Giáo trình Nhập môn
Lí thuyết Quá trình Ngẫu nhiên

Ngô Hoàng Long

Ngày 25 tháng 2 năm 2015

Mục lục

Chương 1

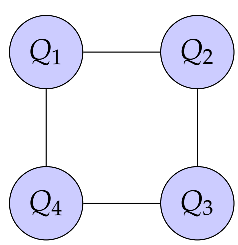
Xích Markov thời gian rời rạc

Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu về *quá trình Markov*. Đặc trưng của quá trình này là không lưu giữ kí ức về các trạng thái của nó trong quá khứ, hay nói cách khác là chỉ có trạng thái hiện tại của quá trình mới có ảnh hưởng đến diễn tiến của nó trong tương lai. Quá trình Markov ngày một trở nên quan trọng vì hai lí do cơ bản: (1) Rất nhiều các hiện tượng trong vật lý, sinh vật, kinh tế, tài chính, xã hội có thể được mô hình bởi quá trình Markov và (2) sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết cho phép chúng ta có thể thực hiện tốt các thao tác tính toán, phân tích, dự báo trên mô hình.

Trong chương này chúng ta sẽ tập trung vào nghiên cứu các quá trình Markov chỉ nhận một số hữu hạn hay đếm được các trạng thái hay còn được gọi là *xích Markov*.

1.1 Khởi động

Ta bắt đầu với một ví dụ đơn giản sau đây: Ta xét một du khách đi dạo qua lại quanh các góc của một quảng trường hình vuông như trên hình vẽ



Tại thời điểm đầu tiên $n = 0$, du khách ở góc Q_1. Tại thời điểm tiếp theo $n = 1$, người đó tung một đồng xu cân đối và đồng chất và di chuyển ngay lập tức đến Q_2 hoặc Q_4 tùy theo đồng xu là sấp hay ngửa. Tại thời điểm thứ hai $n = 2$, người đó lại tung đồng xu và dựa vào kết quả thu được để di chuyển đến một trong hai góc kề với góc đang đứng. Giả sử du khách sẽ di chuyển theo chiều kim đồng hồ nếu đồng xu là sấp và ngược chiều kim đồng hồ nếu đồng xu là ngửa. Du khách tiếp tục di chuyển theo qui luật trên tại các thời điểm $n = 3, 4, \dots$

Với mỗi n, ta gọi X_n là số của góc quảng trường du khách đứng ở thời điểm thứ n. Khi đó $X_0, X_1, \ldots$ là dãy gồm các bnn nhận giá trị thuộc tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Do người đó xuất phát tại Q_1 nên $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$. Tiếp theo, người đó di chuyển đến Q_2 hoặc Q_4 với cùng xác suất $1/2$ nên

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 4) = \frac{1}{2}.$$

Ta nhận thấy rằng với điều kiện du khách ở góc thứ 1 tại thời điểm n thì xác suất để người đó ở góc Q_2 hay Q_4 ở thời điểm $n + 1$ đều bằng $1/2$. Sử dụng ngôn ngữ xác suất điều kiện, ta có

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 4 | X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Hơn nữa, ta nhận thấy do việc di chuyển tới Q_2 hay Q_4 từ Q_1 chỉ phụ thuộc vào kết quả tung đồng xu tại thời điểm $n + 1$ nên

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = \frac{1}{2},$$

và

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 4 | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 4 | X_n = 1) = \frac{1}{2},$$

với mọi dãy $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Hiện tượng này được gọi là *tính kém nhớ* hay *tính Markov*: phân phối điều kiện của X_{n+1} khi biết $X_0, \ldots, X_n$ chỉ phụ thuộc vào X_n. Nói cách khác, để dự đoán vị trí của du khách trong “tương lai" (tại thời điểm $n + 1$), ta chỉ cần biết vị trí của du khách ở thời điểm “hiện tại" (thời điểm n) và ví trí của du khách trong “quá khứ" (các thời điểm $0, 1, \ldots, n - 1$) không cho ta thêm thông tin hữu ích nào.

Một đặc điểm thú vị khác nữa là phân phối của X_{n+1} với điều kiện $X_n = 2$ chẳng hạn không phụ thuộc vào n (điều này là do phân phối của kết quả việc tung đồng xu không thay đổi theo thời gian). Người ta gọi tính chất này là *tính thuần nhất theo thời gian*. Trong chương này, chúng ta chỉ nghiên cứu các xích Markov thuần nhất theo thời gian.

1.2 Định nghĩa xích Markov

Giả sử I là một tập có lực lượng không quá đếm được. Mỗi phần tử $i \in I$ được gọi là một *trạng thái* và I được gọi là *không gian trạng thái*. Ta nói rằng $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ là một *độ đo* trên I nếu $0 \leq \lambda_i < \infty$ với mọi $\lambda \in I$. Nếu $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, ta gọi λ là một *phân phối*.

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất. Mỗi *biến ngẫu nhiên* X nhận giá trị trên I là một ánh xạ $X : \Omega \to I$. Nếu ta đặt

$$\lambda_i = \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{w : X(w) = i\}),$$

thì $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ là một phân phối và ta nói rằng *X có phân phối λ*. Nói cách khác, bnn X sẽ ở trạng thái i với xác suất λ_i.

Ta nói ma trận $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ là *ngẫu nhiên* nếu mỗi hàng của nó đều là một phân phối, tức là

$$p_{ij} \ge 0,\ \forall i, j \in I, \quad \text{và} \quad \sum_{j\in I} p_{ij} = 1,\ \forall i \in I.$$

Bây giờ ta sẽ trình bày chính xác định nghĩa của xích Markov thông qua ma trận P và phân phối λ. Trước hết ta nhắc lại kí hiệu $\mathbb{P}(A|B)$ là xác suất để biến cố A xảy ra với điều kiện biến cố B đã xảy ra, tức là $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Hơn nữa, ta nói rằng *với điều kiện C hai biến cố A và B là độc lập với nhau* nếu $\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$ hay một cách tương đương là $\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C)$. Khi đó, ta kí hiệu $A \underset{C}{\perp\!\!\!\perp} B$. Tương tự, với các bnn X, Y và Z, ta nói *với điều kiện Z hai bnn X và Y độc lập với nhau* nếu với mọi trạng thái $i, j, k \in I$, ta có $\{X = i\} \underset{\{Z=j\}}{\perp\!\!\!\perp} \{Y = k\}$. [1]

Định nghĩa 1.2.1. *Dãy bnn $(X_n)_{n\ge0}$ được gọi là một* xích Markov *với* phân phối ban đầu *λ và* ma trận chuyển *P nếu*

i) *X_0 có phân phối λ, tức là*

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i, \quad \forall i \in I;$$

ii) *Với mọi $n \ge 0$, phân phối của X_{n+1} với điều kiện $X_n = i_n$ là $(p_{i_n j})_{j\in I}$ và độc lập với $X_0, \dots, X_{n-1}$, tức là*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

với mọi $n \ge 0$ và $i_0, \dots, i_{n+1} \in I$.

Với mỗi $n \ge 0$, X_n được gọi là trạng thái của xích Markov tại thời điểm thứ *n.*

Như vậy xích Markov $(X_n)_{n\ge0}$ được xác định nếu ta biết phân phối ban đầu λ và ma trận chuyển P. Ta sẽ gọi $(X_n)_{n\ge0}$ là *Markov(λ, P)*. Nếu $(X_n)_{0\le n\le N}$ là một dãy hữu hạn các bnn thỏa mãn (i) và (ii) với $n = 0, \dots, N-1$ thì ta cũng gọi $(X_n)_{0\le n\le N}$ là *Markov*(λ, P).

Ví dụ 1.2.2.

An chơi trò gieo đồng xu. Giả sử trong mỗi lần gieo, xác suất xuất hiện mặt sấp là 0.6 và ngửa là 0.4. Gọi X_n là tổng số lần xuất hiện mặt ngửa trong n lần gieo đầu tiên. Khi đó dãy (X_n) có tính Markov: ở thời điểm hiện tại n, để dự đoán giá trị của X_{n+1} ta chỉ cần biết giá trị của X_n, giá trị của $X_0, \dots, X_{n-1}$ không cung cấp thêm thông tin hữu ích nào. Một cách cụ thể, (X_n) có không gian trạng thái $I = \{0, 1, \dots\}$, phân phối ban đầu $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. Hơn nữa, ta có

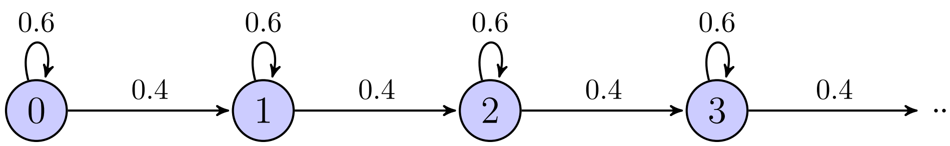
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = 0.4$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = 0.6,$$

[1] Một cách tổng quát, hai σ-đại số $\mathcal{F}_1$ và $\mathcal{F}_2$ là độc lập với nhau với điều kiện $\mathcal{G}$ nếu với mọi $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$ và $C \in \mathcal{G}$ ta có với điều kiện C hai biến cố A và B độc lập.

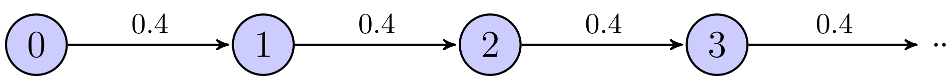
vì giá trị của X_{n+1} chỉ tăng thêm một đơn vị so với X_n khi lần gieo thứ $n+1$ xuất hiện mặt sấp. Do đó (X_n) có ma trận chuyển P xác định bởi

$$p(i,i) = 0.6;\ p(i,i+1) = 0.4;\ p(i,j) = 0\ \forall j \neq i, i+1;\ i = 0, 1, \ldots$$

Xích (X_n) có thể mô tả bởi biểu đồ sau:



Do $p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$ nên để đơn giản biểu đồ, từ nay về sau ta sẽ bỏ vòng khuyên ở mỗi đỉnh đi. Biểu đồ trên được đơn giản hóa lại như sau:



Ví dụ 1.2.3 (Xích Ehrenfest)**.**

Mô hình Ehrenfest được đề xuất bởi Paul und Tatjana Ehrenfest năm 1907 nhằm giải thích nguyên lý thứ hai của nhiệt động lực học. Sau đây ta trình bày một phiên bản đơn giản của mô hình này: Giả sử ta có hai cái hộp màu xanh và đỏ chứa tổng cộng N quả bóng. Ta chọn ngẫu nhiên một trong N bóng từ một trong hai hộp và bỏ vào hộp kia. Gọi X_0 là số bóng ban đầu và X_n là số bóng sau lần chuyển bóng thứ n ở trong hộp đỏ. Khi đó $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov vì khi biết X_n giá trị của X_{n+1} không phụ thuộc vào $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Cụ thể hơn, ta có

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \frac{N-i}{N}, \quad i = 0, \ldots, N-1,$$

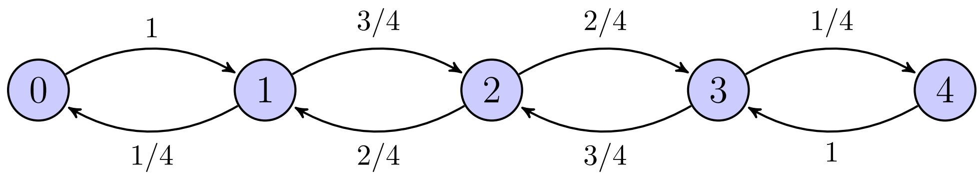
vì xích tăng thêm một đơn vị khi và chỉ khi bóng được chọn ở lần thứ $n+1$ là từ hộp xanh (hộp xanh có $N-i$ bóng sau lần chuyển bóng thứ n). Tương tự ta có

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \frac{i}{N}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Lấy ví dụ khi $N = 4$, ma trận chuyển P là

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

và P cũng có thể được xác định bởi biểu đồ sau:



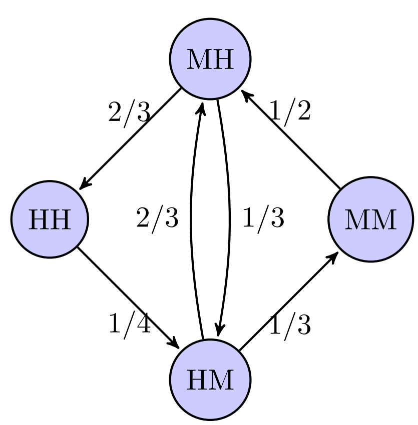
Trong các ví dụ trước, ta thấy rằng với mỗi dãy bnn (X_n), nếu phân phối của X_{n+1} chỉ phụ thuộc vào giá trị của X_n thì ta có thể mô phỏng dãy (X_n) bởi một xích Markov. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là nếu phân phối của X_{n+1} phụ thuộc vào giá trị của X_n và X_{n-1} thì ta có thể mô phỏng dãy (X_n) bởi một xích Markov nào đó không? Trong nhiều trường hợp, câu trả lời là có như ở ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.2.4 (Xích Markov cấp hai)**.**

Một xạ thủ bắn lần lượt từng viên đạn vào một bia. Giả sử xác suất trúng đích trong mỗi lần bắn là: 1/2 nếu anh ta bắn trượt cả hai lần bắn trước đó;
2/3 nếu anh ta bắn trượt đúng một lần trong hai lần bắn trước đó;
3/4 nếu anh ta bắt trúng cả hai lần bắn trước đó.
Gọi X_n là kết quả của lần bắn thứ n, $X_n = M$ nếu bắn trượt và bằng H nếu trúng. Đặt $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ thì dãy $(Y_n)_{n\geq 1}$ là xích Markov nhận giá trị trên không gian trạng thái $I = \{HH, HM, MH, MM\}$. Ma trận xác suất chuyển của Y là

	HH	HM	MH	MM
HH	3/4	1/4	0	0
HM	0	0	2/3	1/3
MH	2/3	1/3	0	0
MM	0	0	1/2	1/2

Thật vậy, giả sử $Y_n = HM$, nghĩa là $X_n = H, X_{n+1} = M$, thì $X_{n+2} = H$ với xác suất 2/3 và $X_{n+2} = M$ với xác suất là 1/3; khi đó $Y_{n+1} = (X_{n+1}, X_{n+2})$ sẽ bằng MH với xác suất 2/3 và bằng MM với xác suất 1/3.



Định lí 1.2.5. *Dãy bnn $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ nhận giá trị trong I là Markov(λ, P) khi và chỉ khi với mọi $i_0, \ldots, i_N \in I$,*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_N = i_N) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{N-1} i_N}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. a) Giả sử $(X_n)_{0\le n\le N}$ là *Markov*(λ, P), khi đó

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_N = i_N)\\
=&\mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_1 = i_1|X_0 = i_0)\dots\mathbb{P}(X_N = i_N|X_0 = i_0, \dots, X_{N-1} = i_{N-1})\\
=&\lambda_{i_0}p_{i_0i_1}\dots p_{i_{N-1}i_N}.
\end{aligned}$$

b) Giả sử phương trình (1.1) được thỏa mãn với N, khi đó lấy tổng hai vế theo tất cả $i_N \in I$ và sử dụng giả thiết $\sum_{j\in I} p_{ij} = 1$, ta thấy phương trình (1.1) cũng được thỏa mãn với $N - 1$. Bằng qui nạp, ta thu được

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0}p_{i_0i_1}\dots p_{i_{n-1}i_n},$$

với mọi $n = 0, 1, \dots, N$. Đặt biệt ta có $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$ với mọi $i_0 \in I$ và với mỗi $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} = p_{i_ni_{n+1}},$$

do đó (X_n) là *Markov*(λ, P). □

Kết quả tiếp theo nhấn mạnh tính chất không lưu giữ kí ức của xích Markov. Trước tiên ta định nghĩa ma trận ngẫu nhiên đơn vị δ như sau

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j\\ 0 & \text{nếu } i \ne j.\end{cases}$$

Định lí 1.2.6 (Tính Markov)**.** *Giả sử dãy $(X_n)_{n\ge 0}$ là Markov(λ, P). Khi đó, với điều kiện $X_m = i$, dãy $(X_{m+n})_{n\ge 0}$ là Markov(δ_i, P) và độc lập với các bnn $X_0, \dots, X_m$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng tỏ rằng với mọi biến cố A được xác định thông qua dãy bnn $X_0, \dots, X_m$, ta có

$$\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A|X_m = i) = \delta_{ii_m}p_{i_mi_{m+1}}\dots p_{i_{m+n-1}i_{m+n}}\mathbb{P}(A|X_m = i). \qquad (1.2)$$

Trước hết ta xét các tập sơ cấp A có dạng

$$A = \{X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m\}.$$

Khi đó đẳng thức (1.2) trở thành

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}, i = i_m)/\mathbb{P}(X_m = i)\\
=&\delta_{ii_m}p_{i_mi_{m+1}}\dots p_{i_{m+n-1}i_{m+n}}\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m, i = i_m)/P(X_m = i).
\end{aligned}$$

Áp dụng Định lí 1.2.5 ta có khẳng định trên là đúng. Trong trường hợp tổng quát, A có thể biểu diễn dưới dạng hợp của một số không quá đếm được các tập sơ cấp $A = \cup_k A_k$. Khi đó đẳng thức (1.2) thu được bằng cách lấy tổng tất cả các đẳng thức tương ứng cho A_k.

Tiếp theo ta áp dụng đẳng thức (1.2) cho $A = \Omega$, ta được

$$\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}\}|X_m = i) = \delta_{ii_m} p_{i_m i_{m+1}} \ldots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}}. \tag{1.3}$$

Áp dụng Định lí 1.2.5 ta suy ra với điều kiện $X_m = i$, dãy $(X_{m+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*(δ_i, P). Hơn nữa, từ (1.2) và (1.3) ta có với mọi biến cố A được xác định thông qua dãy bnn $X_0, \ldots, X_m$ thì

$$\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A|X_m = i) = \mathbb{P}(\{X_m = i_m, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}\}|X_m = i)\mathbb{P}(A|X_m = i),$$

tức là với điều kiện $X_m = i$, dãy $(X_{m+n})_{n\geq 0}$ độc lập với các bnn $X_0, \ldots, X_m$. □

1.3 Ma trận chuyển

Trong tiết này chúng ta sẽ tìm hiểu ma trận chuyển của xích Markov sau một số hữu hạn bước.

Trước hết, với mỗi phân phối λ và ma trận chuyển P, ta coi $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ là một véc tơ dòng và $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ là ma trận được chỉ số bởi I. Ta định nghĩa phân phối λP và các ma trận chuyển $P^k = (p_{ij}^{(k)})_{i,j\in I}$, $k = 1, 2, \ldots$ mới như sau:

$$(\lambda P)_j = \sum_{i\in I} \lambda_i p_{ij}; \quad P^1 = P,\ p_{ij}^{(k)} = \sum_{r\in I} p_{ir}^{(k-1)} p_{rj},\ k = 2, 3, \ldots$$

Ta qui ước P^0 là ma trận đơn vị, tức là $P^0 = (\delta_{ij})_{i,j\in I}$. Bằng qui nạp theo k, ta dễ dạng chứng minh được với mọi $n \geq 1$, mọi $i_0, i_n \in I$,

$$p_{i_0 i_n}^{(n)} = \sum_{i_1\in I} \cdots \sum_{i_{n-1}\in I} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.4}$$

Trong trường hợp $\lambda_i > 0$, ta kí hiệu $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = i)$. Sử dụng tính chất Markov tại thời điểm $m = 0$, kết quả dưới đây chỉ ra rằng dưới độ đo xác suất $\mathbb{P}_i$ phân phối của $(X_n)_{n\geq 0}$ không phụ thuộc vào phân phối ban đầu λ.

Định lí 1.3.1. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P). Khi đó, với mọi $n, m \geq 0$, ta có*

(i) $\mathbb{P}(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$;

(ii) $\mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j|X_m = j) = p_{ij}^{(n)}$.

Chứng minh. i) Áp dụng lần lượt Định lí 1.2.5 và công thức (1.4) ta được

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_0\in I} \cdots \sum_{i_{n-1}\in I} \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j)\\ &= \sum_{i_0\in I} \cdots \sum_{i_{n-1}\in I} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} j} = \sum_{i_0\in I} \lambda_{i_0} p_{i_0 j}^{(n)} = (\lambda P^n)_j.\end{aligned}$$

ii) Theo tính chất Markov, với điều kiện $X_m = i$, dãy bnn $(X_{m+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*(δ_i, P), áp dụng (i) với $\lambda = \delta_i$ ta được điều phải chứng minh. □

Theo định lí này, ta sẽ gọi $p_{ij}^{(n)}$ là *xác suất chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j sau n bước.*

Hệ quả 1.3.2. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 0}$ *là Markov*(λ, P) *nhận giá trị trong I. Với mọi số nguyên* $m > k \geq 0$*, mọi trạng thái* $i, j \in I$ *và với mọi biến cố A chỉ phụ thuộc vào* $X_0, X_1, \dots, X_{m-k-1}$*, ta có*

$$\mathbb{P}(X_{m+1} = i | \{X_{m-k} = j\} \cap A) = \mathbb{P}(X_{m+1} = i | X_{m-k} = j).$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng tỏ với mọi tập con $B_0, \dots, B_{m-k-1}$ của I,

$$\mathbb{P}(X_{m+1} = i | X_{m-k} = j, X_{m-k-1} \in B_{m-k-1}, \dots, X_0 \in B_0) = \mathbb{P}(X_{m+1} = i | X_{m-k} = j).$$

Áp dụng Định lí 1.2.5, ta được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{m+1} = i, X_{m-k} = j, X_{m-k-1} = i_{m-k-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
&= \sum_{i_{m-k+1},\dots,i_m \in I} \mathbb{P}(X_{m+1} = i, X_m = i_m, \dots, X_{m-k+1} = i_{m-k+1}, X_{m-k} = j, X_{m-k-1} = i_{m-k-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
&= \sum_{i_{m-k+1},\dots,i_m \in I} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-k-1} j} p_{j i_{m-k+1}} \dots p_{i_m i} \\
&= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-k-1} j} \sum_{i_{m-k+1},\dots,i_m \in I} p_{j i_{m-k+1}} \dots p_{i_m i} \\
&= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-k-1} j} p_{ji}^{(k+1)},
\end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối cùng suy ra từ công thức (1.4). Do đó

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{m+1} = i | X_{m-k} = j, X_{m-k-1} \in B_{m-k-1}, \dots, X_0 \in B_0) \\
&= \frac{\sum_{i_{m-k-1} \in B_{m-k-1}} \dots \sum_{i_0 \in B_0} \mathbb{P}(X_{m+1} = i, X_{m-k} = j, X_{m-k-1} = i_{m-k-1}, \dots, X_0 = i_0)}{\sum_{i_{m-k-1} \in B_{m-k-1}} \dots \sum_{i_0 \in B_0} \mathbb{P}(X_{m-k} = j, X_{m-k-1} = i_{m-k-1}, \dots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\sum_{i_{m-k-1} \in B_{m-k-1}} \dots \sum_{i_0 \in B_0} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-k-1} j} p_{ji}^{(k+1)}}{\sum_{i_{m-k-1} \in B_{m-k-1}} \dots \sum_{i_0 \in B_0} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-k-1} j}} \\
&= p_{ji}^{(k+1)} = \mathbb{P}(X_{m+1} = i | X_{m-k} = j).
\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.3.3 (Phương trình Chapman - Kolmogorov)**.** *Với mọi* $m, n \geq 0$ *và* $i, j \in I$*, ta có*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(n)}.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa xác suất điều kiện, ta có

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} &= \sum_{r \in I} \mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = r, X_0 = i) / \mathbb{P}(X_0 = j) \\
&= \sum_{r \in I} \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = r, X_0 = i) \mathbb{P}(X_m = r, X_0 = i) / \mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \sum_{r \in I} p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(n)},
\end{aligned}$$

trong đó đẳng thức thứ ba suy ra từ tính Markov và Hệ quả 1.3.2. □

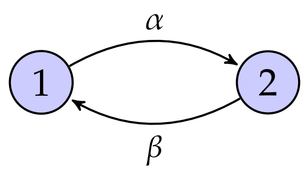
Sau đây ta trình bày một số phương pháp tính $p_{ij}^{(n)}$.

Ví dụ 1.3.4 (Mô hình Markov hai trạng thái)**.**

Xét xích Markov (X_n) có tập trạng thái $I = \{1, 2\}$. Ma trận chuyển của (X_n) có dạng tổng quát là

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

với $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Xích (X_n) có thể được biểu diễn bởi biểu đồ sau



Áp dụng phương trình C-K, ta được

$$p_{11}^{(n+1)} = p_{12}^{(n)}\beta + p_{11}^{(n)}(1-\alpha).$$

Mà $p_{11}^{(n)} + p_{12}^{(n)} = 1$ nên ta thu được phương trình truy hồi cho $p_{11}^{(n)}$ như sau

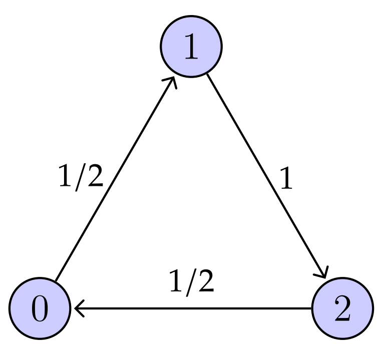
$$p_{11}^{(n+1)} = (1-\alpha-\beta)p_{11}^{(n)} + \beta, \quad p_{11}^{(0)} = 1.$$

Từ đây suy ra

$$p_{11}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n & \text{nếu } \alpha+\beta > 0 \\ 1 & \text{nếu } \alpha+\beta = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.5 (Mô hình Markov ba trạng thái)**.**

Xét xích Markov xác định bởi biểu đồ sau:



Ma trận chuyển của xích là

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Sau đây ta đi tìm $p_{11}^{(n)}$. Trước tiên ta tìm các giá trị riêng của P bằng các xét phương trình đặc trưng

$$0 = \det(\lambda - P) = \lambda(\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda^2 + 1).$$

Do đó, ma trận P có 3 giá trị riêng phân biệt là $1, i/2, -i/2$. Vậy nên P là ma trận chéo hóa được, tức là tồn tại ma trận khả nghịch U sao cho

$$P = U\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix} U^{-1},$$

khi đó

$$P^n = U\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (i/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i/2)^n \end{pmatrix} U^{-1},$$

và $p_{11}^{(n)}$ phải có dạng

$$p_{11}^{(n)} = a + b\Big(\frac{i}{2}\Big)^n + c\Big(\frac{-i}{2}\Big)^n,$$

với các hằng số a, b, c nào đó. Mặt khác

$$\Big(\frac{\pm i}{2}\Big)^n = 2^{-n}e^{\pm in\pi/2} = 2^{-n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} \pm i\sin\frac{n\pi}{2}\Big),$$

và do $p_{11}^{(n)}$ là số thực nên nó có dạng

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + 2^{-n}\Big(\beta\cos\frac{n\pi}{2} + \gamma\sin\frac{n\pi}{2}\Big), \tag{1.5}$$

với các hằng số $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nào đó.

Tiếp theo ta đi tìm α, β, γ. Tính trực tiếp $p_{11}^{(n)}$ với $n = 0, 1, 2$ rồi thay vào (1.5) ta được

$$\begin{cases} 1 = p_{11}^{(0)} = \alpha + \beta \\ 0 = p_{11}^{(1)} = \alpha + \gamma/2 \\ 0 = p_{11}^{(2)} = \alpha - \beta/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta = 4/5 \\ \gamma = -2/5. \end{cases}$$

Vậy nên

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{5} + 2^{-n}\Big(\frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{2}\Big).$$

Phương pháp xác định xác suất chuyển $p_{ij}^{(n)}$ của xích Markov có N trạng thái:

Bước 1: *Tính các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ của ma trận chuyển P và gọi $r_1, \dots, r_K$ lần lượt là bội của chúng.*

Bước 2: Tìm $p_{ij}^{(n)}$ dưới dạng

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{K} \Big(\sum_{s=0}^{r_k - 1} a_{ks} n^s \Big) \lambda_k^n.$$

(Đặc biệt, nếu các giá trị riêng là phân biệt ($K = N$) thì $p_{ij}^{(n)}$ có dạng

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda_k^n,$$

với các hằng số $a_1, \dots, a_N$ không phụ thuộc n.)

Bước 3: Chuyển biểu thức tổng quát của $p_{ij}^{(n)}$ về dạng thực như ở trong ví dụ vừa xét.

Bước 4: Tính $p_{ij}^{(n)}$ cho $n = 1, \dots, N$ rồi thay vào biểu thức tổng quát của $p_{ij}^{(n)}$ để tìm các hệ số a.

1.4 Phân lớp trạng thái xích Markov

Đôi khi để đơn giản hóa việc nghiên cứu một xích Markov nào đó, ta có thể chia nhỏ không gian trạng thái của nó ra thành nhiều phần nhỏ sao cho trên mỗi phần đó các trạng thái là "liên thông" với nhau. Sau đó tính chất của toàn bộ xích Markov có thể được suy ra dựa trên đặc điểm của nó trên từng thành phần.

Định nghĩa 1.4.1. *Ta nói rằng trạng thái i* đến được *trạng thái j và kí hiệu là $i \to j$ nếu tồn tại $n \geq 0$ sao cho $p_{ij}^{(n)} > 0$.*
Hai trạng thái i và j được gọi là liên thông *và kí hiệu là $i \leftrightarrow j$ nếu $i \to j$ và $j \to i$.*

Vì $p_{ii}^{(0)} = 1$ nên $i \leftrightarrow i$ với mọi $i \in I$. Hơn nữa, từ phương trình Chapman-Kolmogorov ta thấy nếu $i \to j$ và $j \to r$ thì $i \to r$. Do đó $\leftrightarrow$ là một quan hệ tương đương trên I và quan hệ này chia I thành các *lớp liên thông*: Hai trạng thái bất kì thuộc cùng một lớp thì liên thông với nhau, hai trạng thái khác lớp thì không liên thông. Ta nói lớp liên thông C là *đóng* nếu

$$i \in C,\ i \to j \ \text{ thì } \ j \in C.$$

Do đó lớp liên thông C là đóng thì mọi trạng thái đến được từ C đều thuộc C. Trạng thái i được gọi là *hấp thụ* nếu $\{i\}$ là lớp liên thông đóng.

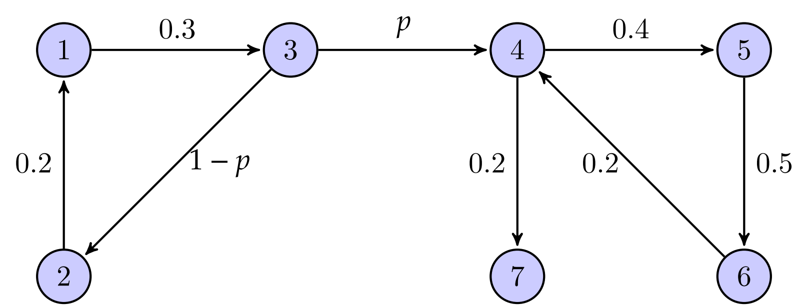
Định nghĩa 1.4.2. *Một xích Markov được gọi là* tối giản *nếu hai trạng thái bất kì đều liên thông với nhau. Ma trận chuyển P được gọi là* tối giản *nếu xích Markov tương ứng với nó là tối giản.*

Ví dụ 1.4.3.

Xét xích Markov có ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

với $p \in [0, 1]$. Để xác định tính liên thông của xích, ta vẽ biểu đồ:



1) $p \in (0, 1)$. Xích có 3 lớp liên thông là $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}$. Chỉ có $\{7\}$ là lớp liên thông đóng.

2) $p = 0$. Xích có 3 lớp liên thông là $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}$. Hai lớp $\{1, 2, 3\}$ và $\{7\}$ là đóng.

3) $p = 1$. Xích có 5 lớp liên thông là $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}$ và $\{7\}$. Chỉ có $\{7\}$ là lớp liên thông đóng.

1.5 Thời điểm chạm và xác suất hấp thụ

Câu hỏi thường được đặt ra với một hệ thống là nó có thể đạt được một trạng thái nhất định nào đó hay không và (trung bình là) sau bao lâu. Trong tiết này ta sẽ tìm hiểu câu trả lời cho các hệ thống được mô hình bởi xích Markov.

Giả sử $(X_n)_{n \geq 0}$ là xích Markov với ma trận chuyển P. A là một tập con của không gian trạng thái I.

Thời điểm chạm vào tập A của (X_n) là bnn $H^A : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ xác định bởi

$$H^A(w) = \inf\{n \geq 0 : X_n(w) \in A\},$$

trong đó ta qui ước là infimum của tập rỗng là ∞. Như vậy H^A là thời điểm đầu tiên xích (X_n) đạt được trạng thái A.

Với mỗi $i \in I$, ta kí hiệu xác suất để xích (X_n) chạm được tới A với điều kiện $X_0 = i$ là

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(H^A < \infty).$$

Khi A là lớp đóng, h_i^A được gọi là *xác suất hấp thụ vào tập* A. Ngoài ra ta kí hiệu

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n<\infty} n\mathbb{P}_i(H^A = n) + \infty\mathbb{P}(H^A = \infty)$$

là quãng thời gian trung bình để xích (X_n) xuất phát từ i lần đầu tiên chạm được đến tập A.

Trước khi trình bày phương pháp tổng quát để tính h^A và k^A, ta xét một ví dụ đơn giản như sau.

Ví dụ 1.5.1 (Du động ngẫu nhiên với biên hấp thụ)**.**

Xét xích (X_n) cho bởi biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l, "1/2"'] \arrow[r, bend left, "1/2"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/2"] \arrow[r, "1/2"] & 4
\end{tikzcd}$$

Giả sử xích xuất phát từ 2*, ta muốn xác định (i) xác suất hấp thụ vào 4 và (ii) trung bình mất bao lâu thì xích bị hấp thụ vào 1 hoặc 4.*

Để đơn giản, ta kí hiệu $h_i = h_i^{\{4\}}$ và $k_i = k_i^{\{1,4\}}$. Rõ ràng $h_1 = 0,\ h_4 = 1$ và $k_1 = k_4 = 0$. Bây giờ, nếu xích xuất phát từ 2 thì ở bước tiếp theo nó sẽ ở trạng thái 1 hoặc 3 với cùng xác suất $\frac{1}{2}$. Do đó

$$h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3), \quad k_2 = 1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_3), \tag{1.6}$$

trong đó 1 xuất hiện ở vế phải phương trình thứ hai là do xích cần 1 đơn vị thời gian để chuyển sang trạng thái thứ hai.

Ta có thể hình thức hóa lập luận trên như sau: Trước hết, vì

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_2(H^{\{4\}} < \infty, X_1 = r) &= \frac{\mathbb{P}(H^{\{4\}} < \infty | X_1 = r, X_0 = 2)\mathbb{P}(X_1 = r, X_0 = 2)}{\mathbb{P}(X_0 = 2)} \\
&= \mathbb{P}_r(H^{\{4\}} < \infty)p_{2r} = \frac{1}{2}h_r, \quad r = 1, 3,
\end{aligned}$$

nên

$$h_2 = \mathbb{P}_2(H^{\{4\}} < \infty) = \mathbb{P}_2(H^{\{4\}} < \infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}_2(H^{\{4\}} < \infty, X_1 = 3) = \frac{1}{2}(h_1 + h_3).$$

Tiếp theo,

$$k_2 = \sum_{n\le\infty} n\mathbb{P}(H^{\{1,4\}} = n | X_0 = 2) = \sum_{n\le\infty}\sum_{r=1,3} n\mathbb{P}(H^{\{1,4\}} = n | X_1 = r)p_{2r}.$$

Theo Định lí 1.2.6,

$$\begin{aligned}
k_2 &= \sum_{n\le\infty}\sum_{r=1,3} n\mathbb{P}(H^{\{1,4\}} = n-1|X_0 = r)p_{2r} \\
&= \sum_{n\le\infty}\sum_{r=1,3} \Big((n-1)\mathbb{P}(H^{\{1,4\}} = n-1|X_0 = r)p_{2r} + \mathbb{P}(H^{\{1,4\}} = n-1|X_0 = k)p_{2r}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(k_1 + k_3) + 1.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1.6) được chứng minh xong. Khi xét trường hợp xích xuất phát từ 3 ta cũng thu được

$$h_3 = \frac{1}{2}(h_2 + h_4), \quad k_3 = \frac{1}{2}(k_2 + k_4) + 1.$$

Kết hợp với (1.6), ta được $h_2 = \frac{1}{3}$ và $k_2 = 2$.

Sau đây ta trình bày kết quả tổng quát liên quan đến xác suất chạm.

Định lí 1.5.2. *Các xác suất chạm $h^A = (h_i^A, i \in I)$ là nghiệm không âm tối tiểu của hệ phương trình*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{với } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in I} p_{ij}h_j^A & \text{với } i \notin A. \end{cases} \tag{1.7}$$

(Sự tối tiểu của h^A được hiểu theo nghĩa nếu $x = (x_i, i \in I)$ là nghiệm không âm khác của hệ (1.7) thì $x_i \ge h_i^A$ với mọi i)

Chứng minh. a) Trước tiên ta chứng tỏ h^A thỏa mãn phương trình (1.7). Nếu $X_0 = i \in A$ thì $H^A = 0$ và do đó $h_i^A = 0$. Nếu $X_0 = i \notin A$ thì $H^A \ge 1$ và theo tính chất Markov, ta có

$$\mathbb{P}_i(H^A < \infty|X_1 = j) = \mathbb{P}_j(H^A < \infty) = h_j^A,$$

và

$$\begin{aligned}
h_i^A = \mathbb{P}_i(H^A < \infty) &= \sum_{j\in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty, X_1 = j) \\
&= \sum_{j\in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty|X_1 = j)\mathbb{P}_i(X_1 = j) = \sum_{j\in I} p_{ij}h_j^A.
\end{aligned}$$

b) Tiếp theo ta chứng tỏ tính tối tiểu của h^A. Giả sử $x = (x_i, i \in I)$ là nghiệm không âm khác của hệ (1.7), khi đó $h_i^A = x_i = 1$ với mọi $i \in A$. Nếu $i \notin A$ thì

$$\begin{aligned}
x_i = \sum_{j\in I} p_{ij}x_j &= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij}x_j \\
&= \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij}\Big(\sum_{r\in A} p_{jr} + \sum_{r\notin A} p_{jr}x_r\Big) \\
&= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{j\notin A}\sum_{r\notin A} p_{ij}p_{jr}x_r.
\end{aligned}$$

Lặp lại biến đổi trên, sau n bước ta thu được

$$\begin{aligned} x_i &= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \ldots + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \\ &= \mathbb{P}_i(H^A \leq n) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \geq \mathbb{P}_i(H^A \leq n). \end{aligned}$$

Do đó $x_i \geq \mathbb{P}_i(H^A \leq n)$ với mọi n. Cho $n \to \infty$, ta được $x_i \geq \mathbb{P}_i(H^A < \infty) = h_i$ với mọi $i \notin A$. □

Tiếp tục phân tích ví dụ 1.5.1, ta nhận khi xét $A = \{4\}$, hệ phương trình (1.7) trở thành

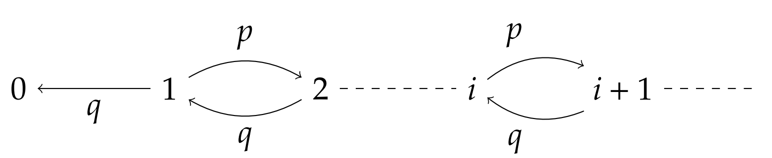
$$\begin{cases} h_4^A = 1 \\ h_2^A = \frac{1}{2}(h_1 + h_3) \\ h_3^A = \frac{1}{2}(h_2^A + h_4^A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_4^A = 1 \\ h_2^A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}h_1^A \\ h_3^A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}h_1^A. \end{cases}$$

Vậy hệ (1.7) không đủ để xác định $h_1^{(4)}$. Tuy nhiên, do điều kiện tối tiểu, ta phải lấy $h_1^{(4)} = 0$ và thu được $h_2^{(4)} = 1/3$ như đã chỉ ra trước đây. Dĩ nhiên, ta có thể dễ dàng nhận thấy ngay từ ban đầu là $h_1^{(4)} = 0$ và do đó ta có thể thêm điều kiện này vào hệ (1.7) để thu được hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất.

Tuy nhiên, trong trường hợp không gian trạng thái là vô hạn, điều kiện biên như trên là không hiển nhiên và ta cần phải sử dụng tính tối tiểu của nghiệm để tìm h.

Ví dụ 1.5.3 (Tổn thất khi chơi bạc)**.**

Xét xích Markov cho bởi biểu đồ sau với $0 < p = 1 - q < 1$.



Xác suất chuyển của xích là

$$p_{00} = 1,\ p_{i,i-1} = q,\ p_{i,i+1} = p,\ i = 1, 2, \ldots$$

Giả sử một người nào đó bước vào sòng bạc với $i \geq 0$ đồng. Người đó tiến hành đặt cược, mỗi lần đặt 1 đồng: nếu thắng sẽ được 2 đồng, nếu thua thì không được đồng nào. Giả sử sòng bạc có vô số tiền và không giới hạn số tiền thắng cược của người chơi. Hơn nữa, trong mỗi lần cược, xác suất thắng đều là $p \in (0, 1)$ và xác suất thua là $q = 1 - p$.

Khi đó, nếu gọi (X_n) là số tiền người đó có sau lần đặt cược thứ n thì (X_n) là xích Markov có xác suất chuyển cho bởi biểu đồ trên. Sau đây ta tìm hiểu xác suất người đó trắng tay sau khi chơi, tức là xác suất để xích (X_n) chạm 0 sau một khoảng thời gian hữu hạn.

Đặt $h_i = \mathbb{P}_i(H^{\{0\}} < \infty)$. Khi đó $h = (h_i, i \geq 0)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = ph_{i+1} + qh_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Nếu $p \neq q$, nghiệm của hệ trên có dạng

$$h_i = A + B\Big(\frac{p}{q}\Big)^i.$$

- Nếu $p < q$, tức là xác suất thắng cuộc $p < 0.5$, do điều kiện $h_i \in [0, 1]$, ta có $B = 0$ và do đó $h_i = 1$ với mọi i. Tức là người chơi cuối cùng sẽ trắng tay bất kể lúc đầu anh ta có bao nhiêu tiền.

- Nếu $p > q$, do $h_0 = 0$ nên $A + B = 1$ và

  $$h_i = A + (1 - A)\Big(\frac{p}{q}\Big)^i,$$

  Lại do $h_i \geq 0$ với mọi i nên $A \geq 0$. Hơn nữa, sử dụng tính tối tiểu của h suy ra $A = 0$ và $h_i = (q/p)^i$.

- Nếu $p = q$, tức là trò chơi là cân bằng. Khi đó hệ trên có nghiệm dạng $h_i = A + Bi$. Vì $h_i \in [0, 1]$ với mọi i nên $B = 0$, vậy nên $h_i = A = 1$ với mọi i. Do đó người chơi cuối cùng vẫn trắng tay mặc dù trò chơi là công bằng.

Ví dụ 1.5.4 (Xích sinh tử)**.**

Xét xích Markov cho bởi biểu đồ

$$\begin{tikzcd} 0 & 1 \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, bend left, "p_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "q_2"] \arrow[r, dashed, no head] & i \arrow[r, bend left, "p_i"] & i+1 \arrow[l, bend left, "q_{i+1}"] \arrow[r, dashed, no head] & \cdot \end{tikzcd}$$

trong đó với mỗi $i = 1, 2, \ldots$, ta có $0 < p_i = 1 - q_i < 1$. Giống như ở ví dụ trước 0 là trạng thái hấp thụ và ta muốn xác định xác suất hấp thụ khi xuất phát từ trạng thái i. Trong ví dụ này ta cho phép p_i và q_i phụ thuộc vào i.

Mô hình này có thể được dùng để mô phỏng kích thước của một quần thể mỗi khi có thay đổi về số lượng: giả sử tại thời điểm hiện tại quần thể có i phần tử, xác suất để có một phần tử mới sẽ được sinh ra trước khi có bất cứ phần tử nào bị chết là p_i; ngược lại, xác suất để có một phần tử bị chết đi trước khi có bất cứ phần tử nào được sinh thêm là q_i. Gọi $h_i = \mathbb{P}(H^{\{0\}} < \infty)$ là xác suất để quẩn thể cuối cùng sẽ bị tuyệt chủng khi biết tại thời điểm ban đầu nó gồm i phần tử. Khi đó (h_i) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_i = p_i h_{i+1} + q_i h_{i-1}, \ i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Vì hệ này có hệ số thay đổi nên khó có thể áp dụng các phương pháp thông thường để giải. Tuy nhiên, đặt $u_i = h_{i-1} - h_i$ thì $p_i u_{i+1} = q_i u_i$, do đó

$$u_{i+1} = \frac{q_i}{p_i} u_i = \frac{q_i q_{i-1} \dots q_1}{p_i p_{i-1} \dots p_1} u_1 =: \gamma_i u_1.$$

Vì $u_1 + \ldots + u_i = h_0 - h_i$ nên $h_i = 1 - A(\gamma_0 + \ldots + \gamma_{i-1})$ với $A = u_1$ và $\gamma_0 = 1$. Sau đây ta xác định giá trị của A.

Nếu $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$, từ điều kiện $0 \le h_i \le 1$ ta thấy $A = 0$ và $h_i = 1$ với mọi i.

Nếu $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$ thì ta có thể chọn $A > 0$ và thỏa mãn

$$1 - A(\gamma_0 + \ldots + \gamma_{i-1}) \ge 0 \text{ với mọi } i.$$

Do tính tối tiểu của nghiệm, ta được $A = (\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i)^{-1}$ và do đó

$$h_i = \frac{\sum_{j \ge i} \gamma_j}{\sum_{j \ge 0} \gamma_j}.$$

Ta nhận thấy vì $h_i < 1$ với mọi i nên quần thể có khả năng sống sót với xác suất dương.

Trong phần còn lại của tiết này ta trình bày kết quả tổng quát liên quan đến thời gian chạm trung bình.

Định lí 1.5.5. *Thời gian chạm trung bình $k^A = (k_i^A, i \in A)$ là nghiệm không âm tối tiểu của hệ phương trình*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{với } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & \text{với } i \notin A. \end{cases} \tag{1.8}$$

Từ nay về sau ta sẽ sử dụng kí hiệu I_B để chỉ hàm chỉ tiêu của tập B. Ví dụ $I_{X_1=j}$ là bnn nhận giá trị bằng 1 nếu $X_1 = j$, nếu không nó sẽ nhận giá trị bằng 0.

Chứng minh. a) Trước hết ta chứng tỏ rằng k^A thỏa mãn phương trình (1.8). Thật vậy, nếu $X_0 = i \in A$ thì $H^A = 0$ nên $k_i^A = 0$. Nếu $X_0 = i \notin A$ thì $H^A \ge 1$ và do tính Markov,

$$\mathbb{E}_i(H^A | X_1 = j) = 1 + \mathbb{E}_j(H^A)$$

và

$$\begin{aligned} k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) &= \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i(H^A I_{X_1=j}) \\ &= \sum_{j \in J} \mathbb{E}_i(H^A | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A. \end{aligned}$$

b) Tiếp theo giả sử $y = (y_i, i \in I)$ là một nghiệm không âm của hệ (1.8). Khi đó $k_i^A = y_i = 0$ với mọi $i \in A$. Nếu $i \notin A$ thì

$$\begin{aligned} y_i = 1 + \sum_{j \in A} p_{ij} y_j &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} (1 + \sum_{r \notin A} p_{jr} y_r) \\ &= \mathbb{P}_i(H^A \ge 1) + \mathbb{P}_i(H^A \ge 2) + \sum_{j \notin A} \sum_{r \notin A} p_{ij} p_{jr} y_r. \end{aligned}$$

Lặp lại biến đổi trên sau n bước ta thu được

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_i(H^A \geq j) + \sum_{j_1 \notin A} \dots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} y_{j_n} \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_i(H^A \geq j).$$

Cho $n \to \infty$ ta được

$$y_i \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(H^A \geq j) = \mathbb{E}_i(H^A) = k_i^A.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

1.6 Tính Markov mạnh

Trong tiết 1.2 ta đã phát biểu và chứng minh tính Markov: tại mỗi thời điểm m, với điều kiện $X_m = i$, dãy $(X_n)_{n \geq m}$ vẫn là xích Markov với cùng xác suất chuyển. Bây giờ giả sử thay vì lấy điều kiện $X_m = i$, ta đợi đến khi xích chạm i tại một thời điểm ngẫu nhiên H nào đó. Câu hỏi đặt ra là quá trình sẽ ra sao sau thời điểm H đó. Trong tiết này, chúng ta sẽ đi tìm câu trả lời cho vấn đề trên.

Trước hết, ta cần khái niệm quan trọng sau:

Định nghĩa 1.6.1. *Một bnn $T : \Omega \to \{0, 1, \dots, \} \cup \{\infty\}$ được gọi là* thời điểm dừng *nếu biến cố $\{T = n\}$ chỉ phụ thuộc vào $X_0, \dots, X_n$ với mọi $n = 0, 1, \dots$.*

Một cách trực quan, chỉ bằng cách quan sát dãy bnn, ta có thể biết được khi nào T xảy ra. Nếu ta bị buộc phải dừng tại thời điểm T, ta biết khi nào ta phải dừng lại. Các ví dụ sau minh họa kĩ hơn khái niệm này.

Ví dụ 1.6.2.

1. *Thời điểm qua đầu tiên*[2]:
$$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$$
là thời điểm dừng vì
$$\{T_j = n\} = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}.$$

2. Thời điểm chạm đầu tiên vào một tập con A của không gian trạng thái I cũng là thời điểm dừng vì
$$\{H^A = n\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}.$$

[2]passage time

3. *Thời điểm dời đi cuối cùng*[3]

$$L^A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

   nói chung không là thời điểm dừng vì biến cố $\{L = n\}$ phụ thuộc vào dãy $(X_{n+m})_{m\geq 1}$ có chạm A hay không.

Sau đây chúng ta sẽ chứng tỏ rằng tính Markov còn đúng tại thời điểm dừng. Điểm cốt yếu của chứng minh dưới đây là tính chất: nếu T là thời điểm dừng và tập $B \subset \Omega$ được xác định thông qua dãy quan sát $X_0, \ldots, X_T$ thì biến cố $B \cap \{T = m\}$ được xác định thông qua $X_0, \ldots, X_m$ với mọi $m = 0, 1, \ldots$

Định lí 1.6.3. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P) và T là một thời điểm dừng ứng với (X_n). Khi đó, với điều kiện $T < \infty$ và $X_T = i$, dãy $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ là Markov(δ_i, P) và độc lập với $X_0, \ldots, X_T$.*

Chứng minh. Nếu B là biến cố xác định thông qua $X_0, \ldots, X_T$ thì $B\cap\{T = m\}$ xác định thông qua $X_0, X_1, \ldots, X_m$. Áp dụng tính Markov tại thời điểm m ta có

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})\\ &= \mathbb{P}_i(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n)\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}),\end{aligned}$$

trong đó ta sử dụng điều kiện $T = m$ để thay T bởi m. Cho $m = 0, 1, \ldots$, cộng vế với vế các đẳng thức trên rồi chia cả hai vế cho $\mathbb{P}(T < \infty, X_T = i)$, ta có

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+n} = j_n\} \cap B|\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})\\ &= \mathbb{P}_i(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n)\mathbb{P}(B|\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\}),\end{aligned}$$

ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.6.4 (Tổn thất khi chơi bạc)**.**

Xét xích Markov (X_n) được xác định như ở Ví dụ 1.5.3. Ta đã biết xác suất trở về 0 của xích khi nó xuất phát từ 1. Sử dụng tính chất Markov mạnh, ta có thể xác định hoàn toàn phân phối của thời gian trở về 0.

Đặt

$$H_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\},$$

và với mỗi $s \in [0, 1)$, ta xét hàm sinh xác suất của H_0 được xác định như sau:

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1(s^{H_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{P}_1(H_0 = n).$$

[3] last exist time

Đặt $\tilde{H}_2 = \inf\{n : X_{n+H_1} = 0\}$ nếu $H_1 < \infty$. Vì $H_0 = H_1 + \tilde{H}_2$ khi $X_0 = 2$ nên

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_2(s^{H_0}) &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(H_0 = k, X_0 = 2)/\mathbb{P}(X_0 = 2) \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} s^{k+l} \mathbb{P}(\tilde{H}_2 = l, H_1 = k, X_0 = 2)/\mathbb{P}(X_0 = 2) \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} s^{k+l} \mathbb{P}(\tilde{H}_2 = l \big| H_1 = k, X_0 = 2)\mathbb{P}(H_1 = k, X_0 = 2)/\mathbb{P}(X_0 = 2).
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất Markov mạnh tại thời điểm H_1, ta có

$$\mathbb{P}(\tilde{H}_2 = l \big| H_1 = k, X_0 = 2) = \mathbb{P}(H_1 = l \big| X_0 = 2) = \mathbb{P}_2(H_1 = l).$$

Vậy nên

$$\mathbb{E}_2(s^{H_0}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} s^{k+l} \mathbb{P}_2(H_1 = l)\mathbb{P}_2(H_1 = k) = \phi(s)^2.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k \Big(\mathbb{P}(H_0 = k, X_0 = 1, X_1 = 0) + \mathbb{P}(H_0 = k, X_0 = 1, X_1 = 2)\Big)/\mathbb{P}(X_0 = 1) \\
&= qs + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(H_0 = k | X_0 = 1, X_1 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2)/\mathbb{P}(X_0 = 1) \\
&= qs + p \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(H_0 = k-1 | X_0 = 2) \\
&= qs + ps\mathbb{E}_2(s^{H_0}).
\end{aligned}$$

Do đó $\phi(s) = qs + ps\phi(s)^2$. Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\phi(s)$, giải ra ta được

$$\phi(s) = (1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2})/2ps.$$

Lại do $\phi(0) \leq 1$ và ϕ là hàm liên tục nên

$$\phi(s) = (1 - \sqrt{1 - 4pqs^2})/2ps.$$

Để xác định phân phối của H_0, ta xét khai triển Taylor của $\sqrt{1 - 4pqs^2}$ tại $s = 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \frac{1}{2ps}\Big[1 - \Big(1 + \frac{1}{2}(-4pqs)^2 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{(-4pqs^2)^2}{2!} + \dots\Big)\Big] \\
&= qs + pq^2 s^3 + \dots \\
&= s\mathbb{P}_1(H_0 = 1) + s^2\mathbb{P}_1(H_0 = 2) + s^3\mathbb{P}_1(H_0 = 3) + \dots
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của s ở hai vế ta tính được $\mathbb{P}_1(H_0 = k)$ với $k = 1, 2, \ldots$ Mặt khác, cho $s \uparrow 1$, ta có $\phi(s) \to \mathbb{P}_1(H_0 < \infty)$, do đó

$$\mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2p} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \le q \\ q/p & \text{nếu } p > q. \end{cases}$$

Khi $p \le q$, ta cũng có thể tính $\mathbb{E}_1(H_0)$ từ biểu thức

$$\mathbb{E}_1(H_0) = \lim_{s\uparrow 1} \phi'(s) = \frac{1}{q-p}.$$

1.7 Hồi qui

Giả sử $(X_n)_{n\ge 0}$ là xích Markov với ma trận chuyển P. Ta nói rằng trạng thái $i \in I$ là *hồi qui* nếu

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ với vô hạn } n) = 1.$$

Trạng thái i là *trans* nếu

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ với vô hạn } n) = 0.$$

Như vậy, một trạng thái là hồi qui nếu xích Markov trở lại trạng thái đó một số vô hạn lần. Ngược lại, một trạng thái là trans nếu từ một thời điểm nhất định nào đó trở đi, xích Markov sẽ không bao giờ ghé thăm trạng thái đó.

Nhắc lại là *thời điểm qua đầu tiên* ở trạng thái i là bnn T_i xác định bởi

$$T_i(w) = \inf\{n \ge 1 : X_n(w) = i\},$$

trong đó ta luôn qui ước $\inf \emptyset = \infty$. Sau đây ta sẽ định nghĩa *thời điểm qua thứ r ở trạng thái i*, kí hiệu là $T_i^{(r)}$, là

$$T_i^{(0)}(w) = 0, \quad T_i^{(1)}(w) = T_i(w),$$

và với mọi $r = 1, 2, \ldots$

$$T_i^{(r+1)}(w) = \inf\{n \ge T_i^{(r)}(w) + 1 : \ X_n(w) = i\}.$$

Ta kí hiệu độ dài của vòng du động thứ r qua trạng thái i là

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & \text{nếu } T_i^{(r-1)} < \infty \\ 0 & \text{nếu } T_i^{(r-1)} = \infty. \end{cases}$$

Bổ đề 1.7.1. *Với mỗi $r = 2, 3, \ldots$, với điều kiện $T_i^{(r-1)} < \infty$, bnn $S_i^{(r)}$ độc lập với $\{X_m : m \le T_i^{(r-1)}\}$ và*

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i = n).$$

Chứng minh. Áp dụng tính Markov mạnh tại thời điểm dừng $T = T_i^{(r-1)}$, với điều kiện $T < \infty$, $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*(δ_i, P) và độc lập với $X_0, X_1, \ldots, X_T$. Nhưng

$$S_i^{(r)} = \inf\{n \geq 1 : X_{T+n} = i\},$$

do đó $S_i^{(r)}$ là thời điểm qua đầu tiên của xích $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ ở trạng thái i. Vậy nên với điều kiện $T_i^{(r-1)} < \infty$, $S_i^{(r)}$ có cùng phân phối với T_i. □

Tiếp theo ta kí hiệu V_i là tổng số lần xích ở trạng thái i, tức là

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n = i\}}.$$

Lưu ý rằng

$$\mathbb{E}_i(V_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Ta kí hiệu xác suất trở lại trạng thái i theo độ đo xác suất $\mathbb{P}_i$ là

$$f_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty).$$

Bổ đề 1.7.2. *Với mọi $r = 0, 1, \ldots$, ta có*

$$\mathbb{P}_i(V_i > r) = f_i^r. \tag{1.9}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo r. Dễ thấy đẳng thức (1.9) đúng với $r = 0$. Giả sử đẳng thức đúng với r thì nó cũng đúng với $r + 1$ vì

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(V_i > r+1) &= \mathbb{P}_i(T_i^{(r+1)} < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i^{(r)} < \infty,\ S_i^{(r+1)} < \infty) \\ &= \mathbb{P}_i(S_i^{(r+1)} < \infty | T_i^{(r)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(r)} < \infty) = f_i f_i^r = f_i^{r+1},\end{aligned}$$

do Bổ đề 1.7.1. □

Định lí 1.7.3. *i) Nếu $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ thì trạng thái i là hồi qui và $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.*
ii) Nếu $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ thì i là trạng thái trans và $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Từ định lí trên ta thấy mỗi trạng thái đều hoặc là hồi qui, hoặc là trans.

Chứng minh. i) Nếu $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ thì theo Bổ đề 1.7.2,

$$\mathbb{P}_i(V_i = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_i(V_i > r) = 1,$$

do đó i là trạng thái hồi qui và

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i(V_i) = \infty.$$

ii) Nếu $f_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ thì theo Bổ đề 1.7.2,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i(V_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_i > r) = \sum_{r=0}^{\infty} f_i^r = \frac{1}{1-f_i} < \infty,$$

do đó $\mathbb{P}_i(V_i < \infty) = 0$ và i là trans. □

Định lí tiếp theo chứng tỏ rằng tính hồi qui và trans là tính chất bất biến trong mỗi lớp liên thông.

Định lí 1.7.4. *Giả sử C là một lớp liên thông. Khi đó tất cả các trạng thái của C đều là hồi qui hoặc đều là trans.*

Chứng minh. Lấy hai trạng thái khác nhau i và j thuộc C và giả sử rằng i là trans. Tồn tại $m, n \geq 0$ sao cho $p_{ij}^{(n)} > 0$ và $p_{ji}^{(m)} > 0$ và với mọi $r \geq 0$,

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)},$$

do đó

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(m)}} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+r+m)} < \infty,$$

theo Định lí 1.7.3. Do đó j là trans theo Định lí 1.7.3. □

Định lí 1.7.5. *Mọi lớp hồi qui và liên thông là đóng.*

Chứng minh. Giả sử C là một lớp không đóng. Khi đó tồn tại $i \in C$, $j \notin C$ và $m \geq 1$ sao cho

$$\mathbb{P}_i(X_m = j) > 0.$$

Do

$$\mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ với vô hạn } n\}) = 0,$$

ta có

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ với vô hạn } n) < 1,$$

do đó i không phải là trạng thái hồi qui do đó C cũng không phải là tập hồi qui. □

Định lí 1.7.6. *Mọi lớp đóng gồm hữu hạn phần tử đều là hồi qui.*

Chứng minh. Giả sử lớp C đóng và chỉ gồm hữu hạn phần tử. Giả sử xích $(X_n)_{n\geq 0}$ xuất phát từ C. Khi đó, tồn tại ít nhất một trạng thái $i \in C$ sao cho X_n ở trạng thái i vô hạn lần, tức là

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{P}(X_n = i \text{ với vô hạn } n) \\ &= \mathbb{P}(X_n = i \text{ với } n \text{ nào đó })\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ với vô hạn } n), \end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối cùng là do tính Markov mạnh. Do vậy trạng thái i không là trans, tức là i là hồi qui và do đó C cũng là hồi qui. □

Định lí 1.7.7. *Giả sử ma trận chuyển P là tối giản và hồi qui. Khi đó, với mọi $j \in I$, ta có* $\mathbb{P}(T_j < \infty) = 1$.

Chứng minh. Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\mathbb{P}(T_j < \infty) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}_i(T_j < \infty),$$

do đó ta chỉ cần chứng minh $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = 1$ với mọi $i \in I$. Do xích la tối giản nên tồn tại m sao cho $p_{ji}^{(m)} > 0$. Theo Định lí 1.7.3 ta có

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ với vô hạn } n) &= \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ với } n \geq m+1 \text{ nào đó}) \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ với } n \geq m+1 \text{ nào đó} | X_m = k)\mathbb{P}_j(X_m = k) \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}_k(T_j < \infty)p_{jk}^{(m)} = 1 + \sum_{k \in I}(\mathbb{P}_k(T_j < \infty) - 1)p_{jk}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Do đó $(\mathbb{P}_k(T_j < \infty) - 1)p_{jk}^{(m)} = 0$ với mọi $k \in I$. Mà $p_{ji}^{(m)} > 0$ nên suy ra $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = 1$. □

1.8 Tính hồi qui của du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}^d$

Ta đã biết rằng hồi qui là tính chất lớp: mọi lớp hồi qui đều là đóng và mọi lớp đóng gồm hữu hạn trạng thái đều là hồi qui. Do đó, ta chỉ còn phải nghiên cứu tính hồi qui của xích tối giản với vô hạn trạng thái. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ cơ bản liên quan đến du động ngẫu nhiên trên lưới nguyên $\mathbb{Z}^d$. Nhắc lại rằng một trạng thái i là hồi qui khi và chỉ khi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

1.8.1 Du động ngẫu nhiên đơn giản trên $\mathbb{Z}$

Dãy bnn $(X_n)_{n\geq 0}$ được gọi là một du động ngẫu nhiên đơn giản trên $\mathbb{Z}$ nếu $(X_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov nhận giá trị trên $\mathbb{Z}$ và có xác suất chuyển

$$p_{i,i+1} = p, \; p_{i,i-1} = q = 1 - p, \; p, q \in (0, 1).$$

Khi $p = q = 1/2$, du động $(X_n)_{n\geq 0}$ được gọi là đối xứng.

Giả sử xích xuất phát tại 0. Rõ ràng xích không thể quay lại 0 sau một số lẻ các bước di chuyển, do đó $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ với mọi n. Mặt khác, để xích trở về 0 sau $2n$ bước thì trong $2n$ bước đó, xích phải có đúng n lần tăng và n lần giảm. Do đó

$$p_{00}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n.$$

Sử dụng công thức Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \quad \text{khi } n \to \infty,$$

ta được

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Xét trường hợp $p = q = 1/2$: Ta có $4pq = 1$ nên tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $n \geq N$ thì $p_{00}^{(2n)} \geq \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}$. Khi đó

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} = \infty.$$

Vậy nên du động (X_n) là hồi qui.

Tiếp theo ta xét trường hợp $p \neq q$. Khi đó $4pq = r < 1$, lập luận tương tự như trên ta thấy tồn tại $N > 0$ sao cho

$$\sum_{n=N}^{\infty} p_{00}^{(n)} \leq 2\sum_{n=N}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n}} < \infty.$$

Do đó du động (X_n) là trans.

1.8.2 Du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}^2$

Xét $(X_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov nhận giá trị trên $\mathbb{Z}^2$ và có xác suất chuyển

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/4 & \text{nếu } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{nếu } |i-j| \neq 1. \end{cases}$$

Giả sử xích xuất phát từ 0. Gọi X_n^+ và X_n^- là hình chiếu của X_n lên đường chéo $y = \pm x$ của hệ trục tọa độ.

Ta có $(X_n^+)_{n\geq 0}$ và $(X_n^-)_{n\geq 0}$ là hai du động ngẫu nhiên đơn giản đối xứng trên không gian trạng thái $I = 2^{-1/2}\mathbb{Z}$ và $X_n = 0$ khi và chỉ khi $X_n^+ = X_n^- n = 0$. Hơn nữa, (X_n^+) và (X_n^-) là độc lập. Do đó

$$p_{00}^{(2n)} = \left(C_{2n}^n 2^{-2n}\right)^2.$$

Vậy nên áp dụng công thức Stirling, ta có

$$\sum_{n\geq 0} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n\geq 0} \left(C_{2n}^n 2^{-2n}\right)^2 = \infty.$$

Từ đây suy ra du động (X_n) là hồi qui.

1.8.3 Du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}^3$

Xét $(X_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov nhận giá trị trên $\mathbb{Z}^3$ và có xác suất chuyển

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/6 & \text{nếu } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{nếu } |i-j| \neq 1. \end{cases}$$

Tương tự như trên, ta có $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ và

$$p_{00}^{(2n)} = \sum_{i,j,k\geq 0: i+j+k=n} \frac{(2n)!}{(i!j!k!)^2} 6^{-2n} = 6^{-n} C_{2n}^{n} \sum_{i,j,k\geq 0: i+j+k=n} \Big(\frac{n!}{i!j!k!}\Big)^2. \tag{1.10}$$

Ta sẽ chứng tỏ $\sum_{n\geq 0} p_{00}^{(2n)} < \infty$ và do đó du động (X_n) là trans. Thật vậy, áp dụng Bổ đề 1.8.1 dưới đây, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} &\leq (1+6^2+6^4) \sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(6m)} \leq (1+6^2+6^4) \sum_{m=0}^{\infty} C_{6m}^{3m} 2^{-6m} 3^{-3m} \frac{(3m)!}{(m!)^3} \\ &\leq (1+6^2+6^4) \sum_{m=0}^{\infty} 12^{-3m} \frac{(6m)!}{(3m)!(m!)^3} < \infty,\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ công thức Stirling.

Bổ đề 1.8.1. *Ta có các ước lượng sau*

$$a) \qquad \sum_{i,j,k\geq 0: i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n, \tag{1.11}$$

$$b) \qquad \frac{(3m)!}{(m!)^3} \geq \frac{(3m)!}{i!j!k!} \quad \text{với mọi } i,j,k \geq 0,\ i+j+k = 3m, \tag{1.12}$$

$$c) \qquad p_{00}^{(6m)} \geq 6^{-2} p_{00}^{(6m-2)}, \quad p_{00}^{(6m)} \geq 6^{-4} p_{00}^{(6m-4)}. \tag{1.13}$$

Chứng minh. Công thức (1.11) có thể chứng minh bằng phương pháp tổ hợp như sau: Ta có n quả bóng và 3 cái hộp, hỏi có bao nhiêu cách cho n bóng này vào 3 hộp. Phương pháp thứ nhất là ta cho lần lượt từng bóng vào hộp, vì mỗi bóng có thể cho vào một trong ba hộp nên tổng số cách sẽ là 3^n. Phương pháp thứ hai là ta chia thành các trường hợp: số bóng trong hộp thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là i, j và k, $(i+j+k=n)$. Ứng với mỗi trường hợp có số cách cho bóng vào hộp là

$$C_n^i C_{n-i}^j C_{n-i-j}^k = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

So sánh kết quả của hai phương pháp ta thu được (1.11).

Bất đẳng thức (1.12) dễ dàng được suy ra từ nhận xét rằng nếu $i \geq j \geq k$ và $i > k$ thì

$$i!j!k! \geq (i-1)!j!(k+1)!$$

Bất đẳng thức (1.13) được suy ra trực tiếp từ (1.10). □

1.9 Phân phối dừng

Sau đây ta nghiên cứu tính chất của phân phối của xích Markov khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.9.1. *Phân phối* $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ *trên không gian trạng thái* I *được gọi là* dừng với ma trận chuyển P *nếu*

$$\lambda = \lambda P,$$

tức là

$$\lambda_i = \sum_{j\in I} \lambda_j p_{ji}, \quad \forall i \in I.$$

Phân phối dừng còn được gọi là *phân phối bất biến* hay *phân phối cân bằng*.

Định lí 1.9.2. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 0}$ *là Markov*(λ, P) *và* λ *là phân phối dừng đối với ma trận chuyển* P*. Khi đó với mỗi* $m \geq 1$*, xích* $(X_{m+n})_{n\geq 0}$ *cũng là Markov*(λ, P)*.*

Chứng minh. Ta có $\mathbb{P}(X_m = i) = (\lambda P^m)_i = \lambda_i$ với mọi i. Hơn nữa, với điều kiện $X_{m+n} = i$, bnn X_{m+n+1} là độc lập với $X_m, \ldots, X_{m+n}$ và có phân phối $(p_{ij} : j \in I)$. □

Định lí sau giải thích tại sao phân phối dừng còn được gọi là phân phối cân bằng.

Định lí 1.9.3. *Giả sử tập trạng thái* I *chỉ gồm hữu hạn phần tử. Khi đó, nếu tồn tại* $i \in I$ *sao cho*

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j \text{ khi } n \to \infty \text{ với mọi } j \in I,$$

thì $\pi = (\pi_j : j \in I)$ *là phân phối dừng.*

Chứng minh. Vì I chỉ gồm hữu hạn phần tử nên

$$\sum_{j\in I} \pi_j = \sum_{j\in I} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = 1,$$

do đó π là một phân phối trên I. Hơn nữa, ta có

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj},$$

vậy nên π là dừng. □

Ví dụ 1.9.4 (Phân phối dừng của xích hai trạng thái)**.**

Xét xích Markov cho ở Ví dụ 1.3.4. Nếu $\alpha, \beta \in (0, 1)$ thì

$$P^n \to \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) & \alpha/(\alpha+\beta) \\ \beta/(\alpha+\beta) & \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó, theo Định lí 1.9.3, $(\beta/(\alpha+\beta), \alpha/(\alpha+\beta))$ là phân phối dừng của xích. Ngoài ra ta còn có thể xác định phân phối dừng trực tiếp từ Định nghĩa 1.9.1.

Ví dụ 1.9.5 (Phân phối dừng của xích ba trạng thái)**.**

Xét xích Markov cho ở Ví dụ 1.3.5. Phân phối dừng π là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\pi P = \pi$, tức là

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \end{cases}$$

Do hệ trên là tuyến tính thuần nhất, để tìm π ta cần dùng thêm điều kiện $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Khi đó ta được $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$. Kết quả này phù hợp với công thức tổng quát của $p_{11}^{(n)}$ ở Ví dụ 1.3.5.

Tiếp theo ta sẽ chứng tỏ rằng mọi ma trận ngẫu nhiên tối giản và hồi qui P đều có duy nhất (sai khác một bội số) một độ đo dừng dương. Trước hết, với mỗi trạng thái k và i, ta xét γ_i^k là khoảng thời gian trung bình xích ở trạng thái i giữa hai lần liên tiếp xích ở trạng thái k được xác định như sau

$$\gamma_i^k = \mathbb{E}_k\Big[\sum_{n=0}^{T_k-1} I_{\{X_n=i\}}\Big].$$

Định lí 1.9.6. *Nếu P là ma trận tối giản và hồi qui thì*

i) $\gamma_k^k = 1$;

ii) $\gamma^k = (\gamma_i^k : i \in I)$ *thỏa mãn* $\gamma^k P = \gamma^k$;

iii) $0 < \gamma_i^k < \infty$ *với mọi* $i \in I$.

Chứng minh. Khẳng định *i*) là hiển nhiên. Ta chứng minh *ii*). Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, biến cố $\{n \le T_k\}$ chỉ phụ thuộc vào $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, do đó áp dụng tính Markov tại thời điểm $n-1$, ta được

$$\mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \le T_k) = \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, n \le T_k)p_{ij}.$$

Do P là hồi qui, $\mathbb{P}_k(T_k < \infty) = 1$. Do đó $X_{T_k} = k$ và

$$\begin{aligned} \gamma_j^k &= \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{T_k} I_{\{X_n=j\}} = \mathbb{E}_k \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n=j, n\le T_k\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_n = j, n \le T_k) \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, X_n = j, n \le T_k) \\ &= \sum_{i\in I} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, n \le T_k) = \sum_{i\in I} p_{ij}\mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{\infty} I_{\{X_m=i, m\le T_k-1\}} \\ &= \sum_{i\in I} p_{ij}\mathbb{E}_k \sum_{m=0}^{T^k-1} I_{\{X_m=i\}} = \sum_{i\in I} \gamma_i^k p_{ij}. \end{aligned}$$

iii) Do P là tối giản nên với mỗi trạng thái i, tồn tại $m, n \ge 0$ sao cho $p_{ik}^{(n)}, p_{ki}^{(m)} > 0$. Khi đó $\gamma_i^k \ge \gamma_k^k p_{ki}^{(m)} > 0$ và $\gamma_i^k p_{ik}^{(n)} \le \gamma_k^k = 1$ do *i*) và *ii*). □

Định lí 1.9.7. *Giả sử P là tối giản và λ là độ đo dừng đối với P và $\lambda_k = 1$. Khi đó $\lambda \geq \gamma^k$. Nếu giả thiết thêm P là hồi qui thì $\lambda = \gamma^k$.*

Chứng minh. Với mỗi $j \in I$, ta có

$$
\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i_0 \in I} \lambda_{i_0} p_{i_0 j} = \sum_{i_0 \neq k} \lambda_{i_0} p_{i_0 k} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_0, i_1 \neq k} \lambda_{i_1} p_{i_1 i_0} p_{i_0 j} + \Big(p_{kj} + \sum_{i_0 \neq k} p_{k i_0} p_{i_0 j}\Big) \\
&\dots \\
&= \sum_{i_0, \dots, i_n \neq k} \lambda_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \dots p_{i_0 j} + \Big(p_{kj} + \sum_{i_0 \neq k} p_{k i_0} p_{i_0 j} + \dots + \sum_{i_0, \dots, i_{n-1} \neq k} p_{k i_{n-1} \dots} p_{i_1 i_0} p_{i_0 j}\Big) \\
&\geq \mathbb{P}_k(X_1 = j, T_k \geq 1) + \mathbb{P}_k(X_2 = j, T_k \geq 2) + \dots + \mathbb{P}_k(X_n = j, T_k \geq n) \\
&\to \gamma_j^k \text{ khi } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Do đó $\lambda \geq \gamma^k$. Nếu P là hồi qui thì γ^k là dừng theo Định lí 1.9.6, do đó $\mu = \lambda - \gamma^k \geq 0$ cũng là dừng. Do P là tối giản, với mỗi $i \in I$, tồn tại n sao cho $p_{ik}^{(n)} > 0$ và

$$0 = \mu_k = \sum_{j \in I} \mu_j p_{jk}^{(n)} \geq \mu_i p_{ik}^{(n)},$$

do đó $\mu_i = 0$. □

Định nghĩa 1.9.8. Thời gian trở lại trung bình tại trạng thái i, *kí hiệu là* $m_i := \mathbb{E}_i(T_i)$.
Trạng thái $i \in I$ được gọi là hồi qui dương *nếu* $m_i < \infty$.
Một trạng thái hồi qui mà không phải là hồi qui dương thì được gọi là hồi qui không.

Định lí 1.9.9. *Giả sử P là tối giản. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

i) mọi trạng thái đều là hồi qui dương;

ii) tồn tại một trạng thái i là hồi qui dương;

iii) P có phân phối dừng π.

Hơn nữa, nếu iii) được thỏa mãn thì $m_i = 1/\pi_i$ với mọi i.

Chứng minh. Khẳng định *i*) $\Rightarrow$ *ii*) là hiển nhiên. Ta chứng tỏ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*). Giả sử tồn tại trạng thái i là hồi qui dương, ta có i là hồi qui và P cũng là hồi qui. Theo Định lí 1.9.6, γ^i là độ đo dừng. Nhưng

$$\sum_{j \in I} \gamma_j^i = m_i < \infty$$

nên $\pi_j = \gamma_j^i / m_i$ là một phân phối dừng.
iii) $\Rightarrow$ *i*): Xét một trạng thái bất kì k. Do P là tối giản và $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$, ta có $\pi_k = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ik}^{(n)} > 0$

với n nào đó. Đặt $\lambda_i = \pi_i/\pi_k$, ta có λ là độ đo bất biến với $\lambda_k = 1$. Theo Định lí 1.9.7, $\lambda \geq \gamma^k$. Do đó

$$m_k = \sum_{i\in I} \gamma_i^k \leq \sum_{i\in I} \frac{\pi_i}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k} < \infty,$$

vậy nên k là trạng thái hồi qui dương.
Cuối cùng, giả sử *iii*) đúng thì P là hồi qui nên $\lambda = \gamma^k$, bất đẳng thức phía trên trở thành đẳng thức và ta có $m_i = 1/\pi_i$ với mọi $i \in I$. □

Ví dụ 1.9.10 (Du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}$)**.**

Du động ngẫu nhiên đối xứng trên $\mathbb{Z}$ xét ở mục 1.8.1 là tối giản và hồi qui. Xét độ đo

$$\pi_i = 1 \quad \text{với mọi } i \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó

$$\pi_i = \frac{1}{2}\pi_{i-1} + \frac{1}{2}\pi_{i+1}$$

nên π là dừng. Theo Định lí 1.9.7, mọi độ đo dừng đều sai khác π một hằng số nhân, mà $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \pi_i = \infty$ nên du động không có phân phối dừng và do đó nó là hồi qui không theo Định lí 1.9.9.

Trong trường hợp du động là không đối xứng, chẳng hạn khi $q < p$, từ phương trình $\pi P = \pi$ ta suy ra

$$\pi_i = A + B(p/q)^i, \quad \text{với mọi } i \in \mathbb{Z},$$

với hai tham số bất kì A, B nào đó. Vậy nên tính duy nhất của độ đo dừng (sai khác một hằng số nhân) không còn nghiệm đúng trong trường hợp này.

Ví dụ 1.9.11 (Du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}^3$)**.**

Du động ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}^3$ xét ở mục 1.8.3 có độ đo dừng π với $\pi_i = 1$ với mọi $i \in \mathbb{Z}^3$ nhưng không là hồi qui.

1.10 Sự hội tụ đến điểm cân bằng

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu giới hạn của xác suất dịch chuyển sau n bước $p_{ij}^{(n)}$ khi $n \to \infty$. Theo Định lí 1.9.3, nếu không gian trạng thái là hữu hạn và tồn tại trạng thái i sao cho giới hạn trên tồn tại với mọi j thì giới hạn đó chính là phân phối dừng. Tuy nhiên, ví dụ sau cho thấy giới hạn trên không phải luôn tồn tại.

Ví dụ 1.10.1.

Xét xích Markov hai trạng thái với ma trận xác suất chuyển là

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó $P^2 = I$, do đó $P^{2n} = I$ và $P^{2n+1} = P$ với mọi n. Vậy nên $p_{ij}^{(n)}$ không hội tụ với mọi cặp i, j.

Định nghĩa 1.10.2. *Trạng thái i được gọi là* phi tuần hoàn *nếu* $p_{ii}^{(n)} > 0$ *với mọi n đủ lớn.*

Mệnh đề 1.10.3. *Trạng thái i là phi tuần hoàn khi và chỉ khi tập* $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0$ *có ước số chung lớn nhất bằng* 1.

Bổ đề 1.10.4. *Giả sử một xích Markov có ma trận xác suất chuyển P là tối giản và i là một trạng thái phi tuần hoàn. Khi đó, với mọi trạng thái j và k,* $p_{jk}^{(n)} > 0$ *với mọi n đủ lớn. Hơn nữa, mọi trạng thái của xích đều là phi tuần hoàn.*

Chứng minh. Do i là phi tuần hoàn nên tồn tại n_0 sao cho $p_{ii}^{(n)} > 0$ với mọi $n \geq n_0$. Mặt khác vì P là tối giản nên tồn tại $s, r \geq 0$ sao cho $p_{ji}^{(s)} > 0$ và $p_{ik}^{(r)} > 0$. Khi đó, với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$p_{jk}^{(s+n+r)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ik}^{(r)} > 0.$$

□

Định lí 1.10.5. *Giả sử P là tối giản, phi tuần hoàn và có phân phối dừng* π. *Giả sử* λ *là một phân phối bất kì và* $(X_n)_{n\geq 0}$ *là Markov*(λ, P). *Khi đó với mọi trạng thái j, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j.$$

Đặc biệt với mọi cặp trạng thái i, j, ta có

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng kĩ thuật ghép cặp (coupling). Giả sử $(Y_n)_{n\geq 0}$ là *Markov*(π, P) và độc lập với $(X_n)_{n\geq 0}$. Cố định một trạng thái để tham chiếu b nào đó và đặt

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n = Y_n = b\}.$$

Bước 1: Ta sẽ chứng tỏ $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Quá trình $W_n = (X_n, Y_n)$ là xích Markov với tập trạng thái $I \times I$, ma trận chuyển

$$\tilde{p}_{(i,k)(j,l)} = p_{ij} p_{kl}$$

và phân phối ban đầu

$$\mu_{(i,k)} = \lambda_i \pi_k.$$

Do P là phi tuần hoàn, với mọi trạng thái i, j, k, l, tồn tại $n_0 \geq 0$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$\tilde{p}_{(i,k)(j,l)}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} p_{kl}^{(n)} > 0,$$

vậy nên $\tilde{P}$ là tối giản. Hơn nữa, $\tilde{P}$ có phân phối dừng xác định bởi

$$\tilde{\pi}_{(i,k)} = \pi_i \pi_k.$$

Do đó, áp dụng Định lí 1.9.9, $\tilde{P}$ là hồi qui dương. Nhưng T là thời điểm qua đầu tiên của W_n tại (b, b) nên $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ theo Định lí 1.7.7.
Bước 2: Đặt

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{nếu } n < T \\ Y_n & \text{nếu } n \geq T. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $(Z_n)_{n\geq 0}$ là *Markov*(λ, P). Thật vậy, áp dụng tính Markov mạnh cho xích (W_n) tại thời điểm T, ta có $(X_{T+n}, Y_{T+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*$(\delta_{(b,b)}, \tilde{P})$ và độc lập với $(X_0, Y_0), \ldots, (X_T, Y_T)$. Hơn nữa, do tính đối xứng ta cũng có dãy bnn $(Y_{T+n}, X_{T+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*$(\delta_{(b,b)}, \tilde{P})$ và độc lập với $(X_0, Y_0), \ldots, (X_T, Y_T)$. Do đó $W'_n = (Z_n, Z'_n)$ là *Markov*$(\mu, \tilde{P})$ với

$$Z_n = \begin{cases} Y_n & \text{nếu } n < T \\ X_n & \text{nếu } n \geq T. \end{cases}$$

Do đó $(Z_n)_{n\geq 0}$ là *Markov*(λ, P).
Bước 3: Ta có

$$\mathbb{P}(Z_n = j) = \mathbb{P}(X_n = j, n < T) + \mathbb{P}(Y_n = j, n \geq T),$$

nên

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = j) - \pi_j| &= |\mathbb{P}(Z_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| \\ &= |\mathbb{P}(X_n = j, n < T) - \mathbb{P}(Y_n = j, n \geq T)| \\ &\leq \mathbb{P}(n < T) \to 0 \ \text{ khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

□

Giả thiết P là phi tuần hoàn đóng vai trò quan trọng trong chứng minh trên. Thật vậy, xét Ví dụ 1.10.1, khi đó P có $(1/2, 1/2)$ là phân phối dừng duy nhất. Giả sử (X_n) xuất phát từ 0 và (Y_n) xuất phát từ 0 hoặc 1 với cùng xác suất $1/2$. Ta có nếu $Y_0 = 1$ thì do tính tuần hoàn, (X_n) và (Y_n) không bao giờ gặp nhau và lập luận ta dùng ở chứng minh trên không áp dụng được.

Trong trường hợp tổng quát ta có kết quả sau:

Định lí 1.10.6. *Giả sử P là tối giản, khi đó tồn tại một số nguyên $d \geq 1$ và một phân hoạch*

$$I = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{d-1}$$

sao cho:

i) Nếu $p_{ij}^{(n)} > 0$ thì tồn tại r sao cho $i \in C_r$ và $j \in C_{r+n}$ (coi $C_{nd+r} = C_r$);

ii) $p_{ij}^{(nd)} > 0$ với mọi n đủ lớn, với mọi $i, j \in C_r$ và với mọi r.

Ta gọi mỗi số nguyên dương d xác định như trên là một *chu kì* của P.

Chứng minh. Cố định một trạng thái k và xét $S = \{n \geq 0 : p_{k,k}^{(n)} > 0\}$. Chọn $n_1, n_2 \in S$ với $n_1 < n_2$ sao cho $d = n_2 - n_1$ là nhỏ nhất. Với mỗi $r = 0, \ldots, d-1$, ta đặt

$$C_r = \{i \in I : p_{ki}^{(nd+r)} > 0 \text{ với } n \geq 0 \text{ nào đó}\}.$$

Khi đó $I = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{d-1}$ do tính tối giản của P. Hơn nữa, nếu $p_{ki}^{(nd+r)} > 0$ và $p_{ki}^{(nd+s)} > 0$ với $r, s \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ nào đó thì chọn $m \geq 0$ sao cho $p_{ik}^{(m)} > 0$, ta có $p_{kk}^{(nd+r+m)} > 0$ và $p_{kk}^{(nd+s+m)} > 0$, do đó $nd + r + m$ và $nd + s + m$ cùng thuộc S. Vậy nên $r = s$ vì tính tối tiểu của d. Vậy $\{C_i : 0 \leq i \leq d-1\}$ là một phân hoạch của I.

Để chứng minh i), giả sử $p_{ij}^{(n)} > 0$ và $i \in C_r$. Chọn m sao cho $p_{ki}^{(md+r)} > 0$, thì khi đó $p_{kj}^{(md+r+n)} > 0$ và $j \in C_{n+r}$.

Tiếp theo, do với mỗi $n \in S$, $p_{kk}^{(n)} > 0$ nên theo i), k thuộc C_r và C_{r+n}, với r nào đó, tức là $C_r = C_{n+r}$ và n là bội của d. Vậy mọi phần tử của S, bao gồm cả n_1 đều là bội của d.

Giả sử $nd > n_1^2$, ta đặt $nd = n_1 q + r$ với $q \geq n_1$ và $0 \leq r \leq n_1 - 1$. Do d là ước của n_1, ta có $r = md$ và $nd = (q-m)n_1 + mn_2$. Do đó

$$p_{kk}^{(n)} \geq (p_{kk}^{(n_1)})^{q-m}(p_{kk}^{(n_2)})^m > 0$$

và do đó $nd \in S$. Để chứng minh ii) cho mọi $i, j \in C_r$, ta chọn n_1, n_2 sao cho $p_{ki}^{(n_1 d+r)} > 0$ và $p_{kj}^{(n_2 d+r)} > 0$. Do tính tối giản của P, tồn tại m_1 sao cho $p_{ik}^{(m_1)} > 0$. Khi đó

$$p_{ij}^{(m_1+nd+n_2d+r)} \geq p_{ik}^{(m_1)} p_{kk}^{(nd)} p_{kj}^{(n_2d+r)} > 0$$

với mọi $nd > n_1^2$. Mặt khác vì

$$p_{kk}^{(m_1+n_1d+r)} \geq p_{ki}^{(n_1d+r)} p_{ik}^{(m_1)} > 0$$

nên $m_1 + n_1 d + r$ hay $m_1 + r$ phải là bội của d. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Định lí 1.10.7. *Giả sử P là tối giản và có chu kì d. Giả sử $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ là một phân hoạch xác định như ở Định lí 1.10.6. Giả sử λ là phân phối thỏa mãn $\sum_{i \in C_0} \lambda_i = 1$. Giả sử (X_n) là Markov(λ, P).*
Khi đó với mỗi $r = 0, 1, \ldots, d-1$ và $j \in C_r$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{nd+r} = j) = d/m_j,$$

trong đó m_j là thời gian trở lại trung bình tại trạng thái j.
Đặc biệt, với mỗi $i \in C_0$ và $j \in C_r$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d/m_j.$$

Chứng minh. Để độc giả tiện theo dõi, ta chia chứng minh thành ba bước như sau.
Bước 1: Ta sẽ đưa bài toán về trường hợp phi tuần hoàn. Đặt $\nu = \lambda P^r$, theo Định lí 1.10.6 ta có

$$\sum_{i \in C_r} \nu_i = \sum_{i \in I} \nu_i = 1.$$

Đặt $Y_n = X_{nd+r}$ thì $(Y_n)_{n\geq 0}$ là $Markov(\nu, P^d)$. Hơn nữa, cũng theo Định lí 1.10.6, ma trận chuyển P^d là tối giản và phi tuần hoàn trên C_r. Với mỗi $j \in C_r$, thời gian trở lại trung bình của $(Y_n)_{n\geq 0}$ tới j là m_j/d. Do đó, nếu định lí là đúng trong trường hợp phi tuần hoàn thì nó cũng đúng trong trường hợp tuần hoàn vì

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{nd+r} = j) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = j) = d/m_j.$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh định lí trong trường hợp P là phi tuần hoàn.
Bước 2: Giả sử P là phi tuần hoàn. Nếu P là hồi qui dương thì $1/m_j = \pi_j$, trong đó π là phân phối dừng duy nhất. Khi đó, áp dụng Định lí 1.10.5 ta được điều phải chứng minh. Trái lại, giả sử $m_j = \infty$, ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = 0.$$

Điều này là hiển nhiên nếu P là trans. Ta chỉ còn phải xét trường hợp P là hồi qui không.
Bước 3: Giả sử P là phi tuần hoàn và hồi qui không. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_j > k) = \mathbb{E}_j(T_j) = \infty.$$

Với mỗi $\epsilon > 0$, chọn K sao cho

$$\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}_j(T_j > k) \geq \frac{2}{\epsilon}.$$

Khi đó, với $n \geq K-1$, ta có

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sum_{k=n-K+1}^{n} \mathbb{P}(X_k = j, X_m \neq j \text{ với } m = k+1, \dots, n) \\
&= \sum_{k=n-K+1}^{n} \mathbb{P}(X_k = j)\mathbb{P}_j(T_j > n-k) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(X_{n-k} = j)\mathbb{P}_j(T_j > k),
\end{aligned}$$

Do đó

$$\min_{0\leq k\leq K-1} \mathbb{P}(X_{n-k} = j) \leq \epsilon/2.$$

Tiếp theo ta áp dụng phương pháp ghép như ở Định lí 1.10.5. Giả sử $(Y_n)_{n\geq 0}$ là $Markov(\mu, P)$ và độc lập với $(X_n)_{n\geq 0}$, trong đó μ sẽ được chọn sau. Đặt $W_n = (X_n, Y_n)$. Do P là phi tuần hoàn, $(W_n)_{n\geq 0}$ là tối giản. Nếu $(W_n)_{n\geq 0}$ là trans, chọn $\mu = \lambda$, ta được

$$\mathbb{P}(X_n = j)^2 = \mathbb{P}(W_n = (j, j)) \to 0.$$

Trái lại, nếu $(W_n)_{n\geq 0}$ là hồi qui thì $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, trong đó T được xác định như trong Định lí 1.10.5 và ta có

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| = 0.$$

Ứng với mỗi $k = 1, \dots, K-1$, chọn $\mu = \lambda P^k$, ta được $\mathbb{P}(Y_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+k} = j)$. Chọn $N(k)$ đủ lớn sao cho với mọi $n \geq N(k)$,

$$|\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(X_{n+k} = j)| \leq \epsilon/2.$$

Đặt $N = \max_{1\leq k\leq K-1} N(k)$. ta có bất đẳng thức trên đúng với mọi $n \geq N$ và mọi $k = 1, \dots, K-1$. Hơn nữa, với mọi n, tồn tại $k \in \{1, \dots, K-1\}$ sao cho $\mathbb{P}(X_{n+k} = j) \leq \epsilon/2$. Do đó, với mọi $n \geq N$, $\mathbb{P}(X_n = j) \leq \epsilon$. Do $\epsilon > 0$ có thể được chọn nhỏ tùy ý, ta có $\mathbb{P}(X_n = j) \to 0$ khi $n \to \infty$. □

1.11 Tính Ergodic

Gọi $V_i(n)$ là số lần xích Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ ở trạng thái i cho đến trước thời điểm n:

$$V_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} I_{\{X_k = i\}}.$$

Khi đó $V_i(n)/n$ là tỉ lệ thời gian xích ở trạng thái i sau n bước dịch chuyển liên tiếp. Định lí ergodic cho phép xác định giới hạn của tỉ lệ trên khi $n \to \infty$.

Định lí 1.11.1. *Giả sử $(X)_{n\geq 0}$ là Markov(λ, P) với P là tối giản. Khi đó*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{m_i}\Big) = 1,$$

trong đó $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$ là kì vọng của thời gian trở lại trạng thái i lần đầu tiên. Hơn nữa, nếu P là hồi qui dương thì với mọi hàm $f : I \to \mathbb{R}$, ta có

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \overline{f}\Big) = 1,$$

trong đó

$$\overline{f} = \sum_{i\in I} \pi_i f_i$$

với $(\pi_i, i \in I)$ là phân phối dừng (duy nhất).

Chứng minh. Nếu P là trans thì với xác suất 1, $\lim_{n\to\infty} V_i(n) < \infty$, do đó

$$\frac{V_i(n)}{n} \to 0 = \frac{1}{m_i}.$$

Nếu P là hồi qui, ta xét một trạng thái i nào đó và kí hiệu $T = T_i$. Theo Định lí 1.7.7, $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Do tính Markov mạnh, $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ là *Markov*(δ_i, P) và độc lập với $X_0, X_1, \dots, X_T$. Vì giới hạn của tỉ lệ thời gian ở trạng thái i của xích $(X_n)_{n\geq 0}$ và $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ là như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $\lambda = \delta_i$.

Gọi $S_i^{(r)}$ là độ dài của vòng du động thứ r tại thời điểm i. Theo Bổ đề 1.7.1, các bnn không âm $S_i^{(1)}, S_i^{(2)}, \ldots$ là độc lập và có cùng phân phối. Hơn nữa, $\mathbb{E}_i(S_i^{(r)}) = m_i$. Ta có

$$S_i^{(1)} + \ldots + S_i^{(V_i(n)-1)} \leq n - 1,$$

trong đó giá trị ở vế trái chính là thời điểm cuối cùng trước thời điểm n mà xích ở trạng thái i. Mặt khác

$$S_i^{(1)} + \ldots + S_i^{(V_i(n))} \geq n,$$

trong đó giá trị ở vế trái là thời điểm đầu tiên sau thời điểm $n-1$ mà xích ở trạng thái i. Vậy nên

$$\frac{S_i^{(1)} + \ldots + S_i^{(V_i(n)-1)}}{V_i(n)} \leq \frac{n}{V_i(n)} \leq \frac{S_i^{(1)} + \ldots + S_i^{(V_i(n))}}{V_i(n)}.$$

Do $S_i^{(1)}, S_i^{(2)}, \ldots$ là dãy bnn không âm, độc lập và có cùng phân phối nên theo Luận mạnh số lớn (xem [**?**]), ta có

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{S_i^{(1)} + \ldots + S_i^{(n)}}{n} = m_i\Big) = 1,$$

và do P là hồi qui nên $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} V_i(n) = \infty) = 1$. Do đó, cho $n \to \infty$, ta được

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{V_i(n)}{n} = \frac{1}{m_i}\Big) = 1. \tag{1.14}$$

Cuối cùng, giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ có phân phối dừng $(\pi_i, i \in I)$. Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn và không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $|f| \leq 1$. Vì $\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in I} V_i(n) f_i$ nên

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \overline{f}\Big| = \Big|\sum_{i\in I}\Big(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big)f_i\Big|.$$

Do đó, với mọi tập con J của I, ta có

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \overline{f}\Big| &\leq \sum_{i\in J}\Big|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big| + \sum_{i\notin J}\Big|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big| \\ &\leq \sum_{i\in J}\Big|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big| + \sum_{i\notin J}\Big(\frac{V_i(n)}{n} + \pi_i\Big) \leq 2\sum_{i\in J}\Big|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big| + 2\sum_{i\notin J}\pi_i,\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ

$$\sum_{i\notin J}\Big(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big) = \sum_{i\in J}\Big(\pi_i - \frac{V_i(n)}{n}\Big) \leq \sum_{i\in J}\Big|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\Big|.$$

Với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại tập J gồm hữu hạn trạng thái sao cho $\sum_{i \notin J} \pi_i < \epsilon/4$. Mặt khác, theo Định lí 1.9.9, $m_i = 1/\pi_i$, do đó, từ (1.14) suy ra với hầu chắc chắn mọi $w \in \Omega$, tồn tại $N(w)$ sao cho

$$\sum_{i \in J} \left| \frac{V_i(n)}{n} - \pi_i \right| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall n \geq N(w).$$

Do đó, với mọi $n > N(w)$, ta có

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \overline{f} \right| < \epsilon,$$

từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

1.12 Xích Markov khả nghịch*

Ta đã biết rằng với mỗi xích Markov, quá khứ và tương lai là độc lập với nhau khi ta biết hiện tại. Sự đối xứng theo thời gian này gợi ý rằng ta có thể xem xét một xích Markov với thời gian chạy ngược chiều. Mặt khác, sự hội tụ tới điểm cân bằng lại không đối xứng: trong nhiều trường hợp, dù phân phối ban đầu của xích như thế nào, xích cũng hội tụ tới phân phối dừng tại vô cùng. Do đó, nếu ta muốn có một xích “đối xứng" với xích ban đầu thì ta cần phải xuất phát từ phân phối dừng. Sau đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng nếu một xích Markov ở trạng thái dừng thì khi đảo chiều thời gian, nó vẫn là xích Markov.

Định lí 1.12.1. *Giả sử P là tối giản và có phân phối dừng π. Giả sử $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ là Markov(π, P) và đặt $Y_n = X_{N-n}$. Khi đó $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ là Markov$(\pi, \hat{P})$, trong đó $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})$ xác định bởi*

$$\pi_j \hat{p}_{ji} = \pi_i p_{ij}, \quad \forall\, i, j \in I.$$

Hơn nữa, $\hat{P}$ cũng tối giản và có phân phối dừng là (π).

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra $\hat{P}$ là ma trận ngẫu nhiên và π là phân phối dừng của nó. Tiếp theo ta chứng tỏ $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ là *Markov*$(\pi, \hat{P})$. Thật vậy, vì

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_N = i_N) &= \mathbb{P}(X_0 = i_N, X_1 = i_{N-1}, \ldots, X_N = i_0) \\ &= \pi_{i_N} p_{i_N i_{N-1}} \ldots p_{i_1 i_0} = \pi_{i_0} \hat{p}_{i_0 i_1} \ldots \hat{p}_{i_{N-1} i_N}, \end{aligned}$$

nên theo Định lí 1.2.5, $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ là *Markov*$(\pi, \hat{P})$. Cuối cùng, do P là tối giản nên với mọi $i, j \in I$, tồn tại dãy trạng thái $i_0 = i,\ i_1, \ldots,\ i_{n-1},\ i_n = j$ sao cho $p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} > 0$. Khi đó

$$\hat{p}_{i_n i_{n-1}} \ldots \hat{p}_{i_1 i_0} = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} / \pi_{i_n} > 0,$$

do đó $\hat{P}$ là tối giản. □

Định nghĩa 1.12.2. *Xích* $(Y_n)_{0\le n\le N}$ *được gọi là* xích đảo chiều thời gian *của* $(X_n)_{0\le n\le N}$. *Cặp ma trận ngẫu nhiên* P *và độ đo* λ *được gọi là* cân bằng chi tiết *nếu*

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}, \quad \forall\, i, j \in I.$$

Sau đây ta phát biểu mối liên hệ giữa khái niệm độ đo dừng và cân bằng chi tiết.

Bổ đề 1.12.3. *Giả sử* P *và* λ *là cân bằng chi tiết, khi đó* λ *là độ đo dừng của* P.

Chứng minh. Ta có $(\lambda P)_i = \sum_{j\in J} \lambda_j p_{ji} = \sum_{j\in I} \lambda_i p_{ij} = \lambda_i$. □

Định nghĩa 1.12.4. *Giả sử* $(X_n)_{n\ge 0}$ *là Markov*(λ, P) *với* P *tối giản. Ta nói rằng* $(X_n)_{n\ge 0}$ *là* khả nghịch *nếu với mọi* $N \ge 1$*, dãy* $(X_{N-n})_{0\le n\le N}$ *cũng là Markov*(λ, P).

Định lí 1.12.5. *Giả sử* $(X_n)_{n\ge 0}$ *là Markov*(λ, P) *với* P *tối giản. Khi đó hai khẳng định sau là tương đương:*

(a) $(X_n)_{n\ge 0}$ *là khả nghịch;*

(b) P *và* λ *là cân bằng chi tiết.*

Chứng minh. Trước hết ta nhận thấy từ (a) hoặc (b) đều suy ra rằng λ là phân phối dừng của P. Sau đó, theo Định lí 1.12.1,

$$(a) \Leftrightarrow (P = \hat{P}) \Leftrightarrow (b).$$

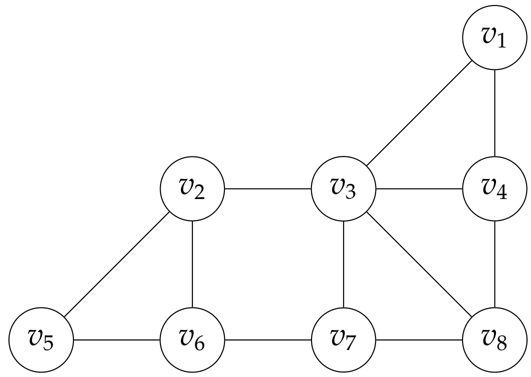
□

Ví dụ 1.12.6 (Du động ngẫu nhiên trên đồ thị)**.**

Một đồ thị $G = (V, E)$ bao gồm tập các đỉnh $V = \{v_i,\ i = 1, 2, \dots, v_k\}$ và các cạnh $E = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$. Mỗi cạnh nối hai đỉnh với nhau. Giữa hai đỉnh không có quá một cạnh. Hai đỉnh được gọi là kề nhau nếu chúng được nối bởi một cạnh. Cạnh nối hai đỉnh kề nhau v_r và v_s được kí hiệu là $\langle v_r, v_s\rangle$. Đồ thị được gọi là liên thông nếu hai đỉnh bất kì đều được nối với nhau bởi một số hữu hạn cạnh. Ta chỉ xét đồ thị liên thông và vô hướng, khi đó hai kí hiệu $\langle v_r, v_s\rangle$ và $\langle v_s, v_r\rangle$ đều chỉ cùng một cạnh. Với mỗi đỉnh v_i, ta gọi bậc của v_i, kí hiệu bởi d_i, là tổng số các đỉnh kề với v_i.
Ví dụ đồ thị dưới đây gồm có 8 đỉnh $V = \{v_1, \dots, v_8\}$ và 12 cạnh

$$\begin{aligned} E =& \{\langle v_1, v_3\rangle, \langle v_1, v_4\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \langle v_2, v_5\rangle, \langle v_2, v_6\rangle, \langle v_3, v_4\rangle, \\ & \langle v_3, v_7\rangle, \langle v_3, v_8\rangle, \langle v_4, v_8\rangle, \langle v_5, v_6\rangle, \langle v_6, v_7\rangle, \langle v_7, v_8\rangle\}. \end{aligned}$$

Bậc của v_1 là $d_1 = 2$ trong khi bậc của v_3 là $d_3 = 5$.



Một du động ngẫu nhiên trên đồ thị $G = (V, E)$ là một xích Markov với tập trạng thái V và di động theo qui tắc sau: nếu du động đang ở trạng thái v_i tại thời điểm n thì tại thời điểm tiếp theo $n+1$, nó sẽ chuyển đến một trong các đỉnh kề với v_i với cùng xác suất $1/d_i$. Ta có ma trận chuyển của du động là

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/d_i & \text{nếu } v_i \text{ kề với } v_j \\ 0 & \text{nếu } v_i \text{ không kề với } v_j. \end{cases}$$

Do đồ thị là liên thông nên P là tối giản. Xét phân phối

$$\pi = \Big(\frac{d_1}{d}, \dots, \frac{d_k}{d}\Big), \quad d = d_1 + \dots + d_k,$$

ta dễ dàng kiểm tra được là cặp (π, P) là cân bằng chi tiết. Vậy nên π là phân phối dừng của P.

Ví dụ 1.12.7 (Bài toán quân mã).

Xét một bàn cờ vua kích thước 8×8. Một quân mã di chuyển một mình trên bàn cờ theo qui tắc tại mỗi thời điểm, nó sẽ chọn ngẫu nhiên một trong các ô mà nó có thể tới được và nhảy đến ô đó. Nhắc lại rằng trong mỗi nước đi, quân mã chỉ có thể di chuyển đến ô mà ô đó và ô nó đang ở là hai đỉnh đối diện của một hình chữ nhật kích thước 2×3 trên bàn cờ.

Giả sử quân mã xuất phát từ một ô góc của bàn cờ, hỏi trung bình sau bao nhiêu nước đi nó sẽ trở lại ô đó?

Đánh số các ô bàn cờ lần lượt từ 1 đến 64. Gọi T_1 là tổng số nước đi để quân mã trở về ô góc số 1 lần đầu tiên. Theo Định lí 1.9.9, ta có $\mathbb{E}_1(T_1) = 1/\pi_1$, do đó ta chỉ cần xác định phân phối dừng π. Do ma trận chuyển $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le 64}$ có thể được xác định dễ dàng, bài toán có thể qui về việc giải hệ phương trình tuyến tính 64 ẩn $\pi P = \pi$ (!).

Tuy nhiên, ta nhận thấy chuyển động của quân mã chính là một du động ngẫu nhiên trên đồ thị gồm 64 đỉnh tương ứng với 64 ô của bàn cờ. Vậy nên

$$\mathbb{E}_1(T_1) = 1/\pi_1 = \sum_i d_i/d_1.$$

Do số đỉnh có bậc $2, 3, 4, 6, 8$ của đồ thị lần lượt là $4, 8, 20, 16, 16$ nên

$$\mathbb{E}_1(T_1) = \frac{8 + 24 + 80 + 96 + 128}{2} = 168.$$

1.13 Bài tập

1. Trong ví dụ ở tiết khởi động, giả sử du khách di chuyển dựa trên qui luật mới như sau: Tại mỗi thời điểm, du khách tung đồng thời hai đồng xu cân đối và đồng chất. Nếu đồng xu thứ nhất xấp, người đó sẽ ở nguyên vị trí cho đến thời điểm tiếp theo; còn nếu đồng xu thứ nhất ngửa, người đó sẽ di chuyển ngay lập tức đến một trong hai góc kề theo cùng hoặc ngược chiều kim đồng hồ phụ thuộc vào đồng xu thứ hai là sấp hoặc ngửa. Gọi $(X_n)_{n\geq 0}$ là vị trí của người đó ở thời điểm thứ n. Chứng minh rằng $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov và xác định ma trận xác suất chuyển của nó.

2. Có người cho rằng một trong những cách dự báo thời tiết có độ chính xác cao (hơn trên truyền hình) là dự báo rằng thời tiết ngày mai giống như ngày hôm nay. Giả sử thời tiết mỗi ngày ở Hà Nội ở một trong hai trạng thái “nắng" và “mưa". Nếu phương pháp trên là đúng trong 75% các trường hợp thì thời tiết ở Hà Nội sẽ là một xích Markov với tập trạng thái $I = \{1, 2\}$ với 1 nghĩa là nắng và 2 nghĩa là mưa. Ma trận chuyển của nó là
$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

   a) Giả sử xích xuất phát với một ngày nắng $\lambda = (1, 0)$. Chứng minh rằng
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}(1 + 2^{-n}), \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}).$$

   b) Giả sử xích xuất phát với một ngày mưa. Tính phân phối của X_n và so sánh kết quả tìm được với trường hợp trên khi $n \to \infty$.

3. Xét xích Markov gồm hai trạng thái $\{0, 1\}$ với ma trận chuyển
$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

   a) Tính ma trận chuyển sau hai bước P^2.

   b) Giả sử xích xuất phát ở trạng thái 0 tại thời điểm $n = 0$.Tính xác suất để xích ở trạng thái 1 tại thời điểm $n = 3$.

   c) Tính xác suất để xích luôn ở trạng thái 0 từ thời điểm $n = 0$ cho đến $n = 3$.

   d) Giả sử $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 3/7$, $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 4/7$. Xác định phân phối của X_n.

4. Xét xích Markov gồm ba trạng thái $\{0, 1, 2\}$ với ma trận chuyển
$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Giả sử xích xuất phát ở trạng thái 0 tại thời điểm $n = 0$.

a) Tính xác suất để xích ở trạng thái 1 tại thời điểm $n = 3$.

b) P có phải là ma trận tối giản không? Tại sao?

5. Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là $Markov(\lambda, P)$. Đặt $Y_n = X_{3n}$. Chứng minh rằng $(Y_n)_{n\geq 0}$ là $Markov(\lambda, P^3)$.

6. Bài tập sau chứng tỏ hàm của một xích Markov chưa chắc đã là Markov. Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov với tập trạng thái $I = \{1, 2, 3\}$, ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và phân phối ban đầu $\lambda = (1/3, 1/3, 1/3)$. Xét hàm $\phi : I \to \{0, 1\}$ cho bởi

$$\phi(i) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = 1 \\ 1 & \text{nếu } i \neq 1, \end{cases}$$

và đặt $Y_n = \phi(X_n)$ với mỗi $n \geq 0$. Chứng minh rằng $(Y_n)_{n\geq 0}$ không phải là xích Markov.

7. Gieo liên tiếp một đồng xu cân đối và đồng chất. Gọi Y_n là số mặt sấp xuất hiện trong lần gieo thứ n: Y_n nhận giá trị 0 hoặc 1 với cùng xác suất 1/2. Với mỗi $n \geq 1$, đặt $X_n = Y_n + Y_{n+1}$. Hỏi $(X_n)_{n\geq 1}$ có phải là một xích Markov không, tại sao?

8. Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là dãy bnn độc lập có phân phối

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trong các dãy bnn sau, dãy nào là xích Markov:

a) $(X_n)_{n\geq 0}$.

b) $(S_n)_{n\geq 0}$ với $S_0 = 0, S_n = X_1 + \ldots + X_n$ với mọi $n \geq 1$.

c) $(T_n)_{n\geq 0}$ với $T_n = (S_n, S_{n+1})$.

d) $(R_n)_{n\geq 0}$ với $R_n = (X_n, S_n)$.

e) $(Y_n)_{n\geq 0}$ với $Y_n = (S_n, 0)$.

9. Một con châu chấu nhảy qua lại một cách ngẫu nhiên trên 4 đỉnh của một hình vuông. Giả sử tại mỗi thời điểm, con châu chấu sẽ nhảy đến một trong hai đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng với cùng xác suất 1/2. Đánh số các đỉnh của hình vuông lần lượt là 0, 1, 2, 3 theo chiều kim đồng hồ. Gọi $(X_n)_{n\geq 0}$ là vị trí của con châu chấu sau lần nhảy thứ n.

a) Giả sử (X_n) là xích Markov và xác định ma trận chuyển của nó.

b) Xác định xác suất để con châu chấu quay trở lại vị trí xuất phát sau 100 bước nhảy.

10. Giả sử (X_n) là xích Markov nhận các giá trị $\{1, 2, 3\}$ với ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tính xác suất $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$ trong các trường hợp (a) $p = 1/16$; (b) $p = 1/6$; (c) $p = 1/12$.

Giải (b) $p_{11}^{(n)} = \frac{6}{25} + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n \left(\frac{19}{25} \cos \frac{3\pi n}{4} - \frac{17}{25} \sin \frac{3\pi n}{4}\right)$
(c): $p_{11}^{(n)} = \frac{58}{21} + \left(\frac{55n}{3} - \frac{37}{21}\right)\frac{(-1)^n}{6^n}$.

11. Giả sử X_0 là bnn nhận giá trị trên $\mathbb{N}$. Giả sử $Y_1, Y_2, \ldots$ là dãy bnn độc lập, có cùng phân phối đều trên đoạn $[0, 1]$. Giả sử $G : I \times [0, 1] \to I$ và $X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1})$. Chứng minh rằng $(X_n)_{n \geq 0}$ là xích Markov và xác định ma trận chuyển P của nó.

12. Biện luận theo $p \in [0, 1]$ các lớp liên thông của xích Markov có ma trận chuyển cho bởi

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

Trong mỗi trường hợp, chỉ ra lớp nào là lớp đóng.

13. Chứng minh rằng mọi ma trận chuyển của một không gian trạng thái hữu hạn đều có ít nhất một lớp liên thông đóng. Điều này còn đúng không nếu không gian trạng thái có vô hạn phần tử.

14. Ba bạn A, B và C chơi cầu lông theo luật được ở thua ra: mỗi lượt chơi gồm hai đấu thủ, người còn lại đợi; người thắng ở lượt thứ n sẽ chơi tiếp lượt thứ $n + 1$ với người vừa đợi. Xác suất để bạn x thắng bạn y là $s_x/(s_x + s_y)$ với mỗi cặp $x, y \in \{A, B, C\}$, $x \neq y$, và s_A, s_B, s_C là các số thực dương thể hiện "chỉ số sức mạnh" của bạn A, B, C.

    a) Mô tả quá trình trên bởi một xích Markov và xác định ma trận xác suất chuyển của xích.

    b) Xác định xác suất của biến cố hai bạn chơi ở lượt đầu tiên sẽ lại gặp nhau ở lượt đấu thứ tư. Chứng tỏ rằng xác suất này không phụ thuộc vào việc cặp hai bạn nào chơi ở trận đầu.

Giải 14: Gọi X_n là trạng thái của lượt chơi thứ n, trong đó $X_n = x$ nếu bạn x không chơi ở lượt đó với $x = A, B, C$. Như vậy không gian trạng thái sẽ gồm 3 phần tử A, B, C.

a) Ma trận chuyển của (X_n) là

$$P = \begin{pmatrix} 0 & s_C/(s_B+s_C) & s_B(s_B+s_C) \\ s_C/(s_A+s_C) & 0 & s_A/(s_A+s_C) \\ s_B/(s_A+s_B) & s_A/(s_A+s_B) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ta cần tính xác suất để hệ trở lại trạng thái đầu tiên sau 3 bước. Áp dụng công thức (1.4), ta được

$$p_{AA}^{(3)} = p_{AB}p_{BC}p_{CA} + p_{AC}p_{CB}p_{BA} = \frac{2s_As_Bs_C}{(s_A+s_B)(s_A+s_C)(s_B+s_C)}.$$

Tương tự ta có $p_{BB}^{(3)} = p_{CC}^{(3)} = p_{AA}^{(3)}$.

15. Một chiếc xe buýt trở được N khách và đã bán vé ghi rõ số ghế cho N người. $N-1$ hành khách đầu tiên lên xe và ngồi vào các ghế tùy thích. Hành khách thứ N lên xe và muốn ngồi vào đúng vị trí ghi trên vé của mình. Nếu ghế của anh ta còn trống, anh ta sẽ ngồi vào ghế đó. Nếu không, anh ta sẽ yêu cầu người đang ngồi ghế của anh ta trả lại chỗ. Người này sẽ trả lại chỗ và đi tìm ghế ghi trên vé của mình. Nếu ghế đó trống, người này sẽ ngồi vào đó, nếu không, anh ta lại yêu cầu người đang ngồi ghế ghi trên vé của mình trả lại chỗ. Quá trình này được lặp lại cho đến khi không ai phải đi tìm chỗ. Gọi X là tổng số lần chuyển chỗ, tính kì vọng của X.

16. Xét xích Markov cho bởi biểu đồ

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "2/3"'] \arrow[r, bend left, "1/3"] & 3 \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[r, "1/3"] & 4 \end{tikzcd}$$

Giả sử xích xuất phát từ 2, hãy xác định (i) xác suất hấp thụ vào 4 và (ii) trung bình mất bao lâu thì xích bị hấp thụ vào 1 hoặc 4.

Giải 16 (i) 1/7. (ii) 12/7.

17. Xét xích Markov cho bởi biểu đồ

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "2/3"'] \arrow[r, bend left, "1/3"] & 3 \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[r, bend left, "1/3"] & 4 \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[r, "1/3"] & 5 \end{tikzcd}$$

Giả sử xích xuất phát từ 2, hãy xác định (i) xác suất hấp thụ vào 5 và (ii) trung bình mất bao lâu thì xích bị hấp thụ vào 1 hoặc 5.

Giải 17 (i) 1/15. (ii) 11/5.

18. Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov nhận giá trị trên tập $\{0, 1, \ldots\}$ với xác suất chuyển cho bởi
$$p_{01} = 1,\ p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1,\ p_{i,i+1} = \frac{(i+1)^2}{i^2} p_{i,i-1},\ i \geq 1.$$
Chứng minh rằng nếu $X_0 = 0$ thì xác suất $X_n \geq 1$ với mọi $n \geq 1$ là $6/\pi^2$.
(Gợi ý: Xét xích Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ với xác suất chuyển cho bởi
$$p^Y_{00} = 1,\ p^Y_{i,i+1} + p^Y_{i,i-1} = 1,\ p^Y_{i,i+1} = \frac{(i+1)^2}{i^2} p_{i,i-1},\ i \geq 1.$$
Khi đó, với điều kiện $Y_0 = 1$, xác suất để Y bị hấp thụ tại 0 bằng xác suất để $X_n \geq 1$ với mọi $n \geq 1$ khi $X_0 = 0$.)

19. Giả sử $(Y_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập có cùng phân phối
$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2.$$
Đặt $X_0 = 1, X_n = 1 + Y_1 + \ldots + Y_n$ với mỗi $n \geq 1$. Đặt $H_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Xác định $\phi(s) = \mathbb{E}(s^{H_0})$ với $s \in [0, 1)$.

20. Giả sử $(Y_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập có cùng phân phối
$$\mathbb{P}(Y_1 = 2) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2.$$
Đặt $X_0 = 1, X_n = 1 + Y_1 + \ldots + Y_n$ với mỗi $n \geq 1$. Đặt $H_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Đặt $\phi(s) = \mathbb{E}(s^{H_0})$ với $s \in [0, 1)$. Chứng minh rằng $s\phi^3 - 2\phi + s = 0$.

21. Gieo liên tiếp một con xúc xắc cân đối và đồng chất và gọi Y_i là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ i. Gọi X_n là số các mặt xúc xắc khác nhau xuất hiện trong n lần gieo đầu tiên. Giả sử $X_0 = 0$.
   a) Chứng tỏ X_n là xích Markov và tìm xác suất chuyển của nó.
   b) Đặt $T = \min\{n : X_n = 6\}$ là số lần gieo cho tới khi tất cả các mặt của con xúc xắc đều đã xuất hiện. Xác định kì vọng của T.

   Giải 21: a) $\mathbb{P}(X_n = k | X_{n-1} = k) = \frac{k}{6}$, $\quad \mathbb{P}(X_n = k+1 | X_{n-1} = k) = \frac{6-k}{6}$.
   b) Áp dụng Định lí 1.5.5 cho $A = \{6\}$ ta được $\mathbb{E}T = 14.7$.

22. Bạn An muốn sưu tập đủ bộ 10 hình rôbốt bên trong các gói bim bim. Giả sử trong mỗi gói bim bim có đúng một hình rôbốt và xác suất xuất hiện của mỗi hình rôbốt trong mỗi gói bim bim là đều bằng 0.1. Gọi τ là tổng số hình rôbốt bạn An sở hữu cho đến khi có đủ bộ 10 hình.

a) Tính kì vọng và phương sai của τ.

b) Giả sử bộ sưu tập gồm m loại rôbốt. Chứng minh rằng với mọi $c > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau > \lceil m \log m + cm \rceil) \leq e^{-c}.$$

Giải 22. Gọi X_n là số loại rôbốt khác nhau mà An sở hữu trong lần sưu tập thứ n. Ta có $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov với không gian trạng thái $I = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $X_0 = 0$ và

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = \frac{10-k}{10}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{k}{10}, \ 0 \leq k \leq 10.$$

Ta thấy xích (X_n) không giảm với 10 là trạng thái hấp thụ.

Gọi τ_k là tổng số loại rôbốt mà An có cho đến lần đầu tiên An sưu tập được đúng k loại rôbôt. Khi đó

$$\tau = \tau_{10} = (\tau_{10} - \tau_9) + \ldots + (\tau_2 - \tau_1) + \tau_1.$$

Ta có $\tau_k - \tau_{k-1}$ là bnn có phân phối hình học với xác suất thành công là $(10-k+1)/10$. Do đó $\mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}] = 10/(10-k+1)$. Vậy nên

$$\mathbb{E}[\tau] = 10 \sum_{k=1}^{10} k^{-1}.$$

Phương sai của τ được xác định dựa trên nhận xét rằng áp dụng tính chất Markov mạnh, ta có $\tau_k - \tau_{k-1}$ độc lập với $\tau_l - \tau_{l-1}$ với mọi $1 \leq l < k \leq 10$ (coi $\tau_0 = 0$).

Tiếp theo, gọi A_i là biến cố loại rôbốt thứ i chưa xuất hiện trong $\lceil m \log m + cm \rceil$ hình được sưu tập đầu tiên. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > \lceil m \log m + cm \rceil) &= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^m A_i) \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \\ &= m(1-m^{-1})^{\lceil m \log m + cm \rceil} \leq m \exp\left(-\frac{m \log m + cm}{m}\right) = e^{-c}.\end{aligned}$$

23. Với mỗi ma trận xác suất chuyển sau, hãy xác định trạng thái hồi qui, trạng thái trans, lớp liên thông đóng của nó.

$$a)\ P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 & \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad b)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$c)\ P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \quad d)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Giải 23: a) Lớp hồi qui $\{2,4\}$, lớp nhất thời là $\{1,3\}$ và $\{5\}$.
b)Lớp hồi qui $\{2,4\}$, lớp nhất thời là $\{1,3\}$ và $\{5\}$.
c) Lớp hồi qui $\{1,4,5,6\}$, lớp nhất thời là $\{2,3\}$.
d) Lớp hồi qui $\{5,6\}, \{,36\}$, lớp nhất thời là $\{1\}$ và $\{4\}$.

24. Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov tối giản. Chứng minh rằng nếu tồn tại một trạng thái i nào đó sao cho $p_{ii} > 0$ thì xích là phi tuần hoàn.

25. Giả sử a và b là hai số nguyên dương. Xét xích Markov với không gian trạng thái

$$I = \{(x,y) : x \in \{0,\dots,a-1\},\ y \in \{0,\dots,b-1\}\},$$

và di chuyển theo qui luật như sau: Nếu tại thời điểm n xích ở trạng thái (x,y) thì tại thời điểm $n+1$, xích chuyển đến trạng thái $((x+1) \mod a, y)$ hoặc $(x,(y+1) \mod b)$ với cùng xác suất $1/2$.

a) Chứng minh rằng xích trên là tối giản.
b) Chứng minh rằng xích là phi tuần hoàn khi và chỉ khi a và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

($x \mod a$ là số dư của x khi chia cho a.)

26. *(Nguyên lí phản xạ)*

a) Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là du động ngẫu nhiên đơn giản đối xứng trên $\mathbb{Z}$. Gọi

$$\tau_0 = \min\{n \geq 0 : X_n = 0\}.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương j, k và r

$$\mathbb{P}_k(\tau_0 < r, X_r = j) = \mathbb{P}_k(X_r = -j),$$

và

$$\mathbb{P}_k(\tau_0 < r, X_r > 0) = \mathbb{P}_k(X_r < 0).$$

b) Dãy bnn $(X_n)_{n\geq 0}$ nhận giá trị trên $\mathbb{Z}$ được gọi là *du động ngẫu nhiên đơn giản lười* nếu nó có xác suất chuyển xác định bởi

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/4, \quad p_{ii} = 1/2.$$

Chứng minh rằng hai đẳng thức ở phần a) vẫn còn đúng.

Giải 26: Xét qtnn $(Y_n)_{n\geq 0}$ được xác định như sau:

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{nếu } n \leq \tau_0 \\ -X_n & \text{nếu } n > \tau_0. \end{cases}$$

Ta có $(Y_n)_{n\geq 0}$ cũng là Markov và có cùng phân phối với $(X_n)_{n\geq 0}$. Do đó

$$\mathbb{P}_k(\tau_0 < r, X_r = j) = \mathbb{P}_k(\tau_0 < r, Y_r = -j) = \mathbb{P}_k(Y_r = -j) = \mathbb{P}_k(X_r = -j).$$

Thế $j = 1, 2, \ldots$ vào hai vế của đẳng thức trên và cộng vế với vế các đẳng thức tương ứng ta sẽ thu được đẳng thức cần chứng minh thứ hai.

27. Giả sử $(X_n)_{n\geq 0}$ là du động ngẫu nhiên đơn giản đối xứng trên $\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k và r,

   a) $\mathbb{P}_k(\tau_0 > r) = \mathbb{P}_0(-k < X_r \leq k)$.

   b) $\mathbb{P}_0(X_r = k) \leq \frac{3}{\sqrt{r}}$.

   c) $\mathbb{P}_k(\tau_0 > r) \leq \frac{12k}{\sqrt{r}}$.

   Giải 27: a) Dễ thấy $\mathbb{P}_k(X_r > 0) = \mathbb{P}_k(X_r > 0, \tau_0 \leq r) + \mathbb{P}_k(\tau_0 > r)$. Áp dụng Bài tập 26, ta có $\mathbb{P}_k(X_r > 0) = \mathbb{P}_k(X_r < 0) + \mathbb{P}_k(\tau_0 > r)$. Do tính đối xứng của du động ngẫu nhiên, $\mathbb{P}_k(X_r < 0) = \mathbb{P}_k(X_r > 2k)$. Vậy nên

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_k(\tau_0 > r) &= \mathbb{P}_k(X_r > 0) - \mathbb{P}_k(X_r > 2k)\\ &= \mathbb{P}_k(0 < X_r \leq 2k) = \mathbb{P}_0(-k < X_r \leq k).\end{aligned}$$

   b) Ta có $\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2k) = C_{2r}^{r+k}2^{-2r} \leq C_{2r}^{r}2^{-2r}$, và $\mathbb{P}_0(X_{2r+1} = 2k+1) = C_{2r}^{r+k}2^{-2r} \leq C_{2r+1}^{r}2^{-2r+1}$. Áp dụng công thức Stirling[4] ta suy ra điều phải chứng minh.
   c) được suy ra trực tiếp từ a) và b).

28. a) Xác định phân phối dừng của Xích Ehrenfest ở Ví dụ 1.2.3.
   b) Xác định phân phối dừng của xích Markov cấp hai ở Ví dụ 1.2.4.

   Giải (28: a) $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16})$. b) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})$.

29. Xác định phân phối dừng của các xích Markov có ma trận chuyển là:

$$a)\ P = \begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix} \quad b)\ P = \begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\end{pmatrix} \quad c)\ P = \begin{pmatrix}0.6 & 0.4 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}.$$

   Giải 29: a) $(\frac{11}{47}, \frac{19}{47}, \frac{17}{47})$, b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, c) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

30. Xét xích Markov với tập trạng thái $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ và xác suất chuyển

$$p_{m,m+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{m+2}\Big), \quad \text{với } m \geq 0, \qquad p_{m,m-1} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{m+2}\Big), \quad \text{với } m \geq 1,$$

   và $p_{00} = 1 - p_{01} = 3/4$. Xác định phân phối dừng của X.

   Giải 30: Gọi λ là phân phối dừng, cộng vế với vế các phương trình trong hệ $\lambda = \lambda P$ ta được $\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}\lambda_n$. Do đó $\lambda_n = \frac{3\lambda_0}{(n+1)(n+3)}$. Vì $\sum_n \lambda_n = 1$ nên $\lambda_0 = 4/9$.

[4] Ta có $n! = \sqrt{2\pi}e^{-n+\epsilon_n}n^{n+1/2}$ trong đó $\frac{1}{12n+1} \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{12n}$.

31. Xét xích Markov với tập trạng thái $I = \{1, 2, \ldots\}$ và xác suất chuyển

$$p_{m,m+1} = m/(2m+2) \quad \text{với } m \geq 1$$
$$p_{m,m-1} = 1/2 \quad \text{với } m \geq 2$$
$$p_{m,m} = 1/(2m+2) \quad \text{với } m \geq 2,$$

và $p_{11} = 1 - p_{12} = 3/4$. Chứng minh rằng xích không có phân phối dừng.

Giải 31: Giả sử λ là phân phối dừng, cộng vế với vế các phương trình trong hệ $\lambda = \lambda P$ ta được $\lambda_{m+1} = \frac{m}{m+1}\lambda_m$ với mọi $m \geq 1$. Do đó $\lambda_m = \frac{1}{m}\lambda_1$. Do $\sum_m \lambda_m = 1$ nên $\lambda_1 \sum_m \frac{1}{m} = 1$. Phương trình này vô nghiệm nên xích đã cho không có phân phối dừng.

32. *(Xích tuổi)*
Xét xích Markov với tập trạng thái $I = \{0, 1, \ldots\}$ và ma trận chuyển

$$p_{i,i+1} = 1 - p_{i,0} = p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

a) Xác định điều kiện của (p_n) để 0 là trạng thái hồi qui.

b) Xác định điều kiện của (p_n) để 0 là trạng thái hồi qui dương.

c) Xác định phân phối dừng.

Giải 32: Gọi $T_i = \inf\{k \geq 1 : X_k = i\}$. Ta có $\mathbb{P}_0(T_0 = 1) = \mathbb{P}_0(X_1 = 0) = 1 - p_0$ và với mọi $k \geq 2$, $\mathbb{P}_0(T_0 = k) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_{k-1} = k-1, X_k = 0) = p_0 \ldots p_{k-2}(1 - p_{k-1})$. Theo Định lí 1.7.3, trạng thái 0 là hồi qui nếu $\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = 1$, tức là $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0(T_0 = k) = 1 - \prod_{k\geq 0} p_k = 1$ hay $\prod_{k\geq 0} p_k = 0$.

Trạng thái 0 là hồi qui dương nếu $\mathbb{E}_0(T_0) < \infty$, tức là $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}_0[T_0 = k] = \sum_{k\geq 1} \prod_{j=0}^{k} p_j < \infty$.

Giả sử $\lambda = (\lambda_i)$ là phân phối dừng. Ta có $\lambda_i = p_{i-1}\lambda_{i-1}$ với mọi $i \geq 1$ và $\lambda_0 = \sum_j \lambda_j(1 - p_j)$. Suy ra $\lambda_n = \lambda_0 p_0 \ldots p_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$ và $\lambda_0 = \lambda_0(1 - \prod_{j\geq 0} p_j)$. Do đó hệ có phân phối dừng nếu $\Lambda = \sum_{k\geq 1} \prod_{j=0}^{k} p_j < \infty$ và khi đó $\lambda_n = p_0 \ldots p_{n-1}/\Lambda$.

33. *(Xích đổi mới)*
Xét xích Markov với tập trạng thái $I = \{0, 1, \ldots\}$ và ma trận chuyển

$$p_{i,i-1} = 1 \text{ với } i > 0, \text{và } p_{0,k} = p_k, \quad 0 < p_k < 1.$$

Chứng minh rằng xích luôn hồi qui. Xác định điều kiện của (p_n) để xích là hồi qui dương.

Giải 33: Dễ kiểm tra xích là tối giản. Hơn nữa $\mathbb{P}_0(T_0 = k) = \mathbb{P}_0(X_1 = k-1, X_2 = k-2, \ldots, X_k = 0) = p_{k-1}$. Do vậy $\sum_k \mathbb{P}_0(T_0 = k) = \sum_k p_k = 1 < \infty$ nên xích là hồi qui. Xích là hồi qui dương nếu

$$\mathbb{E}_0(T_0) = \sum_k kp_{k-1} < \infty.$$

34. Một con châu chấu nhảy qua lại trên 8 đỉnh của hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ theo qui luật sau: tại mỗi lần nhảy, nó di chuyển tới một trong ba đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng với cùng xác suất 1/3 và độc lập với những lần nhảy trước đó của nó. Giả sử con châu chấu xuất phát từ A, tính:
    a) trung bình tổng số lần nhảy cho đến khi nó trở về A lần đầu tiên.
    b) trung bình tổng số lần đến C' trước khi nó trở về A lần đầu tiên.
    c) trung bình tổng số lần nhảy cho đến khi nó đến C' lần đầu tiên.

35. Giả sử (X_n) là du động ngẫu nhiên đơn giản trên $\mathbb{Z}$ như ở mục 1.8.1 với $0 < q < p < 1$. Đặt $T = \inf\{n : X_n = 0\}$ và $h_i = \mathbb{P}_i(T < \infty)$. Hãy xác định h_i.

    Giải 35: $h_i = 1$ với $i \geq 0$ và $= (p/q)^i$ với $i < 0$.

36. Giả sử P là ma trận ngẫu nhiên trên tập hữu hạn I. Chứng minh rằng phân phối π là bất biến đối với P khi và chỉ khi $\pi(I - P + A) = a$, trong đó $A = (a_{ij} : i, j \in I)$ thỏa mãn $a_{ij} = 1$ với mọi i, j và $a = (a_i, i \in I)$ với $a_i = 1$ với mọi $i \in I$. Chứng tỏ rằng nếu P là tối giản thì $I - P + A$ là khả nghịch.

    Giải 36: Giả sử P tối giản, do không gian xác suất có hữu hạn trạng thái nên theo Định lí 1.7.6 xích là hồi qui. Lại áp dụng Định lí 1.9.6 ta có P có phân phối dừng nên theo Định lí 1.9.9, xích là hồi qui dương và phân phối dừng là duy nhất. Xét ma trận chuyển $Q = (q_{ij})$ với $q_{ij} = p_{ji}$. Ta có Q cũng là tối giản, hồi qui dương và có phân phối dừng duy nhất. Giả sử tồn tại véc tơ (cột) $x \neq 0$ sao cho $(I - P + A)x = 0$, khi đó $ax = 0$, suy ra $x = Px$ hay $x = xQ$. Điều này mâu thuẫn với tính duy nhất của phân phối dừng.

37. *(Mô hình tán xạ Bernoulli-Laplace)*
    Cho b quả bóng đen và $2m - b$ quả bóng trắng vào hai hộp sao cho mỗi hộp chứa đúng m bóng. Ta nói rằng hệ ở trạng thái i nếu trong hộp thứ nhất có i bóng đen, $m - i$ bóng trắng. Người ta lần lượt chuyển bóng giữa hai hộp như sau: chọn ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp một bóng và hoán đổi vị trí của chúng. Gọi X_n là trạng thái của hệ sau n lần chuyển. Chứng minh rằng (X_n) là xích Markov, xác định ma trận chuyển và phân phối dừng của nó.

    Giải: Phân phối dừng là
    $$\pi(i) = C_b^i C_{2m-b}^{m-i} / C_{2m}^m.$$

38. An đánh số n quyển sách của mình từ 1 đến n rồi xếp chúng lên một giá nằm ngang. Mỗi tối An lấy ngẫu nhiên một quyển ra đọc rồi xếp lại quyển sách đó vào vị trí đầu tiên bên trái của giá. Giả sử xác suất An chọn quyển sách thứ i mỗi lần đều bằng p_i. Trạng thái X_k của giá sách ở sáng ngày thứ k là thứ tự từ trái qua phải của n quyển sách ở trên giá. Chứng tỏ rằng dãy (X_k) có phân phối dừng là
    $$\pi(i_1, \ldots, i_n) = p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1 - p_{i_1}} \frac{p_{i_3}}{1 - p_{i_1} - p_{i_2}} \cdots \frac{p_{i_n}}{1 - p_{i_1} - \ldots - p_{i_{n-1}}},$$

trong đó $(i_1, \dots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$.

39. Một nghiên cứu về y tế cho thấy sau mỗi năm, 25% số người hút thuốc sẽ bỏ trong khi 75% số người còn lại tiếp tục hút. Trong số những người không hút thuốc thì sẽ có 8% chuyển sang hút ở năm tiếp theo. Nếu có 20% dân số hút thuốc ở năm 2012 thì tỉ lệ người hút ở năm 2015, 2020 sẽ là bao nhiêu. Xác định tỉ lệ người hút thuốc trong tương lai xa.

    Giải 39: Gọi X_n là tỉ lệ người hút thuốc tại năm $2012+n$. Ta có $X_n = \frac{8}{33} + (0.2 - \frac{8}{33})0.67^n$.

40. Giả sử $(Y_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập, cùng phân phối và nhận giá trị trên tập $\{1, 2, \dots\}$. Giả sử rằng tập tất cả các số nguyên n thỏa mãn $\mathbb{P}(Y_1 = n) > 0$ có ước số chung lớn nhất bằng 1. Đặt $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$ và

$$X_n = \inf\{m \geq n : m = Y_1 + \ldots + Y_k \text{ với } k \geq 0 \text{ nào đó } \} - n.$$

Chứng minh rằng $(X_n)_{n\geq 0}$ là xích Markov và xác định $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

Chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n = Y_1 + \ldots + Y_k \text{ với } k \geq 0 \text{ nào đó } \} = 1/\mu.$$

Giải 40: Ta có

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 \text{ nếu } X_n > 0 \\ Y_k - 1 \text{ nếu } X_n = 0. \end{cases}$$

Vậy nên (X_n) là xích Markov với ma trận chuyển cho bởi

$$p_{0i} = \mathbb{P}(Y = i + 1), \quad p_{ji} = \delta_{j-1,i} \ \forall j \geq 1.$$

Do tập giá trị của Y có ước chung lớn nhất bằng 1 nên xích (X_n) là phi tuần hoàn. Giả sử (π_i) là phân phối dừng của (X_n), khi đó (π_i) là nghiệm của hệ

$$\pi_i = \pi_0 p_{0i} + \pi_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Do vậy $\pi_{i+1} = \pi_0(1 - p_{00} - p_{01} - \ldots - p_{0i}) = \pi_0 \mathbb{P}(Y > i + 1)$. Mà $1 = \sum_i \pi_i = \pi_0(1 + \mathbb{P}(Y > 1) + \mathbb{P}(Y > 2) + \ldots) = \pi_0 \mathbb{E}(Y) = \mu\pi_0$ nên $\pi_0 = 1/\mu$. Áp dụng Định lí 1.10.5 ta được $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \pi_0 = 1/\mu$.