Chương 2 Quá trình Poisson

3.1. Phần mở đầu

Khi ta muốn xây dựng **mô hình toán học** cho một hiện tượng nào đó trong thế giới thực thì ta phải luôn chú ý một điều: các điều kiện, giả thiết phải đơn giản để có thể **"toán học hoá"** chúng. Tuy nhiên nếu ta làm cho các điều kiện, giả thiết đó trở nên quá đơn giản thì rất có thể những kết luận mà ta rút ra sau khi nghiên cứu mô hình toán học đó khó có thể áp dụng trong đời sống thực tại của chúng ta. **Tóm lại, ta phải đơn giản hoá các hiện tượng thực tế để có thể đưa ra mô hình toán học cho chúng. Tuy nhiên cũng không nên đơn giản hoá quá nhiều để cho những kết luận sau khi nghiên cứu mô hình toán học còn phù hợp và áp dụng được vào trong thực tế.**

Một trong những ví dụ của ý tưởng trên là việc đưa ra phân phối mũ. Nó đạt được cả hai yêu cầu: ta dễ dàng làm việc với nó và nó (phân phối mũ) cho ta sự "xấp xỉ" tốt trong các hoàn cảnh thực tế tương ứng.

Phân phối mũ có tính chất rất đặc biệt là nó "không kém đi" (hay còn gọi là không nhớ) theo thời gian. Có thể minh hoạ điều này như sau: nếu một thiết bị điện tử nào đó có phân phối mũ thì khi thấy thiết bị đó đã sử dụng được s giờ mà vẫn tốt thì xác suất để nó sử dụng thêm được t giờ nữa cũng bằng xác suất để thiết bị mới đem ra sử dụng được t giờ (hay còn gọi là thiết bị này " không nhớ" mình đã được sử dụng s giờ). Ta sẽ nghiên cứu chi tiết trong chương này.

3.2. Phân phối mũ

3.2.1. Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân phối mũ với tham số $\lambda, \lambda > 0$ nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Hay tương đương nếu hàm phân phối xác suất của nó có dạng

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Chú ý: ta thường sử dụng công thức

$$P\{X > x\} = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên có phân phối mũ được tính như sau

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \end{aligned}$$

Khi lấy tích phân từng phần ta sẽ có

$$\boxed{E[X] = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}}$$

Còn hàm sinh mô men của phân phối mũ là

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{for } t < \lambda \qquad (5.1) \end{aligned}$$

Có thể tính mô men mọi cấp của X bằng cách lấy vi phân phương trình (3.1). Chẳng hạn ta có

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

3.2.2. Các tính chất của phân phối mũ

Ta nói biến ngẫu nhiên X có tính chất không nhớ (memoryless) nếu

$$P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\} \qquad \text{for all } s, t \geqslant 0 \qquad (5.2)$$

Nếu X chỉ tuổi thọ của một bóng đèn. Khi đó (3.2) có nghĩa là xác suất để bóng đèn sáng quá s+t giờ với điều kiện bóng đèn đã sáng quá t giờ bằng xác suất để (nếu bóng đèn mới) nó sáng quá s giờ. Nói cách khác nếu bóng đèn đã được dùng quá thời gian t giờ; khi đó **phân phối xác suất đối của tuổi thọ còn lại của bóng bằng đúng phân phối xác suất của bóng đèn mới.** Nghĩa là bóng đèn "không nhớ" nó đã được sử dụng t giờ.

Phương trình (3.2) tương đương với phương trình

$$\frac{P\{X > s + t, X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}$$

Hay là

$$P\{X > s + t\} = P\{X > s\}P\{X > t\} \qquad (5.3)$$

Nếu X có phân phối mũ thì hiển nhiên nó thoả mãn phương trình (3.3), do đó cũng thoả mãn (3.2). (chú ý do đẳng thức $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}$).

Chú ý: Có thể chứng minh được rằng nếu phân phối xác suất nào đó có tính chất không nhớ thì nó phải là phân phối mũ. Giả sử X có tính chất không nhớ. Đặt $\overline{F}$(x) = P{X>x}. Từ phương trình (3.3) rút ra

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$$

Nghĩa là thoả mãn phương trình hàm

$$g(s + t) = g(s)g(t)$$

Nghiệm liên tục phải của phương trình này là

$$g(x) = e^{-\lambda x}*$$

Vì hàm phân phối xác suất là liên tục phải nên ta có

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$$

Hay từ đó

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Điều này chỉ ra X có phân phối mũ.

Ví dụ 3.1. Giả sử thời gian chờ đợi của khách hàng tại ngân hàng là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 10 phút, tức là $\lambda = 1/10$.

a) Tìm xác suất để khách hàng phải chờ hơn 15 phút.
b) Tìm xác suất để thời gian chờ của khách hàng nào đó lớn hơn 15 phút với điều kiện anh ta đã chờ 10 phút rồi.

Giải: Nếu X là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian chờ của khách hàng.

a) Xác suất thứ nhất là

$$P\{X > 15\} = e^{-15\lambda} = e^{-3/2} \approx 0.220$$

b) Xác suất thứ hai được tính như sau

$$P\{X>5+10|X>10\}=P\{X>5\}=e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0,604$$

Ví dụ 3.2. Giả sử thời gian sống của bóng đèn là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 10 giờ. Một người bước vào phòng thấy đèn đang sáng. Tìm xác suất để bóng đèn còn sáng 5 giờ nữa.

Giải: Vì tính chất không nhớ của biến ngẫu nhiên chỉ tuổi thọ của bóng đèn nên ta có

$$P\{\text{remaining lifetime} > 5\} = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2}$$

Nếu phân phối xác suất của tuổi thọ bóng đèn không phải là phân phối mũ thì lời giải sẽ là

$$P\{\text{lifetime} > t + 5 \,|\, \text{lifetime} > t\} = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}$$

`

Ví dụ 3.3. (***hàm tốc độ hỏng- failure rate function***) Xét biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối F và hàm mật độ f. Hàm tốc độ hỏng được xác định bởi

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (5.4)$$

Để giải nghĩa r(t), ta giả sử một thiết bị- bóng đèn chẳng hạn có thời gian sống là X. Bóng đèn này đã thắp sáng được t giờ. Hãy tìm xác suất để bóng đèn không thể thắp quá dt giờ nữa. Tức là tính xác suất có điều kiện $P\{X \in (t, t+dt) \,|\, X > t\}$. Ta tính xác suất này như sau

$$\begin{aligned} P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} &= \frac{P\{X \in (t, t+dt), X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X \in (t, t+dt)\}}{P\{X > t\}} \\ &\approx \frac{f(t)\, dt}{1 - F(t)} = r(t)\, dt \end{aligned}$$

Nghĩa là r(t) biểu thị mật độ xác suất có điều kiện mà bóng đèn có tuổi thọ t sẽ hỏng trong khoảng thời gian (t, t+dt).

Giả sử X có phân phối mũ. Khi đó do tính chất không nhớ ta có r(t) phải là hằng số. Điều này được kiểm chứng bởi

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

Như vậy hàm tốc độ hỏng đối với phân phối mũ là hằng số. Tham số λ được xem như hàm tốc độ hỏng của phân phối.

Chú ý: Có thể thấy rằng hàm tốc độ hỏng r(t) xác định duy nhất hàm phân phối F(t). Thật vậy từ phương trình (3.4) ta có

$$r(t) = \frac{d/dt F(t)}{1 - F(t)}$$

Tích phân cả hai vế ta được

$$\log(1 - F(t)) = -\int_0^t r(t)\, dt + k$$

Hay viết lại

$$1 - F(t) = e^k \exp\left\{-\int_0^t r(t)\, dt\right\}$$

Cho ta thấy k=0 và

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t r(t)\, dt\right\}$$

Ví dụ 3.4. Giả sử $X_1,...,X_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số tương ứng là $\lambda_1,...,\lambda_n$, với $\lambda_i \neq \lambda_j$ nếu $i \neq j$. Giả sử N là biến ngẫu nhiên độc lập với các biến ngẫu nhiên nói trên và giả sử

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1 \qquad \text{where } P_j = P\{N = j\}$$

Biến ngẫu nhiên X_N được gọi là có phân phối siêu mũ (hyperexponential). Nhờ cách lấy mật độ xác suất có điều kiện ta có thể tính mật độ xác suất của X_N như sau

$$f(t) = f_{X_N}(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{X_N}(t \mid N = j)P_j = \sum_{j=1}^{n} f_{X_j}(t)P_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}$$

ở đây ta sử dụng giả thiết biến ngẫu nhiên N độc lập với các biến ngẫu nhiên $X_1,...,X_n$.

Để hình dung rõ hơn về biến ngẫu nhiên này ta hãy tưởng tượng một thùng chứa n loại pin khác nhau, tuổi thọ của loại pin thứ j là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\lambda_j, j = 1,2,...,n$. Giả sử P_j là tỷ lệ loại pin thứ j trong thùng, $j = 1,2,...,n$. nếu các cục pin được chọn ngẫu nhiên (bất kỳ cục pin nào trong thùng đều được chọn với xác suất như nhau). Khi đó tuổi thọ của pin được chọn ra sẽ có phân phối siêu mũ nói trên. Từ chỗ

$$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} P_j e^{-\lambda_j t}$$

Ta thấy hàm tốc độ hỏng của biến ngẫu nhiên có phân phối siêu mũ là

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^{n} P_j e^{-\lambda_j t}}$$

Nếu ta đặt $\lambda_i = \min(\lambda_1,...,\lambda_n)$, sau đó nhân cả tử số và mẫu số của phân số nói trên với $e^{\lambda_i t}$ ta có

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j \lambda_j e^{-(\lambda_j - \lambda_i)t}}{\sum_{j=1}^{n} P_j e^{-(\lambda_j - \lambda_i)t}} = \frac{P_i \lambda_i + \sum_{j \neq i} P_j \lambda_j e^{-(\lambda_j - \lambda_i)t}}{P_i + \sum_{j \neq i} P_j e^{-(\lambda_j - \lambda_i)t}}$$

Để ý rằng với $i \neq j$ thì $\lambda_j > \lambda_i$, ta rút ra

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = \frac{P_i \lambda_i}{P_i} = \lambda_i$$

Điều này có thể giải thích như sau: ***đối với pin được chọn ngẫu nhiên như trên thì hàm tốc độ hỏng của nó sẽ hội tụ đến hàm tốc độ hỏng của phân phối mũ có tốc độ hỏng bé nhất.***

Ví dụ 3.5. Giả sử X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối mũ với tham số tương ứng λ_1, λ_2. Hãy tính xác suất $P\{X_1 < X_2\}$

Giải: Để tính xác suất trên ta sẽ quy về xác suất có điều kiện với điều kiện X_1.

$$P\{X_1 < X_2\} = \int_0^\infty P\{X_1 < X_2 | X_1 = x\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx$$

$$= \int_0^\infty P\{x < X_2\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x} dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Áp dụng: Giả sử hệ thống âm thanh gồm hai phần chính: radio và loa. Nếu tuổi thọ của radio và của loa là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối mũ với trung bình 1000 giờ và 500 giờ. Tìm xác suất để hệ thống bị hỏng do radio

Giải: theo công thức ở ví dụ 3.5 ta có xác suất cần tính là

$$\frac{1/1000}{1/1000 + 1/500} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3.6. Giả sử $X_1, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối mũ với tham số λ. Khi đó tổng $X_1 + ... + X_n$ sẽ có phân phối gamma với tham số n và λ.

Giải: ta chứng minh bằng quy nạp. Với n=1 là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với n-1, tức là

$$f_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}$$

Khi đó ta có

$$f_{X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n}(t) = \int_0^\infty f_{X_n}(t-s) f_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(s)\,ds$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!}\,ds \quad = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Khẳng định được chứng minh.

Giả sử $X_1,...,X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối mũ với tham số λ_i. Ta sẽ thấy rằng khi đó $Y = \min(X_1,...,X_n)$ cũng có phân phối mũ với tham số $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. điều đó suy ra từ

$$P\{\text{minimum}(X_1,\ldots,X_n) > x\} = P\{X_i > x \text{ for each } i = 1,\ldots,n\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\} \qquad \text{(by independence)} \quad = \prod_{i=1}^{n} e^{-\mu_i x} = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)x\right\}$$

3.3. Quá trình Poisson

3.3.1. Quá trình đếm

Quá trình ngẫu nhiên $\{N(t), t \geq 0\}$ gọi là quá trình đếm nếu *N(t)* biểu thị số lần xảy ra một sự kiện nào đó cho đến thời điểm t.

Ta đưa ra một vài ví dụ về quá trình đếm

a) Gọi *N(t)* là số người vào một cửa hàng nào đó cho đến thời điểm t. Đây là một quá trình đếm. Sự kiện tương ứng là : người vào cửa hàng

Chú ý: nếu ta đặt *N(t)* là số người hiện có trong cửa hàng thì đây không phải là quá trình đếm (vì nó không "đếm" số lần xảy ra sự kiện nào đó).

b) Gọi *N(t)* là số lần xảy ra tai nạn giao thông (mà một công ty bảo hiểm nào đó phải đền bù) cho đến thời điểm t. Sự kiện: xảy ra tai nạn.

c) Gọi *N(t)* là số lần sút bóng vào gôn của một cầu thủ bóng đã sút được cho đến thời điểm t.Sự kiện: sút bóng vào gôn.

Từ định nghĩa của quá trình đếm, ta thấy *N(t)* phải thoả mãn các điều kiện

(i) $N(t) \ge 0$

(ii) *N(t)* có giá trị nguyên không âm

(iii) Nếu $s < t$ **thì** $N(s) \le N(t)$

(iv) Nếu $s < t$ **thì** $N(t) - N(s)$ **bằng số lần xuất hiện sự kiện trong khoảng thời gian** $(s,t]$**.**

Quá trình đếm được gọi là có **gia số độc lập** nếu **số lần xuất hiện sự kiện trong các khoảng thời gian rời nhau là độc lập với nhau.** Ví dụ số lần xuất hiện sự kiện cho đến thời điểm t=10 phút *N(10)* là **độc lập** với số lần xuất hiện sự kiện trong khoảng thời gian từ 10 đến 15 phút. *N(15)-N(10)*.

Quá trình đếm được gọi là có **gia số dừng** **nếu phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số lần xuất hiện sự kiện trong một khoảng thời gian nào đó chỉ phụ thuộc vào độ dài của khoảng thời gian.** Nói cách khác, quá trình có gia số dừng nếu biến ngẫu nhiên chỉ số lần xuất hiện sự kiện trong khoảng thời gian (t_1+s, t_2+s), tức là $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ có cùng phân phối với biến ngẫu nhiên $N(t_2) - N(t_1)$ với mọi $t_1 < t_2, s > 0$.

Nhận xét: giả thiết gia số dừng trong ví dụ a) chỉ hợp lý nếu không có những khoảng thời gian hay những ngày đặc biệt mà nhiều người đến cửa hàng hơn những ngày khác. Vì thế ta thường xét điều kiện gia số dừng trong những khoảng thời gian thích hợp.

3.3.2. Định nghĩa quá trình Poisson

Một trong những quá trình đếm quan trọng nhất là quá trình Poisson. Nó được định nghĩa như sau

Định nghĩa 3.1 Quá trình đếm $\{N(t), t \ge 0\}$ được gọi là quá trình Poisson với cường độ $\lambda, \lambda > 0$ nếu

(i) *N(0)=0*

(ii) Quá trình có gia số độc lập

(iii)Số lần xuất hiện sự kiện trong bất kỳ khoảng thời gian nào có độ dài *t* là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với giá trị trung bình λt . Nghĩa là với mọi $s, t \ge 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Chú ý: từ điều kiện (iii) suy ra quá trình Poisson có gia số dừng và $E[N(t)] = \lambda t$. Điều này giải thích vì sao λ được gọi là cường độ của quá trình.

Để xác định một quá trình đếm có phải là quá trình Poisson hay không ta phải kiểm tra các điều kiện (i)-(iii). điều kiện (i) kiểm tra đơn giản. Điều kiện (ii) thông thường được kiểm tra trực tiếp từ những hiểu biết của chúng ta về quá trình, điều kiện (iii) thường khó kiểm tra. Vì thế ta sẽ xét thêm những **định nghĩa tương đương** của quá trình Poisson.

Định nghĩa 3.2 Hàm *f(.)* được gọi là *o(h)* nếu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Định nghĩa 3.3 Quá trình đếm $\{N(t), t \ge 0\}$ được gọi là quá trình Poisson với cường độ $\lambda, \lambda > 0$ nếu

(i)*N(0)=0.*

(ii)Quá trình có gia số độc lập, dừng.

(iii) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$.

(iv) $P\{N(h) \ge 2\} = o(h)$.

Định lý 3.1 Hai định nghĩa 3.1 và 3.3 là tương đương.

Chứng minh: Ta chỉ ra rằng Định nghĩa 3.3 kéo theo Định nghĩa 3.1.(điều ngược lại người đọc tự chứng minh).

Cố định giá trị $u \geq 0$. Ta đặt

$$g(t) = E[\exp\{-uN(t)\}]$$

Ta thiết lập phương trình vi phân đối với *g(t)* như sau

$$\begin{aligned} g(t+h) &= E[\exp\{-uN(t+h)\}] \\ &= E[\exp\{-uN(t)\}\exp\{-u(N(t+h)-N(t))\}] \\ &= E[\exp\{-uN(t)\}]\,E[\exp\{-u(N(t+h)-N(t))\}] \\ &\qquad\qquad \text{by independent increments} \\ &= g(t)\,E[\exp\{-uN(h)\}] \qquad \text{by stationary increments} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Từ các giả thiết (iii) và (iv) ta suy ra

$$P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$$

Bây giờ lấy kỳ vọng theo các điều kiện $N(h) = 0, N(h) = 1, N(h) \geq 2$ ta có

$$\begin{aligned} E[\exp\{-uN(h)\}] &= 1 - \lambda h + o(h) + e^{-u}(\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= 1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h + o(h) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Từ các phương trình (3.5) và (3.6) ta suy ra

$$g(t+h) = g(t)(1 - \lambda h + e^{-u}\lambda h) + o(h)$$

đẳng thức này kéo theo

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = g(t)\,\lambda\,(e^{-u} - 1) + \frac{o(h)}{h}$$

Cho $h \to 0$ ta được

$$g'(t) = g(t)\,\lambda\,(e^{-u} - 1)$$

Hay tương đương

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(e^{-u} - 1)$$

Chú ý đến điều kiện *g(0)=1*, từ phương trình trên ta có

$$\log(g(t)) = \lambda t(e^{-u} - 1)$$

Hay là

$$g(t) = \exp\{\lambda t(e^{-u} - 1)\}$$

Đây chính là biến đổi Laplace của *N(t)* tính tại giá trị *u*.Nó cũng là biến đổi Laplace của biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình λt. Vì phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên không âm được xác định duy nhất bởi biến đổi Laplace của nó nên ta kết luận *N(t)* có phân phối Poisson với trung bình λt.

3.3.3. Phân phối của thời gian chờ (thời gian đến)

Xét quá trình Poisson và ta quan tâm đến thời gian lần đầu xảy ra sự kiện T_1. Với $n > 1$, ký hiệu T_n thời gian trôi qua giữa lần thứ *(n-1)* xảy ra sự kiện và lần thứ *n.* Dãy $\{T_n, n = 1,2,...\}$ gọi là **dãy thời gian đến trung gian (interarrival times).** Ví dụ nếu $T_1 = 5, T_2 = 10$ nghĩa là lần đầu tiên xảy ra sự kiện tại thời điểm 5 và lần thứ hai tại thời điểm 15. Ta xác định phân phối của T_n. Đầu tiên ta để ý rằng sự kiện $\{T_1 > t\}$ xảy ra nếu không có sự kiện nào của quá trình Poisson xảy ra trong khoảng thời gian $[0,t]$, vì thế

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

Vậy là T_1.có phân phối mũ với trung bình $1/\lambda$. Bây giờ ta tính phân phối của T_2

$$P\{T_2 > t\} = E[P\{T_2 > t \mid T_1\}]$$

Tuy nhiên

$$P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} = P\{0 \text{ events in } (s, s+t] \mid T_1 = s\}$$

$$= P\{0 \text{ events in } (s, s+t]\} \quad = e^{-\lambda t} \tag{3.7}$$

(chú ý : hai đẳng thức cuối cùng trong dãy các đẳng thức trên có được là do tính độc lập và tính dừng của quá trình Poisson). Từ phương trình (3.7) ta kết luận T_2 cũng có phân phối mũ với trung bình $1/\lambda$. Ngoài ra T_2 độc lập với T_1. Lặp lại chuỗi suy luận trên ta có được mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1 **Dãy $\{T_n, n = 1, 2, ...\}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối mũ với giá trị trung bình $1/\lambda$.**

Nhận xét: Các kết luận trên có thể giải thích như sau. Giả thiết về tính dừng và có gia số độc lập là tương đương (về cơ bản) với khẳng định rằng tại bất kỳ thời điểm nào, quá trình lại "tự nó bắt đầu lại", điều đó là bởi vì quá trình tại bất kỳ thời điểm nào đều độc lập với những gì đã xảy ra trước đây (do có gia số độc lập) và có cùng phân phối với quá trình gốc (do có gia số dừng). Mặt khác vì quá trình "không nhớ" nên thời gian chờ có phân phối mũ.

Ta đề cập đến đại lượng S_n, là thời gian đến (xuất hiện) của sự kiện lần thứ n, nó còn gọi là thời gian chờ cho đến khi xuất hiện sự kiện lần thứ n. Dễ dàng thấy rằng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \qquad n \geq 1$$

Từ Mệnh đề 3.1 suy ra S_n có phân phối Gamma với tham số n và λ. Nghĩa là hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad t \geq 0 \tag{3.8}$$

Ta có thể lập luận như sau để đưa đến phương trình (3.8). Sự kiện xuất hiện lần thứ n trước thời điểm t nếu số lần xuất hiện sự kiện tính đến thời điểm t là nhiều hơn hay bằng n. Nghĩa là

$$N(t) \geq n \leftrightarrow S_n \leq t$$

Vì thế

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leqslant t\} = P\{N(t) \geqslant n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Khi lấy vi phân hai vế của phương trình ta có

$$f_{S_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ví dụ 3.7. Giả sử số người nhập cư vào một vùng lãnh thổ mỗi ngày là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 1$.

(a) Tính thời gian (trung bình) cho đến khi người thứ 10 đến nhập cư

(b) Tìm xác suất để thời gian giữa người thứ 10 và thứ 11 đến là quá 2 ngày

Giải:

(a) $E[S_{10}] = 10/\lambda = 10$ days.
(b) $P\{T_{11} > 2\} = e^{-2\lambda} = e^{-2} \approx 0.133$.

Nhận xét : Mệnh đề 3.1 cho ta một cách định nghĩa quá trình Poisson. Ta bắt đầu với dãy $\{T_n, n = 1, 2, ...\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với giá trị trung bình $1/\lambda$.

Ta đặt $S_n \equiv T_1 + T_2 + \cdots + T_n$

Ta xác định quá trình đếm như sau:

$$N(t) = \max\{n : S_n \le t\}$$

Quá trình này là Poisson với cường độ λ.

3.3.4. Một số tính chất khác của quá trình Poisson

Xét quá trình Poison $\{N(t), t \geq 0\}$ với cường độ λ. Giả sử mỗi lần sự kiện xuất hiện nó được chia thành **loại một** hoặc **loại hai**. Mỗi sự kiện được xếp loại một với xác suất p và loại hai với xác suất 1-p, độc lập với các sự kiện khác.

Ví dụ lượng khách hàng đến một cửa hàng là quá trình Poisson với cường độ λ., giả sử khách hàng tới là nam giới với xác suất $\frac{1}{2}$ và nữ giới với xác suất $\frac{1}{2}$.Loại một chỉ khách nam giới còn loại hai chỉ khách nữ giới. Giả sử $N_1(t)$ và $N_2(t)$ ký hiệu số sự kiện loại một và loại hai xuất hiện trong đoạn [0,t]. Chú ý $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Ta có tính chất sau

Mệnh đề 3.2 **Các quá trình $\{N_1(t), t \geq 0\}$ và $\{N_2(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ tương ứng λp và $\lambda(1-p)$. Ngoài ra hai quá trình này độc lập.**

Chứng minh: Ta tính xác suất đồng thời $P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\}$. Ta lý luận như sau

$$P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = k\} P\{N(t) = k\}$$

để có n lần sự kiện loại một và m lần sự kiện loại hai xuất hiện thì tổng cộng phải có n+m lần xuất hiện sự kiện trong khoảng thời gian [0, t]. Nghĩa là

$$P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = k\} = 0 \qquad \text{when } k \neq n + m$$

Từ đó ta tính

$$\begin{aligned} P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\} &= P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n + m\} P\{N(t) = n + m\} \\ &= P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n + m\} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \end{aligned}$$

Tuy nhiên với điều kiện xuất hiện n+m sự kiện, từ chỗ mỗi sự kiện có xác suất p để là loại một và xác suất 1-p để là loại hai. Điều đó kéo theo rằng để có m sự kiện loại một và m sự kiện loại hai thì xác suất xảy ra là xác suất nhị thức

$$\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m$$

Nghĩa là

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\} = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$
$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

(3.9)

Lấy tổng theo m ta được

$$P\{N_1(t)=n\} = \sum_{m=0}^{\infty} P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\}$$
$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$
$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!}$$

Chứng tỏ $\{N_1(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λp (kiểm tra các điều kiện khác của định nghĩa 3.1).

Tính toán tương tự ta có

$$P\{N_2(t)=m\} = e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

Vậy là $\{N_2(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda(1-p)$. Cuối cùng từ (3.9) ta suy ra hai quá trình là độc lập.

Nhận xét :

1)Việc hai quá trình $\{N_1(t), t \geq 0\}$ và $\{N_2(t), t \geq 0\}$ là Poisson không gây ngạc nhiên. Nếu có ngạc nhiên thì là ở chỗ hai quá trình là độc lập. Hãy hình dung lượng khách hàng tới ngân hàng là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 1$ (trong một giờ) và giả sử đối với mỗi khách hàng đến thì với xác suất ½ là đàn ông còn xác suất ½ là phụ nữ. Bây giờ giả sử có 100 người đàn ông tới trong 10 giờ đầu tiên. Khi đó sẽ có bao nhiêu người phụ nữ tới cũng trong thời gian đó. Người ta có thể nghĩ là bởi vì có

100 nam giới tới và vì xác suất khách nam là ½ nên tổng số khách tới là 200 và vì vậy số khách nữ sẽ là 100. Người ta đã chỉ ra rằng lập luận như vậy là không đúng và số (trung bình) khách nữ đến ngân hàng trong 10 giờ đầu là 5 người (độc lập với số đàn ông đến trong thời gian đó).
2) Mệnh đề 3.2 và tổng quát hoá của nó (khi sự kiện xuất hiện nó có thể xếp vào một trong m loại khác nhau) thường được xét trong các bài toán thực tế. Ví dụ công ty bảo hiểm phải đền bù thiệt hại cho người mua bảo hiểm khi có tai nạn xảy ra. Nhưng người mua có thể mua một trong m gói sản phẩm của bảo hiểm đưa ra. Đây chính là ví dụ minh hoạ cho mệnh đề 3.2

Ví dụ 3.8. Giả sử dòng người nhập cư vào một vùng lãnh thổ A nào đó tuân theo quy luật Poisson với cường độ 10 người/tuần lễ, và nếu trong số người nhập cư thì người nói được tiếng Anh có tỷ lệ 1/12. Tìm xác suất để không có người nhập cư nói được tiếng Anh vào vùng A trong thời gian suốt một tháng.
Giải : Do mệnh đề 3.2 số người nhập cư nói được tiếng Anh vào vùng A trong thời gian một tháng có phân phối Poisson với trung bình $4.10.\frac{1}{12}=\frac{10}{3}$. Từ đó xác suất phải tìm là $e^{-10/3}$.
Ví dụ 3.9. Xét một hệ thống mà trong đó mỗi cá thể tại bất kỳ thời điểm nào có thể xếp vào một trong r trạng thái của hệ thống. Giả sử sự thay đổi trạng thái tuân theo quy luật xích Markov với ma trận xác suất chuyển $P_{ij}, i, j=1,...,r$. Giả sử các cá thể chuyển động trong hệ thống một cách độc lập với nhau. Giả sử số người lúc ban đầu ở các trạng thái 1,2,…,r. là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối Poisson với tham số $\lambda_1,...,\lambda_r$. Ta tìm phân bố đồng thời của số các thể ở các trạng thái 1,2,…,r. tại thời điểm n nào đó.
Giải : Cố định *i*. Giả sử $N_j(i)$, $j=1,2,...,r$, ký hiệu số các thể, lúc ban đầu ở trạng thái i, sẽ ở trạng thái j tại thời điểm n. Với mỗi một trong số những người lúc đầu ở trạng thái i, sẽ chuyển sang trạng thái j ở thời điểm nvới xác suất $p_{ij}^{(n)}$ (độc lập với nhau). Vì vậy $N_j(i)$, $j=1,2,...,r$ là những biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối

Poisson với tham số $\lambda_i p_{ij}^{(n)}$. Từ đó suy ra số cá thể ở trạng thái j tại thời điểm n bằng $\sum_{i=1}^{r} N_j(i)$ là những biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối Poisson với trung bình $\sum_i \lambda_j p_{ij}^{(n)}$ với $j = 1, 2, ..., r.$

Ví dụ 3.10. (bài toán sưu tập trái phiếu) Giả sử có m loại trái phiếu khác nhau. Một người chuyên mua trái phiếu. tại mỗi thời điểm người đó mua một (và chỉ một) loại trái phiếu : mua trái phiếu loại j với xác suất p_j, $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Ký hiệu N là số trái phiếu người đó cần mua để có đủ các loại trái phiếu. Hãy tìm E[N].

Giải : nếu ta đặt N_j là số trái phiếu cần mua để có được trái phiếu loại j, khi đó

$$N = \{\max N_j, 1 \le j \le m\}.$$

Hiển nhiên N_j có phân phối hình học với tham số p_j. Tuy nhiên đáng tiếc là các N_j không độc lập. Ta sẽ chuyển sang bài toán với các biến ngẫu nhiên độc lập như sau

Giả sử số trái phiếu được mua ở mỗi thời điểm là quá trình Poisson với tham số λ. Ta nói sự kiện của quá trình Poisson này là loại j nếu trái phiếu được mua là loại j. Đặt $N_j(t)$ là số trái phiếu loại j được mua cho đến thời điểm t. Theo mệnh đề 3.2 (mở rộng) các quá trình $\{N_j(t), t \ge 0\}$, $j = 1, 2, ..., m$ là các quá trình Poisson độc lập với cường độ tương ứng $\lambda p_j = p_j$. Giả sử X_j là thời gian lần đầu tiên mua được cổ phiếu loại j. Đặt

$$X = \max_{1 \le j \le m} X_j$$

Ký hiệu thời gian hoàn tất quá trình sưu tập. Vì X_j là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối mũ với cường độ p_j cho nên

$$\begin{aligned} P\{X < t\} &= P\{\max X_j < t\} \\ &= P\{X_j < t, \text{ for } j = 1, \dots, m\} \\ &= \prod_{j=1}^{m} (1 - e^{-p_j t}) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\}\, dt$$
$$= \int_0^\infty \left\{1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - e^{-p_j t})\right\} dt \qquad (3.10)$$

Bây giờ ta sẽ tính E{N}. Đặt T_i là thời gian chờ trung gian thứ i của quá trình Poisson đếm số các cổ phiếu được mua. Khi đó

$$X = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

Vì các biến T_i là độc lập, có phân phối mũ với cường độ 1, và N độc lập với các T_i nên ta có

$$E[X \mid N] = NE[T_i] = N$$

Lấy kỳ vọng hai vế của đẳng thức trên ta suy ra

$$E[X] = E[N]$$

Vậy ta tính được E[N] theo (3.10).

3.3.5. Phân phối có điều kiện của thời gian đến

<u>Đặt vấn đề :</u> giả sử ta biết chính xác rằng từ lúc bắt đầu quan sát cho đến thời điểm t, có đúng một lần xảy ra sự kiện của quá trình Poisson. Chúng ta muốn xác định phân phối xác suất của thời gian xảy ra sự kiện. Vì quá trình Poisson có gia số độc lập và dừng nên dường như là mỗi khoảng có độ dài bằng nhau có cùng xác suất để cho sự kiện xảy ra trong khoảng đó. Nói cách khác **thời gian xảy ra sự kiện có phân phối đều trên khoảng [0,t]**. điều này dễ dàng kiểm chứng từ chỗ

$$P\{T_1 < s \mid N(t) = 1\} = \frac{P\{T_1 < s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{P\{1 \text{ event in } [0, s), 0 \text{ events in } [s, t]\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{P\{1 \text{ event in } [0, s)\}P\{0 \text{ events in } [s, t]\}}{P\{N(t) = 1\}} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Kết quả này có thể tổng quát cho trường hợp tính phân phối có điều kiện của các thời gian chờ $S_1, S_2, ..., S_n$ với điều kiện $N(t) = n$. Để chứng minh kết quả này ta cần đến một số tính chất của thống kê thứ tự(*người đọc lần đầu tiên có thể bỏ qua đoạn này để đọc thẳng vào kết quả và ứng dụng của nó*)

Giả sử $Y_1, Y_2 ..., Y_n,$ là các biến ngẫu nhiên. Ta nói $Y_{(1)}, Y_{(2)} ..., Y_{(n)}$ là **các thống kê thứ tự** tương ứng với $Y_1, Y_2 ..., Y_n,$ nếu $Y_{(k)}$ là giá trị nhỏ nhất thứ k trong số $Y_1, Y_2 ..., Y_n,$ *k=1,2,…,n*. **Ví dụ :** $n = 3, Y_1 = 4, Y_2 = 5, Y_3 = 1$ khi đó $Y_{(1)} = 1, Y_{(2)} = 4, Y_{(3)} = 5$.

Nếu $Y_1, Y_2 ..., Y_n,$ là các biến ngẫu nhiên liên tục độc lập, cùng phân phối với mật độ xác suất f thì mật độ đồng thời của thống kê thứ tự $Y_{(1)}, Y_{(2)} ..., Y_{(n)}$ cho bởi

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \qquad y_1 < y_2 < \cdots < y_n$$

Điều đó có được là từ hai tính chất dưới đây

(i) $(Y_{(1)}, Y_{(2)} ..., Y_{(n)})$ sẽ bằng $(y_1, y_2 ..., y_n)$ nếu $(Y_1, Y_2 ..., Y_n)$ bằng bất kỳ cái nào trong số n ! các hoán vị của $(y_1, y_2 ..., y_n)$.

(ii) Mật độ xác suất khi $(Y_1, Y_2 ..., Y_n)$ bằng $(y_{i_1}, y_{i_2} ..., y_{i_n})$ là $\prod_{j=1}^{n} f(y_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} f(y_j)$ khi $i_1, ..., i_n$ là hoán vị của $1, ..., n$.

Nếu $Y_i, i = 1, 2, ..., n$ có phân phối đều trên (0,t) thì khi đó mật độ đồng thời của thống kê thứ tự $(Y_{(1)}, Y_{(2)} ..., Y_{(n)})$ là

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý sau

Định lý 3.2 Với điều kiện $N(t)=n$, các thời gian đến $S_1,...S_n$ có cùng phân phối với các thống kê thứ tự tương ứng của n biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều trên đoạn $(0,t)$.

Chứng minh : Để tính mật độ có điều kiện của $S_1,...S_n$ với điều kiện $N(t)=n$ ta chú ý rằng với $0<s_1<s_2<...<t$ thì

$$\{S_1=s_1,S_2=s_2,...S_n=s_n,N(t)=n\}=\{T_1=s_1,T_2=s_2-s_1,...,T_n=s_n-s_{n-1},T_{n+1}>t-s_n\}$$

Sử dụng mệnh đề 3.1 ta có mật độ đồng thời có điều kiện của $S_1,...S_n$ với điều kiện $N(t)=n$ là

$$\begin{aligned} f(s_1,\ldots,s_n|n) &= \frac{f(s_1,\ldots,s_n,n)}{P\{N(t)=n\}} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1}\lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)}\cdots\lambda e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})}e^{-\lambda(t-s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \qquad 0<s_1<\cdots<s_n<t \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh xong.

Nhận xét : Kết quả trên thường được diễn tả như sau : dưới điều kiện n sự kiện đã xảy ra trong khoảng thời gian (0,t), khi đó các thời gian xuất hiện sự kiện $S_1,...S_n$ xem như các biến ngẫu nhiên không thứ tự là **độc lập và có phân phối đều trên khoảng (0, t)**. Nói cách khác các thời gian đến là thống kê thứ tự của phân phối đều trên khoảng (0, t).

Trong mệnh đề 3.2 ta biết rằng nếu mỗi sự kiện của quá trình Poisson được phân loại một cách độc lập : loại I với xác suất p và loại II với xác suất 1-p. Bây giờ ta xét bài toán tổng quát hơn. Giả sử có k loại sự kiện và xác suất để sự kiện được xếp vào loại i (i=1,2,...,k) phụ thuộc vào thời gian mà sự kiện xuất hiện. Ta ký hiệu xác suất **sự kiện xuất hiện tại thời điểm y, được phân loại i** là $P_i(y), i=1,...,k$. Ở đây $\sum_{i=1}^{k}P_i(y)=1$. Ta có mệnh đề tổng quát sau

Mệnh đề 3.3 **Nếu** $N_i(t), i = 1,\ldots,k$ **biểu thị số các sự kiện loại i xuất hiện từ đầu cho đến thời điểm t. Khi đó** $N_i(t), i = 1,\ldots,k$ **là các biến ngẫu nhiên Poisson độc lập với trung bình**

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)ds$$

Ví dụ 3.11. (An Infinity Server Queue) Giả sử số khách đến một trung tâm phục vụ là quá trình Poisson với tham số λ. Khi đến nơi khách được phục vụ ngay mà không phải chờ và thời gian phục vụ khách là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối xác suất G. Hãy tìm phân phối xác suất của $X(t)$ số khách hàng đã được phục vụ xong trong khoảng thời gian (0, t] và $Y(t)$ số khách hàng đang được phục vụ tại thời điểm t.

Giải : Ta xếp khách vào loại 1 nếu đến thời điểm t khách đã được phục vụ, xếp vào loại 2 nếu dến thời điểm t chưa phục vụ xong. Nếu khách đến vào thời điểm $s, s \le t$ thì khách thuộc loại 1 nếu thời gian phục vụ khách $\le t - s$. Vậy xác suất đẻ khách đó thuộc loại 1 là G(t-s). Tương tự nếu khách đến vào thời điểm s thì xác suất khách thuộc loại 2 là $\overline{G}\ (t-s) = 1 - G(t-s)$. Theo mệnh đề 3.3 ta có

*) X(t) có phân phối Poisson với trung bình

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t G(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t G(y)\, dy$$

*) Y(t) có phân phối Poisson với trung bình

$$E[Y(t)] = \lambda \int_0^t \bar{G}(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t \bar{G}(y)\, dy$$

Hơn nữa X(t) và Y(t) độc lập với nhau.

Ví dụ 3.12. Khi một người bị nhiễm virus HIV thì phải một thời gian dài về sau mới có những triệu chứng nhận biết được. Ta sử dụng mô hình Poisson để ước lượng số người bị nhiễm HIV.

Giả sử số người bị nhiễm HIV là quá tình Poisson với tham số λ chưa biết. Giả sử thời gian từ khi bị nhiễm HIV đến khi xuất hiện triệu chứng khác thường là biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất G đã biết. Thời gian ủ bệnh của mỗi người là các biến ngẫu nhiên độc lập. Đặt $N_1(t)$ là số nguòi đã có triệu chứng khác thường tính đến thời điểm t, $N_2(t)$ là số người chưa có triệu chứng khác thường (nhưng đã nhiễm HIV) cho đến thời điểm t. Một người bị nhiễm virus tại thời điểm s, có triệu chứng khác thường cho đến thời điểm t với xác suất $G(t-s)$ và chưa có triệu chứng khác thường với xác suất $\overline{G}(t-s)$. Theo mệnh đề 3.3 $N_1(t), N_2(t)$ là các biến ngẫu nhiên Poisson độc lập có trung bình

$$E[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t G(y)\, dy$$

$$E[N_2(t)] = \lambda \int_0^t \bar{G}(t-s)\, ds = \lambda \int_0^t \bar{G}(y)\, dy$$

Người ta ước lượng số người bị nhiễm HIV nhưng chưa thành AIDS như sau

1) Nếu n_1 là số người đã ở giai đoạn AIDS tính đến thời điểm t. Ta có ước lượng

$$n_1 \approx E[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(y)\, dy$$

Từ đó suy ra

$$\hat{\lambda} = n_1 \Big/ \int_0^t G(y)\, dy$$

2) Số người bị nhiễm HIV nhưng chưa thành AIDS tính đến thời điểm t được ước lượng bởi

$$\text{estimate of } N_2(t) = \hat{\lambda} \int_0^t \bar{G}(y)\, dy = \frac{n_1 \int_0^t \bar{G}(y)\, dy}{\int_0^t G(y)\, dy}$$

Nếu G là phân phối mũ với trung bình μ. Khi đó $\overline{G}(y) = e^{-y/\mu}$ thay vào ta có

$$\text{estimate of } N_2(t) = \frac{n_1 \mu(1 - e^{-t/\mu})}{t - \mu(1 - e^{-t/\mu})}$$

Nếu t=16 năm, $\mu = 10$ năm, $n_1 = 220$ nghìn, khi đó ước lượng của số người nhiễm HIV nhưng chưa chuyển sang giai đoạn AIDS là

$$\text{estimate} = \frac{2200(1 - e^{-1.6})}{16 - 10(1 - e^{-1.6})} = 218.96$$

Theo mô hình trên, nếu thời gian ủ bệnh có phân phối mũ với trung bình 10 năm và trong vòng 16 năm (tính đến thời điểm nào đó) có 220 nghìn người mắc bệnh AIDS thì tính đến thời điểm ấy có 219 nghìn người nhiễm HIV nhưng chưa chuyển sang giai đoạn AIDS.

3.4. Quá trình Poisson tổng quát

3.4.1. Quá trình Poisson không thuần nhất

Trong mục này chúng ta nghiên cứu hai mở rộng của quá trình Poisson. Mở rộng đầu tiên là xét đến quá trình Poison không thuần nhất (hay còn gọi là không dừng), trong đó **cường độ đến ở thời điểm t là hàm của t**.

Định nghĩa 3.4 **Quá trình đếm $\{N(t), t \geq 0\}$ được gọi là quá trình Poisson không thuần nhất với hàm cường độ $\lambda(t), t \geq 0$ nếu**

(i) *N(0)=0*

(ii) Quá trình $\{N(t), t \geq 0\}$ có gia số độc lập

(iii) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

(iv) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t) + o(h)$

Nhận xét : *) nếu ta đặt

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$$

Khi đó có thể chứng minh được rằng

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-[m(s+t)-m(s)]} \frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!}, \qquad n \geq 0$$

(ta bỏ qua chứng minh này)

Nghĩa là $N(s+t) - N(s)$ là biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình $m(s+t) - m(s)$.

điều này suy ra (cho s=0) $N(t)$ có phân phối Poisson với trung bình $m(t)$. Vì thế ta gọi $m(t)$ là hàm trung bình của quá trình Poisson không thuần nhất.

*) quá trình Poison không thuần nhất không đòi hỏi điều kiện gia số có phân phối dừng.

Ví dụ 3.13. Một cửa hàng bán điện thoại mở cửa lúc 8 giờ sáng. Từ 8 đến 11 giờ, lượng khách (trung bình) đến cửa hàng tăng đều đều, bắt đầu là 5 khách/giờ lúc 8 giờ, cực đại là 20 khách/giờ lúc 11 giờ. Từ 11 giờ đến 1 giờ chiều, lượng khách trung bình là 20 khách/giờ. Tuy nhiên từ 1 giờ chiều đến 5 giờ chiều, lượng khách giảm dần đều và đến lúc cuối chỉ còn 12 khách/giờ. Giả sử lượng khách vào cửa hàng trong các khoảng thời gian rời nhau là các biến ngẫu nhien độc lập.

a)Hãy tìm mô hình xác suất phù hợp để mô tả lượng khách đến cửa hàng.

b) Tìm xác suất sao cho không có khách đến cửa hàng trong khoảng thời gian từ 8giờ 30 đến 9 giờ 30 sáng.

c) Tìm số khách (trung bình) đến trong khoảng thời gian đó.

Giải : a) Mô hình xác suất phù hợp mô tả lượng khách đến là quá rình Poisson không thuần nhất với hàm cường độ

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ 20, & 3 \leqslant t \leqslant 5 \\ 20 - 2(t-5), & 5 \leqslant t \leqslant 9 \end{cases}$$

Và

$$\lambda(t) = \lambda(t-9) \qquad \text{for } t > 9$$

Chú ý là $N(t)$ chỉ số khách đến cửa hàng trong t giờ đầu tiên tính từ lúc cửa hàng mở cửa. Nghĩa là ta không đếm thời gian giữa 5 giờ chiều và tói 8 giờ sáng. Nếu vì một lý do nào đó ta muốn đếm số khách trong suốt cả 24 giờ, khi đó hàm cường độ phải là

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 8 \\ 5 + 5(t-8), & 8 \leqslant t \leqslant 11 \\ 20, & 11 \leqslant t \leqslant 13 \\ 20 - 2(t-13), & 13 \leqslant t \leqslant 17 \\ 0, & 17 < t \leqslant 24 \end{cases}$$

Và

$$\lambda(t) = \lambda(t-24) \qquad \text{for } t > 24$$

b)Lượng khách đến trong khoảng thời gian từ 8 giờ 30 đến 9 giờ 30 là biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình $m(\frac{3}{2}) - m(\frac{1}{2})$ (theo như biểu thức đầu) hoặc $m(\frac{19}{2}) - m(\frac{17}{2})$ (theo biểu thức sau). Xác suất không có khách đến trong khoảng thời gian nói trên là

$$\exp\left\{-\int_{1/2}^{3/2} (5+5t)\,dt\right\} = e^{-10}$$

c) Số khách (trung bình) tới là

$$\int_{1/2}^{3/2} (5+5t)\,dt = 10$$

3.4.2. Quá trình Poisson phức hợp

Định nghĩa 3.5 Quá trình ngẫu nhiên $\{X(t), t \geq 0\}$ được gọi là quá trình Poisson phức hợp nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$

với $\{N(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson và $\{Y_i, i \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và cũng độc lập với $\{N(t), t \geq 0\}$.

Các ví dụ của quá trình Poisson phức hợp

1) Nếu $Y_i \equiv 1$ khi đó $X(t) = N(t)$ và ta có quá trình Poisson thông thường.
2) Giả sử số xe buýt tới sân vận động là quá trình Poisson và giả sử số khách trên mỗi xe buýt là biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Khi đó $\{X(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson phức hợp và $X(t)$ chỉ số khách đến sân vân động cho đén thời diểm t. Trong phương trình (3.11) Y_i chỉ số khách trên xe buýt thứ i.
3) Giả sử số khách hàng rời siêu thị là quá trình Poison. Nếu Y_i chỉ số tiền khách hàng thứ i đã mua ở siêu thị là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối. Khi đó $\{X(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson phức hợp và $X(t)$ chỉ tổng số tiền khách hàng đã mua tính đến thời điểm t.
4) Một công ty bảo hiểm có vốn ban đầu là *u,* thu được từ khách hàng số tiền bảo hiểm với tốc độ là *c.* Tại mỗi thời điểm *t,* công ty phải trả số tiền bảo hiểm tổng cộng là *S(t)* cho các khách hàng có nhu cầu đòi tiền bảo hiểm.(tiền bồi thường bảo hiểm) Vậy quỹ vốn là *U(t)=u+ct-S(t).* Nếu *U(t)<0* thì có sự cố phá sản (hay thiệt hại). Tiền bồi thường bảo hiểm được xác định bởi

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_1 \quad \text{nếu } N(t) > 0$$

$$S(t) = 0 \ \text{ nếu } \ N(t) = 0$$

Trong đó *N(t)* là quá trình Poisson biểu thị số các yêu cầu tiền bảo hiểm cho đến thời điểm *t.* Các số tiền đòi trả $(\xi_k)_{k \geq 1}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng và phương sai hữu hạn. Người ta rất quan tâm đến các xác suất thiệt hại (ruin probability)

*) Xác suất thiệt hại trong khoảng thời gian hữu hạn

$$\psi(u,T) = P\{\mathrm{U(t)}<0 \text{ với một } t \text{ nào đó} \le T\},\quad 0 < T < \infty, u \ge 0$$

*) Xác suất thiệt hại trong khoảng thời gian vô hạn

$$\psi(u) = \psi(u,\infty) \quad \text{với } u \ge 0$$

*) Thời điểm thiệt hại $\tau(T)$là thời điểm ngẫu nhiên được xác định bởi

$$\tau(T) = \inf\{t : 0 \le t \le T, U(t) < 0\}$$

Bài toán tìm xác suất thiệt hại rất có ý nghĩa cả về phương diện lý thuyết cũng như ứng dụng. Hiện đã có thuật toán tính xác suất thiệt hại trong một số trường hợp.

Bây giờ ta tính kỳ vọng và phương sai của $X(t)$. Muốn vậy ta tính thông qua kỳ vọng có điều kiện

$$E[X(t)] = E[E[X(t) \mid N(t)]]$$

Ta tính như sau

$$E[X(t) \mid N(t) = n] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t) = n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid N(t) = n\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = nE[Y_1]$$

Ta đã sử dụng giả thiết về tính độc lập của các Y_i và $N(t)$. Từ đẳng thức trên suy ra

$$E[X(t) \mid N(t)] = N(t)E[Y_1] \tag{3.12}$$

Vì vậy nên khi lấy kỳ vọng hai vế của (3.12) ta được

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1] \tag{3.13}$$

Để tính phương sai ta phải dùng công thức phương sai có điều kiện. Người ta đã tính toán ra phương sai như sau

$$Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2] \quad (3.14)$$

.

Ví dụ 3.14. Giả sử các gia đình di cư đến một vùng nào đó là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 2$/tuần lễ. Nếu số người trong mỗi gia đình là độc lập và lấy các giá trị :*1, 2, 3, 4* với xác suất tương ứng $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$. Tìm số người trung bình di cư đến cùng đó trong mỗi khoảng htời gian 5 tuần lễ.

Giải : Ký hiệu Y_1 số người trong gia đình thứ *i.* Ta có

$$E[Y_i] = 1\cdot\tfrac{1}{6} + 2\cdot\tfrac{1}{3} + 3\cdot\tfrac{1}{3} + 4\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{2},$$
$$E[Y_i^2] = 1^2\cdot\tfrac{1}{6} + 2^2\cdot\tfrac{1}{3} + 3^2\cdot\tfrac{1}{3} + 4^2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{43}{6}$$

Ký hiệu *X(5)* số người di cư đến vùng nói trên trong khoảng thời gian 5 tuần lễ. Từ các phương trình (3.13) và (3.14) ta suy ra

$$E[X(5)] = 2\cdot 5\cdot\tfrac{5}{2} = 25$$

$$\mathrm{Var}[X(5)] = 2\cdot 5\cdot\tfrac{43}{6} = \tfrac{215}{3}$$

Ví dụ 3.15. (chu kỳ nhàn rỗi tại một trạm phục vụ với dòng đến Poisson). Ta xét một trạm phục vụ đơn (trạm điện thoại công cộng chẳng hạn). Số khách đến gọi điện là quá trình Poisson với cường độ λ. Khách đến được phục vụ ngay nếu trạm rảnh rỗi ; nếu trạm bận thì khách phải xếp hàng chờ. Thòi gian phục vụ khách là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Hệ thống rảnh rỗi nếu không có khách hàng, và bận nếu nếu có khách hàng trong hệ thống. **Chu kỳ bận** bắt đầu khi khách hàng đến mà hệ thống còn rảnh rỗi. Do tính chất không nhớ của dòng đến Poisson nên phân phối xác suất của độ dài chu kỳ bận là như nhau cho mỗi chu kỳ. Ký hiệu B là độ dài của chu kỳ bận.Ta tính kỳ vọng và phương sai của B.

Để bắt đầu ta ký hiệu *S* là thời gian phục vụ cho khách hàng đầu tiên in chu kỳ bận và *N(S)* là số khách hàng đến trong thời gian này. Nếu *N(S)=0* thì chu kỳ bận sẽ kết thúc khi khách hàng ban đầu được phục vụ xong. Vì thế *B=S* trong trường hợp này. Giả sử có một khách hàng đến trong khoảng thời gian khách ban đầu đang được phục vụ. Như vậy trong thời gian S chỉ có duy nhất một khách đợi.Khi đó nếu *N(S)=1* thì

$$B = S + B_1$$

với B_1 độc lập với *S* và có cùng phân phối với *B.*

Xét trường hợp tổng quát khi *N(S)=n* nghĩa là có n khách đợi trong khoảng thời gian phục vụ khách hàng ban đầu.Để xác định phân phối của thời gian còn lại của chu kỳ bận ta chú ý rằng thứ tự của khách đến không ảnh hưởng tới phân phối của thời gian bận còn lại. Giả sử trong n khách gọi là $C_1,...,C_n$, khách C_1 được phục vụ đầu tiên **nhưng khách C_2 vẫn không được phục vụ cho đến khi nào trong hệ thống chỉ còn $C_2,...,C_n$.** Chẳng hạn như bất kỳ khách nào tới trong khi khách C_1 đang được phục vụ sẽ được phục vụ trước khách C_2**.** Tương tự **khách C_3 vẫn không được phục vụ cho đến khi nào trong hệ thống chỉ còn $C_3,...,C_n$...**Để ý rằng các khoảng thời gian từ khi bắt đầu phục vụ khách C_i đến khách C_{i+1} là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối thời gian bận. Nếu ký hiệu $B_1, B_2...$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với thời gian bận khi đó ta có

$$B = S + \sum_{i=1}^{N(S)} B_i$$

Từ đó ta tính

$$E[B \mid S] = S + E\left[\sum_{i=1}^{N(S)} B_i \mid S\right]$$

$$\mathrm{Var}(B \mid S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i \mid S\right)$$

Với S đã cho thì tổng $\sum_{i=1}^{N(S)} B_i$ là quá trình Poisson phức hợp, vậy theo công thức (3.13) và (3.14) ta có

$$E[B \mid S] = S + \lambda S E[B] = (1 + \lambda E[B])S$$
$$\operatorname{Var}(B \mid S) = \lambda S E[B^2]$$

Từ đó suy ra

$$E[B] = E[E[B \mid S]] = (1 + \lambda E[B])E[S]$$

Hay là

$$E[B] = \frac{E[S]}{1 - \lambda E[S]}$$

Tương tự

$$\operatorname{Var}(B) = \frac{\operatorname{Var}(S) + \lambda E^3[S]}{(1 - \lambda E[S])^3}$$

Ví dụ 3.16. Trong ví dụ 3.14 tìm xấp xỉ xác suất để ít nhất có 240 người nhập cư trong vòng 50 tuần tiếp theo.

Giải : Từ $\lambda = 2,\ E[Y_i] = 5/2,\ E[Y_i^2] = 43/6,$ ta thấy rằng

$$E[X(50)] = 250, \qquad \operatorname{Var}[X(50)] = 4300/6$$

Xác suất cần tìm là

$$\begin{aligned} P\{X(50) \geqslant 240\} &= P\{X(50) \geqslant 239.5\} \\ &= P\left\{\frac{X(50) - 250}{\sqrt{4300/6}} \geqslant \frac{239.5 - 250}{\sqrt{4300/6}}\right\} \\ &= 1 - \phi(-0.3922) \\ &= \phi(0.3922) \\ &= 0.6525 \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1 : Thời gian cần thiết để sửa chữa một cái máy là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình ½(giờ).

a) Tìm xác suất để thời gian sửa máy vượt quá ½ giờ.
b) Tìm xác suất để thời gian sửa máy ít nhất là 12 ½ giờ, biết rằng thòi gian sửa đã vượt quá 12 giờ

Bài 2 : Một khách hàng đến một quầy thanh toán trong siêu thị. Đã có năm người khách ở hàng đợi, một người đang làm thủ tục thanh toán và bốn người khác đang đợi. Nếu thời gian thanh toán cho mỗi khách hàng là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số μ, tìm thời gian (trung bình) khách hàng phải đợi cho đến khi thanh toán xong.

Bài 3 : Giả sử X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ. Không cần tính toán hãy chỉ ra đẳng thức nào dưới đây là đúng đắn. Giải thích lý do

a) $E[X^2 \mid X > 1] = E[(X+1)^2]$

b) $E[X^2 \mid X > 1] = E[X^2] + 1$

c) $E[X^2 \mid X > 1] = (1 + E[X])^2$

Bài 4 : A và B cùng vào một cửa hàng cắt tóc. A cạo râu còn B cắt tóc. Nếu thời gian cắt tóc (cạo râu) là các biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình 20 (15) phút và nếu cả A và B được phục vụ ngay lập tức, hãy tìm xác suất để B xong trước A.

Bài 5 : Nếu X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập, giá trị liên tục, không âm. Hãy chứng minh rằng

$$P\{X_1 < X_2 \mid \min(X_1, X_2) = t\} = \frac{r_1(t)}{r_1(t) + r_2(t)}$$

ở đây $r_i(t)$ là hàm tốc độ hỏng của X_i.

Bài 6 : Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối mũ với trung bình tương ứng là $1/\lambda_1$ và $1/\lambda_2$. Khi đó

a) Sử dụng tính chất không nhớ của phân phối mũ hãy giải thích trực quan khi đó Z=min(X,Y) cũng có phân phối mũ.
b) Tìm phân phối có điều kiện của Z với điều kiện Z=X
c) Đưa ra giải thích trực quan rằng phân phối có điều kiện của Y-Z với điều kiện Z=X là phân phối mũ với trung bình $1/\lambda_2$.

Bài 7: Giả sử $X, Y_1, ..., Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ. X **c**ó **c**ường độ λ **v**à Y_i **c**ó **c**ường độ μ. Giả sử A_j là sự kiện biến ngẫu nhiên nhỏ thứ j trong n+1 biến ngẫu nhiên nói trên là một trong số các Y_i. Tìm $p = P\{X > \max Y_i\}$ bằng cách sử dụng đông nhất thức

$$p = P(A_1 ... A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)...P(A_n \mid A_1 A_2 ... A_{n-1})$$

Bài 8: Giả sử X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số μ.

Đặt $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ và $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$. Hãy tìm

a) $E[X_{(1)}]$

b) $Var[X_{(1)}]$

c) $E[X_{(2)}]$

d) $Var[X_{(2)}]$

Bài 9: Cũng câu hỏi như bài 8 nhưng giả sử X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số $\mu_i, i = 1, 2$.

Bài 10: Xét một hệ thống có hai trạm phuc vụ. Khách hàng đến đầu tiên được phục vụ tại trạm thứ nhất, sau đó sang trạm thứ hai. Thời gian phục vụ tại trạm thứ i là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\mu_i, i = 1, 2$. Khi bạn tới bạn thấy trạm thứ nhất không có khách hàng còn trạm thứ hai có hai người, Khách hàng A đang được phục vụ còn khách hàng B đang đợi.

a) Tìm xác suất để khách hàng A vẫn đang được phục vụ khi bạn đã chuyển sang trạm thứ hai
b) Tìm xác suất để khách hàng B đang được phục vụ khi bạn chuyển sang trạm thứ hai.
c) Tìm E[T] ở đây T là thời gian bạn ở trong hệ thống

Gợi ý : *hãy viết* $T = S_1 + S_2 + W_A + W_B$ *với* S_i *là thời gian phục vụ bạn tại trạm thứ i,* W_A *(* W_B*)là thời gian bạn xép hàng đợi khách hàng A (khách hàng B).*

Bài 11: Một đèn máy ảnh cần hai pin để có thẻ hoạt động. Có tất cả n pin đánh số từ 1 đến n. Bắt đầu người ta sử dụng pin số 1 và số 2. Khi một pin hết điện lập tức thay thế bởi pin có số nhỏ nhất trong số các pin chưa sử dụng. Giả sử tuổi thọ của mỗi pin là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số μ. Tại thời điểm ngẫu nhiên T pin hết điện trong khi kho dự trữ đã hết pin. Tại thời điểm đó có đúng một pin, ta gọi là pin X, vẫn còn dùng được

(a) What is $P\{X = n\}$?
(b) What is $P\{X = 1\}$?
(c) What is $P\{X = i\}$?
(d) Find $E[T]$.
(e) What is the distribution of T?

Bài 12: Lượng xe ô tô chạy qua một điểm nào đó trên đường cao tốc là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 3$/phút. Nếu A chạy ngang qua đường cao tốc mà không quan sát, tìm xác suất A bị ô tô đâm phải nếu thời gian A chạy ngang đường là s giây. Tính xác suất với s=2, 5, 10, 20 (giây)

Bài 13: Một lý thuyết khoa học cho rằng lỗi khi phân chia tế bào xuất hiện tuân theo quy luật Poisson với cường độ $\lambda = 2,5$/năm. Mỗi cá thể sẽ chết nếu có 196 lỗi như vậy xuất hiện.Giả sử lý thuyết đó đúng, hãy tìm

a) Tuổi thọ trung bình của mỗi cá thể
b) Xác suất cá thể chết trước tuổi 67,2(tính xấp xỉ)
c) Xác suất cá thể sống tới tuổi 90(tính xấp xỉ)

Bài 14: Giả sử $\{N(t), t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ. Giả sử S_n là thời gian xuất hiện sự kiện lần thứ n. Hãy tính

(a) $E[S_4]$
(b) $E[S_4 | N(1) = 2]$
(c) $E[N(4) - N(2) | N(1) = 3]$

Bài 15: Sự xuất hiện của một sự kiện là qúa trình Poisson với cường độ $\lambda = 2$/giờ.

(a) Tìm xác suất để sự kiện không xuất hiện trong khoảng thời gian từ 8 giờ tối đến 9 giờ tối.

(b) Bắt đầu từ 12 giờ trưa, Tính thời gian trung bình để sự kiện xuất hiện lần thứ tư.

(c) Tìm xác suất để sự kiện xuất hiện ít nhất 2 lần trong khoảng thời gian 6 giờ tối đến 8 giờ tối.

(Đáp số : (a) e^{-2} ; (b) 2 giờ chiều (c) 1 - 5e^{-4})

Bài 16: Số lượng khách đến ngân hàng tuân theo quá trình Poisson với cường độ λ. Giả sử có đúng hai khách đến ngân hàng trong giời làm việc đầu tiên(tính từ khi bắt đầu mở cửa).Tìm các xác suất để cho

(a) Cả hai khách đều đến trong 20 phút đầu tiên

(b) Có ít nhất một người đến trong 20 phút đầu tiên

(Đáp số: (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{5}{9}$