, at $\|\theta_j\|_2 = |\theta_j|$, således at alle grupper består af én prædiktor, dermed reduceres optimeringsproblemet til standard lasso.

4

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

Generaliseringer af lasso estimatoren

Adaptive lasso



Antag $\tilde{\beta}$ er rod-n konsistent til β^* . Vælg $\gamma > 0$, da er adaptive lasso estimerne givet ved

$$\hat{\beta}^{\text{AL}} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \frac{|\beta_j|}{|\tilde{\beta}_j|^\gamma} \right\}.$$

- ▶ Lad $\mathcal{A}_n^{\text{AL}} = \{j : \hat{\beta}_j^{\text{AL}} \neq 0\}$ betegne den aktive mængde for adaptive lasso estimatoren.

Sætning

Antag $\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ og $\lambda_n n^{\frac{\gamma-1}{2}} \rightarrow \infty$, da opfylder adaptive lasso orakelegenskaberne:

- ▶ Konsistent variabeludvælgelsen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_n^{\text{AL}} = \mathcal{A}) = 1$.
- ▶ Asymptotisk normalitet: $\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{\mathcal{A}}^{\text{AL}} - \beta_{\mathcal{A}}^* \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{C}_{11}^{-1})$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

5

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Anvendes for lasso løst med LARS
- ▶ Vi betragter

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n),$$

hvor \mathbf{y} er en $n \times 1$ vektor med responsvariablen, \mathbf{X} er en $n \times p$ matrix med prædiktorer og $\boldsymbol{\beta}$ er $p \times 1$ vektor.

- ▶ Vi antager, at \mathbf{X} er i general position
- ▶ Vi ønsker, at teste om prædiktoren j , som tilføjes i \mathcal{A}_k i trin k , er signifikant

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

6

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- Teststørrelsen:

$$T_k^{\text{cov}} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1}) \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{X}_{\mathcal{A}_{k-1}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1}) \rangle \right)$$

- Lad \mathcal{A}_{k-1} være den aktive mængde i trin $k - 1$ inden den j 'te prædiktorer tilføjes
- Lad $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1})$ være løsningen i λ_{k+1} ved at kun anvende prædiktorerne i \mathcal{A}_{k-1} , dvs

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1}) = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_{\mathcal{A}_{k-1}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_{k-1}|}} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{X}_{\mathcal{A}_{k-1}} \boldsymbol{\beta}_{\mathcal{A}_{k-1}}\|_2^2 + \lambda_{k+1} \|\boldsymbol{\beta}_{\mathcal{A}_{k-1}}\|_1 \right\}$$

- Lad $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda_{k+1})$ betegne løsningen i λ_{k+1} ud fra prædiktorerne i $\mathcal{A}_{k-1} \cup \{j\}$

- ▶ Under $\mathcal{H}_0 : \mathcal{A}_{k-1} \supseteq \text{supp}(\beta^*)$, har teststørrelsen en asymptotisk standard eksponentiel fordeling

$$T_k^{\text{cov}} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$$

- ▶ Tilfælde hvor vi har ukendt σ^2 og $n > p$:
 - ▶ Teststørrelsen

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{T_k}{\widehat{\sigma}^2 / \sigma^2} \\ &= \frac{1}{\widehat{\sigma}^2} \left(\left\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \widehat{\beta}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1}) \right\rangle - \left\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_{\mathcal{A}_{k-1}} \tilde{\beta}_{\mathcal{A}_{k-1}}^{\text{lasso}}(\lambda_{k+1}) \right\rangle \right) \xrightarrow{d} F_{2, n-p}, \end{aligned}$$

$$\text{hvor } \widehat{\sigma}^2 = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \widehat{\beta}^{\text{OLS}} \right\|_2^2 / (n - p).$$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

8

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Variableudvælgelse af LARS og lasso kan karakteriseres som et polyede
- ▶ Giver p -værdier og konfidensintervaller efter et polyede variableudvælgelse

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

9

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Vi betragter en statisk model på formen

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

hvor $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu}$ er en ukendt $n \times 1$ vektor, og $\boldsymbol{\Sigma}$ er en kendt $n \times n$ matrix.

- ▶ Betragt polyedet

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{y} : \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{y} \geq \mathbf{u}\},$$

hvor $\boldsymbol{\Gamma}$ er en $m \times n$ matrix, \mathbf{u} er en fast $m \times 1$ vektor.

- ▶ Vi ønsker, at lave inferens om $\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu}$ givet $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, hvor $\boldsymbol{\eta}$ er en givet $n \times 1$ vektor
 - ▶ $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} = 0$, givet $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$
- ▶ Vi udleder en teststørrelse med egenskaben

$$T(\mathbf{y}, \mathcal{P}, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\mathbb{P}_0}{\sim} \text{Unif}(0, 1).$$

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

10

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Polyeder lemma



Polyeder lemma

For ethvert Σ og η , hvor $\eta^T \Sigma \eta \neq 0$, gælder der at

$$\Gamma \mathbf{y} \geq \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathcal{V}^-(\mathbf{y}) \leq \eta^T \mathbf{y} \leq \mathcal{V}^+(\mathbf{y}), \quad \mathcal{V}^0(\mathbf{y}) \leq 0,$$

hvor

$$\mathcal{V}^-(\mathbf{y}) = \max_{j: \rho_j > 0} \frac{u_j - (\Gamma \mathbf{y})_j + \rho_j \eta^T \mathbf{y}}{\rho_j}$$

$$\mathcal{V}^+(\mathbf{y}) = \min_{j: \rho_j < 0} \frac{u_j - (\Gamma \mathbf{y})_j + \rho_j \eta^T \mathbf{y}}{\rho_j}$$

$$\mathcal{V}^0(\mathbf{y}) = \max_{j: \rho_j = 0} u_j - (\Gamma \mathbf{y})_j,$$

hvor $\rho = \frac{\Gamma \Sigma \eta}{\eta^T \Sigma \eta}$. Yderligere er $\eta^T \mathbf{y}$ og $(\mathcal{V}^-(\mathbf{y}), \mathcal{V}^+(\mathbf{y}), \mathcal{V}^0(\mathbf{y}))$ uafhængige.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

11 TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

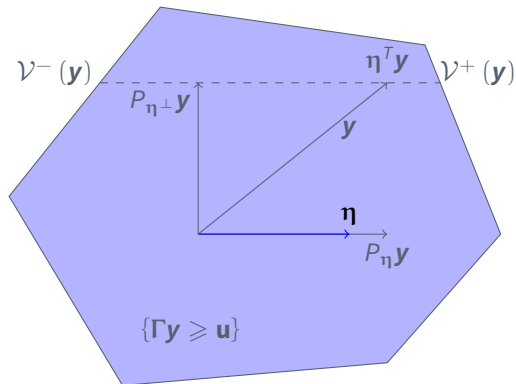
Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Polyeder lemma

- Illustrationen er for $p = 2$, og $\Sigma = \mathbf{I}_n$
- $\mathbf{y} = P_{\eta}\mathbf{y} + P_{\eta^{\perp}}\mathbf{y}$
- $P_{\eta}\mathbf{y} = \frac{\eta\eta^T\mathbf{y}}{\|\eta\|_2^2}$ er projektionen af \mathbf{y} på η



Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

12

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Polyeder lemma



Lad $\Phi(x)$ betegne fordelingsfunktionen af en standard normalfordeling, da er fordelingsfunktionen af en trunkeret normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og varians σ^2 indenfor intervallet $[a, b]$ givet ved

$$F_{\mu, \sigma^2}^{[a, b]}(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Hvis $\eta^T \Sigma \eta \neq 0$, da er $F_{\eta^T \mu, \eta^T \Sigma \eta}^{[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]}(\eta^T \mathbf{y})$ givet $\Gamma \mathbf{y} \geq \mathbf{u}$ en standard uniform fordeling, dvs

$$\mathbb{P}\left(F_{\eta^T \mu, \eta^T \Sigma \eta}^{[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]}(\eta^T \mathbf{y}) \leq \alpha \mid \Gamma \mathbf{y} \geq \mathbf{u}\right) = \alpha,$$

for ethvert $0 \leq \alpha \leq 1$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

13 TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Af polyeder lemmaet kan fordelingen af enhver lineær funktion $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y}$ givet $\Gamma \mathbf{y} \geq u$ skrives som en følgende betinget fordeling

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} \mid \mathcal{V}^-(\mathbf{y}) \leq \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} \leq \mathcal{V}^+(\mathbf{y}),$$

da $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y}$ er normalfordeling er overstående trunkeret normalfordelt.

- ▶ For enhver lineær funktion $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y}$ kan vi udregne p -værdier for nulhypotesen at $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} = 0$ og tilhørende betingede konfidensintervaller
- ▶ Vi antager \mathbf{X} er i general position

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

14

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

TG testen

- ▶ Vi har, at $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2)$ i intervallet $[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]$
- ▶ Vi har vil teste

$$\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{imod} \quad \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} \neq 0$$

- ▶ Teststørrelsen er givet ved

$$T_k^{TG} = 2 \min \left\{ T_k^{tg}, 1 - T_k^{tg} \right\} \rightarrow Unif(0, 1),$$

hvor

$$T_k^{tg} = 1 - F_{0, \sigma^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2}^{[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]}(\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y})$$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

15 TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

► Datasæt fra FRED

- 128 variable
- 1. januar 1959 - 1. november 2017 (707 observationer)
- Opdelt i 8 grupper:

1. Output og indkomst ■

2. Arbejdsmarked ■

3. Bolig ■

4. Forbrug, ordrer og
varebeholdninger ■

5. Penge og kredit ■

6. Renter og valutakurser ■

7. Priser ■

8. Aktiemarked ■

► Transformerede datasæt

- 123 variable
- 1. januar 1960 - 1. juli 2017 (691 observationer)
 - Træningsmængde: 1. januar 1960 - 1. december 2005 (552 observationer)
 - Testmængde: 1. januar 2006 - 1. juli 2017 (139 observationer)
- Vi centrerer responsvariablen og standardiserer prædiktorerne.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

16 Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

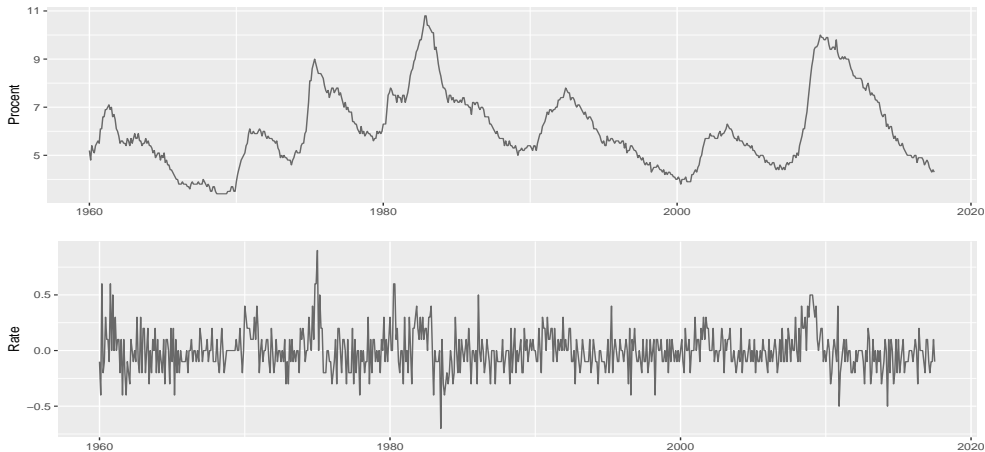
Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Data

Arbejdsløshedsraten



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktions af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

17 Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Figur: Arbejdsløshedsraten og 1. differensen af arbejdsløshedsraten fra 1. januar 1960 til 1. juli 2017.

Benchmark modellen

Den autoregressive model



- Ordenen bestemmes ud fra BIC, hvor $p = 1, \dots, 12$.

$\hat{\phi}_1$	-0.0162
$\hat{\phi}_2$	0.1992***
$\hat{\phi}_3$	0.1873***
$\hat{\phi}_4$	0.1686***
BIC	-3.5651
R^2_{adj}	12.31%
LogLik	211.8617

Tabel: Estimationsresultater for en AR (4), BIC, justeret R^2 og log-likelihood. Det opløftede symbol betegner signifikans ved henholdsvis ***0.1%, **1%, *5% og † 10%.

- afviser normalitet samt at de første 10 autokorrelationer er nul for de standardiserede residualer.
- $\text{MAE} = 0.1312$ og $\text{MSE} = 0.0272$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

18

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

- ▶ Antallet af faktorer bestemmes ud fra følgende informationskriterier, hvor $k = 1, \dots, 20$:

- ▶ $IC_1(k) = \ln V(k, \hat{\mathbf{F}}) + k \frac{p+T}{pT} \ln\left(\frac{pT}{p+T}\right),$
- ▶ $IC_2(k) = \ln V(k, \hat{\mathbf{F}}) + k \frac{p+T}{pT} \ln(\min\{p, T\}),$
- ▶ $IC_3(k) = \ln V(k, \hat{\mathbf{F}}) + k \frac{\ln(\min\{p, T\})}{\min\{p, T\}},$

hvor $0 < k < 20$ og $V(k, \hat{\mathbf{F}}) = (pT)^{-1} \sum_{j=1}^p \sum_{t=1}^T (x_{jt} - \lambda_j \hat{\mathbf{F}}_t)^2$.

- ▶ Lad $\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{\mathbf{F}}^T \boldsymbol{\omega}^T)^T$ være en $(k+m) \times T$ matrix, hvor $\hat{\mathbf{F}}$ er en $T \times k$ matrix af estimerede faktorer og $\boldsymbol{\omega}$ er en $T \times m$ matrix af laggede værdier af arbejdsløshedsraten. Lad $m = 4$, da fjernes de første 4 rækker i $\hat{\mathbf{Z}}$.
- ▶ Parametrene $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_F^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega^T)^T$ estimeres med OLS.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

19 Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Benchmark modellen

Faktor modellen



Faktor model (IC_1)				
	Værdi	IC_1	R^2_{adj}	LogLik
k	6	-0.3519	15.79%	224.3621

Faktor model (IC_2)				
	Værdi	IC_2	R^2_{adj}	LogLik
k	11	-0.5314	16.85%	230.3414

Faktor model (IC_3)				
	Værdi	IC_3	R^2_{adj}	LogLik
k	20	-0.6931	17.87%	238.3753

Tabel: Antal faktorer, værdien af informationskriteriet, justeret R^2 samt log-likelihood for faktormodellerne valgt ud fra IC_1 , IC_2 og IC_3 , som betegnes faktor model (IC_1), faktor model (IC_2) og faktor model (IC_3).

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

20 Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Faktor model (IC_1): afviser normalitet, men kan ikke afvise at de første 10 autokorrelationer er nul
- ▶ Faktor model (IC_2): kan ikke afvise normalitet samt at de første 10 autokorrelationer er nul

	Faktor model (IC_1)	Faktor model (IC_2)
MAE	0.1190	0.1111
MSE	0.0221	0.0187

Tabel: MAE og MSE for faktor modellerne valgt ud fra IC_1 og IC_2 .

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

21 Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

► Coordinate descent

- Koordinat k er valgt i iteration t , så er opdatering givet ved

$$\beta_k^{t+1} = \arg \min_{\beta_k} f(\beta_1^t, \dots, \beta_{k-1}^t, \beta_k, \beta_{k+1}^t, \dots, \beta_p^t)$$

► Krydsvalidering

- $CV_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k MSE_i$

► BIC

- $BIC = \log \widehat{\sigma_p^2} + \frac{p \log T}{T}$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

22 Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Elastik net (CV), $\alpha = 1$
- ▶ Adaptive lasso med OLS vægte (CV), $\gamma = 0.5$
- ▶ Adaptive lasso med lasso vægte (CV), $\gamma = 0.5$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktions af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

23 Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Lasso (CV)						Ridge regression (CV)					
	$\log(\lambda)$	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik		$\log(\lambda)$	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik
λ_{\min}	-6.6361	0.0019	28	94.52%	983.956	λ_{\min}	-4.3800	0.0045	126	93.96%	1014.633
$\lambda_{1\text{sd}}$	-5.7057	0.0020	14	94.46%	973.765	$\lambda_{1\text{sd}}$	-4.1939	0.0047	126	93.96 %	1014.633
Group lasso (CV)						Adap. lasso m. OLS vægte (CV)					
	$\log(\lambda)$	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik		$\log(\lambda)$	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik
λ_{\min}	-8.2644	0.0022	126	93.96%	1014.633	λ_{\min}	-5.1333	0.0018	5	94.44%	968.274
$\lambda_{1\text{sd}}$	-7.6365	0.0023	119	94.03%	1013.333	$\lambda_{1\text{sd}}$	-3.4586	0.0019	2	94.28%	959.0402
Adap. lasso m. lasso vægte (CV)											
	$\log(\lambda)$	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik						
λ_{\min}	-6.3897	0.0017	6	94.48%	970.5874						
$\lambda_{1\text{sd}}$	-3.5057	0.0018	2	94.28%	959.0402						

Tabel: Logaritmen af λ_{\min} og $\lambda_{1\text{sd}}$, gennemsnitlig krydsvalideringsfejl, som er målt i MSE, antallet af parametre, justeret R^2 og log-likelihood for lasso og dens generaliseringer. De valgte tuning parametre er markeret med tykt.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable
MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

24 Krydsvalidering

BIC

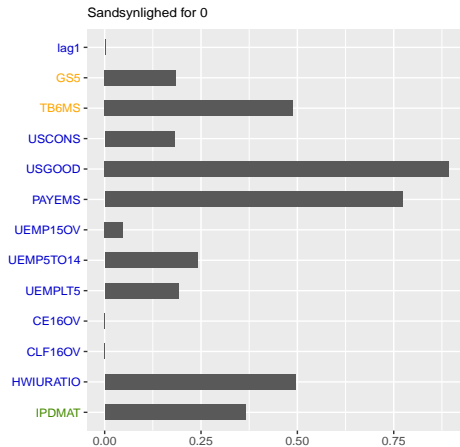
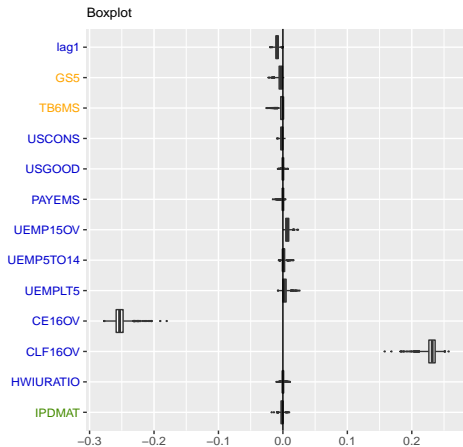
LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Krydsvalidering



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

25

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

Prædiktor	Koefficient	Z-score	p -værdi	Konfidensinterval	$[\nu^-, \nu^+]$
DPCERA3M086SBEA	-0.002	-1.362	0.671	$[-0.009, 0.027]$	$[0.002, 0.004]$
IPDMAT	-0.003	-1.113	0.265	$[-0.012, 0.006]$	$[0.000, 0.004]$
HWIURATIO	0.002	0.717	0.199	$[-0.003, 0.014]$	$[-0.002, 0.004]$
CLF16OV	0.243	36.671	0	$[0.232, 0.259]$	$[0.203, 0.252]$
CE16OV	-0.266	-37.393	0	$[-0.280, -0.254]$	$[0.230, 0.278]$
UEMPLT5	0.001	0.240	0.402	$[-0.005, 0.008]$	$[-0.011, 0.009]$
UEMP5TO14	0.000	-0.118	0.430	$[-0.006, 0.004]$	$[-0.010, 0.005]$
UEMP15OV	0.004	1.593	0.056	$[0.000, 0.009]$	$[-0.006, 0.013]$
PAYEMS	0.001	0.280	0.219	$[-0.007, 0.030]$	$[-0.002, 0.002]$
USCONS	-0.002	-0.883	0.566	$[-0.009, 0.016]$	$[0.001, 0.004]$
TB6MS	-0.001	-0.480	0.682	$[-0.009, 0.026]$	$[0.000, 0.004]$
GS5	-0.003	-1.130	0.219	$[-0.025, 0.007]$	$[0.001, 0.004]$
EXUSUKx	0.003	1.307	0.870	$[-0.071, 0.003]$	$[0.002, 0.006]$
lag 1	-0.009	-4.065	0.003	$[-0.013, -0.004]$	$[0.005, 0.015]$

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p -værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for lasso_{TG} (CV). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $\lambda_{TG} = \lambda_{1sd} \cdot 548 \approx 1.823$ med $\alpha = 0.1$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

26 Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

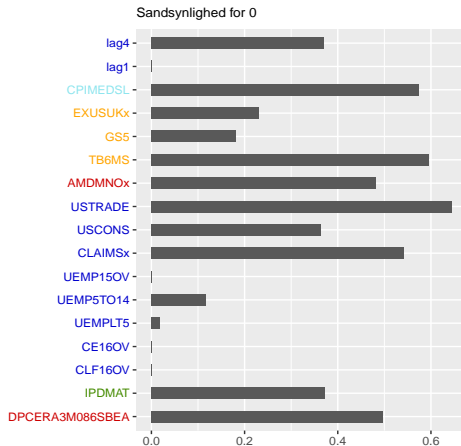
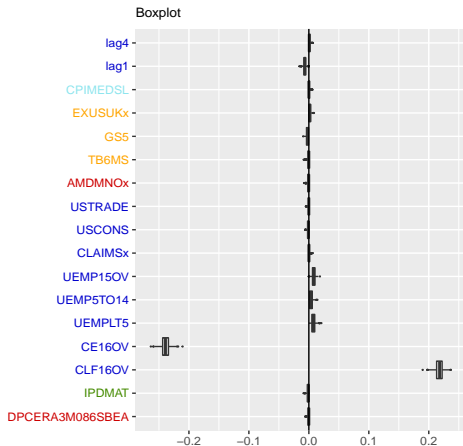
- ▶ Elastik net (BIC), $\alpha = 1$
- ▶ Adaptive lasso med OLS vægte (BIC), $\gamma = 2$
- ▶ Adaptive lasso med lasso vægte (BIC), $\gamma = 0.5$

Lasso (BIC)						Ridge regression (BIC)					
λ_{BIC}	$\log(\lambda)$	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik	λ_{BIC}	$\log(\lambda)$	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik
λ_{BIC}	-6.2639	-6.1608	17	94.46%	974.9938	λ_{BIC}	-4.4730	-3.3230	126	93.96%	1014.633

Group lasso (BIC)						Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)					
λ_{BIC}	$\log(\lambda)$	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik	λ_{BIC}	$\log(\lambda)$	BIC	p	R^2_{adj}	Loglik
λ_{BIC}	-7.2876	-5.0721	99	94.17%	1007.311	λ_{BIC}	-4.3308	-6.3143	2	94.28%	959.0402

Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)					
λ_{BIC}	$\log(\lambda)$	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik
λ_{BIC}	-4.9440	-6.3191	3	94.4%	965.2423

Tabel: Logaritmen af λ_{BIC} , antallet af parametre, BIC, justerede R^2 og log-likelihood for lasso og dens generaliseringer.



Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

29

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Prædiktor	Koefficient	Z-score	p -værdi	Konfidensinterval	$[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]$
DPCERA3M086SBEA	-0.002	-0.960	0.093	$[-0.071, 0.003]$	$[0.001, 0.002]$
IPDMAT	-0.002	-0.680	0.159	$[-0.032, 0.005]$	$[-0.001, 0.002]$
CLF160V	0.241	36.686	0	$[0.235, 0.350]$	$[0.200, 0.242]$
CE160V	-0.264	-37.339	0	$[-0.455, -0.260]$	$[0.142, 0.264]$
UEMPLT5	0.000	0.027	0.777	$[-0.029, 0.005]$	$[-0.001, 0.013]$
UEMP5TO14	-0.001	-0.266	0.599	$[-0.007, 0.014]$	$[-0.001, 0.004]$
UEMP150V	0.004	1.299	0.249	$[-0.005, 0.008]$	$[0.001, 0.010]$
CLAIMSx	0.001	0.387	0.689	$[-0.030, 0.011]$	$[0.000, 0.002]$
USCONS	-0.001	-0.591	0.100	$[-0.088, 0.004]$	$[0.000, 0.001]$
USTRADE	0.000	-0.118	0.988	$[0.007, \infty)$	$[0.000, 0.006]$
AMDMNOx	-0.002	-0.813	0.641	$[-0.008, 0.020]$	$[0.001, 0.004]$
TB6MS	-0.001	-0.415	0.677	$[-0.008, 0.023]$	$[0.000, 0.005]$
GS5	-0.003	-1.207	0.144	$[-0.032, 0.005]$	$[0.001, 0.004]$
EXUSUKx	0.003	1.449	0.303	$[-0.007, 0.012]$	$[0.002, 0.004]$
CPIMEDSL	0.002	0.855	0.865	$[-0.054, 0.003]$	$[0.001, 0.009]$
lag 1	-0.010	-4.362	0.499	$[-0.011, 0.033]$	$[0.009, 0.021]$
lag 4	0.002	1.106	0.311	$[-0.014, 0.028]$	$[0.001, 0.003]$

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p -værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for lasso_{TG} (BIC). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $\lambda_{TG} = \lambda_{BIC} \cdot 548 \approx 1.0432$ med $\alpha = 0.1$

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

30

BIC

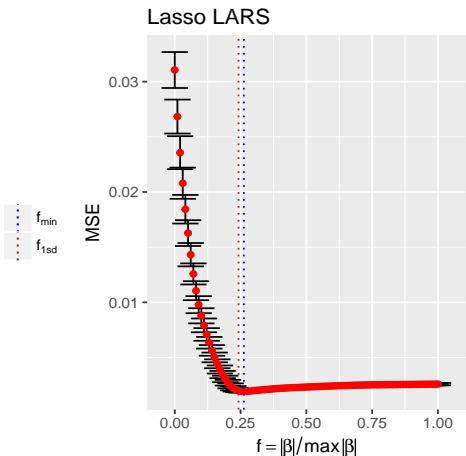
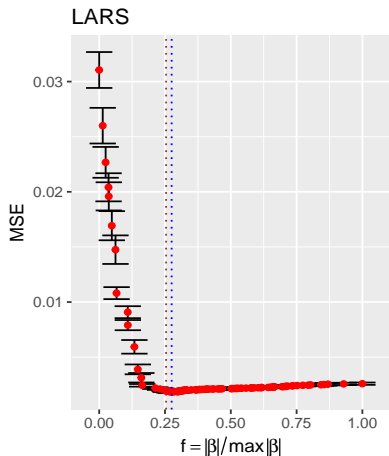
LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

- ▶ Fitter en model for hvert trin
 - ▶ LARS algoritmen foretager 127 trin
 - ▶ LARS algoritmen med lasso modifikationen udfører 192 trin
- ▶ Igen anvendes krydsvalidering og BIC til at estimere tuning parameteren, som for LARS algoritmen er fraktionen af ℓ_1 -normen $f = \frac{|\beta|}{\max |\beta|}$, hvor $f \in [0, 1]$.
 - ▶ $f = 0$: ingen variable tilføjet til den aktive mængde
 - ▶ $f = 1$: alle variable inkluderet



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

32

Krydsvalidering

BIC

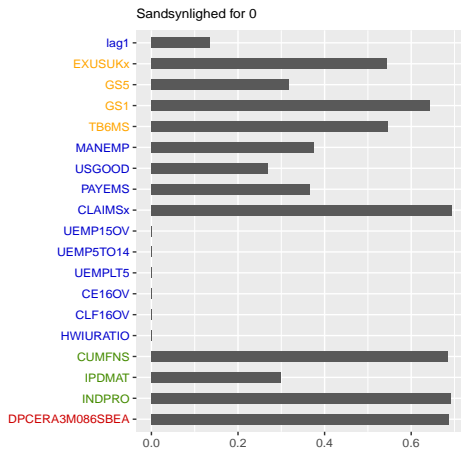
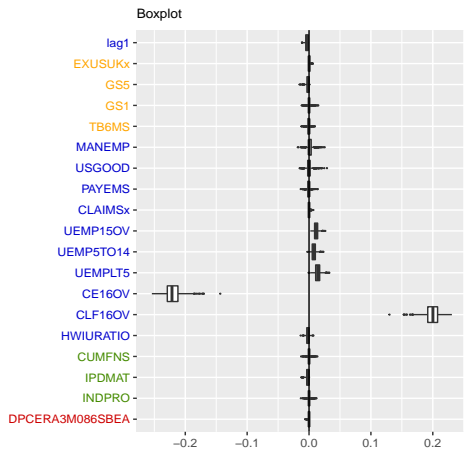
Out-of-sample

Figur: 10-fold krydsvalideringsfejl som funktion af fraktionen af ℓ_1 -normen LARS og lasso LARS.

LARS (CV)						Lasso LARS (CV)					
	Værdi	MSE	p	R^2_{adj}	LogLik		Værdi	MSE	p	R^2_{adj}	Loglike
f_{\min}	0.2753	0.0019	27	94.43%	974.8317	f_{\min}	0.2626	0.0019	21	94.52%	980.0982
$f_{1\text{sd}}$	0.2542	0.0019	19	94.19%	967.2669	$f_{1\text{sd}}$	0.2424	0.0019	13	94.43%	971.6687

Tabel: Værdien af f_{\min} og $f_{1\text{sd}}$, gennemsnitlig krydsvalideringsfejl, som er målt i MSE, antallet af parametre, justeret R^2 og log-likelihood for LARS og lasso LARS. De valgte tuning parametre er markeret med tykt.

- 22 trin udføres for lasso LARS (CV), hvor variablerne CUMFNS, MANEMP og GS1 tilføjes og fjernes igen og variabelen TB6MS bliver tilføjet, fjernet og så tilføjet igen.



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

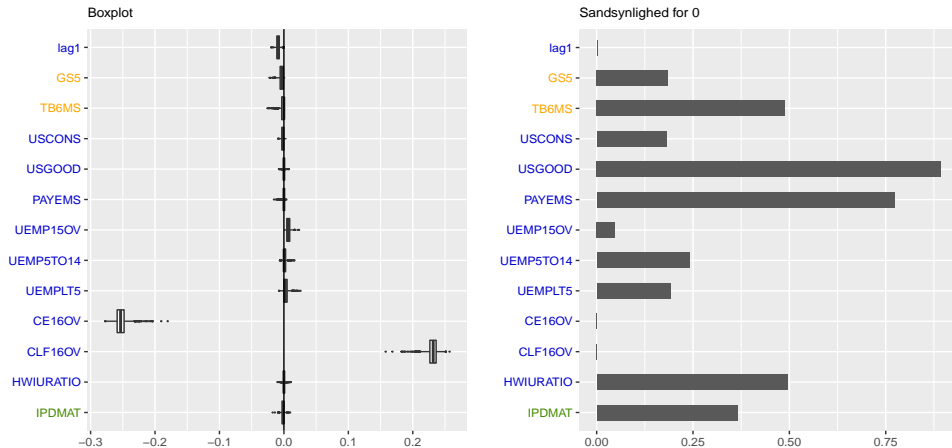
LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Figur: Til venstre vises et boxplot af 1000 bootstrap realisationer af $\hat{\beta}^{\text{LARS}}(f_{1sd})$. Plottet til højre illustrerer andelen af bootstrap realisationer, hvor parameter estimaterne er præcis nul.



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

35

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

Figur: Til venstre vises et boxplot af 1000 bootstrap realisationer af $\hat{\beta}^{\text{lasso}}(f_{\text{1sd}})$. Plottet til højre illustrerer andelen af bootstrap realisationer, hvor parameter estimaterne er præcis nul.

Prædiktor	Cov test	p -værdi
HWIURATIO	864.6317	0
UEMP15OV	161.3770	0
UEMPLT5	163.0670	0
UEMP5TO14	122.3840	0
CE16OV	14.7416	0
PAYEMS	0.3356	0.7151
USGOOD	5.0872	0.0066
CLF16OV	221.9181	0
IPDMAT	0.0668	0.9354
GS5	0.3856	0.6803
lag1	0.8897	0.4115
TB6MS	0.0419	0.9590
USCONS	0.0132	0.9869

Tabel: Kovarians testen for lasso LARS (CV). Vi viser kun p -værdier for prædiktorer som medtages og bliver i modellen, dvs hvis en prædiktor medtages i et trin og senere forlader modellen, vises denne prædiktor ikke. p -værdier $< 2.2 \cdot 10^{-16}$ sættes lig 0.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

36 Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Prædiktor	Koefficient	Z-score	p-værdi	Konfidensinterval	$[\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+]$
HWIURATION	0.002	0.694	0.160	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]
UEMP15OV	0.004	1.606	0.923	$(-\infty, 0.032]$	[0.004, 0.005]
UEMPLT5	0.001	0.149	0.064	$[-0.018, \infty)$	[0.000, 0.001]
MANEMP	0.002	0.486	0.273	$[-0.171, \infty)$	[0.002, 0.003]
UEMP5TO14	-0.001	-0.242	0.077	$(-\infty, 0.016]$	[0.000, 0.001]
CE16OV	-0.267	-37.446	0.130	$(-\infty, 0.532]$	[0.267, 0.267]
PAYEMS	0.000	0.006	0.563	$(-\infty, \infty)$	[0.000, 0.000]
USGOOD	-0.003	-0.498	0.638	$(-\infty, \infty)$	[0.003, 0.003]
CUMFNS	0.002	0.404	0.478	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]
CLF16OV	0.243	36.643	0.179	$(-\infty, \infty)$	[0.243, 0.243]
IPDMAT	-0.006	-1.626	0.874	$[-0.125, \infty)$	[0.006, 0.006]
TB6MS	-0.005	-0.715	0.569	$(-\infty, \infty)$	[0.005, 0.006]
INDPRO	0.003	0.513	0.328	$(-\infty, \infty)$	[0.003, 0.003]
GS1	0.006	0.577	0.473	$(-\infty, \infty)$	[0.006, 0.006]
GS5	-0.005	-1.146	0.037	$(-\infty, -0.025]$	[0.005, 0.005]
lag1	-0.009	-3.949	0.910	$(-\infty, \infty)$	[0.009, 0.009]
DPCERA3M086SBEA	-0.003	-1.436	0.233	$(-\infty, \infty)$	[0.003, 0.003]
EXUSUKx	0.003	1.383	0.964	$(-\infty, -0.053]$	[0.003, 0.003]
CLAIMSx	0.002	0.813	0.226	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p-værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for LARS_{TG} (CV). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $f_{1sd} = 0.2542$ med $\alpha = 0.1$.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktion af makroøkonomiske variable
MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

37 Krydsvalidering

BIC

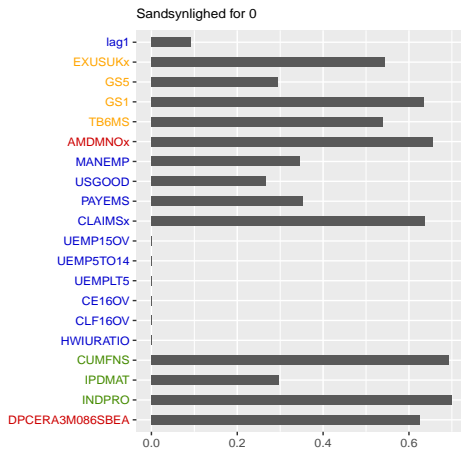
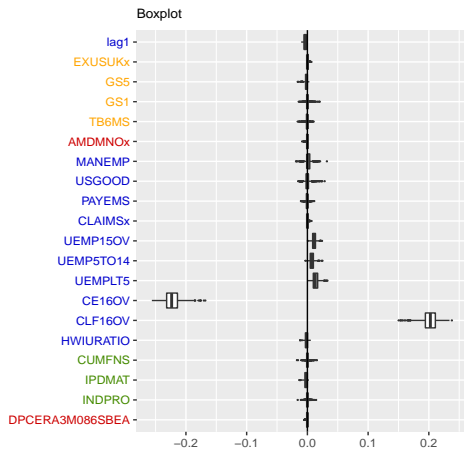
Out-of-sample

► afviser normalitet samt at de første 10 autokorrelationer er nul

LARS (BIC)						Lasso LARS (BIC)					
	Værdi	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik		Værdi	BIC	p	R^2_{adj}	LogLik
f_{BIC}	0.2623	-6.0925	20	94.43%	975.2909	f_{BIC}	0.2604	-6.1627	17	94.46%	974.9938

Tabel: Værdien af f_{BIC} , antallet af parametre, BIC, justeret R^2 og log-likelihood for LARS og lasso LARS.

- 32 trin udføres for lasso LARS (BIC), hvor variablerne **CUMFNS**, **MANEMP**, **GS1**, **HWIURATIO**, **PAYMENS** og **USGOOD** tilføjes og fjernes igen og variabelen **TB6MS** bliver tilføjet, fjernet og så tilføjet igen.



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktation af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

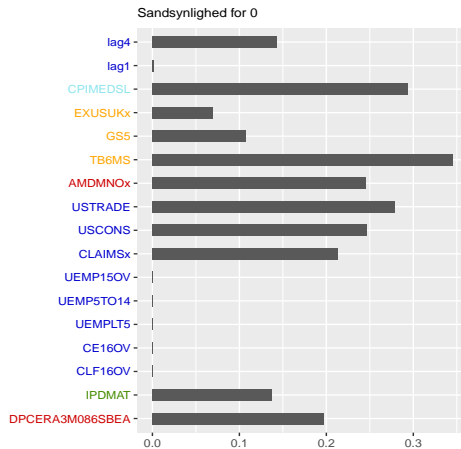
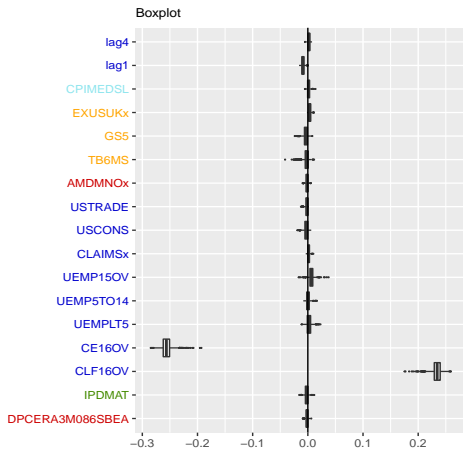
Out-of-sample

39

47

Aalborg universitet

Figur: Til venstre vises et boxplot af 1000 bootstrap realisationer af $\hat{\beta}^{\text{LARS}}(f_{\text{BIC}})$. Plottet til højre illustrerer andelen af bootstrap realisationer, hvor parameter estimaterne er præcis nul.



Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktation af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

40

47

Aalborg universitet

Figur: Til venstre vises et boxplot af 1000 bootstrap realisationer af $\hat{\beta}^{\text{lasso}}(f_{\text{BIC}})$. Plottet til højre illustrerer andelen af bootstrap realisationer, hvor parameter estimaterne er præcis nul.

Prædiktor	Cov test	<i>p</i> -værdi
UEMP15OV	161.3770	0
UEMPLT5	163.0670	0
UEMP5TO14	122.3840	0
CE16OV	14.7416	0
CLF16OV	221.9181	0
IPDMAT	0.0668	0.9354
GS5	0.3856	0.6803
lag1	0.8897	0.4115
TB6MS	0.0419	0.9590
USCONS	0.0132	0.9869
DPCERA3M086SBEA	0.0254	0.9750
EXUSUKx	0.2309	0.7939
CLAIMSx	0.0082	0.9919
AMDMMNOx	0.0464	0.9546
lag4	0.2281	0.7962
CPIMEDSL	0.0719	0.9307
USTRAD	0.0029	0.9971

Tabel: Kovarians testen for lasso LARS (BIC). Vi viser kun *p*-værdier for prædiktorer som medtages og bliver i modellen, dvs hvis en prædiktor medtages i et trin og senere forlader modellen, vises denne prædiktor ikke. p -værdier $< 2.2 \cdot 10^{-16}$ sættes lig 0.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

41

47

Prædiktør	Koefficient	Z-score	p-værdi	Konfidensinterval	$[\nu^-, \nu^+]$
HWIURATIO	0.002	0.720	0.161	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]
UEMP15OV	0.004	1.596 4	0.920	$(-\infty, 0.034]$	[0.004, 0.005]
UEMPLT5	0.001	0.148	0.065	$[-0.018, \infty)$	[0.000, 0.001]
MANEMP	0.003	0.561	0.766	$(-\infty, 0.120]$	[0.003, 0.003]
UEMP5TO14	0.001	-0.261	0.093	$(-\infty, 0.023]$	[0.000, 0.001]
CE16OV	-0.267	-37.412	0.130	$(-\infty, 0.574]$	[0.266, 0.267]
PAYEMS	0.000	0.012	0.428	$(-\infty, \infty)$	[0.000, 0.000]
USGOOD	-0.004	-0.584	0.721	$(-\infty, \infty)$	[0.004, 0.004]
CUMFNS	0.002	0.390	0.455	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]
CLF16OV	0.243	36.646	0.179	$(-\infty, \infty)$	[0.243, 0.243]
IPDMAT	-0.006	-1.618	0.869	$[-0.130, \infty)$	[0.006, 0.006]
TB6MS	-0.006	-0.790	0.615	$(-\infty, \infty)$	[0.006, 0.006]
INDPRO	0.003	0.591	0.494	$(-\infty, \infty)$	[0.003, 0.003]
GS1	0.007	0.675	0.571	$(-\infty, \infty)$	[0.007, 0.007]
GS5	-0.006	-1.240	0.302	$(-\infty, \infty)$	[0.006, 0.006]
lag1	-0.009	-3.914	0.912	$(-\infty, \infty)$	[0.009, 0.009]
DPCERA3M086SBEA	-0.002	-1.331	0.225	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]
EXUSUKx	0.003	1.357	0.964	$(-\infty, -0.051]$	[0.003, 0.003]
CLAIMSx	0.001	0.629	0.208	$(-\infty, \infty)$	[0.001, 0.001]
AMDMNOx	-0.002	-0.904	0.855	$(-\infty, \infty)$	[0.002, 0.002]

Tabel: Koefficienter, Z-scores, p-værdier, konfidensintervaller og trunkeret intervaller for LARS_{TG} (BIC). Den estimeres standard afvigelse er 0.043, og resultaterne er for $\hat{f}_{BIC} = 0.2623$ med $\alpha = 0.1$.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

Oversigt over in-sample resultater



Inkluderingsrate	Variable	Beskrivelse
100%	CLF16OV	Civilarbejdsstyrke
100%	CE16OV	Civilbeskæftigelse
83.33%	lag 1	Den tidligere værdi af arbejdsløshedsraten
77.78%	IPDMAT	Holdbart materiale
77.78%	UEMPLT5	Civile arbejdsløse - mindre end 5 uger
77.78%	UEMP5TO14	Civile arbejdsløse i 5 - 14 uger
77.78%	UEMP15OV	Civile arbejdsløse i 15 - 26 uger
77.78%	TB6MS	6-måneders statsskat
77.78%	GS5	5-årig statsobligationsrente

Tabel: Inkluderingsraten af de 9 hyppigst valgte variable for de ialt 18 modeller samt beskrivelse af variablerne.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

Out-of-sample

43

47

Aalborg universitet

Out-of-sample



	MAE	R^{MAE}	MSE	R^{MSE}
Benchmark model	0.1111	1	0.0187	1
AR(4)	0.1312	1.1811	0.0272	1.454
Faktor model (IC ₁)	0.119	1.0717	0.0221	1.1798
Lasso (CV)	0.032	0.2877	0.0016	0.0876
Lasso (BIC)	0.0308	0.277	0.0015	0.0795
Ridge regression (CV)	0.0582	0.5239	0.0052	0.28
Ridge regression (BIC)	0.0573	0.5155	0.0051	0.2706
Group lasso (CV)	0.0352	0.3168	0.0019	0.1042
Group lasso (BIC)	0.0382	0.3437	0.0022	0.1202
Adap. lasso m. OLS vægte (CV)	0.0304	0.2733	0.0014	0.0729
Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)	0.0310	0.2787	0.0014	0.0743
Adap. lasso m. lasso vægte (CV)	0.0298	0.2684	0.0013	0.0716
Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)	0.0304	0.274	0.0014	0.0729
Lasso _{TG} (CV)	0.0303	0.2724	0.0014	0.0744
Lasso _{TG} (BIC)	0.031	0.279	0.0014	0.0767
LARS (CV)	0.0307	0.2761	0.0015	0.0802
LARS (BIC)	0.0305	0.2747	0.0015	0.0793
Lasso LARS (CV)	0.0352	0.317	0.002	0.1089
Lasso LARS (BIC)	0.0322	0.2901	0.0017	0.0903
LARS _{TG} (CV)	0.0300	0.2701	0.0014	0.0745
LARS _{TG} (BIC)	0.0301	0.2708	0.0014	0.0750

Tabel: Den gennemsnitlige absolutte og kvadrerede fejl samt gennemsnitlig tabs ratio mellem hver model og benchmark modellen.

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

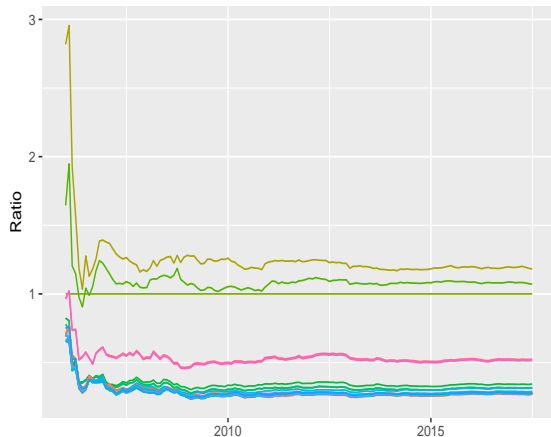
LARS

Krydsvalidering

BIC

44 Out-of-sample

Out-of-sample



- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| Adaptive lasso m. lasso (BIC) | LARS m. lasso modifikation (BIC) |
| Adaptive lasso m. lasso (CV) | LARS m. lasso modifikation (CV) |
| Adaptive lasso m. OLS (BIC) | LARS TG (BIC) |
| Adaptive lasso m. OLS (CV) | LARS TG (CV) |
| AR(4) | Lasso (BIC) |
| Benchmark model | Lasso (CV) |
| Faktor model (IC1) | Lasso TG (BIC) |
| Group lasso (BIC) | Lasso TG (CV) |
| Group lasso (CV) | Ridge regression (BIC) |
| LARS (BIC) | Ridge regression (CV) |
| LARS (CV) | |

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

45

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

Figur: Rullende gennemsnitlig absolut tabs ratio.

Out-of-sample

Diebold-Mariano testen



	Absolutte fejl	Kvadrerede fejl
AR(4)	0.0021	0.0032
Faktor model (IC_1)	0.1692	0.1183
Lasso (CV)	0	$2.933 \cdot 10^{-12}$
Lasso (BIC)	0	$2.728 \cdot 10^{-12}$
Ridge regression (CV)	$6.418 \cdot 10^{-13}$	$3.551 \cdot 10^{-9}$
Ridge regression (BIC)	$2.85 \cdot 10^{-13}$	$2.507 \cdot 10^{-9}$
Group lasso (CV)	0	$5.999 \cdot 10^{-12}$
Group lasso (BIC)	0	$8.845 \cdot 10^{-12}$
Adap. lasso m. OLS vægte (CV)	0	$2.797 \cdot 10^{-12}$
Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)	0	$2.905 \cdot 10^{-12}$
Adap. lasso m. lasso vægte (CV)	0	$2.676 \cdot 10^{-12}$
Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)	0	$2.814 \cdot 10^{-12}$
Lasso _{TG} (CV)	0	0
Lasso _{TG} (BIC)	0	0
LARS (CV)	0	$2.64 \cdot 10^{-12}$
LARS (BIC)	0	$2.615 \cdot 10^{-12}$
Lasso LARS (CV)	0	$4.694 \cdot 10^{-12}$
Lasso LARS (BIC)	0	$3.328 \cdot 10^{-12}$
LARS _{TG} (CV)	0	0
LARS _{TG} (BIC)	0	0

Tabel: p -værdier for Diebold-Mariano testen for hver model imod benchmark modellen. p -værdier $< 2.2 \cdot 10^{-16}$ sættes til 0.

Inferens i lasso
modellen med
anvendelse inden for
prædiktion af
makroøkonomiske
variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og
dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

46

Out-of-sample

47

Aalborg universitet

Out-of-sample

MCS



T_R		T_{max}	
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$
Benchmark model	Benchmark model	Benchmark model	Benchmark model
AR(4)	AR(4)	AR(4)	AR(4)
Lasso (CV)	Lasso (CV)	Faktor (IC ₁)	Lasso (CV)
Lasso (BIC)	Lasso (BIC)	Lasso (CV)	Lasso (BIC)
Group lasso (CV)	Group lasso (CV)	Lasso (BIC)	Ridge regression (CV)
Group lasso (BIC)	Group lasso (BIC)	Ridge regression (CV)	Ridge regression (BIC)
Adap. lasso m. OLS vægte (CV)	Adap. lasso m. OLS vægte (CV)	Ridge regression (BIC)	Group lasso (CV)
Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)	Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)	Group lasso (CV)	Group lasso (BIC)
Adap. lasso m. lasso vægte (CV)	Adap. lasso m. lasso vægte (CV)	Group lasso (BIC)	Adap. lasso m. OLS vægte (CV)
Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)	Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)	Adap. lasso m. OLS vægte (CV)	Adap. lasso m. OLS vægte (BIC)
Lasso _{TG} (BIC)	Lasso _{TG} (BIC)	Adap. lasso m. lasso vægte (CV)	Adap. lasso m. lasso vægte (CV)
LARS (CV)	LARS (CV)	Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)	Adap. lasso m. lasso vægte (BIC)
LARS (BIC)	LARS (BIC)	Lasso _{TG} (CV)	Lasso _{TG} (CV)
Lasso LARS (CV)	Lasso LARS (CV)	Lasso _{TG} (BIC)	Lasso _{TG} (BIC)
Lasso LARS (BIC)	Lasso LARS (BIC)	LARS (CV)	LARS (CV)
		LARS (BIC)	LARS (BIC)
		Lasso LARS (CV)	Lasso LARS (CV)
		Lasso LARS (BIC)	Lasso LARS (BIC)
		LARS _{TG} (CV)	LARS _{TG} (CV)
		LARS _{TG} (BIC)	LARS _{TG} (BIC)

Inferens i lasso modellen med anvendelse inden for prædiktions af makroøkonomiske variable

MAOK9 5.2018

Lasso estimatoren og dens generaliseringer

Statistisk inferens

Kovarians testen

TG testen

Data

Benchmark modellen

Coordinate descent

Krydsvalidering

BIC

LARS

Krydsvalidering

BIC

47 Out-of-sample

Tabel: 80% og 90% model confidence set for arbejdsløshedsraten for absolutte og kvadrerede fejl.