CAPÍTULO II

MEDICIONES

> *"Si usted puede medir lo que está considerando y expresarlo en números, Ud. sabe algo sobre ello; pero cuando no puede cuantificarlo su conocimiento es vago e insatisfactorio, podría ser el comienzo de un conocimiento, aunque sin alcanzar el nivel de ciencia."*
>
> Lord Kelvin (1883)

Ya hemos comentado que la Física, como en general todas las Ciencias Naturales, se fundamenta en **observaciones**. La palabra "observación" en su uso diario da a entender solamente un acto de percepción; pero su connotación científica moderna implica una **acción cuantitativa**, lo cual requiere **mediciones**.

El progreso de la Física se ha debido, en gran parte, al énfasis puesto en lo cuantitativo de la observación. Con esta metodología se ha llegado a establecer **relaciones cuantitativas**, o sea formular **leyes**, las cuales constituyen la médula de la Física.

Por ejemplo, leyes como:

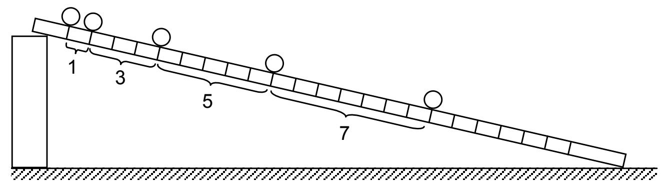
- La distancia recorrida por un cuerpo que se suelta en "caída libre" está dada por: $d = \frac{1}{2} g t^2$.
- La intensidad de la corriente eléctrica por un conductor metálico de resistencia R, que está conectado a una batería de voltaje V, es : $I = V/R$.
- El período de oscilación de un péndulo de largo L en un lugar con aceleración de gravedad g es: $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

La actitud actual de fundamentar las ciencias en la experimentación, partió efectivamente con los trabajos de Galileo hace unos 400 años; antes de él, Bacon ya había insistido en que la experimentación es la base de las ciencias. Para la gran mayoría de los físicos los trabajos de Galileo marcan el "nacimiento de la Física".

Hasta entonces, el *estudio del movimiento* había tenido básicamente el carácter de discusiones lógicas, como las presentadas por Aristóteles, otros filósofos griegos y los continuadores de esa tradición hasta mediados del siglo XVII. Las conclusiones que obtenían eran consideradas como probadas por raciocinios puros o, a lo más, por actos de percepción sensorial, sin realizar mediciones.

- Por ejemplo, Aristóteles pensaba que la velocidad que adquiría un cuerpo era inversamente proporcional a la resistencia del medio (en el simbolismo actual sería $v \propto 1/R$). En el vacío la resistencia debería ser nula, por lo tanto, el cuerpo se movería con velocidad infinita y esto lo rechazaba Aristóteles como una inconsecuencia, concluyendo que el vacío no podía existir.

Uno de los experimentos de Galileo consistió en dejar rodar una bola por una ranura en un plano inclinado y observar el movimiento. Pero Galileo no se limitó a mirar, midió cuánta distancia caía la bola en determinado tiempo.



Trazos medidos a intervalos iguales de tiempo.

Métodos para medir distancias eran bien conocidos en su época; sin embargo, no había medios para medir tiempos relativamente cortos con cierta precisión, así es que en ese experimento Galileo contó sus pulsaciones para controlar intervalos iguales de tiempo.

Esperamos que usted vaya asimilando, poco a poco, algunas de las características comunes a todo tipo de medición. Veremos juntos algunos casos de mediciones de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes; dejaremos otros, como ejercicios, para que Ud. los desarrolle personalmente.

Medición del largo de un lápiz

Tomamos un lápiz de pasta corriente y medimos su **largo** con una regla graduada en centímetros y milímetros. Suponga que distintas personas realizan la medición varias veces, del mismo lápiz y con la misma regla, obteniendo los siguientes resultados en *centímetros*:

14,31 14,30 14,38 14,32 14,35
14,32 14,39 14,31 14,36

Podemos preguntarnos ¿cuál es el "largo" del lápiz? Aceptamos que el largo del lápiz es un largo bien definido y que no ocurre que el lápiz se alarga o se acorta según sea quien lo mida ni como se mida. Lo que sucede es que hay **errores de medición**. En este caso los errores se debieron probablemente a que : no ajustamos siempre en la misma forma el extremo del lápiz con la marca "cero" de la regla, nos inclinamos al medir el otro extremo del lápiz, no estimamos bien las "décimas de milímetros", ...

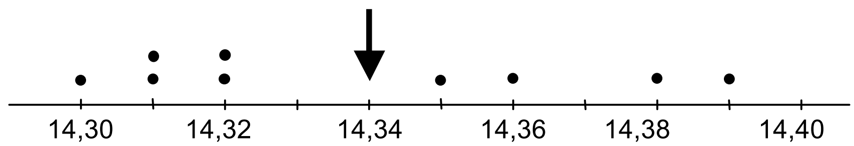
Con el objeto de considerar todas las mediciones efectuadas y tratar de eliminar las influencias de los posibles errores, sacamos **el promedio** de estas mediciones. Para esto sumamos todos los valores medidos y dividimos por el número de mediciones:

$$\text{Largo promedio} = \frac{\text{Suma de los largos medidos}}{\text{Número de mediciones}}$$

Con los valores obtenidos en las 9 mediciones indicadas resulta:

$$\text{Largo promedio} = \bar{L} = \frac{129{,}04\,[\text{cm}]}{9} \simeq 14{,}34\,[\text{cm}]$$

Si representamos en un gráfico las mediciones hechas y el promedio de ellas, podemos visualizar cuánto difiere cada medición con respecto al promedio:



Al referirnos a la diferencia $L_i - \overline{L}$ entre una medida L_i y el promedio calculado $\overline{L}$ usaremos la expresión "error con respecto al promedio".

Resulta más ilustrativo calcular el "error porcentual respecto al promedio":

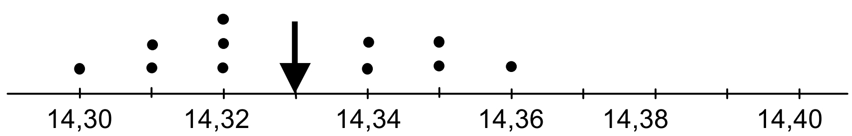
$$\text{error porcentual} = \frac{L_i - \overline{L}}{\overline{L}} \cdot 100\,\%$$

Esta cantidad nos da una medida comparativa de la magnitud del **error cometido** con respecto al valor que se está midiendo.

- Por ejemplo, para la medición $L_i = 14{,}38\,[\text{cm}]$ el *error porcentual con respecto al promedio* $\overline{L} = 14{,}34\,[\text{cm}]$ es:

$$\text{e.p.} = \frac{14{,}38 - 14{,}34}{14{,}34} \cdot 100\% = \frac{0{,}04}{14{,}34} \cdot 100\% = 0{,}3\%$$

Consideremos otro conjunto de mediciones, obtenido por diferentes personas, del largo del mismo lápiz. En el siguiente gráfico mostramos estas mediciones e indicamos el promedio correspondiente (14,33[cm]) :



El hecho que de dos series de mediciones análogas obtengamos "casi el mismo" promedio nos dice que: el promedio por sí solo no nos informa del "mejor valor" para el largo del lápiz. Debemos recurrir por tanto a otras consideraciones para decidir.

Al comparar los gráficos en que representamos cada serie de mediciones nos damos cuenta que las mediciones están más **dispersas** en la primera serie. Esto es, en el primer caso las **desviaciones** (diferencias entre cada medición y el promedio) son en general mayores.

Parece razonable pensar que un conjunto de mediciones que tenga una menor dispersión nos da una mejor información del valor que buscamos. Debemos entonces, encontrar una forma de representar **cuantitativamente** la dispersión de un conjunto de mediciones.

Con tal propósito estudiemos los valores obtenidos en el primer grupo de mediciones iniciales, comenzando por la siguiente tabla:

$L_i\,[\text{cm}]$	$L_i - \bar{L}\,[\text{cm}]$	$(L_i - \bar{L})^2\,[\text{cm}^2]$
14,31	- 0,03	$9 \cdot 10^{-4}$
14,30	- 0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
14,38	+ 0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
14,32	- 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
14,35	+ 0,01	$1 \cdot 10^{-4}$
14,32	- 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
14,39	+ 0,05	$25 \cdot 10^{-4}$
14,31	- 0,03	$9 \cdot 10^{-4}$
14,36	+ 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$

Observemos que las desviaciones $L_i - \bar{L}$ son positivas en algunos casos y negativas en otros. Si calculamos el **promedio de las desviaciones**, los valores positivos y negativos de ellas se cancelan en la suma y tal **promedio nulo** no es de ninguna utilidad. Una manera de conseguir que no influyan los signos de las desviaciones es tomar sus cuadrados: $\left(L_i - \bar{L}\right)^2$†. Para tomar en cuenta el conjunto de las mediciones calculamos el **promedio** de tales "desviaciones al cuadrado":

$$\frac{\text{Suma de los } \left(L_i - \bar{L}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}$$

Como estamos midiendo largos y no "largos al cuadrado", debemos tomar la **raíz cuadrada** de este promedio. Al valor que resulta le daremos el nombre de **desviación estándar** y lo simbolizaremos con la letra σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Suma de los } \left(L_i - \bar{L}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}}$$

- Para nuestro ejemplo resulta:

$$\sigma = \sqrt{\frac{88 \cdot 10^{-4}[\text{cm}^2]}{9}} \simeq \sqrt{9,8} \cdot 10^{-2}[\text{cm}] \simeq 0,03[\text{cm}]$$

Usaremos el siguiente **convenio** para informar el resultado:

largo medido = largo promedio ± desviación estándar

donde la desviación estándar nos indica la "precisión" con que se efectuaron las mediciones.

- Con los datos numéricos considerados, resulta:

$$L = \bar{L} \pm \sigma = 14,34 \pm 0,03[\text{cm}]$$

† Otro modo de hacer que no influyan los signos de las desviaciones, sería tomar sus valores absolutos. Una ventaja, entre otras, de usar los valores al cuadrado, es que aumenta la influencia de los errores grandes y minimiza la influencia de los errores pequeños en el valor de la desviación estándar. Se prefiere, entonces, este último método, pues da una mejor información acerca de la precisión con que fue hecha la medida.

Le recomendamos que usted repita este "experimento" con unos 3 ó 4 de sus compañeros. Escogiendo un lápiz y usando una misma regla midan sucesivamente el largo del lápiz. Para que no se influencien mutuamente, cada uno puede anotar en un papel el resultado de su medición y no se la comunica a los otros. Hagan 2 ó 3 rondas de mediciones y luego las analizan.

A través de este ejemplo hemos presentado varias ideas generales sobre mediciones: errores de medición, valores medios y desviación estándar que, con modificaciones apropiadas, son aplicables a procesos de medición de cualquier cantidad física.

Notación algebraica

Consideremos un conjunto de mediciones de una cierta cantidad física:

$$\{ M_1 ,\ M_2 ,\ M_3 ,\ \ldots\ldots\ldots ,\ M_N \}$$

El **valor promedio** de estas mediciones es:

$$\text{valor promedio} = \frac{\text{Suma de las mediciones } M_i}{\text{Número de mediciones}}$$

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i}{N}$$

La "desviación estándar" correspondiente a estas mediciones es:

$$\text{Desviación estándar} = \sqrt{\text{Promedio de las desviaciones al cuadrado}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Suma de las } \left(M_i - \overline{M}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(M_i - \overline{M}\right)^2}$$

El resultado del estudio de este conjunto de mediciones lo expresamos adoptando el siguiente **convenio**:

$$\text{valor medido} = \text{valor promedio} \pm \text{desviación estándar}$$

$$M_{medido} = \overline{M} \pm \sigma_M$$

Hemos usado el **subíndice M** acompañando al símbolo de la desviación estándar para indicar que éste se refiere al conjunto de mediciones $\{ M_1, \ldots\ldots , M_N \}$.

Medición de π

Un ejemplo en el cual deben medirse dos longitudes y efectuar un cálculo entre ellas, lo proporciona el caso que llamaremos medición de π.

Al mencionar π inmediatamente pensamos en el cuociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de ella. El número π es uno de los números "maravillosos" en matemáticas; su valor ha sido calculado con un número impresionante de decimales. Limitémonos a mencionar π = 3,14159 26535 89793 23846 ...

Escoja algunos objetos como lápices, monedas, botones, tarros de conserva, platos, ollas, etc.

Provéase de hilo y de una regla graduada en centímetros y milímetros.

Mida usted el diámetro (directamente con la regla) y la longitud de la circunferencia (usando el hilo) para cada uno de los objetos que ha escogido.

Para cada par de mediciones: la longitud C y el diámetro D de la circunferencia, hechas en cada objeto, calcule el cuociente C/D.

$$\text{valor calculado de } \pi = \pi_C = \frac{C}{D}$$

Determine usted para cada "valor calculado de π" el "error porcentual respecto a π":

$$\text{error porcentual} = \frac{\pi_C - \pi}{\pi} \cdot 100$$

Fíjese en los errores porcentuales, ¿dependen ellos del tamaño de los objetos? Comente.

Después de haber desarrollado completa y cuidadosamente las etapas descritas, usted debe haberse percatado que inevitablemente hay **errores de medición**; ellos pueden provenir de: apreciación del centro de la circunferencia y medición del diámetro; forma de colocar el hilo entre esas marcas (si lo coloca algo suelto sobre la regla, no mide bien; si lo tensa, cambia el largo; si un extremo queda entre dos divisiones de la regla, debe estimar la porción correspondiente entre ellas). Piense Ud. en otras posibles fuentes de errores de medición.

También debe considerar que los contornos de los objetos que Ud. está usando **no** son circunferencias perfectas. En rigor, la circunferencia al igual que todas las figuras geométricas son **idealizaciones** y las usamos como **modelos** para representar ciertas características de los objetos.

La influencia de tales factores puede ser reducida calculando el **valor promedio** de todos los π_C obtenidos:

$$\overline{\pi}_C = \frac{\text{Suma de los valores de } \pi_C}{\text{Número de objetos medidos}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\pi_C\right)_j$$

La comparación de este valor promedio con π puede expresarla porcentualmente:

$$\text{error porcentual "medio"} = \frac{\overline{\pi}_C - \pi}{\pi} \cdot 100$$

¿Es este valor igual al promedio de los errores porcentuales individuales?

Continúe analizando las mediciones en forma análoga a lo hecho en el caso de medición del largo de un lápiz: construya una tabla con los valores de π_C, $\left(\pi_C - \overline{\pi}_C\right)$ y $\left(\pi_C - \overline{\pi}_C\right)^2$ y calcule la desviación estándar σ_π y exprese:

$$\text{valor calculado de } \pi = \overline{\pi}_C \pm \sigma_\pi$$

- Le presentamos un cálculo que hicimos con un botón:

Medimos $D = 17{,}0\,[\mathrm{mm}]$ y $C = 56{,}5\,[\mathrm{mm}]$

Calculamos $\pi_C = \dfrac{C}{D} = \dfrac{56{,}5}{17{,}0} = 3{,}323529\,...$

¿Tiene sentido que calculemos con tantos decimales? Realmente **no** lo tiene; hemos introducido errores en la medición de la longitud de la circunferencia y del diámetro y opinamos que la "tercera cifra" es dudosa. No podemos pretender generar, por cálculo, un número con más **cifras significativas** que las que tienen los números medidos. Nos quedamos satisfechos con $\pi = 3{,}32$.

¡Revise sus cálculos para π_C y efectúe aproximaciones dejando el número de cifras que usted considere conveniente!

El error porcentual para el valor calculado $\pi = 3{,}32$ vale:

$$\frac{3{,}32 - 3{,}14}{3{,}14} \cdot 100 = \frac{0{,}18}{3{,}14} \cdot 100 \simeq 6\%$$

donde hemos aproximado π a 3,14 ya que π_C fue expresado sólo con tres cifras significativas.

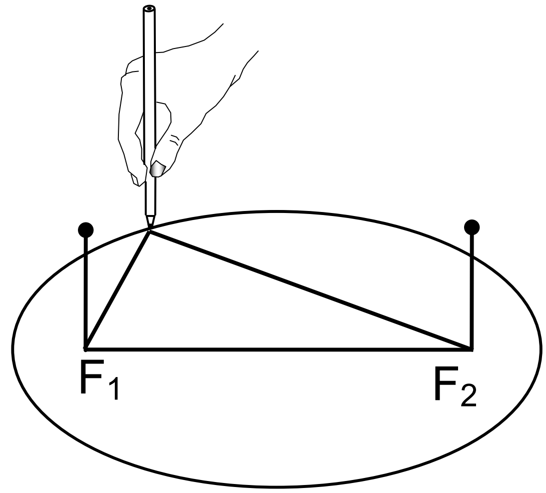
Si desea realizar el "experimento" en forma más completa, **repita** las mediciones del diámetro (D) y la longitud (C) de las circunferencias de los objetos que usted ya seleccionó. Si eligió N objetos (Objeto 1, Objeto 2,…Objeto N) y para cada uno de ellos realiza M mediciones (Medición 1, Medición 2, …,Medición M) podrá llenar la siguiente tabla:

	Medición 1			Medición 2				Medición M		
	D	C	C / D	D	C	C / D		D	C	C / D
Objeto 1										
Objeto 2										
.							. . .			
.										
.										
Objeto N										

Con los valores obtenidos podrá calcular el valor promedio de π_C para cada objeto en M mediciones (usando los cálculos de C/D en líneas horizontales o **filas**) o calcular el valor promedio de π_C para la serie de N objetos en cierta medición (usando los cálculos de C/D en líneas verticales o **columnas**). Después de hacer ambos cálculos podrá encontrar el "valor promedio de los valores promedios", ya sea por filas o por columnas y el valor promedio total. Puede también calcular porcentajes de error, desviaciones estándar, etc.

Divertimento: La circunferencia es la curva más simétrica y de mayor belleza, en su simplicidad, que podamos imaginar. Puede trazar una circunferencia sobre un plano usando un compás. También puede hacerla fijando uno de los extremos de un trozo de hilo en un punto del plano, amarrando un lápiz al otro extremo y moviendo el lápiz de tal modo que el hilo se mantenga tenso.

Otra curva "parecida" es la **elipse**. Puede trazarla de acuerdo a las siguientes instrucciones: fije dos alfileres en dos puntos de un plano; coloque un trozo de hilo con sus extremos unidos, enlazando ambos alfileres; finalmente guíe la punta de un lápiz manteniendo tenso el hilo. Se comprende por esta construcción que la elipse es el lugar geométrico de los puntos que mantienen constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos. Estos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse (F_1 y F_2 en el dibujo).



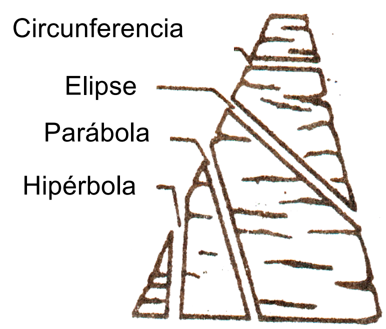
Compruebe tal definición haciendo mediciones. Construya una serie de elipses acercando cada vez más los focos. ¿Qué sucede si los focos coinciden? Mida el perímetro de la elipse ¿puede relacionarlo con π ?

Circunferencias y elipses pertenecen a la familia de las "curvas cónicas".

Elija una zanahoria "fresquita", grande y lo más simétrica que encuentre.

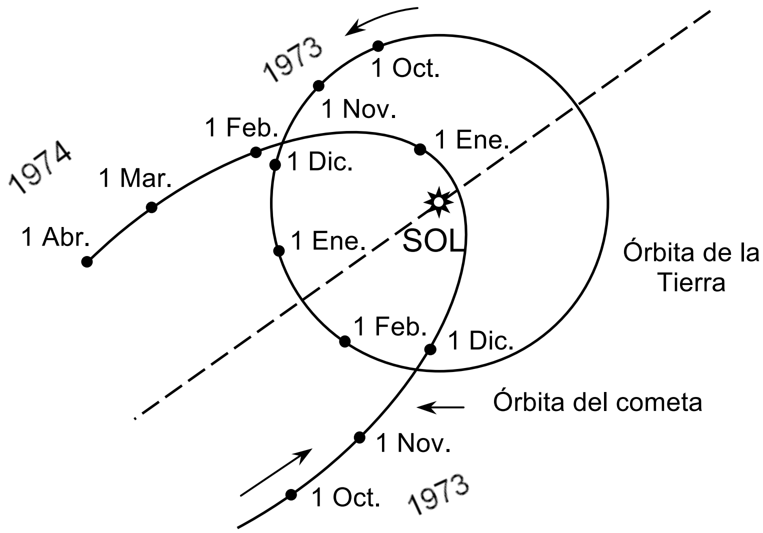
Haga cortes como se indican en la figura. Los contornos de esas *secciones cónicas* son las *curvas cónicas*.

Marque tales contornos colocando los trozos de zanahoria sobre un papel.



En muchas ocasiones nos encontraremos en Física con curvas cónicas. Por ejemplo, las trayectorias de los planetas y cometas alrededor del Sol pueden describirse por cónicas.

Mire las representaciones de las órbitas de la Tierra y del cometa Kohoutec en la siguiente figura.



La menor distancia entre el Kohoutec y la Tierra fue de 0,8[UA].

El **perihelio** (distancia mínima al Sol) del Kohoutec fue 0,14[UA].

Estime, usando el gráfico y estos datos, **cuándo** el Kohoutec estuvo más próximo a la Tierra.

Para que usted practique el arte de estimar y de medir longitudes y distancias y también un poquito del análisis de mediciones, le proponemos a continuación algunos ejercicios. Al hacerlos preste atención, cuando sea pertinente, a los tipos y fuentes de errores de medición que Ud. encontrará; anótelos y coméntelos.

Ejercicios

2-1) Ingénieselas para determinar el espesor de un vidrio **instalado** en una ventana usando, como único *instrumento de medición*, una regla. Haga mediciones.

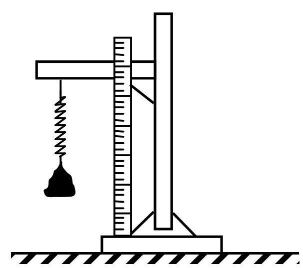
2-2) Determine el espesor de las hojas de un libro usando una regla corriente. Examine si es posible medir el espesor de una hoja directamente. Haga mediciones agrupando hojas; por ejemplo: 15, 34, 50, 78, 123 y todas las hojas del libro. Aprenda a determinar el número de hojas según la numeración de las páginas. Calcule el espesor medio de las hojas del libro. Comente sobre errores de medición.

2-3) Mida el ancho de una mesa rectangular. Haga a lo menos 5 mediciones; exprese las lecturas en *centímetros*, estimando los centésimos de centímetro. Calcule el ancho medio de la mesa. Repita la medición usando una regla *graduada en pulgadas*, estimando los 1/16 de pulgada. Compare los resultados.

2-4) Determine la distancia media entre "los surcos" de un "disco de vinilo".

2-5) Mida el diámetro de un alambre usando una regla graduada en milímetros. Como un posible método le sugerimos que enrolle el alambre en un lápiz (cuidando que todas las vueltas se toquen), que cuente el número de vueltas completas y que mida el largo que ellas ocupan. Haga varias mediciones con diferentes números de vueltas y calcule el diámetro medio del alambre. En forma análoga determine el espesor de uno de sus cabellos; puede enrollarlo en un palo de fósforo.

2-6) Construya un resorte enrollando un alambre en un palo de escoba. Amarre un objeto a un extremo y fije el otro de tal modo que el resorte pueda oscilar libremente en dirección vertical. Coloque una regla paralelamente al resorte, lleve el objeto más abajo que su posición de equilibrio y mida; suelte el resorte y mida el punto más alto al que llega el borde inferior del objeto. Repita el experimento varias veces soltando siempre el objeto desde la misma posición. Comente sobre los errores de medición.



2-7) Determine el diámetro de la Luna usando el siguiente procedimiento: sobre el vidrio de una ventana pegue dos cintas opacas separadas en 2,0[cm]; haga un agujerito en una tarjeta; observe la Luna por el agujerito, colocando la tarjeta pegada al ojo y ubicándola entre las dos cintas; aléjese de la ventana hasta que la Luna ocupe totalmente el espacio entre las cintas y mida la distancia de la ventana a la tarjeta (necesitará la ayuda de un compañero). Utilice la geometría de los triángulos semejantes y el dato distancia Tierra-Luna (pág. 36) para calcular el diámetro de la Luna. No intente utilizar este método para determinar el diámetro del Sol, dañaría sus ojos. ¿Podría emplear este procedimiento para determinar el diámetro de una estrella?

2-8) Exprese la rapidez 312,3[m/s] del sonido dentro de un tubo lleno de cierto gas, de modo que indique que se ha medido con una "precisión" de 0,2[m/s]. Exprese porcentualmente el rango de variación de las mediciones.

2-9) La medición del diámetro de una pieza de hojalata da por resultado $2{,}60 \pm 0{,}03$ [cm]. Calcule la incertidumbre porcentual en el perímetro de ese objeto. Comente.

2-10) La medición del largo de una varilla produce $\bar{L} = 80{,}44$[cm] . Se han hecho 8 mediciones; pero al tratar de rehacer los cálculos se encuentran sólo las siguientes anotaciones: 80,41 ; 80,43 ; 80,42 ; 80,47; 80,45 ; 80,44 y 80,42. Encuentre el valor de la medición "perdida".

2-11) La medición del largo de una varilla produce $L = 80{,}44 \pm 0{,}06$[cm]. Se han hecho 8 mediciones; pero, al tratar de rehacer los cálculos se encuentran sólo las siguientes anotaciones: 80,41 ; 80,43; 80,42; 80,47 ; 80,45 y 80,44. Encuentre el valor de las mediciones "perdidas".

2-12) Un estudiante efectúa mediciones para determinar el tiempo que demora en ir de su casa al liceo. Para diferentes días, registra la hora de salida de casa y la hora de llegada al liceo; sus indicaciones están indicadas en la tabla adjunta.

Para estas mediciones, calcule: el tiempo promedio empleado en este trayecto; el error porcentual, respecto al promedio, del menor y del mayor tiempo empleado.

Día	Salida	Llegada
Ma.	7:12	7:40
Mi.	7:15	7:45
Ju.	7:30	7:55
Vi.	7:10	7:38
Sá.	7:08	7:37
Lu.	7:21	7:47
Ma.	7:06	7:31
Mi.	7:19	7:48
Ju.	7:11	7:37

2-13) Un náufrago decide fabricar una escala para que le sirva de calendario, grabándola en el contorno de un árbol de 20[cm] de diámetro. En ella marca los días y meses durante 3 meses. Suponiendo que la escala ocupa todo el perímetro del tronco, construya una réplica plana de la escala. Calcule la distancia en la réplica que corresponde a un día.

Errores de Medición

Los resultados de un experimento se expresan, generalmente, por un conjunto de *valores numéricos* obtenidos por mediciones.

Es un hecho natural e inevitable el que toda medición vaya siempre acompañada de errores.

La validez de un experimento es, a menudo, juzgada por la confianza que se atribuya a los resultados numéricos, la cual depende del análisis de los errores de medición.

Le presentamos a continuación algunos ejemplos de errores:

- Errores de calibración de instrumentos; errores producidos por hábitos de trabajo del observador; errores introducidos por factores que no se consideraron al hacer el experimento (como usar un instrumento a una temperatura distinta a la que fue calibrado);... estos son ejemplos de **errores sistemáticos**.
- Errores de apreciación en la medición; errores obtenidos por condiciones fluctuantes; errores debidos a las características del objeto medido (como variaciones observadas en longitudes porque las caras no están bien pulidas o no son paralelas); éstos son ejemplos de **errores al azar o aleatorios**.
- Se cometen también **errores burdos,** como equivocarse al leer un instrumento, o al contar el número de sucesos o al calcular.

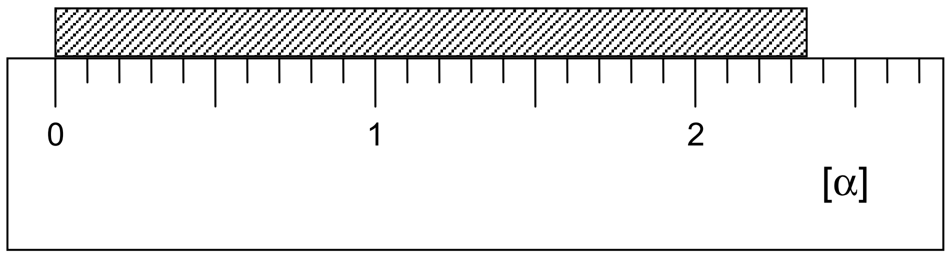
Los errores aleatorios son usualmente los más responsables de que se obtengan valores distintos al repetir una medición. Como son errores al azar, su influencia puede disminuirse repitiendo la medición varias veces y tomando el promedio de los valores obtenidos como el resultado de la medición.

Los errores sistemáticos se presentan cuando factores indeseables (externos o internos) interactúan de modo consistente con el sistema en estudio. La destreza del físico experimental se manifiesta al reducir (por diseño o por cálculo) este tipo de errores que no son, necesariamente, detectados ni eliminados por simple repetición del experimento.

Al dar a conocer el resultado de las mediciones efectuadas de una cantidad física debemos, además de su valor y de sus unidades, informar la **incerteza** o **error experimental** que se produce en el hecho de medir.

Analizaremos algunas fuentes de errores que suelen afectar a los procesos de medición.

Una primera fuente se refiere a la limitación de la precisión de la medida impuesta por la graduación del instrumento. A esta limitación la llamaremos el **error del instrumento**. El ejemplo que se desarrolla a continuación nos explicará en qué consiste este error y cómo lo cuantificamos.



Al medir el objeto de la figura usando un regla graduada en unidades "alfa" $[\alpha]$,afirmamos que el valor de la medida es de 2,35$[\alpha]$ en la que la cifra de las centésimas es aproximada.

El valor medido considerando el error del instrumento lo informamos como:

$$\left(2,35 \pm 0,05\right)\left[\alpha\right]$$

Este resultado, expresado en décimas de α, $\left[d\alpha\right]$, es:

$$\left(23,5 \pm 0,5\right)\left[d\alpha\right]$$

en el cual la cifra de las décimas es la cifra aproximada.

Prestar atención que ambos casos la incerteza es la misma. Estamos estimando que el error del instrumento es aproximadamente un medio (1/2) de la división más pequeña de la escala grabada en el instrumento.

Otras causas o fuentes de errores son las fluctuaciones del sistema y del proceso de medición, la habilidad, estado y comportamiento del investigador. Los errores producidos en estos casos son usualmente los responsables de que se obtengan valores distintos al repetir una medición. Como son errores al azar, su influencia puede disminuirse repitiendo la medición varias veces.

A este conjunto de errores lo llamaremos **errores aleatorios**. La **desviación estándar** es una de las estimaciones de los errores aleatorios de un conjunto de medidas.

Como para aminorar el efecto de los errores aleatorios debemos hacer cierto número de medidas, el informe del proceso de mediciones se expresa en este caso como:

$$\left\{\text{valor promedio} \pm \text{desviación estándar}\right\}\left[\text{unidad}\right]$$

Tenemos que tomar en cuenta que siempre está presente el error del instrumento. Debe, entonces, informarse en la expresión del valor de la medición el **mayor error** entre el **error del instrumento** y la **desviación estándar**.

Cuando se realizan mediciones hay que ser muy cuidadoso con el fin de evitar errores que son resultado de leer mal el instrumento, no usarlo en forma debida, ni respetando las condiciones ambientales importantes y otros errores burdos que no son susceptibles de disminuirlos con repeticiones.

Advertencia: En muchas oportunidades a lo largo de este curso le pediremos que efectúe mediciones; pero, a menos que se lo digamos en forma explícita, **no** analice los errores de medición. Nuestra intención al tratar algo sobre errores de medición fue el hacerle presente que ellos existen. Es suficiente que por ahora Ud. sepa que en toda medición se introducen errores y que ellos pueden y deben ser analizados. En el futuro, cuando usted trabaje en **laboratorios**, los detectará y aprenderá a manejarlos.

Queremos presentarle un caso práctico para que usted comience a "sentir" la importancia de considerar los errores de medición:

- Deben fabricarse anillos que se ajusten alrededor de cilindros de 8,17[cm] de diámetro, valor medido con un 0,2% de error.

Si el error porcentual (e.p.) en la medición del diámetro interior de los anillos (D_a) fuera igual que en la medición del diámetro exterior de los cilindros (D_c), al fabricar anillos con diámetro:

$$D_a = D_c = 8{,}17\,[\mathrm{cm}]$$

la situación más desfavorable que podría producirse es:

cilindro de diámetro:

$$D_c' = D_c + \frac{e.p.}{100} D_c = \left(1 + \frac{e.p.}{100}\right) \cdot D_c =$$

$$= 1{,}002 \cdot 8{,}17\,[\mathrm{cm}] \simeq 8{,}19\,[\mathrm{cm}]$$

anillo de diámetro:

$$D_a' = D_a - \frac{e.p.}{100} D_a = \left(1 + \frac{e.p.}{100}\right) \cdot D_a =$$

$$= 0{,}998 \cdot 8{,}17\,[\mathrm{cm}] \simeq 8{,}15\,[\mathrm{cm}]$$

Notamos que habría casos en que los anillos no entrarían en los cilindros. En las industrias se pone cuidado para minimizar la ocurrencia de esta situación y se establecen normas para rechazar las unidades defectuosas.

Cifras significativas

En Física tratamos con números que se originan en o que están relacionados con mediciones. Efectuamos “operaciones matemáticas” con tales números; en general, los resultados de las operaciones también representan magnitudes físicas.

- Medimos el ancho de una hoja de papel usando una regla graduada en *centímetros y milímetros*.

Anotamos el siguiente resultado:

$$A = 21{,}78\,[\mathrm{cm}]$$

donde hemos **estimado** las *décimas de milímetros*; por lo cual, en el número anotado la cuarta cifra es **dudosa**.

Si para esta situación se hubiese anotado:

$$A = 21{,}786\,[\mathrm{cm}]$$

diríamos que la última cifra (la quinta) **carece de significado**, no está representando información que pueda ser proporcionada por el instrumento de medición usado.

- Al medir el largo de una barra metálica usando un instrumento con divisiones al *centésimo de milímetro* , podemos anotar el resultado:

$$L = 1{,}4837\,[\mathrm{cm}]$$

donde la quinta cifra, correspondiente a las *milésimas de milímetro*, ha sido estimada; en este caso las cinco cifras proporcionan información útil: son **cifras significativas**.

- Medimos el largo de 3 mesones, que están colocados en un laboratorio uno a continuación del otro, usando una huincha de medir con marcas en *metros y centímetros*. Para el largo total anotamos:

$$L_{total} = 10{,}85\,[\mathrm{m}]$$

aunque podríamos haber estimado *décimas de centímetro*, por la posición del borde del último mesón entre dos marcas de la huincha, nos parece de buen sentido para este tipo de mediciones indicar el resultado *aproximado al centímetro*.

Si dijésemos que el largo de cada mesón, considerados *iguales* por los planos de fabricación, es:

$$L_{mesón} = \frac{10{,}85\,[\mathrm{m}]}{3} \simeq 3{,}6166667\,[\mathrm{m}] \ ,$$

estaríamos introduciendo información adicional: se requeriría un instrumento capaz de indicar los *diez milésimos de milímetros* para comprobarlo. Resulta natural pensar que, si el largo total fue aproximado al centímetro, el largo de cada mesón debe expresarse con igual aproximación:

$$L_{mesón} \simeq 3{,}62\,[\mathrm{m}] \ ;$$

o sea, no es posible que la simple división por un entero indique un aumento en el grado de precisión de una medición.

- Un día, al hacer un paseo en automóvil, nos fijamos que al ir de un pueblito a otro empleamos “una hora diez”. La distancia entre los pueblitos, según los indicadores en la carretera, es de 68[km]. La “rapidez media” para este trayecto fue:

$$v = \frac{68\,[\mathrm{km}]}{\left(1+\frac{10}{60}\right)[\mathrm{h}]} \hat{\simeq} \frac{68}{1{,}17}\left[\mathrm{km/h}\right] \simeq 58\left[\mathrm{km/h}\right] \ ;$$

el resultado lo hemos indicado con *2 cifras significativas*, dado que la medición de la distancia está expresada con *2 cifras significativas*.

Convenio

- Convendremos en expresar los resultados de una medición mediante un número cuyas cifras reflejen el cuidado o precisión con que se efectuó esa medición.

  Si informamos que la distancia entre dos puntos es 14[cm], sólo indicamos que tal distancia es más que 13[cm] y menos que 15[cm]. Una medición así expresada puede ser satisfactoria para ciertos propósitos, pero no para otros. Una medición más cuidadosa podríamos expresarla por 14,2[cm] indicando que la distancia podría ser cualquiera entre 14,1[cm] y 14,3[cm]; reflejando también cierta incertidumbre, aunque menor que en el caso previo.

- La forma de realizar una medición nos determinará el número de dígitos que emplearemos para expresar el resultado de ella. Convendremos que sea el **último dígito** el que exprese la incertidumbre en la medición.

  Si expresamos una distancia por 14,28[cm], la incertidumbre está en el cuarto dígito; podemos afirmar que el último dígito es **incierto**.

En Física se toma especial cuidado en expresar las cantidades por números cuyas cifras tengan real significado; esto es, que transmitan información útil. A estas cifras las designamos con el nombre de **cifras significativas**.

Escritura de valores de cantidades físicas

Consideraremos que toda la información cuantitativa con datos numéricos proporcionada en Física estará siempre expresada con el número adecuado de cifras significativas. Usted deberá tomar esto en cuenta cuando entregue resultados de mediciones o cálculos, tanto al hacer trabajos experimentales como al resolver problemas.

- Decir que el largo de un palo es 1,2[m] no es lo mismo que decir 1,20[m].

Los números 1,2 y 1,20 tienen el mismo valor aritmético, pero **no** tienen igual significado en relación a mediciones; el primero tiene 2 cifras significativas y el segundo tiene 3.

- Le presentamos una tabla de valores de cantidades físicas, indicando el significado convenido en relación a mediciones, el número de cifras significativas y la correspondiente notación científica. El símbolo C designa a la cantidad física y [· · ·] representa a una correspondiente unidad de medición, omitida. Con el fin de simplificar la escritura en la columna "significado en mediciones" hemos reemplazado la expresión $a < C < b$, que se lee "C *tiene un valor entre* a y b" por $a \rightarrow b$.

Introducimos la abreviatura C.S. para cifras significativas. Como al determinar el número de cifras significativas no influye el signo, positivo o negativo, del valor de una cantidad física, no le hemos considerado; o sea, hemos anotado su valor absoluto.

Le recomendamos que lea cuidadosamente esta tabla de valores comparando continuamente unos con otros de modo que adquiera la fluidez necesaria para escribir e interpretar valores de cantidades físicas de acuerdo al convenio que hemos adoptado.

Cantidad C [· · ·]	**Significado en mediciones**	**C.S.**	**Notación Científica**
8	$7 \rightarrow 9$	1	8
60	$59 \rightarrow 61$	2	$6{,}0 \cdot 10$
5000	$4999 \rightarrow 5001$	4	$5{,}000 \cdot 10^3$
10,08	$10{,}07 \rightarrow 10{,}09$	4	$1{,}008 \cdot 10$
7,0	$6{,}9 \rightarrow 7{,}1$	2	7,0
9,50	$9{,}49 \rightarrow 9{,}51$	3	9,50
0,02	$0{,}01 \rightarrow 0{,}03$	1	$2 \cdot 10^{-2}$
0,09	$0{,}08 \rightarrow 0{,}10$	1	$9 \cdot 10^{-2}$
0,090	$0{,}089 \rightarrow 0{,}091$	2	$9{,}0 \cdot 10^{-2}$
0,00400	$0{,}00399 \rightarrow 0{,}00401$	3	$4{,}00 \cdot 10^{-3}$
$0{,}30 \cdot 10^{-7}$	$0{,}29 \cdot 10^{-7} \rightarrow 0{,}31 \cdot 10^{-7}$	2	$3{,}0 \cdot 10^{-8}$
$0{,}05 \cdot 10^{-3}$	$0{,}04 \cdot 10^{-3} \rightarrow 0{,}06 \cdot 10^{-3}$	1	$5 \cdot 10^{-5}$
$18 \cdot 10^6$	$17 \cdot 10^6 \rightarrow 19 \cdot 10^6$	2	$1{,}8 \cdot 10^7$

- Vale la pena insistir que números con igual valor aritmético pueden diferir en el número de cifras significativas:

Los números: 47,0 y $4{,}70 \cdot 10^1$ y $0{,}470 \cdot 10^2$ tienen 3 cifras significativas y los números: 47 y $4{,}7 \cdot 10^1$ y $0{,}47 \cdot 10^2$ tienen dos cifras significativas; todos ellos tienen igual valor aritmético.

El número $2{,}043 \cdot 10^6$ tiene 4 cifras significativas. Escribirlo 2043000 no cambia su orden de magnitud, pero afirmaría que tiene 7 cifras significativas. Ambos no pueden haber sido obtenidos en la misma medición.

Un número “pequeño” como 0,0000739 que tiene 3 cifras significativas puede escribirse $7{,}39 \cdot 10^{-5}$. No tiene igual cantidad de cifras significativas que $7{,}390 \cdot 10^{-5} = 0{,}00007390$

Basados en los ejemplos anteriores podemos enunciar los siguientes **criterios**:

No se permite colocar **ceros** al final de números relacionados con mediciones, aunque se conserve el orden de magnitud de ellos, a menos que estos ceros estén avalados por mediciones o por definiciones.

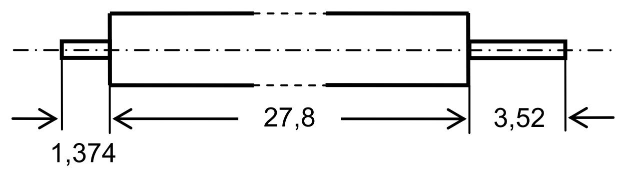
En los números decimales cuyo valor absoluto es menor que la unidad, los ceros de la izquierda no son cifras significativas.

El uso de notación científica permite escribir un número como el producto de 2 factores: uno contiene las cifras significativas y el otro, la potencia de 10 correspondiente.

Operaciones considerando cifras significativas

Al efectuar operaciones matemáticas con números originados en mediciones, debemos tener cuidado de no modificar la información contenida en ellos; por tanto al entregar el resultado debemos reconocer las cifras significativas. Estudiemos algunos ejemplos con las más simples operaciones aritméticas para establecer ciertos criterios que nos permitan efectuar tal reconocimiento:

- Se han medido los largos de las secciones de un eje. Los resultados de las mediciones, efectuadas con instrumentos apropiados y expresadas en centímetros, se indican en la figura. Nos interesa conocer el largo total del eje.



Tomando en cuenta la incertidumbre en las respectivas mediciones, representada por la última cifra significativa en cada una de ellas, podemos considerar las siguientes posibilidades para la **suma** de los largos:

directamente	con máximos	con mínimos	aproximado
1,374	1,375	1,373	1,4
27,8	27,9	27,7	27,8
3,52	3,53	3,51	3,5
32,694	32,805	32,583	32,7

Nos fijamos que ya el "**primer** dígito a la derecha de la coma decimal" es diferente en cada suma; por lo tanto, aceptamos como resultado para el largo total del eje el valor aproximado a una cifra decimal: 32,7[cm].

- Veamos otras sumas de valores, por supuesto expresados en las mismas unidades, considerando sus cifras significativas :

Debemos sumar: 585,3; 92; 140,28 y 722,4

directamente	con máximos	con mínimos	aproximado
585,3	585,4	585,2	585,
92	93	91	92
140,28	140,29	140,27	140,
722,4	722,5	722,3	722,
1539,98	1541,19	1538,77	1539
↑	↑	↑	↑

en este caso, aunque la cifra de las decenas aparece dudosa, damos el resultado con 4 C.S.: $1{,}540 \cdot 10^3$.

Al sumar los valores 421,2; 83; 644,35 y 126,9 [· · ·] , obtenemos las siguientes sumas:

Directamente	:	1275,45
con máximos	:	1276,66
con mínimos	:	1274,24
aproximado	:	1275

en este caso la "cifra de las unidades" es la dudosa y el resultado es 1275 [···] = $1,275 \cdot 10^3$ [···] con 4 C.S.

No podemos establecer una regla general para el número de cifras significativas que se obtienen al realizar una **suma**. Debe examinarse cada caso particular, como lo hemos hecho en los ejemplos presentados. Sin embargo, podemos afirmar que:

No hay **más** dígitos significativos a la derecha de la coma decimal que los que hay en el sumando que tenga la menor cantidad de tales dígitos.

Esto es, al considerar todos los sumandos, el dígito incierto que esté más cerca de la coma decimal es el dominante. Por lo cual le *recomendamos* que, antes de efectuar la suma, aproxime los sumandos al decimal determinado por el dígito dominante. Al resultado así obtenido lo consideraremos generalmente aceptable.

Estas observaciones resultan también válidas para la resta.

- Los resultados de medición de dos cantidades físicas son: 9,146 [· · ·] y 1,34 [· · ·] (para este ejemplo no nos interesan las unidades) . Se necesita calcular el **producto** de estos números. Tomando en cuenta la incertidumbre de la última cifra significativa, examinemos las siguientes posibilidades de la multiplicación:

Directamente	:	$9,146 \cdot 1,34$	=	12,25564	≃	12,3
con máximos	:	$9,147 \cdot 1,35$	=	12,34845	≃	12,3
con mínimos	:	$9,145 \cdot 1,33$	=	12,16285	≃	12,2
aproximado	:	$9,15 \cdot 1,34$	=	12,261	≃	12,3

Fijémonos que ya "la primera cifra decimal" varía, por lo que hemos indicado aproximaciones a una cifra decimal, obteniendo el producto 12,3 [· · ·] , un número de 3 C.S.

- Veamos otros ejemplos de multiplicación considerando las cifras significativas:

Multipliquemos los valores 9,146 [· · ·] y 0,0853 [· · ·]

directamente	:	$9,146 \cdot 0,0853$	=	0,7801538	≃	0,780
con máximos	:	$9,147 \cdot 0,0854$	=	0,7811538	≃	0,781
con mínimos	:	$9,145 \cdot 0,0852$	=	0,779154	≃	0,779
aproximado	:	$9,15 \cdot 0,0853$	=	0,780495	≃	0,780

El resultado aproximado a 3 cifras es 0,780 [· · ·] , número de 3 C.S. (interpretando que da información entre 0,779 y 0,781).

Multipliquemos $8{,}698 \cdot 10^{-2}$ [· · ·] y $7{,}2 \cdot 10^{7}$ [· · ·]

Anotando sólo los factores de las potencias de 10 de cada número tenemos:

directamente	:	$8{,}698 \cdot 7{,}2$	=	62,6256	$\simeq$	$6{,}3 \cdot 10$
con máximos	:	$8{,}699 \cdot 7{,}3$	=	63,5027	$\simeq$	$6{,}4 \cdot 10$
con mínimos	:	$8{,}697 \cdot 7{,}1$	=	61,7487	$\simeq$	$6{,}2 \cdot 10$
aproximado	:	$8{,}7 \quad \cdot 7{,}2$	=	62,64	$\simeq$	$6{,}3 \cdot 10$

y, por lo tanto, el producto “aceptable” es $6{,}3 \cdot 10^{6}$ [· · ·], que tiene 2 C.S.

- Procediendo en forma análoga con los valores: $1{,}2 \cdot 10^{7}$[· · ·] y $2{,}5748 \cdot 10^{-2}$ [· · ·] obtenemos, al usar los factores de las potencias de 10, respectivamente los productos aproximados a 2 cifras: 3,1 ; 3,3 ; 2,8 y 3,1; por lo cual damos como resultado $3, \ \cdot 10^{5}$, un número con 1 C.S.

De acuerdo a lo ilustrado por estos ejemplos podemos enunciar que:
el número de C.S. del producto no excede al número de C.S. del factor que tenga el menor número de ellas.

En consecuencia, le *recomendamos* que antes de multiplicar aproxime el factor que tenga más cifras al número de cifras que tenga el otro factor.

Generalmente el número de cifras significativas del producto será igual al menor número de cifras significativas que tengan los factores; en el caso que se deba reconocer estrictamente la cantidad de cifras significativas, se procede como lo hecho en los ejemplos anteriores.

Le recomendamos, además, que escriba los números en notación científica y trabaje con los factores de las potencias de 10; después de multiplicarlos coloque la potencia de 10 correspondiente.

Para cuocientes se procede de manera análoga.

Aproximaciones y cifras significativas

Al medir el largo de un objeto podemos expresar el resultado como 42[cm], con 2 cifras significativas. Hemos convenido en atribuir a esta información el significado: “la longitud del objeto está comprendida entre 41[cm] y 43[cm]”. Hay algunas situaciones en las cuales el concepto de cifras significativas (ya sea con el convenio adoptado o con otro) no es directamente aplicable y por tanto debe trabajarse con **buen criterio**:

- El resultado de la medición de la duración de cierto fenómeno fue 11,6[s]. Si en un caso particular nos bastara la precisión “al segundo”, aproximamos este tiempo a “doce segundos”, que escribimos como 12,[s] . A este número aproximado **no** le podemos aplicar el concepto de cifras significativas (que en nuestra interpretación correspondería a valores entre 11[s] y 13[s]); aunque para efectos de operaciones podemos considerarlo como un número con 2 C.S.

- Muchas de las constantes fundamentales de la Física pueden determinarse actualmente con gran precisión, su expresión numérica tiene gran número de cifras significativas.

Por ejemplo, mediciones recientes dan para la masa del protón el valor:

$$m_p \simeq (1{,}672\,621\,64 \pm 0{,}000\,000\,08) \cdot 10^{-27} [kg]$$

Que tiene 9 cifras significativas; esta expresión nos da la mejor información disponible sobre la masa del protón.

La aproximación a 4 cifras $m_p \simeq 1{,}673 \cdot 10^{-27} [kg]$ nos da menor información que en el caso anterior y la utilizamos cuando se requiere menor precisión en los cálculos. Las aproximaciones $1{,}67 \cdot 10^{-27} [kg]$, $1{,}7 \cdot 10^{-27} [kg]$ y $2{,}\cdot 10^{-27} [kg]$, las podemos usar cuando calculamos cada vez con menor precisión.

- Números irracionales como π , $\sqrt{2}$ son exactos, aunque no pueden ser expresados por un número finito de cifras.

Por ejemplo, podemos usar para $\sqrt{2}$ las aproximaciones: 1,41421; 1,414 y 1,41 cuando en los cálculos se pretende una precisión del 0,001%; 0,1% y 1% , respectivamente.

- El área de un círculo de diámetro D es $A_\odot = \dfrac{\pi D^2}{4}$

Para el valor medido D = 2,61[cm] , con 3 C.S., calculamos A_e con dos aproximaciones diferentes de π :

$$\pi \simeq 3{,}1416 \ldots \quad A_\odot \simeq 5{,}3502 [cm^2] \simeq 5{,}35 [cm^2]$$

$$\pi \simeq 3{,}14 \quad \ldots \quad A_\odot \simeq 5{,}3475 [cm^2] \simeq 5{,}35 [cm^2]$$

> El resultado nos indica que basta aproximar π al número de cifras significativas del diámetro. La constante numérica 4 en el denominador es un número entero exacto (no aproximado) y **no** influye el número de cifras significativas.

- Bajo ciertas consideraciones la distancia de caída libre durante un tiempo *t* está expresada por: $s = g t^2 / 2$.

Se ha medido g = (980,382 ± 0,005) [cm/s^2] . Para t = 4,7[s], dato con 2 C.S., y usando g ≃ 9,8 · 10^2 [cm/s^2] resulta s ≃ 108, [cm] ≃ 11, · 10[cm].

Al **entero** 2 en el denominador no se aplica el concepto de cifras significativas.

Cifras significativas en conversión de unidades

Al convertir valores numéricos de cantidades físicas expresados en ciertas unidades a valores equivalentes en otras unidades, hay que tener cuidado de no modificar la información sobre el grado de precisión de las mediciones; esto es, hay que tener en cuenta el número apropiado de cifras significativas en el valor convertido:

- Convertir el resultado de una medición expresada por 20,3 [m] a milímetros.

Si escribiéramos $20{,}3[\mathrm{m}] \triangleq 20{,}3[\mathrm{m}] \cdot \dfrac{1000[\mathrm{mm}]}{1[\mathrm{m}]} \triangleq 20300[\mathrm{mm}]$, estaríamos introduciendo nuevas cifras significativas, lo que representaría una mayor precisión en la medida dada. Es evidente que una mayor precisión **no** puede lograrse por el solo hecho de expresar el resultado en diferentes unidades.

Entonces, un método correcto de calcular es:

$$20{,}3[\mathrm{m}] \triangleq 20{,}3[\mathrm{m}] \cdot \frac{10^3[\mathrm{mm}]}{1[\mathrm{m}]} \triangleq 2{,}03 \cdot 10^4[\mathrm{mm}]$$

indicando que 20,3 [m] y $2{,}03 \cdot 10^4$ [mm] representan el mismo grado de precisión.

- Convertir 11 7/16 [in] a [mm].

El valor dado indica que la medición está efectuada con precisión al "16 avo de pulgada", por lo cual :

$$11\ 7/16\ [\mathrm{in}] \triangleq 183/16\ [\mathrm{in}] \quad (\ 3\ \mathrm{C.S.}\ )$$
$$\triangleq 11{,}4375\ [\mathrm{in}] \simeq 11{,}4\ [\mathrm{in}] \quad (\ 3\ \mathrm{C.S.}\ )$$

Usando la equivalencia: $1[\mathrm{in}] \triangleq 25{,}4\ [\mathrm{mm}]$, resulta:

$$1/16\ [\mathrm{in}] \triangleq 1{,}5875\ [\mathrm{mm}] \ : \ 1\ [\mathrm{mm}]$$

y entonces:

$$11\ 7/16\ [\mathrm{in}] \triangleq \frac{183}{16}\ [\mathrm{in}] \triangleq 183 \cdot 1{,}5875\ [\mathrm{mm}]\ ;\ \ 291\ [\mathrm{mm}]\ \ (\ 3\ \mathrm{C.S.}\ )$$

donde hemos aproximado "al milímetro", lo que corresponde a mediciones efectuadas "al 16 avo de pulgada".

- Convertir 9 [mile] 5 [furlong] a [km] .

Conocemos las equivalencias:

$1[\mathrm{mile}] \triangleq 8[\mathrm{furlong}]$ y $1[\mathrm{mile}] \triangleq 1609{,}3\ [\mathrm{m}] \triangleq 1{,}6093[\mathrm{km}]$.

El dato proporcionado indica mediciones con precisión al "furlong"; entonces, convirtiendo a esta unidad "más pequeña":

$$9[\mathrm{mile}]\ \ 5[\mathrm{furlong}] \triangleq 77[\mathrm{furlong}],\ \text{con}\ \ 2\ \mathrm{C.S.}$$

Convirtiendo a la unidad "más grande":

$$9[\mathrm{mile}]\ \ 5[\mathrm{furlong}] \triangleq \frac{77}{8}\ [\mathrm{mile}]\ ;\ \ 9{,}6[\mathrm{mile}],\ \text{con}\ \ 2\ \mathrm{C.S.}$$

Al convertir a “kilómetros” tenemos en cuenta que:

$$1[\text{furlong}] \ \hat{=}\ \frac{1}{8}\ [\text{mile}] \ \hat{=}\ \frac{1}{8}\ [\text{mile}] \cdot \frac{1{,}6093\ [\text{km}]}{1\ [\text{mile}]} \ \hat{=}$$

$$\hat{=}\ 0{,}20111625[\text{km}] \ \sim\ 10^{-1}\ [\text{km}]$$

este orden de magnitud determina una aproximación al “décimo de kilómetro” en la conversión:

$$9[\text{mile}]\ \ 5[\text{furlong}] \ \hat{=}\ 77 \cdot\ 0{,}201\ [\text{km}] \ \simeq\ 15{,}5[\text{km}] \ \ \text{, con 3 C.S.}$$

- El desarrollo de un proceso ha requerido un tiempo de 1[h] 25[min] 13,6[s] .

Expresemos este intervalo de tiempo en la unidad “más pequeña”, el segundo:

$$1[\text{h}]\ \ 25[\text{min}]\ \ 13{,}6[\text{s}] \ \hat{=}\ (\ 1 \cdot 3600 + 25 \cdot 60 + 13{,}6\ )[\text{s}] = 5113{,}6[\text{s}]$$

un resultado con 5 C.S. , ya que la cifra “dudosa” en la medición está en las “décimas de segundo”.

Expresemos este tiempo en [h]:

$$1[\text{h}]\ \ 25[\text{min}]\ \ 13{,}6[\text{s}] \ \hat{=}\ \frac{5113{,}6}{3600}\ [\text{h}] \ \simeq\ 1{,}42044[\text{h}] \ \ \text{con 6 C.S.}$$

ya que al “décimo de segundo” corresponde el “cienmilésimo de hora” $\left(\dfrac{0{,}1}{3600} \sim 10^{-5}\right)$.

- Convertir la medida (5,824 $\pm$ 0,015)[ft] a metros.

Usamos la equivalencia 1[ft] $\hat{=}$ 0,3048[m] , exactamente. Entonces:

valor mayor	:	5,839[ft]	$\hat{=}$	1,7797[m]
valor nominal	:	5,824[ft]	$\hat{=}$	1,7752[m]
valor menor	:	5,809[ft]	$\hat{=}$	1,7706[m]
rango de incertidumbre	:	0,030[ft]	$\hat{=}$	0,0091[m]

y por lo tanto escribimos:

$$(5{,}824\ \pm\ 0{,}015)\ [\text{ft}] \ \hat{=}\ (1{,}7752\ \pm\ 0{,}0046)\ [\text{m}]$$

Hemos aproximado a los “diez milésimos de metro”, que corresponde a los “milésimos de pies” en los datos.

Estos ejemplos le muestran a usted esquemas de trabajo que le conviene seguir al convertir unidades.

Ejercicios

2-14) Indique el número de cifras significativas que tiene cada una de las siguientes expresiones numéricas:

$9{,}504 \cdot 10^{-3}$	$3{,}1415$	$1{,}4095 \cdot 10^{-11}$	$5{,}09830 \cdot 10^{24}$
$3{,}472$	2000	$14{,}00$	$0{,}006$
$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{8}$	$2{,}00 \cdot 10^{7}$	$0{,}013 \cdot 10^{-5}$
$0{,}2$	14	$0{,}210$	

2-15) De los valores: 31.000 [α]; 31,0 · 10 [α]; 0,31 [α]; $0{,}0310 \cdot 10^{6}$ [α] y $0{,}31 \cdot 10^{5}$ [α], indique el que da la misma información que $3{,}1 \cdot 10^{4}$ [α].

2-16) Sume las cantidades físicas 454,2 [···]; 82[···]; 640,35 [···] y 123,9 [···]. Valiéndose de las posibilidades extremas determine el número de cifras significativas de la suma. Sume igualmente: 1,3745 [···]; 37,89 [···] y 73,587 [···].

2-17) Calcule la diferencia entre 157,3 [···] y 47 [···] con el correcto número de cifras significativas. Para esto determine la máxima diferencia y la mínima diferencia.

2-18) Al efectuar la substracción de los valores 11,85 [···] y 9,6 [···] ¿le parece más razonable efectuar aproximaciones a 2 cifras en los datos o en el resultado?

2-19) Realice el producto de $7{,}896 \cdot 10^{5}$ y $6 \cdot 10^{-8}$.

2-20) Realice el producto de 9,0003 por 1,22 y determine "estrictamente" el número de cifras significativas del resultado.

2-21) Las medidas de una caja de forma de paralelepípedo recto, obtenidas con una regla corriente, son 47,3[cm] de alto; 27,8[cm] de ancho y 17,9[cm] de largo. Calcule el volumen de la caja.

2-22) Los valores 0,1129 [···] y 0,1134 [···] se han obtenido en una misma experiencia. Deben sumarse y esa suma debe multiplicarse por 2,63 [···]. El producto debe restarse del valor 0,93742 [···]. Las unidades, no mencionadas, son las que corresponden. Exprese el resultado con el número correcto de cifras significativas.

2-23) Divida $5{,}6 \cdot 10^{8}$ por $1{,}08 \cdot 10^{-15}$.

2-24) Para medir una resistencia eléctrica se hizo pasar por ella una corriente, la que se midió con un amperímetro, anotándose I = 3,01[A] . Se midió también el voltaje entre los terminales de la resistencia usando un voltímetro, su lectura se anotó $V = 1{,}1 \cdot 10^{2} \left[V \right]$. Calcule el valor de la resistencia R = V/I.

2-25) Reduzca: (a) 5,48 [h] a segundos con las cifras significativas necesarias; (b) 6,428 [s] a horas y minutos manteniendo la precisión de la medida

2-26) El ancho de un edificio es 27[m] . Exprese el ancho en [cm] manteniendo las cifras significativas. Exprese el ancho en [yd] y luego en [ft].

2-27) Convertir 5,60[in] a [mm].

2-28) Convertir la medida (1,250 ± 0,015) [in], a milímetros.

2-29) Convertir 12[yd] 2[ft] 5[in], a [m].

2-30) Complete la "tabla de equivalencias" adjunta con valores aproximados al "centésimo de milímetro".

[in]	[mm]
1/64	?
1/16	?
1/2	?

2-31) Suponga que usted le dice a una persona: *"Juntémonos a las 8 horas 45 minutos 3 segundos y 8 décimas."* ¿Encuentra que esa fue una invitación formulada con buen sentido físico? ¿Qué precisión necesita Ud. para medir el tiempo en la vida diaria? ¿Qué precisión necesita para medir la duración de una carrera de 100[m] planos?

2-32) Exprese 4[h] 37[min] 16[s] todo en segundos y, además, todo en horas.

2-33) Examine la posibilidad de expresar 10,38[h] en horas, minutos y segundos.

2-34) El conductor de un tren controla con un cronómetro las duraciones de un viaje entre estaciones sucesivas (A, B, C, D, E). En su libreta de anotaciones se lee:

de A a B : 1[h] 17[min] de C a D : 46[min]

de B a C : 4[h] 37[s]

de D a E : 51[min] 12[s]

Transforme todos los tiempos a horas. ¿Cuánto ha tardado en ir de A a E ? ¿Cuántas veces mayor es el tiempo empleado en ir de A a C que el empleado en ir de C a E ? ¿Qué porcentaje del tiempo total de viaje es el empleado entre las estaciones B y D ?

Medición de ángulos

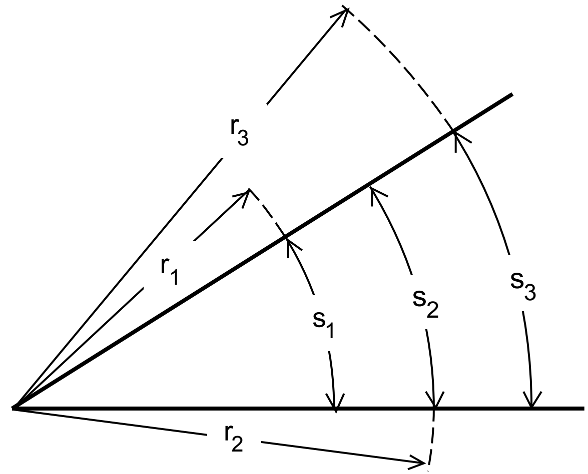
Sobre una hoja de papel trace dos rectas que se corten, se forman 4 ángulos.

Considere uno de esos ángulos.

Use un compás y trace varios arcos de circunferencia con centro en el vértice del ángulo (punto de corte de las rectas).

Mida las longitudes de los arcos, (ingénieselas para hacerlo). Mida los radios de cada arco.

Use las mismas unidades de longitud para expresar los arcos y los radios.



Calcule el **cuociente** entre los valores medidos para cada arco y su correspondiente radio.

Compruebe que todos estos cuocientes tienen, dentro de los errores experimentales, el **mismo** valor:

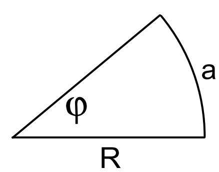
$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \cdots$$

Repita el procedimiento para otros ángulos. Compruebe que si las rectas están más *abiertas*, el cuociente entre un arco y el radio de ese arco es mayor.

Entonces, podemos comparar (medir) ángulos. El procedimiento seguido permite definir:

$$\text{valor de un ángulo} = \frac{\text{arco de circunferencia}}{\text{radio de ese arco}}$$

$$\varphi = \frac{a}{R}$$



Elegimos como unidad de ángulo:

un radián $\cdots\cdots\cdots$ 1[rad] ,

que corresponde a un ángulo tal que al trazar un arco de radio R , con centro en el vértice del ángulo, se obtiene un arco que también mide R.

Cuando el arco subtendido por el ángulo es toda la circunferencia se habla de "ángulo completo":

$$\varphi_c = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi[\text{rad}]$$

de donde resulta la equivalencia: $2\pi[\text{rad}] \triangleq 360°$

y por tanto:

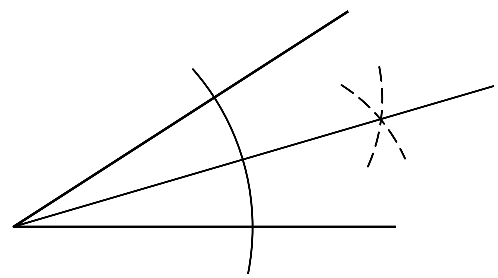
$$1[\text{rad}] \triangleq 57{,}2958° \quad \text{y} \quad 1° \triangleq 0{,}017453[\text{rad}]$$

Construcción de ángulos

Nos interesa que usted haga algunas construcciones de ángulos utilizando regla y compás; para ello le será útil recordar las siguientes construcciones:

* Bisectar un ángulo.

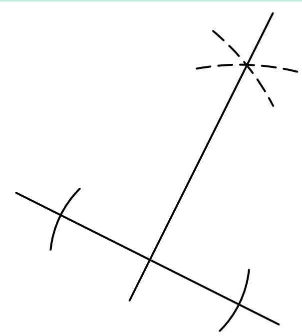
Trace un arco de circunferencia con centro en el vértice y que intercepte los dos lados del ángulo, abra un poco más el compás y trace dos arcos, que se corten, con centros en esos puntos de intersección. Dibujando la recta que pasa por el punto que acaba de producir y por el vértice del ángulo, obtiene la bisectriz.



** Construir un ángulo recto.

Cuando dos rectas forman un ángulo de $\pi/2$ [rad] (90°) se dice que son **perpendiculares** entre sí.

Para construir una perpendicular a una recta dada elija un punto de ella; allí estará el vértice del ángulo recto o pie de la perpendicular. Abra su compás unos 2[cm], haga centro en ese punto y marque dos arcos de circunferencia sobre la recta a ambos lados del punto. Abra ahora el compás 4 ó 5[cm] y haga centro sucesivamente en los dos puntos, trazando arcos que se corten. Una el punto elegido como “pie de la perpendicular” y el de intersección de estos arcos. Esa será la perpendicular que determina el ángulo recto.



Ejercicios

2-35) Estime el ángulo que abarca su mirada en sentido horizontal. No mueva la cabeza.

2-36) Construya un péndulo y hágalo oscilar libremente. Estime el ángulo que forma el hilo entre sus posiciones extremas. Comente.

2-37) Use un transportador corriente para determinar el ángulo formado entre la posición de la Luna y la horizontal. Haga una serie de mediciones dejando transcurrir iguales intervalos de tiempo entre cada medición, por ejemplo cada 20[min]. Represente cómo cambian los ángulos con el transcurso del tiempo.

2-38) Use sólo regla y compás para construir:

- ángulos de $\pi/4$ [rad] (45°), $\pi/8$ [rad] y $5\pi/4$ [rad] .
- un triángulo equilátero; obtiene ángulos de 60° ($\pi/3$ [rad]).
- ángulos de $\pi/6$ [rad] , $\pi/12$ [rad] y $2\pi/3$ [rad].

2-39) Trisecte un ángulo recto, use solamente regla y compás.

2-40) Suponga que la trayectoria de la Tierra en torno al Sol es una circunferencia con el Sol en su centro. Calcule aproximadamente el ángulo subtendido por la trayectoria de la Tierra entre el 25 de diciembre de 2010 y el 1 de abril de 2011.

2-41) Un neumático instalado en un automóvil tiene un diámetro de 60[cm]. Calcule la distancia recorrida por el automóvil cuando la rueda completa 2540 vueltas.

2-42) Suponga usted que va a Quilpué a ver pasar los aviones que viajan al Norte, saliendo de Pudahuel. Cuando un avión va pasando a unos $5 \cdot 10^3$ [m] sobre su cabeza, usted lo sigue con su mirada. Estime la distancia recorrida por el avión mientras su línea de visión se desplaza en 5°.

2-43) Si usted quisiera construir un *modelo* de un globo terráqueo y dispusiera de un autoadhesivo de Chile que tiene 10 [cm] de largo, ¿de qué tamaño debe hacer el modelo para que Chile le quede a escala?

Medición de superficies

Tome una ducha y jabónese, la superficie del jabón está en contacto con la superficie de su mano y de su cuerpo. Pinte un cuadro con témpera, está cubriendo una superficie. Ayude a su mamá a limpiar el patio de su casa, está barriendo una superficie.

Para medir una superficie o determinar su área, necesitamos escoger “unidades de área”. La idea que se presenta de inmediato es tomar un cuadrado de 1[m] de lado; su área es : $1[m] \cdot 1[m] \triangleq 1[m^2]$

Adoptamos como unidad básica de área:

Un metro cuadrado .... $1[m^2]$

Obviamente, un área de $1[m^2]$ no tiene que ser siempre la de un cuadrado de 1[m] por 1[m] , es también la de un rectángulo de 0,2[m] por 5[m] , la de un triángulo de 2,5[m] de base y 0,8[m] de altura, etc.

* Un cuadradito de 1[cm] por 1[cm] tiene un área de $1[cm^2]$.

$$1\,[cm^2] \triangleq 1[cm]\cdot 1[cm] \triangleq \frac{1}{100}\,[m]\cdot\frac{1}{100}\,[m] \triangleq$$

$$\triangleq \frac{1}{10000}\,[m^2] = \frac{1}{10^4}\,[m^2]$$

esto es:

$$1[cm^2] \triangleq 10^{-4}\,[m^2]$$

$$1[m^2] \triangleq 10000[cm^2] = 10^4\,[cm^2]$$

En forma similar usted puede hacer las conversiones entre unidades de área que desee, para ello use las equivalencias entre las unidades de longitud ya proporcionadas.

* Encontremos la equivalencia entre $[in^2]$ y $[cm^2]$.

Buscamos: $1[in^2] \triangleq\ ?\,[cm^2]$.

Usamos la equivalencia: $1[in] \triangleq 2{,}54[cm]$, exactamente. Entonces:

$$1[in^2] \triangleq 1[in]\cdot 1[in] \triangleq 2{,}54[cm]\cdot 2{,}54[cm]$$

$$\triangleq 6{,}4516[cm^2]\ \text{, exactamente.}$$

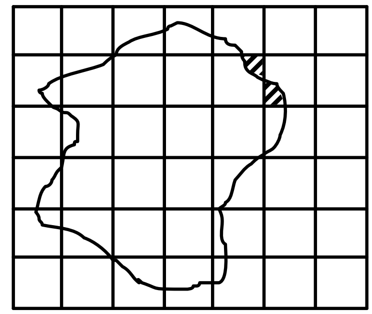
Otras unidades de área, usadas especialmente en el agro, son:

Un área	1[a]	=	100 $[m^2]$
Una hectárea	1[ha]	=	10.000 $[m^2]$
Un acre	1[A]	=	4840 $[yd^2]$

Entreténgase encontrando las equivalencias entre **acre** y otras unidades inglesas para áreas; invente usted mismo algunos ejercicios.

Áreas de figuras planas

Deseamos **medir** la superficie de una figura plana. Un método para hacerlo es copiar el contorno de la figura sobre un papel cuadriculado.



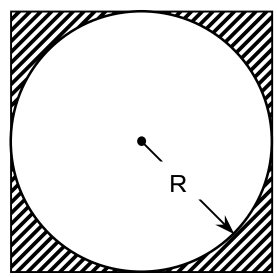
Determinamos el área de cada cuadrado del papel, midiendo su lado y multiplicándolo por sí mismo. Expresamos el área en unidades apropiadas.

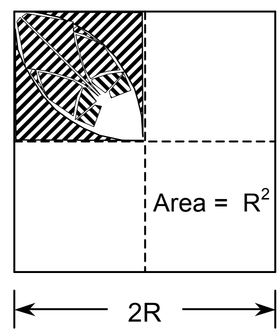
Entonces, para determinar el área de la figura es suficiente que **contemos** el número de cuadrados encerrados por el contorno de la figura.

Debemos ser cuidadosos en los bordes: tenemos que ir estimando las fracciones de cuadrados que vayan “sobrando” o “faltando”.

El valor obtenido para el área será tanto mejor cuanto más pequeño sean los cuadrados del papel cuadriculado.

* **Área de un círculo.** Recorte dos cuadrados de papel. Cuide que sean iguales y designe por 2R a sus lados. En uno de los cuadrados trace la circunferencia inscrita (tiene radio R) y recorte las “esquinas”. Pegue las esquinas sobre uno de los cuadrantes del otro cuadrado; no alcanzarán a cubrirlo.





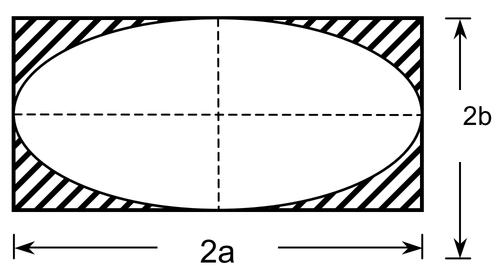
A continuación **mida** el área no cubierta.

Reconozca entonces que el área del círculo $A_\odot$, es un “poquito mayor” que la de 3 cuadrantes del cuadrado; $A_\odot > 3R^2$, y si ha medido bien tal vez, obtenga $A_\odot \simeq 3{,}1R^2$ que es buena aproximación al “área del círculo”:

$$A_\odot = \pi R^2$$

** **Área de una elipse**. *Proceda en forma análoga* para determinar el área de una elipse, trabajando en esta ocasión con rectángulos. Compruebe que, dentro de los errores de medición, se cumple que:

$$A_{elipse} = \pi ab$$



¿Cuál es el error porcentual del valor obtenido en **sus** mediciones, respecto al valor calculado usando la fórmula dada?

Una medición de la superficie de una esfera

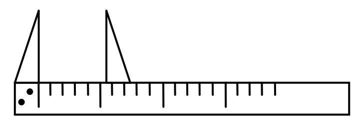
Escoja una naranja lo más esférica y de cáscara lo más delgada posible. Mida el “diámetro” de la naranja y desígnelo por 2R.

Provéase de una hoja de papel cuadriculado de unos 4R de ancho por unos 5R de largo. Trace sobre ella dos rectas paralelas a distancia 3R.

Pele la naranja y vaya colocando las cáscaras entre esas rectas paralelas tratando de cubrir, lo mejor posible, una superficie rectangular.

Mida el largo del rectángulo y calcule su área. ¿Obtiene un valor cercano a $4\pi R^2$, que es el valor del área de una esfera?

Ingéniese para construir un instrumento que le permita medir diámetros de cuerpos redondos.



Llamaremos **cuerpos redondos** a los que tienen por lo menos una superficie curva; los más comunes son: esfera, cilindro, cono y tronco de cono.

Pitágoras. Euclides

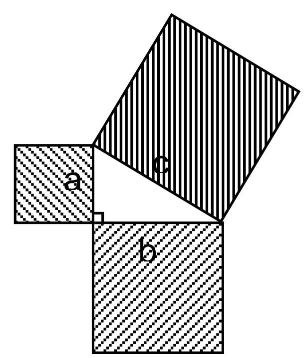
La Geometría, como su nombre lo indica, nació de la necesidad de medir superficies terrestres. Más tarde se sistematizaron diversas geometrías mediante postulados y teoremas. Se nos ha ocurrido que usted *mida*, no que demuestre, algunos teoremas clásicos:

* Comprobación del “teorema de Pitágoras”.

Dibuje un triángulo rectángulo; construya cuadrados que tengan por lados los catetos y la hipotenusa y **mida** el área de tales cuadrados. Exprese los resultados en la misma unidad.

Sume las áreas obtenidas de los catetos y compare la suma con el área obtenida de la hipotenusa.

¿Le resulta $a^2 + b^2 = c^2$?



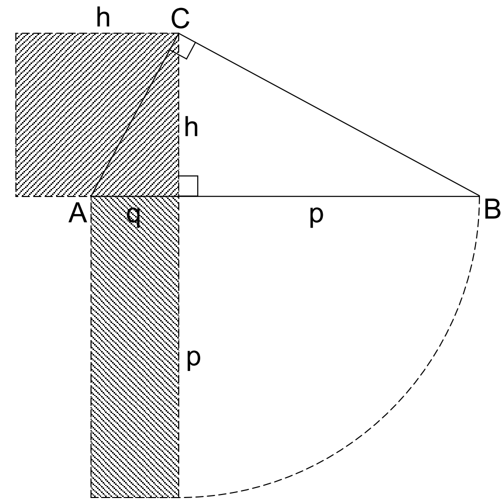
** Comprobación del "teorema de Euclides de la altura".

Dibuje un triángulo rectángulo y trace la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa.

Construya un cuadrado con lado igual a la altura y un rectángulo con los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa.

Mida las áreas de estas dos figuras, usando las mismas unidades, y compárelas.

¿Obtiene $h^2 = q \cdot p$?



Recomendación

En las siguientes fórmulas para el cálculo del área de las figuras geométricas que se indican:

$A_r = a \cdot b$, rectángulo de lados a y b

$A_t = \dfrac{b \cdot h}{2}$, triángulo de base b y altura h

$A_e = \pi \cdot a \cdot b$, elipse de semiejes a y b

los símbolos a, b y h, con los significados ya dados para cada caso, corresponden a la cantidad física longitud. Parece natural y resulta conveniente que, al calcular áreas con las fórmulas, se usen estos símbolos con la **misma** unidad de medición.

Ejercicios

2-44) Estime el área de la superficie de: una moneda de $10, su pantalón, su dormitorio, Chile, Sud América. Describa el método usado para cada caso.

2-45) Estime el tamaño de un punto dejado por un lápiz sobre un papel. Calcule su área y el número de puntos contenidos en la superficie de una esfera que tenga el radio de la Tierra.

2-46) Mida el área de un grano de uva y de un huevo.

2-47) En una vitrina ve el aviso: *Televisores de 42"*. Infórmese de lo que ello significa y calcule aproximadamente el área de la pantalla del televisor. Exprese el resultado en $[cm^2]$.

2-48) Se ofrece para la venta un fundo de 7500[ha]. Exprese el área de la superficie del fundo en $[mile^2]$.

2-49) Las mediciones de una parcela dan por resultado 105[m] de ancho y 216[m] de largo. Un hombre estima "a ojo" que las medidas son 100[m] y 200[m] respectivamente. Calcule los porcentajes de error en la estimación del largo y del ancho. Calcule el porcentaje de error en el área de acuerdo a esas estimaciones.

2-50) En un pueblo de EE.UU. un denuncio de una mina puede ser presentado para el usufructo de 1200[ft^2] como máximo. Calcule el número de denuncios que deben presentarse para obtener un área de 7[km^2].

2-51) El área de cierto triángulo equilátero vale 4,0[ft^2]. Si su lado aumenta en 18% ¿en qué tanto por ciento varía el área del triángulo?

2-52) Cada arista L de un cubo aumenta en 10,0%. Calcule la nueva superficie total del cubo.

2-53) Calcule el porcentaje en que aumenta el área total de un paralelepípedo recto rectangular cuando cada una de sus aristas se duplica.

2-54) El área de la superficie de una esfera de radio R es 20[in^2]. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio 3R.

2-55) Determine la razón entre las áreas de la superficie de una esfera de diámetro D y la superficie de las caras de un cubo de arista D.

2-56) Se desea pintar totalmente el exterior de un cilindro de 57,2[ft] de radio basal y 15,4[yd] de altura. Para este trabajo considere que un tarro de pintura rinde 70[m^2]. Determine el número necesario de tarros de pintura que deben comprarse.

2-57) En un triángulo rectángulo un cateto mide 20[cm] y su área 60[cm^2]. Calcule la altura que corresponde a la hipotenusa.

2-58) Si en un triángulo se duplica la hipotenusa y se mantiene uno de los catetos ¿por qué factor resulta multiplicado el otro cateto?

2-59) Construya un cono recto de base circular usando papel cuadriculado y cinta adhesiva. Mida directamente el área lateral de este cono "contando cuadritos". Exprese el resultado en [cm^2]. Estime el error de esta medición. A continuación mida el perímetro de la base y la generatriz del cono y calcule, usando la fórmula, el área lateral del cono expresándola en [cm^2]. Estime el error de esta medición. Compare los valores obtenidos y sus errores experimentales.

2-60) Compruebe por mediciones el "teorema de Euclides del cateto": En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Medición de volúmenes

Todos los objetos de la naturaleza ocupan espacio, tienen **volumen**. Cuando los objetos tienen una cavidad, nos referimos al volumen de la cavidad con el término **capacidad**.

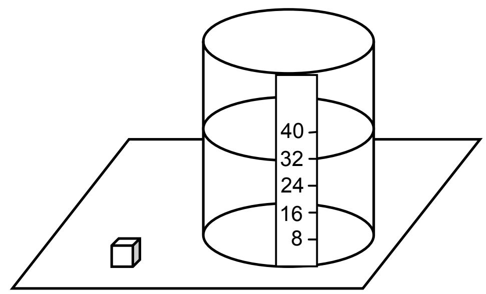
El volumen de un cuerpo de geometría simple se puede determinar directamente por cálculo. Si la forma de un cuerpo no es simple, su volumen puede ser estimado adaptando a su forma uno o más cuerpos de volumen calculable. En algunos casos podremos recurrir a otros métodos de **medición** de volumen.

Un posible método para medir el volumen de un cuerpo sólido consiste en sumergirlo en un frasco con agua y observar el cambio que se ha producido en el nivel del agua.

Elija un frasco de vidrio o de plástico transparente y coloque sobre él una cinta de papel.

Construya un cubo (use cartulina u otro material no absorbente) que tenga, por ejemplo 2[cm] de arista.

Llene el cubo con agua, viértala en el frasco (previamente vaciado) y marque 8[cm^3] en la cinta.



Efectúe esta operación varias veces; obtiene así un "frasco graduado", en el cual un cierto volumen de agua se lee directamente en la cinta, según sea el nivel que alcance el agua.

* Ejercítese determinando el volumen de una piedra; elíjala de tamaño apropiado al frasco que ha graduado.

¿Qué determinaría usted al hacer el experimento con una piedra pómez, con una esponja y con una tableta de antiácido efervescente?

* Mida el volumen de una esfera.

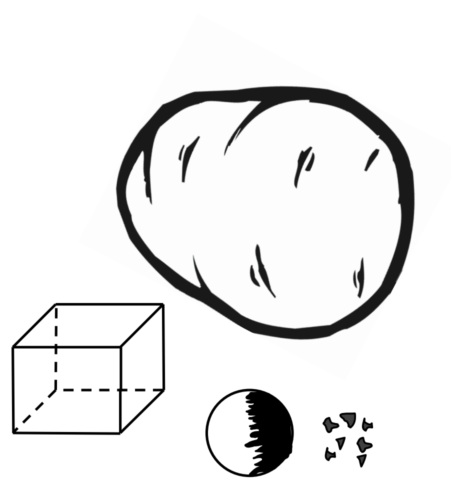
Escoja una papa de tamaño regular, provéase de un cuchillo y fabrique un cubo de ella. Cuide que las aristas sean iguales y llámelas 2R.

Mida el volumen del cubo y compárelo con:

$$V_{cubo} = (2R)^3 = 8R^3$$

Fabrique la esfera inscrita en el cubo (tiene radio R) y guarde todos los pedacitos de papa que va sacando del cubo para ir formando la esfera.

Mida el volumen de la esfera y el de todos los pedacitos.



Compare los volúmenes entre sí y también con el volumen del cubo; encontrará:

$$V_{esfera} \simeq \frac{1}{2} V_{cubo}$$

Haga ahora algunas acomodaciones:

$$V_{esfera} \simeq \frac{1}{2} V_{cubo} = \frac{1}{2} \cdot 8R^3 = 4R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3R^3$$

Ha obtenido un volumen aproximado y como está trabajando con una esfera, debe esperar que aparezca π; si el factor 3 está aproximando a π, resulta:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Usted puede repetir este experimento con un cubo de hielo.

- Otro método que le permitirá comprobar que:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

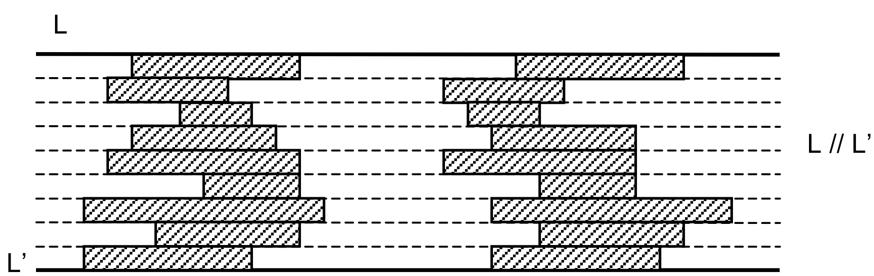
es el siguiente:

Use una pelota de plástico delgado y mida su diámetro. Perfórela en un punto. Llénela con agua y mida el volumen mediante el frasco graduado.

Principio o Postulado de Cavalieri

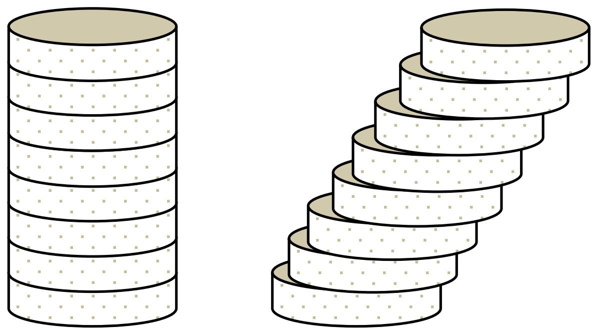
* Para un plano

Si entre dos rectas paralelas, se disponen dos series de rectángulos de misma altura, de modo que los rectángulos puestos al frente tienen mismas bases, entonces, las dos figuras resultantes tienen la misma área.



** Para volúmenes

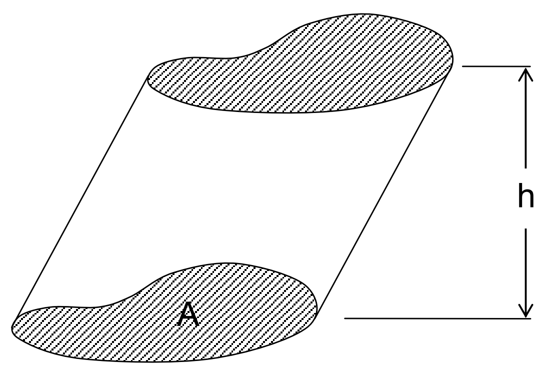
Si entre dos planos paralelos se colocan uno encima de otro dos series de prismas o cilindros, de modo que los sólidos de las dos series situados a la misma distancia de uno de los planos, tengan misma altura y bases equivalentes, las sumas de los sólidos de cada serie forman cuerpos de volúmenes equivalentes.



Volúmenes de algunos cuerpos

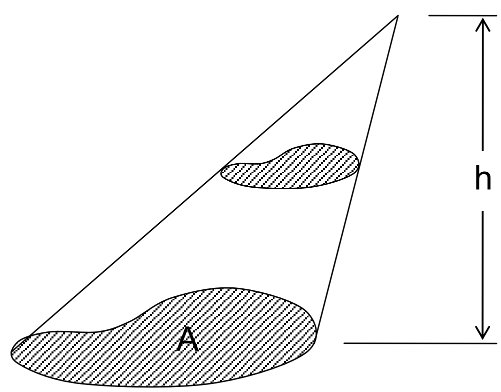
- Prismas y cilindros

área de la base	:	A
altura	:	h
volumen	:	$A \cdot h$



- Pirámides y conos

área de la base	:	A
altura	:	h
volumen	:	$\frac{A \cdot h}{3}$



De estas fórmulas generales usted puede obtener, como casos particulares, el volumen de un cubo, un paralelepípedo de base rectangular, de una pirámide de base triangular, de un cono de base circular, etc.

¡Verifique experimentalmente estas fórmulas: construya algunos cuerpos huecos de las formas indicadas y mida su volumen usando agua!

Unidades de volumen

La unidad básica es:

Un metro cúbico · · · · · · $1[m^3]$

Un submúltiplo de él es:

un centímetro cúbico (1 c.c.) · · · $1[cm^3] \triangleq 10^{-6}[m^3]$

Una unidad de volumen muy usada es:

un litro · · · · · $1[\ell] \triangleq 1[dm^3] \triangleq 10^{-3}[m^3]$

- Compruebe en forma directa esta equivalencia : construya una caja de papel de 5[cm] x 10[cm] x 20[cm] , llene una botella "litrera" con agua, vierta su contenido en la caja y compare.

En el sistema inglés de mediciones se usan las siguientes unidades para volúmenes de fluidos: un galón (gallon), un quarto (quart), una pinta (pint), una onza para fluidos (fluid ounce), un barril (barrel), etc.

Hay que distinguir entre galones usados en Inglaterra y en USA:

Un "imperial gallon" · · · · · · $1[\text{Imp.gal}] \triangleq 277{,}42[in^3]$

Un USA gallon · · · · · · $1[\text{gal}] \triangleq 231[in^3]$

Mencionemos algunas equivalencias que rigen entre tales unidades:

$1[\text{gal}] \triangleq 4[\text{quart}]$	$1[\text{quart}] \triangleq 2[\text{pint}]$
$1[\text{pint}] \triangleq 16[\text{fluid ounce}]$	$1[\text{barrel}] \triangleq 36[\text{Imp.gal}]$

- Determinemos la equivalencia entre el *imperial gallon* y el litro.

Buscamos $1[\text{Imp.gal}] \triangleq\ ?\,[\ell]$

Usando la equivalencia: $1[in] \triangleq 2{,}54[cm]$, resulta:

$$\begin{aligned} 1[\text{Imp.gal}] &\triangleq 277{,}42[in^3] \triangleq \\ &\triangleq 277{,}42[in^3] \cdot \left(\frac{2{,}54[cm]}{1[in]}\right)^3 \cdot \frac{1[\ell]}{1000[cm^3]} \triangleq \\ &\triangleq \frac{277{,}42 \cdot (2{,}54)^3}{1000}[\ell] \simeq 4{,}5461[\ell] \end{aligned}$$

esto es: $1[\text{Imp.gal}] \triangleq 4{,}5461[\ell]$ con 5 C.S.

Determine usted la equivalente entre $1[\text{gal}]$ y $1[\ell]$.

Ejercicios

2-61) Estime el volumen de un lápiz, de una uña, de una taza y el de la cavidad de un zapato. Describa el método usado en cada caso.

2-62) Estime el volumen de aire en el interior de su casa.

2-63) Estime el volumen del agua de todos los océanos.

2-64) Un átomo de hierro tiene un diámetro de $2\left[\mathring{A}\right]$, aproximadamente. Considere que el átomo sea aproximadamente esférico y estime el orden de magnitud del número de átomos de hierro que habría en un cubo de 1[mm] de arista.

2-65) En una bolsa de género se echan 25 bolitas idénticas. El volumen de cada bolita es 1,76[cm^3]. Estime el volumen que ocupan todas las bolitas en la bolsa.

2-66) Suponga usted que un iceberg se traslada desde la Antártica hasta Antofagasta y que durante el trayecto se funde (se derrite) el 30% del volumen total del iceberg. Calcule el volumen total que tenía el iceberg en la Antártica si su volumen visible (un 10% del volumen total) es de $1{,}5 \cdot 10^3$[m^3] en Antofagasta.

2-67) En un periódico aparece el siguiente aviso económico: *"Vendo refrigerador de 7 pies ...."*. Averigüe lo que se pretende informar al colocar en el aviso "7 pies". Haga mediciones en un refrigerador y estime el volumen interior de éste. (Si no tiene acceso a un refrigerador de "7 pies", hágalo con cualquier otro).

2-68) Cierto automóvil norteamericano rinde 15[mile] por cada "gallon" de bencina. Calcule el número de litros que necesitaría este automóvil para un viaje de 240[km].

2-69) Un recipiente, cuya capacidad es 8,0[ℓ] tiene forma de un paralelepípedo recto de base cuadrada, de lado L, y de altura 2L . Calcule L , en [cm].

2-70) Un agricultor encarga a un hojalatero que construya un depósito cúbico para almacenar agua. Para ello le entrega una lámina de fierro galvanizado de 4,0[m] de largo por 0,80[m] de ancho para que la corte en 5 pedazos cuadrados y arme el depósito, soldando los pedazos. Para facilitar su trabajo, el hojalatero corta la lámina en 20 pedazos cuadrados iguales y con ellos arma 4 depósitos en vez de uno. Calcule el volumen total de agua que pueden contener los 4 depósitos fabricados. Calcule el volumen total que podría contener el depósito encargado por el agricultor. Compare.

2-71) Para pintar una pared de 5,0[m] de largo por 4,0[m] de ancho se usan 2,00[gal] de pintura. Calcule el espesor de la capa de pintura.

2-72) Suponga que los océanos cubren 4/5 la superficie del globo terrestre y que la capa de hielo en Islandia tiene un volumen aproximadamente equivalente a $2{\cdot}10^6$[km^3] de agua. ¿Cuánto se elevaría el nivel de los océanos si esa capa de hielo se fundiera? Exprese el resultado en centímetros.

2-73) Un mecánico mide una placa de fierro y registra los siguientes valores: 10,3[cm] de largo; 1,50[dm] de ancho y 0,75[cm] de espesor. Calcule el volumen de la placa en [cm^3]. Suponga que las medidas del ancho y del espesor son "exactas" y que en la medida del largo hay un error de 0,1[cm]. ¿Qué tanto por ciento del volumen total es la variación máxima del volumen debido a tal error?

2-74) Calcule la superficie de una esfera que tiene un volumen de $1{,}08{\cdot}10^{-3}$[m^3].

2-75) En un cubo de arista L se disponen esferas macizas e iguales centradas en los vértices y centros de las caras. El diámetro de las esferas es tal, que la esfera de una cara queda en contacto con las cuatro de los vértices correspondientes. Determine el volumen total de las partes de las esferas que quedan dentro del cubo.

2-76) Una silla de madera se sumerge en un tambor cilíndrico de 7,0[dm] de diámetro, con agua hasta cierto nivel. Al sumergir la silla se observa que el nivel del agua sube en $2\frac{3}{8}\left[\text{in}\right]$. Calcule el volumen de la madera, expresándolo en [cm^3].

2-77) Calcule el volumen de un cono recto de radio basal R = 15,2[cm] y altura h = 22,5[cm]. Si este cono se corta por un plano paralelo a la base a la altura de 12,0[cm], ¿cuál es el volumen del "tronco de cono" obtenido?

2-78) Use un vaso que tenga aproximadamente la forma de un tronco de cono. Mida el diámetro de la base; vierta en él, sucesivamente, un determinado volumen de agua y mida el nivel de agua alcanzado en cada ocasión y el diámetro de la superficie libre del agua. Anote sus mediciones en una "tabla de valores". Calcule el volumen de agua en cada ocasión y compare con la cantidad de agua vertida cada vez.

Vocabulario: dimensión, magnitud física

En el lenguaje de la vida diaria se usa la palabra **dimensión** como sinónimo de tamaño o medida; aunque ocasionalmente la empleamos en tal sentido, queremos atribuirle ahora un significado más preciso para su uso en Física.

Hemos enfatizado que el valor de una cantidad física debe ser expresado conjuntamente por un número y una unidad de medición.

- El tiempo transcurrido entre dos eventos puede describirse como $18\cdot10^2$[s] ó 30[min] ó 0,50[h]. Estos son diferentes modos de describir una medición de una misma cantidad física, **tiempo**, en una misma situación.
- Análogamente, la distancia entre dos puntos de una barra puede expresarse por 254[mm] ó 0,254[m] ó 10,0[in], informando sobre una medición de la cantidad física **longitud** en cierto caso particular.

Usaremos la expresión **magnitud física** como sinónimo de "valor de una cantidad física".

Introduciremos el concepto de **dimensión física** para referirnos a una cualidad intrínseca de la cantidad física que es independiente de la forma en que se expresa o valora dicha cantidad física.

El largo, el ancho y el espesor de una lámina, la altura de un objeto y la profundidad de un pozo son casos particulares de la cantidad física **longitud**. Decimos que largo, ancho, espesor, altura y profundidad tienen la misma "dimensión física". En casos como estos anotamos:

$$\text{dimensión de longitud} \cdots\cdots \text{dim(longitud)} = \mathcal{L}$$

Para calcular el área de una superficie rectangular debemos multiplicar el largo por el ancho, esto sugiere que la **dimensión de área** es igual a la "dimensión de longitud al cuadrado":

$$\text{dim(área)} = \text{dim(largo)} \cdot \text{dim(ancho)} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \cdot = \mathcal{L}^2$$

Análogamente, la **dimensión de volumen** es la de "longitud al cubo":

$$\text{dim(volumen)} = \mathcal{L}^3$$

Un "número puro" **no** tiene dimensión física y convendremos en anotar:

$$\dim(\text{ número }) = 1$$

- Por ejemplo, de la definición de "ángulo en radianes" deducimos:

$$\dim(\text{ ángulo }) = \frac{\dim(\text{ arco })}{\dim(\text{ radio })} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}} = 1$$

lo que interpretamos diciendo *"un ángulo **no** tiene dimensión física".*

Se ha reconocido que es posible expresar las dimensiones de todas las cantidades físicas en término de las dimensiones de algunas cantidades como:

TIEMPO LONGITUD MASA CARGA ELÉCTRICA

TEMPERATURA CANTIDAD DE SUBSTANCIA

pudiendo elegirse como cantidades independientes tres o más de éstas, en diferentes campos de la Física.

Usando la notación:

dimensión de la cantidad física F ···· dim(F) = $\mathcal{F}$

donde F es el símbolo que representa a tal dimensión, acordaremos escribir:

dim(tiempo) = τ

dim(longitud) = $\mathcal{L}$

dim(masa) = $\mathcal{M}$

dim(carga eléctrica) = $\mathcal{C}$

dim(temperatura) = Θ

dim(cantidad de substancia) = $\mathcal{S}$

Hemos trabajado con un esquema en que las **cantidades físicas** nombran a conceptos físicos y por lo tanto observables o medibles en situaciones particulares; a cada cantidad física asociamos una **dimensión física**. Al valorar una cantidad física hablamos de **magnitud física**.

Tales acepciones de los términos cantidad, dimensión y magnitud física pueden ser ilustrados considerando la proposición:

"La capacidad de un estanque es 420[ℓ]"

en la cual se hace referencia a:

cantidad física	:	volumen
dimensión física	:	$\mathcal{L}^3$
magnitud física	:	420[ℓ]

Debemos advertirle que para los conceptos que hemos designado con las expresiones "cantidad física", "dimensión física" y "magnitud física", otros autores usan nombres diferentes. Por ejemplo, se suele usar el término "magnitud física" para indicar toda cualidad medible de las cosas, lo que corresponde al significado del término "cantidad física" que empleamos en este texto. Sin embargo, el uso sistemático de una determinada nomenclatura no afecta la consistencia de la descripción de los diversos fenómenos físicos.