ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TĂNG LÂM TƯỜNG VINH

THỰC HÀNH THIẾT KẾ LUẬN VĂN BẰNG LaTeX

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh - 2016

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TĂNG LÂM TƯỜNG VINH

THỰC HÀNH THIẾT KẾ LUẬN VĂN BẰNG LATEX

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

Mã số: 15 23 015

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. CAO VĂN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh - 2016

Lời cảm ơn

Trong quá trình thực hiện luận văn, tôi gặp rất nhiều khó khăn từ kiến thức đến ý tưởng. Để vượt qua nó không chỉ nhờ vào sự nỗ lực tìm hiểu và học tập của bản thân tôi, mà còn dựa vào sự giúp đỡ rất lớn từ quý thầy cô, bạn bè và gia đình.

Mặc dù có sự cố gắng tối đa nhưng vẫn không tránh khỏi sai sót. Vì thế rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ quý thầy cô và bạn bè để hoàn thiện luận văn này.

Kính chúc sức khỏe quý thầy cô và bạn bè!
Sinh viên thực hiện

Tăng Lâm Tường Vinh

Mục lục

Lời nói đầu

Trong luận văn này, tôi có đề cập đến phần mềm soạn thảo văn bản LaTeX, bằng phần mềm này, tôi soạn thảo công thức toán học một cách cẩn thận. Nội dung luận văn bao gồm 2 chương:

Chương 1: Giới thiệu về LaTeX, các ưu điểm, nhược điểm của nó khi sử dụng.

Chương 2: Nội dung luận văn gồm có 4 phần, được tôi đề cập ở 4 lĩnh vực là đại số, giải tích, hình học và tổ hợp - xác suất. Trong mỗi lĩnh vực, các bài toán được trích từ đề thi thử Trung học phổ thông quốc gia 2016 và được giải lại chi tiết.

Chương 1

Đôi điều về LaTeX

1.1 LaTeXlà gì?

- LaTeX là chương trình soạn thảo văn bản hay bài trình chiếu giống như Word, Powerpoint.
- Tiền thân là TeX, một ngôn ngữ định dạng do Donald Knuth phát minh, rất khó sử dụng.
- LaTeX được phát minh bởi Leslie Lamport, dựa trên TeX nhưng dễ sử dụng hơn rất nhiều. Cho ra chất lượng bản in cực cao cùng cấu trúc văn bản rất logic và đồng bộ.
- Tự động hóa rất nhiều so với làm bằng tay của Word.

1.2 Ưu điểm của LaTeX

Đối với những người dùng máy tính, khi chuyển sang một môi trường soạn thảo mới, họ thường tìm hiểu xem môi trường soạn thảo mới có những tính năng gì đặc biệt. Tôi cũng vậy, khi chuyển sang LaTeX, tôi thấy nó có nhiều ưu điểm hơn so với Word:

- **Văn bản nhất quán:** khoảng cách dòng, kích cỡ chữ, màu sắc, cách trình bày,... cho dù qua văn bản khác nó cũng như vậy.
- **Hoàn toàn tự động:** đánh số chương, tiêu đề mẹ, tiêu đề con, đánh số phương trình, bảng, hình ảnh, tham chiếu, ... hoàn toàn tự động.
- **Trích dẫn tài liệu tham khảo:** tự động và nhất quán, style rất đẹp.
- **Làm việc với một dự án lớn:** cả trăm, cả ngàn trang trong một file .tex dung lượng rất nhỏ, dễ quản lý và điều khiển.
- **Tích hợp công thức toán học:** công thức toán học tích hợp rất hài hòa với văn bản, đẹp và rõ nét. Vẽ hình đẹp: hình vẽ và chữ chú thích trên hình vẽ rất hài hòa với văn bản (cỡ chữ, ko bị vỡ nét khi zoom, ...)

1.3 Nhược điểm của LaTeX

Song hành với những ưu điểm kể trên, LaTeX còn có một số nhược điểm như sau:

- Biên soạn các tài liệu không theo cấu trúc chung rất khó.
- Làm việc chỉ nhờ vào dòng lệnh, giống như lập trình nên thường xảy ra lỗi nhỏ nhặt nhưng tốn thời gian sửa.
- Cách học và tiếp cận tốn nhiều thời gian hơn.

Chương 2

Thực hành với LaTeX

2.1 Đại số

Định lý 2.1.1. *Giải phương trình:* $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned}
&(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm. $\square$

Định lý 2.1.2. *Giải bất phương trình:*

$$\left(2 - \frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1} - 1\right) \geq \frac{4 - 8x + 9x^2}{3x + 2\sqrt{2x-1}} \tag{2.1}$$

Chứng minh.

- ĐK: $x \geq 1$. Ta có

$$\begin{aligned}
(2.1) \Leftrightarrow\ & \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1} - 1\right)}{x} \geq \frac{9x^2 - 4(2x-1)}{3x + 2\sqrt{2\sqrt{2x-1}}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1} - 1\right)}{x} \geq 3x - 2\sqrt{2x-1} \\
\Leftrightarrow\ & (2x-3)\left(2\sqrt{x-1} - 1\right) \geq 3x^2 - 2x\sqrt{2x-1} \quad (\text{do } x \geq 1) \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(x - 1 - \sqrt{x-1}\right)^2 + \left(x - \sqrt{2x-1}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x-1} + x - 1\right) \leq 0 \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

- Ta có nhận xét sau: $\begin{cases} \left(x - 1 - \sqrt{x-1}\right)^2 \geq 0 \\ \left(x - \sqrt{2x-1}\right)^2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x-1} + x - 1\right) \geq 0 \ (\text{do } x \geq 1) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{VT}_{(2.2)} \geq 0$

- Vậy để (2.2) xảy ra thì $\Leftrightarrow \text{VT}_{(2.2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{x-1} \\ x=\sqrt{2x-1} \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$\square$

Định lý 2.1.3. *Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn: $c=\min\{a,b,c\}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{2\ln\left(\dfrac{6(a+b)+4c}{a+b}\right)}{\sqrt[4]{\dfrac{8c}{a+b}}} \tag{2.3}$$

Chứng minh.

- Ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}=\frac{a^2}{a\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b(c+a)}}\geq\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{a(b+c)}+b\sqrt{b(c+a)}} \quad \text{(xem phần phụ lục 1)}$$

$$\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{a(b+c)}+b\sqrt{b(c+a)}}\geq\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+b)\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)\right]}} \tag{2.4}$$

- Mặt khác, vì $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a+b-2c\geq 0$. Nên ta có

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)=ab(a+b-2c)+c(a+b)^2\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a+b-2c)+c(a+b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a+b-2c)+c(a+b)^2=\frac{(a+b)^3+2c(a+b)^2}{4} \tag{2.5}$$

Từ (2.4) và (2.5) suy ra

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$$

- Ta lại có

$$\ln\left[\frac{6(a+b)+4c}{a+b}\right]=\ln\left[2\left(\frac{a+b+2c}{a+b}+2\right)\right]\geq\ln\left[\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right)^2\right] \tag{2.6}$$

- Mặt khác: vì $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow 2c\leq a+b$. Nên ta có

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}}\leq\sqrt[4]{2\cdot\frac{a+b+2c}{a+b}}\leq\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right) \tag{2.7}$$

Từ (2.5), (2.6), (2.7) ta được

$$P\geq\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2c}{a+b}}}+\frac{8\ln\left(\sqrt{1+\dfrac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2c}{a+b}}+\sqrt{2}}$$

- Đặt $t=\sqrt{1+\dfrac{2c}{a+b}}$, do $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow\dfrac{2c}{a+b}\leq 1\Rightarrow t\leq\sqrt{2}$

- Xét hàm $f(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}$, trên $t\in\left(0;\sqrt{2}\right]$

- Ta có

$$f'(t) = \frac{-2}{t^2} + \frac{8}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2} - \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(3t+\sqrt{2}\right)}{t^2\left(t+\sqrt{2}\right)^2} - \frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2},\ \forall t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$$

  Suy ra: $f(t) \geq f(\sqrt{2}) = 2\left(1+\ln 8\right)$

  Vậy $P_{\min} = 2\left(1+\ln 8\right)$.

  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$\square$

2.2 Giải tích

Định lý 2.2.1. *Cho hàm số $(C): y = \dfrac{3-2x}{x-1}$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.*

Chứng minh.

Hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1} = \dfrac{-2x+3}{x-1}$

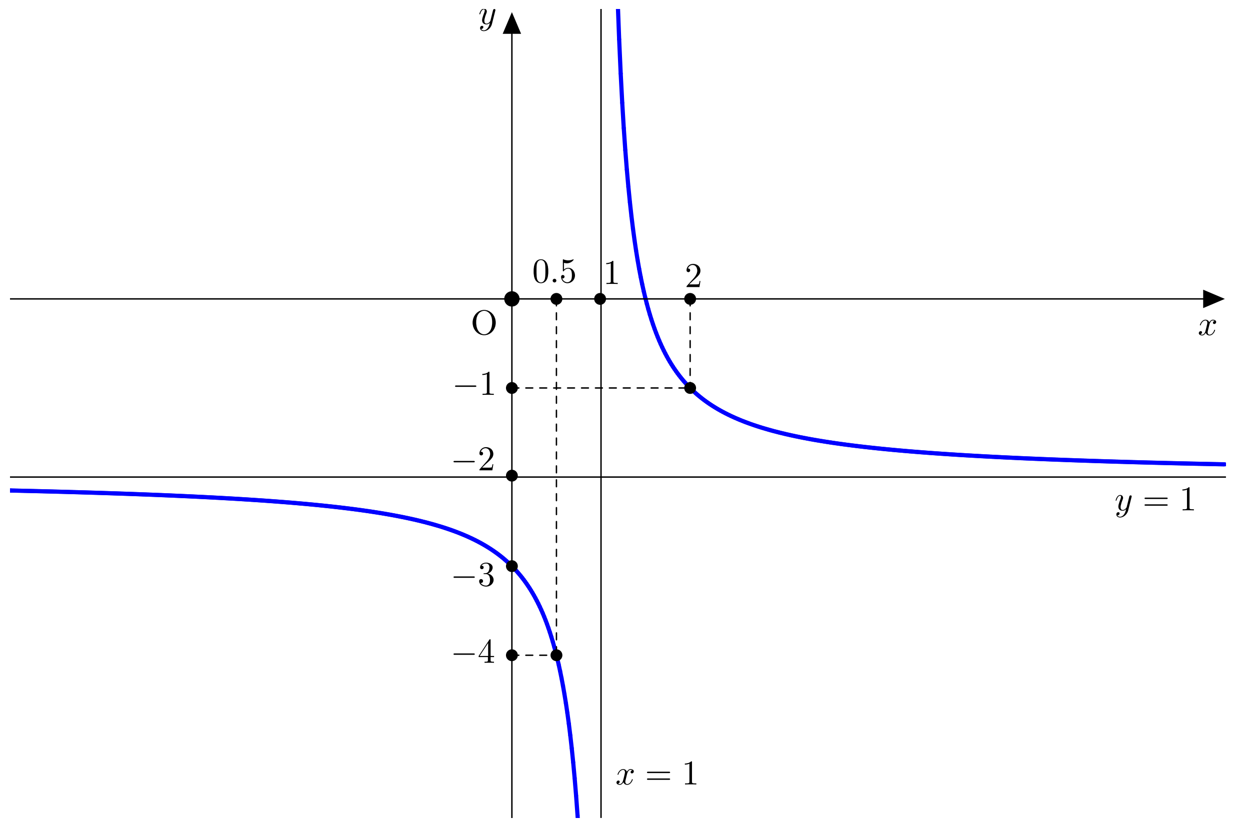
- Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in D$
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và không có đạt cực trị.
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} = -2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} = -2 \Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2

- Bảng giá trị

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2
y	-3	1	‖	0	-1

- Đồ thị



□

Định lý 2.2.2. *Viết phương trình tiếp tuyến của* (C) *biết tiếp tuyến song song với đường thẳng* Δ :

$$y = -x + 1$$

Chứng minh.

$(C) : y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{2.8}$$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$ nên có hệ số góc $f'(x_0) = -1$

$$(2.8) \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = \ \ 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$. PTTT là: $y + 1 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 1$ (loại)
- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -3$. PTTT là: $y + 3 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x - 3$

□

Định lý 2.2.3.

a) Tìm số phức liên hợp của số phức z *thỏa mãn* $3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i$.

b) Giải hệ phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 5) + 2\log_2(x + 5) = 0$

Chứng minh.

a) Gọi số phức $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$$3z + 9 = 2i.\bar{z} + 11i \Leftrightarrow 3(a + bi) + 9 = 2i(a - bi) + 11i \tag{2.9}$$

$$(2.9) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9 = 2b \\ 3b = 2a + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -9 \\ -2a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có $z = -1 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 3i$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2+5>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$

- Khi đó

  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+5)+2\log_2(x+5)=0$

  $\Leftrightarrow -\log_2(x^2+5)+\log_2(x+5)^2=0$

  $\Leftrightarrow \log_2(x+5)^2=\log_2(x^2+5)$

  $\Leftrightarrow (x+5)^2=x^2+5 \Leftrightarrow x^2+10x+25=x^2+5 \Leftrightarrow 10x=-20 \Leftrightarrow x=-2$ (nhận)
- Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-2$

□

Định lý 2.2.4. *Tính tích phân:* $I=\int_0^1 x\left(x+e^{z^2}\right)dx$

Chứng minh.
Ta có

$$I=\int_0^1 x\left(x+e^{z^2}\right)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 xe^{z^2}dx=I_1+I_2$$

Ta tính

$$I_1=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

Đặt: $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow \dfrac{dt}{2}=xdx$. Đổi cận

x	0	1
t	0	1

$$I_2=\int_0^1 e^t\frac{dt}{2}=\left.\frac{1}{2}e^t\right|_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

Vậy

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e-\frac{1}{6}$$

□

2.3 Hình học

Định lý 2.3.1. *Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm* $A(4;-4;3), B(1;3;-1), C(-2;0;1)$. *Viết phương trình mặt cầu* (S) *đi qua các điểm* A, B, C *và cắt hai mặt phẳng* $(\alpha): x+y+z+2=0$ *và* $(\beta): x-y-z-4=0$ *theo hai giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau.*

Chứng minh.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Vì (S) đi qua các điểm A, B, C và cắt hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+2=0$ và $(\beta): x-y-z-4=0$ theo 2 giao tuyến là hai đường tròn có bán kính bằng nhau nên ta có hệ

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ d(I,(\alpha))=d(I,(\beta)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-7b+4c=15 \\ 3a-2b+2c=9 \\ |a+b+c+2|=|a-b-c-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{19}{7} \\ b=-\dfrac{12}{7} \\ c=-\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$, viết được phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$

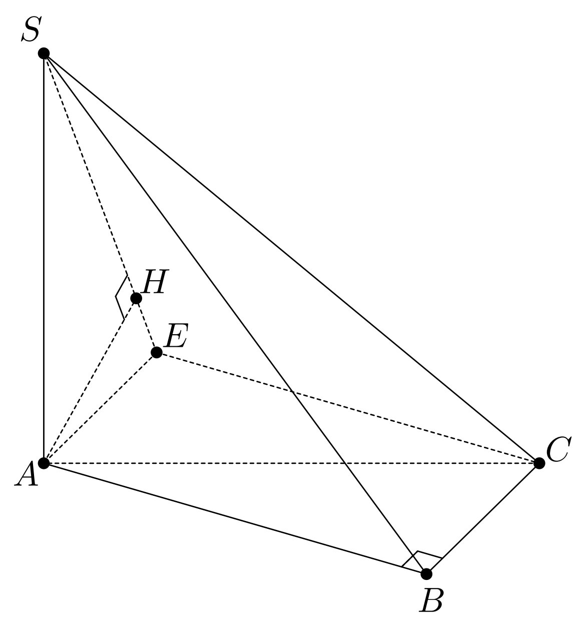
- Với $\begin{cases} a = \dfrac{19}{7} \\ b = -\dfrac{12}{7} \\ c = -\dfrac{9}{7} \end{cases}$, viết được phương trình mặt cầu:

$$\left(x - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 + \left(z + \frac{9}{7}\right)^2 = \frac{1237}{49}$$

□

Định lý 2.3.2. *Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B, $SA = a$, SB hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa AB và SC.*

Chứng minh.



- Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC), do đó $\widehat{SBA} = 30^0$

- Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\cot \widehat{SBA} = \frac{AB}{SA} \Rightarrow BC = AB = SA. \cot \widehat{SBA} = a. \cot 30^0 = a\sqrt{3}$$

- $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{2}$

- Vậy thể tích khối $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{2}$$

- Trong mp(ABC), kẻ $AI \mathbin{/\!/} BC$ và kẻ $CI \mathbin{/\!/} AB \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$

- Trong mp(SAI), kẻ AH vuông góc với SI, ta có

$$\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp CI \ \Big(CI \perp (SAI)\Big) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SIC)$$

Nên $d(AB, SC) = d\Big(A; (SIC)\Big) = AH$

- Tam giác SAI vuông tại A nên

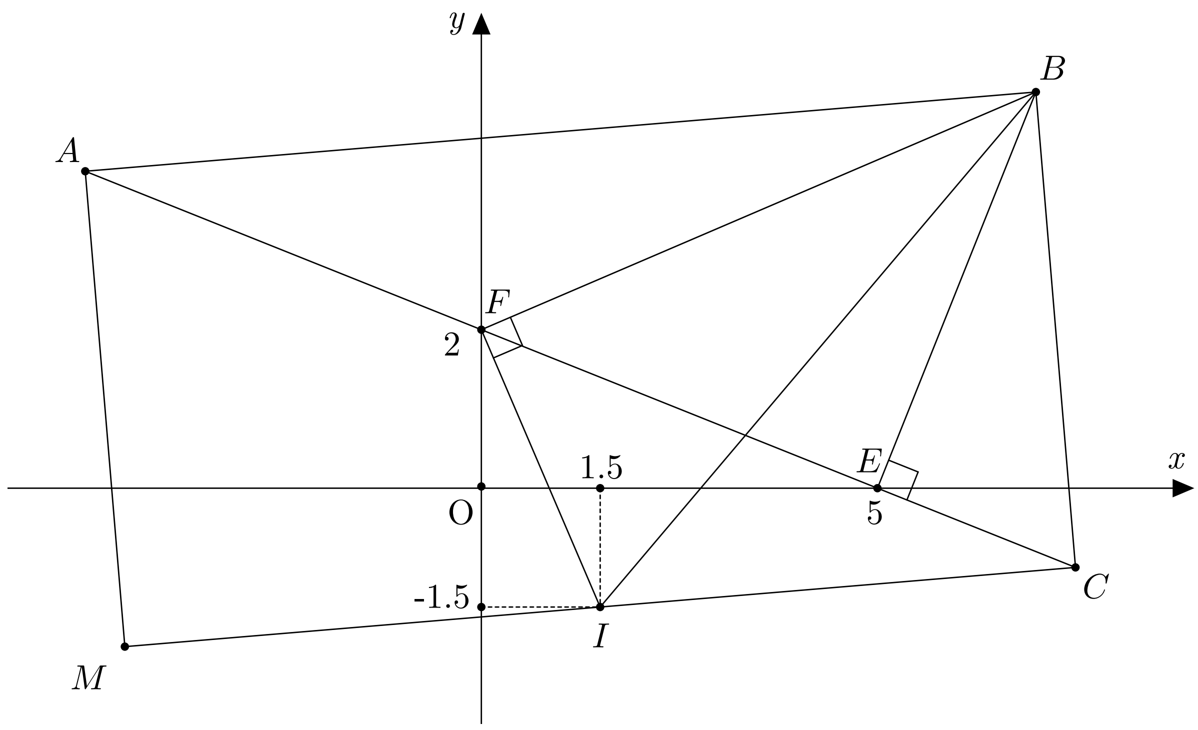
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \frac{AI.SA}{\sqrt{AI^2 + SA^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy khoảng cách của AB và SC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

□

Định lý 2.3.3. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu B lên AC là $E(5;0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0;2), I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.*

Chứng minh.



- Do F là trung điểm AE nên đỉnh $A(-5;4) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng (AC) :

$$2x + 5y - 10 = 0$$

- Ta đi chứng minh: $BF \perp IF$. Thật vậy ta có

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}\right)$

$\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC}\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FI} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC}\right) \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{BE}^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $BF \perp IF$ nên có phương trình: $7x + 3y - 6 = 0$
- BE đi qua E và vuông góc EF nên có phương trình: $5x - 2y - 25 = 0$. Do đó $B(7;5)$
- Từ đây tìm được phương trình (CD) :

$$2x - 24y - 39 = 0$$

□

2.4 Tổ hợp và Xác suất

Định lý 2.4.1. *Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 học sinh để đi làm 3 công việc trực nhật khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.*

Chứng minh.

- Phép thử: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau"
  $\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathbf{C}_{12}^4.\mathbf{C}_8^4.\mathbf{C}_4^4 = 34\ 650$
- Gọi A là biến cố: "Sắp 12 học sinh vào 3 nhóm khác nhau có đúng 1 nữ"
  $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là

$$n(A) = \mathbf{C}_3^1.\mathbf{C}_9^3.\mathbf{C}_2^1.\mathbf{C}_6^3.\mathbf{C}_1^1.\mathbf{C}_3^3 = 10\ 080$$

- Xác suất của biến cố là

$$P(A) = \frac{n(\Omega)}{n(A)} = \frac{10\ 080}{34\ 650} = \frac{16}{55}$$

- Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{16}{55}$

□

Phụ lục

Hệ quả 1. *Từ bất đẳng thức cosi, ta suy ra hệ quả như sau: Cho 2 số dương a, b, ta có*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{4}{a+b} \tag{5.10}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 2 số dương a, b, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$$
$$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{4}{a+b}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$. □

Tài liệu tham khảo

[1] Donald E.Knuth, *The TEXbook*, Stanford University, 1991.

[2] Trịnh Thanh Đèo, *Soạn thảo và chế bản tài liệu toán học với LATEX2ε*, NXB Đại học Quốc gia TP.HCM, 2006.

[3] André Heck, *Learning LATEXby Doing*, AMSTEL Institute, 2002.

[4] Donald E. Knuth, *The TEXbook,* Volume A of *Computers and Typesetting*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1984, ISBN 0-201-13448-9.