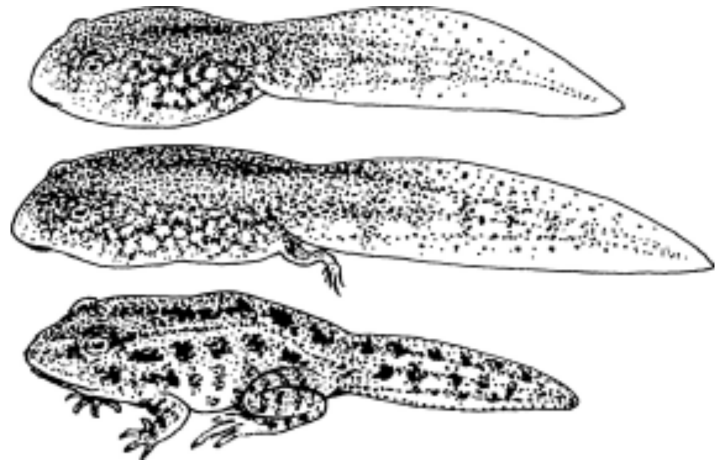
CAPÍTULO III

RAPIDEZ DE CAMBIO



Entre los aspectos más significativos de nuestras experiencias y observaciones destaca el carácter variable de la naturaleza.

La Tierra y todos los sistemas biológicos han experimentado y experimentan cambios evolucionarios; la población de la Tierra y el número de habitantes de un país varían de minuto en minuto. La población de bacterias en una gota de agua puede cambiar aún más rápidamente.

Los procesos de crecimiento de microorganismos, de plantas y de animales revelan cambios de forma, de altura, de peso, de comportamiento y de muchas otras características internas y externas.

La temperatura de la atmósfera cambia en el transcurso del día, y de día en día. También varía la temperatura de nuestro cuerpo y, en general, la de todos los objetos.

Un objeto que se mueve va cambiando de posición a medida que transcurre el tiempo. Se mueven las galaxias al alejarse entre sí y se mueven los planetas y cometas en su viaje en torno al Sol. Observamos movimiento cuando las aves, los aviones y los cohetes vuelan y también cuando seguimos con la vista la pelota en un juego de tenis o de fútbol. Cuando por una carretera los automóviles transitan, lenta o rápidamente, los pistones de sus motores ejecutan movimientos de vaivén en determinadas direcciones; estos movimientos mediante ingeniosos mecanismos producen la rotación de sus ruedas.

Los oponentes en un juego de ajedrez mueven sucesivamente las piezas a intervalos irregulares de tiempo, en variadas e imprevisibles direcciones con avances o retornos desiguales.

Hay también movimiento en los diversos tropismos de especies vegetales; por ejemplo, cuando cambia la orientación de ciertas flores siguiendo al Sol o cuando las raíces crecen buscando agua.

Cada proceso metabólico, mediante el cual el organismo obtiene energía de los alimentos, se desarrolla con rapidez variable dependiendo de la presencia de catalizadores, de las condiciones de temperatura y acidez, etc. En general, todo proceso químico representa cambios.

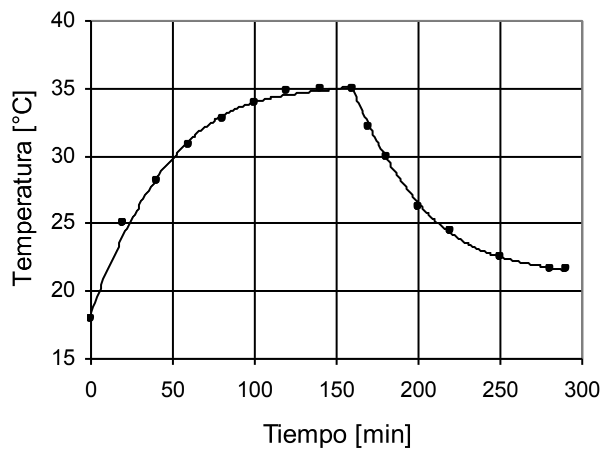
En consecuencia, es inevitable e importante pensar la naturaleza en términos de **cambios.**

Al considerar los cambios que las cantidades físicas manifiestan en el transcurso del tiempo, estamos aceptando que el tiempo es variable y que su valor siempre aumenta. Nuestras experiencias cotidianas y nuestros relojes nos dirían que el progreso del tiempo es bien definido; en el transcurso del tiempo cualquier cosa puede variar de cualquier modo, pero el tiempo aumenta uniformemente para todos los cambios y en forma independiente de ellos. Vamos a suponer que tales características para el tiempo son válidas en situaciones comunes; eso sí, le advertimos que usted podrá aprender cuándo tal suposición no es correcta (Teoría de la relatividad).

A continuación, examinaremos algunas de las manifestaciones de cambio recién mencionadas. Empecemos observando cómo cambia la temperatura de un objeto en el curso del tiempo.

- Un día de verano hicimos un experimento: a las 10 de la mañana llenamos un vaso con agua corriente, lo pusimos detrás de una ventana iluminada por el sol, introdujimos un termómetro en el agua y miramos la hora en un reloj. Medimos la temperatura a intervalos regulares de tiempo; cuando observamos que la temperatura del agua había dejado de subir, pusimos el vaso a la sombra y continuamos las mediciones de tiempo y temperatura. Obtuvimos los siguientes resultados:

tiempo	**temperatura**
[min]	**[ºC]**
0	18,0
20	25,1
40	28,2
60	30,8
80	32,7
100	34,0
120	34,8
140	35,0
160	35,0
170	32,1
180	30,0
200	26,3
220	24,5
250	22,5
280	21,6
290	21,6



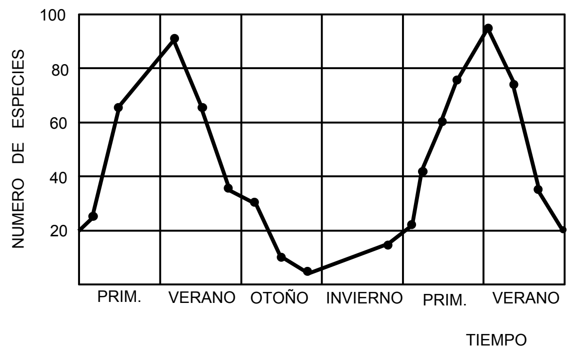
Mirando la representación gráfica de los datos apreciamos la forma en que aumenta la temperatura del agua mientras está expuesta al sol y como se enfría el agua al colocar el vaso a la sombra; igualándose finalmente la temperatura del agua con la del ambiente.

Notamos que al comienzo la temperatura sube rápidamente y que luego lo hace más lentamente, alcanzando un valor que se mantiene constante por varios minutos; en forma análoga, en la etapa de enfriamiento el descenso de la temperatura es más rápido al comienzo que al final, cuando va acercándose a un valor estable.

Le recomendamos que usted reproduzca este experimento o que haga uno similar, según sean los elementos de que disponga o de las condiciones climáticas. Por ejemplo, si tiene un “termómetro de baño” puede medir la temperatura del agua desde que comienza a llenar la tina hasta que cierra la llave de agua caliente y luego mientras se enfría el agua. Con un “termómetro clínico” podrá hacer esta experiencia, pero tomando precauciones adicionales.

Veamos algunas situaciones en las cuales la cantidad que cambia con el tiempo es el “número de cosas”:

- En el gráfico se representa el número de especies de Lepidóptera (mariposas y polillas) que fueron capturadas en el desarrollo de un cierto experimento. Observamos que el número de especies diferentes revela variaciones cíclicas según las estaciones, esto es, según las condiciones climáticas. El mayor número de especies aparece en verano, cuando las condiciones ambientales son óptimas para la reproducción de estas especies; los valores más bajos ocurren en invierno, cuando las condiciones son las más difíciles.



- Ciertos organismos unicelulares se reproducen por simple división. Este proceso requiere, en término medio, el transcurso de un determinado intervalo de tiempo, llamado tiempo de generación (τ).

Si en cierto instante, que llamamos $t=0$, aislásemos un organismo recién generado, al transcurrir un intervalo de tiempo τ $(t=\tau)$ se produciría la primera división, quedando 2 organismos. Al transcurrir otro intervalo de tiempo τ $(t=2\tau)$ se produciría la segunda división, obteniéndose 4 organismos y así sucesivamente.

Usando lenguaje aritmético esto se expresa en la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll}
\text{para } t=0 & (t/\tau=0) & \text{tenemos} & 1=2^0 \text{ organismo} \\
\text{para } t=\tau & (t/\tau=1) & \text{tenemos} & 2=2^1 \text{ organismos} \\
\text{para } t=2\tau & (t/\tau=2) & \text{tenemos} & 4=2^2 \text{ organismos} \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\text{para } t=k\tau & (t/\tau=k) & \text{tenemos} & 2^k \text{ organismos}
\end{array}$$

Al continuar de tal forma, el número N de organismos en el tiempo t queda representado por:

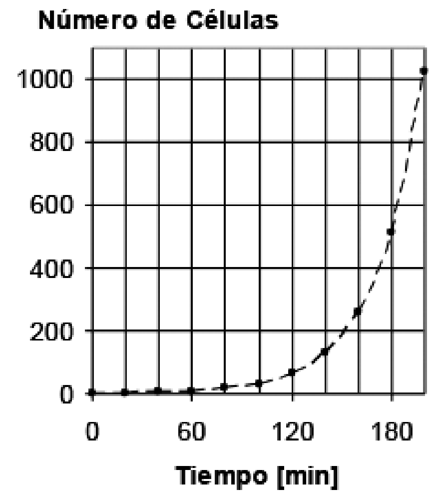
$$N = 2^{t/\tau}$$

ecuación que, en este ejemplo, sólo tiene significado cuando t es un múltiplo de τ ($t = p\,\tau$, con $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$).

Cuando nos referimos a esta forma de crecimiento decimos que la población aumenta en *progresión geométrica* en el tiempo o que tal crecimiento es "exponencial".

Un ejemplo numérico en que el tiempo de generación vale τ = 20[min] se presenta en la siguiente tabla 2:

Tiempo [min]	**Reproducción #**	**Número de organismos**
0		1
20	1	2
40	2	4
60	3	8
80	4	16
100	5	32
120	6	64
140	7	128
160	8	256
180	9	512
200	10	1024

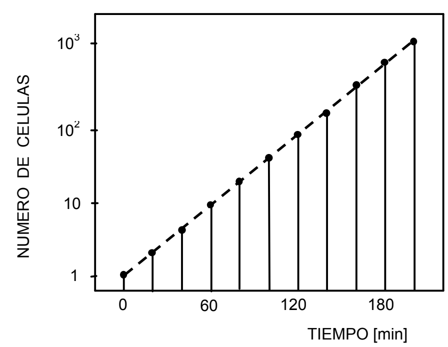


En el gráfico anterior, construido con los números de la tabla, las escalas usadas para representar al tiempo y al número de organismos son ambas escalas *líneales*.

Un cultivo bacteriano en crecimiento puede contener sólo unas pocas células al comienzo y miles de millones al final; si usáramos escalas uniformes, no podríamos emplear la misma figura para mostrar la conducta reproductiva de poblaciones pequeñas y grandes.

Si resultara aconsejable representar el desarrollo de un cultivo bacteriano en una sola figura, se puede usar una escala de *potencias de 10* para la población y una escala uniforme para el tiempo.

Aplicando este método a los datos del ejemplo numérico previo, obtenemos el gráfico adjunto.



Vocabulario: variables

Si dos cantidades están relacionadas en tal forma que al dar un valor a una de ellas, escogida como **variable independiente**, existe un modo sistemático (una tabla numérica, un gráfico, una ecuación) para encontrar el valor correspondiente de la otra, llamada **variable dependiente**, decimos que esta última cantidad es una FUNCIÓN de la variable independiente.

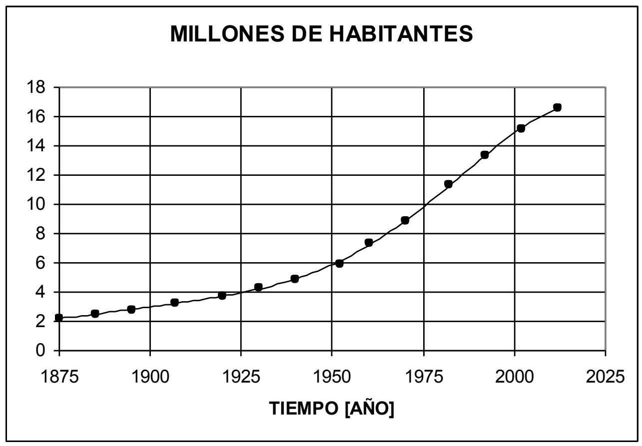
Esta definición que es breve y simple, aunque no se estime rigurosa del punto de vista matemático, implica que una función puede ser representada por:

una tabla de valores numéricos
un gráfico
una ecuación matemática

Por ahora estamos interesados en expresar muchas variables en término de sus cambios en el tiempo, lo que es simplemente otro modo de decir que queremos expresar esas variables como **funciones del tiempo**. Consideraremos al **tiempo** como **variable independiente** (de acuerdo a la suposición previamente establecida) y nos referiremos a las otras variables como **variables dependientes**.

- Hemos recopilado los siguientes datos aproximados sobre la población de Chile en los últimos 150 años:

Año	**Número de habitantes**
1875	2.219.000
1885	2.492.000
1895	2.804.000
1907	3.229.000
1920	3.732.000
1930	4.287.000
1940	4.885.000
1952	5.933.000
1960	7.375.000
1970	8.853.000
1982	11.330.000
1992	13.348.000
2002	15.116.000
2012	16.572.475



Queremos usar estos números para adquirir cierta idea sobre el modo en que cambia la población de un país. Calculemos algunas variaciones de la población en diferentes intervalos de tiempo:

Entre los años 1875 y 1885, esto es durante 1885 - 1875 = 10[año], la población cambió de 2.219.000 a 2.492.000 habitantes. Hubo un aumento de 273.000 habitantes, lo que representa un aumento porcentual de

$$\frac{273.000}{2.219.000} \cdot 100\% \simeq 12,3\%$$

Análogamente, en los 12[año] entre 1940 y 1952 la población aumentó en 5.933.000 - 4.885.000 = 1.048.000[habitante] ; el aumento porcentual correspondiente es $\frac{1.048.000}{4.885.000} \cdot 100\% \simeq 21,5\%$

En estos casos, los porcentajes de aumento **promedio** anual son:

$$\frac{12,3\%}{10} \simeq 1,2\% \quad \text{y} \quad \frac{21,5\%}{12} \simeq 1,8\% , \quad \text{respectivamente.}$$

Efectúe este tipo de cálculos con todos los datos de la tabla. ¿Qué ideas le sugieren los resultados de sus cálculos?

Notación y convenio para diferencias

Cuando nos interesa saber en cuánto ha variado cierta cantidad física calculamos diferencias.

- La duración de un cierto suceso se determina por la diferencia entre dos instantes de tiempo:

$$\text{intervalo de tiempo} = \text{instante posterior} - \text{instante anterior}$$

$$\Delta t = t_p - t_a$$

- Usamos la letra griega Δ (delta mayúscula, equivalente a nuestra letra D) para indicar una **diferencia** o **cambio**. Entonces ΔF, que leemos " *delta F* ", denota un cambio en la cantidad física F:

$$\text{cambio de } F = \text{valor posterior de } F - \text{valor anterior de } F$$

$$\Delta F = F_p - F_a$$

Obviamente, la expresión ΔF no significa el producto entre Δ y F.

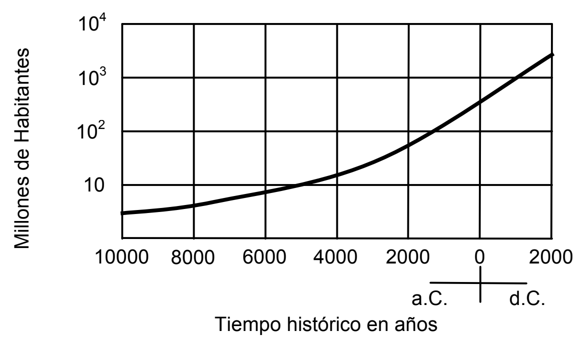
- El orden en que hemos colocado los términos en la diferencia, lo que adoptaremos como un **convenio**, permite concluir que los **incrementos** en la cantidad física F son:

$\Delta F > 0$	(positivo)	si	$F_p > F_a$
$\Delta F = 0$	(cero)	si	$F_p = F_a$
$\Delta F < 0$	(negativo)	si	$F_p < F_a$

Nota cultural

Una de las preocupaciones del hombre es y ha sido la determinación del número de habitantes en la Tierra. En el gráfico adjunto presentamos el crecimiento de la población mundial, estimada, desde 10.000 años A.C. hasta la actualidad.

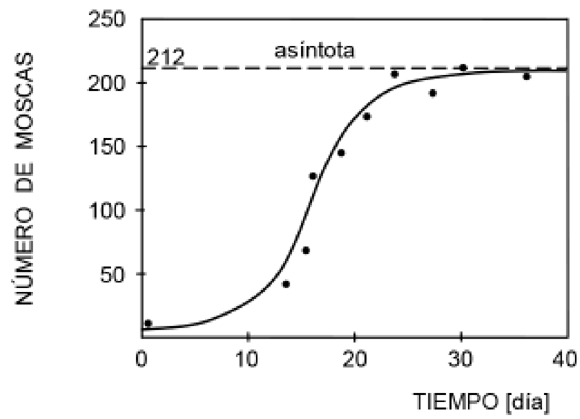
Esta forma de crecimiento coincide con las ideas de Malthus de que la población crece en progresión geométrica.



Compare esta curva de crecimiento con las ya obtenidas para la población de un organismo unicelular.

Sin embargo, al estudiar el crecimiento de poblaciones de otros seres vivos, el bioestadista Verlhust observó que el aumento de población se detiene; ello se explica por efectos de limitación de espacio vital y de recursos alimenticios.

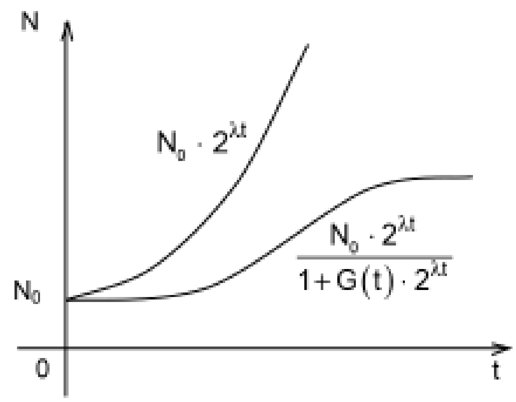
La curva representativa de este tipo de crecimiento toma la forma de una S alargada, como la mostrada en el gráfico adjunto. Esta figura corresponde a datos obtenidos para una población de moscas del vinagre (Drosophila Melanogaster).



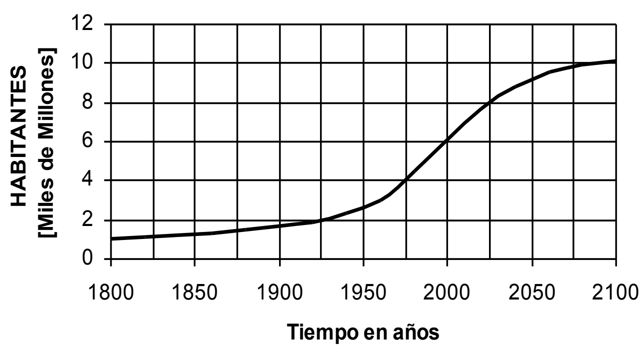
Las formas de crecimiento poblacional de Malthus y de Verlhust se pueden expresar por las ecuaciones:

$$N = N_0 \cdot 2^{\lambda t} \quad \text{y} \quad N = \frac{N_0 \cdot 2^{\lambda t}}{1 + G(t) \cdot 2^{\lambda t}} \ ,$$

respectivamente. Ambas funciones están representadas en el gráfico adjunto para facilitar la comparación.



Considerando que el crecimiento de la especie humana está condicionado por ciertos factores como producción de alimentos, limitación de espacio, transformaciones ecológicas, formas de cultura, etc., varios científicos han efectuado predicciones sobre la población mundial; los resultados de uno de tales estudios están representados en el gráfico adjunto.



Ejercicios

3-1) Haga mediciones durante varios días con el objeto de determinar el intervalo de tiempo que emplea en:

ducharse

comer alguna fruta

trasladarse de su casa a la USM

subir la escala desde Avda. España al frontis del Aula Magna.

Exprese sus resultados en una misma unidad.

3-2) Suponga que usted entra a un cine a las 18:53 y que sale de él a las 20:46 horas. ¿Cuál es la duración del intervalo de tiempo que usted habría permanecido en el cine?

3-3) Censos de población en USA han dado los resultados (aproximados a miles de habitantes) siguientes:

Año:	1790	1900	1950	1960
Habitantes:	3.929.000	76.212.000	151.326.000	179.326.000

Calcule y compare los porcentajes de aumento de población para USA y Chile entre los años 1900 y 1950 y entre los años 1950 y 1960.

3-4) Una persona decidió ponerse a dieta durante los meses de enero y febrero. Se adjuntan los datos de su control de peso.

Construya un gráfico que muestre el peso de la persona en función del tiempo. Elija escalas apropiadas para colocar los días y los pesos; en particular, fíjese que para indicar los pesos es suficiente colocar números entre 60,2 y 63,2 lo que no hace necesario empezar la escala con cero.

Identifique los días en que pesó más y los días en que pesó menos. Determine los intervalos de tiempo en que disminuyó de peso y en los que aumentó de peso.

Fecha	**Peso [kp]**
3 Enero	63,2
6 Enero	63,2
10 Enero	62,6
15 Enero	61,8
22 Enero	61,3
30 Enero	60,7
4 Febrero	60,4
8 Febrero	60,7
10 Febrero	60,4
14 Febrero	60,2
19 Febrero	60,9
25 Febrero	60,4
28 Febrero	60,2

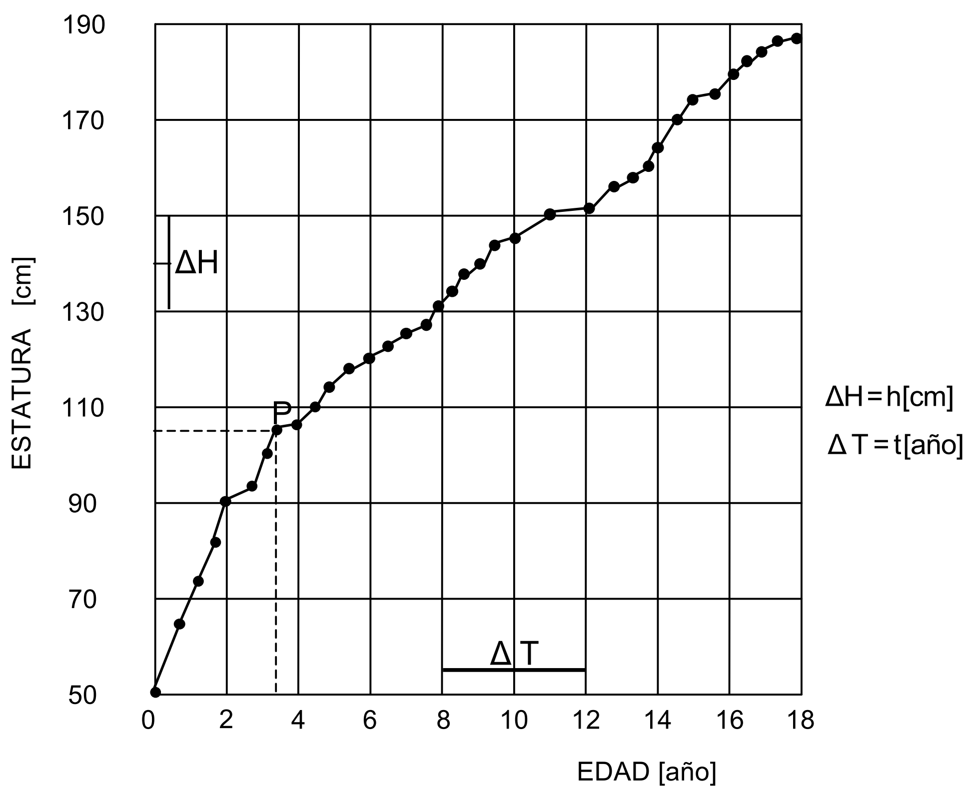
3-5) La profundidad de un río fue medida, en un mismo lugar, durante los días hábiles de junio de 1972. Los resultados obtenidos en días consecutivos, expresados en **metros**, son los siguientes:

3,52; 3,50; 3,45; - ; 3,40; 3,35; 3,35; 3,40; 3,50; 3,65; - ; 3,80; 3,75; 3,70;
3,70; 3,65; 3,62; - ; 3,56; 3,55; 3,50; 3,46; 3,45; 3,71; - ; 4,10; 4,03; 4,01;
3,90; 3,84.

Haga un gráfico, escogiendo escalas apropiadas, de la profundidad del río en función del tiempo. Señale los días en que el río trae más agua. Señale los días en que la profundidad del río permanece constante. Calcule las profundidades medias para las semanas sucesivas y represéntelas en el gráfico. Calcule la profundidad media mensual. Comente.

Otro tipo de cambios que podemos observar con el paso del tiempo es el crecimiento de animales y de plantas.

- Un científico francés del siglo XVIII se preocupó de controlar la estatura de su hijo desde su nacimiento hasta la edad de 18 años. De sus mediciones nos queda el gráfico siguiente.



De este gráfico podemos “extraer” datos y luego analizarlos.

Al examinar este gráfico verificamos que en él las escalas usadas para representar **edad** y **estatura** son ambas uniformes. Entonces podemos determinar los **factores de escala** correspondientes en la siguiente forma:

Elegimos cierta diferencia de edad ΔT , sea $\Delta T = t[\text{año}]$. A ella corresponde una longitud $\Delta l = a$ [cm de gráfico] medida en el *eje de edades*. El *factor de escala para edad* resulta:

$$\sigma_T = \frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{t}{a} \ [\text{año/cm de gráfico}]$$

Análogamente, si para una diferencia de estatura $\Delta H = h[cm]$ medimos una longitud $\Delta l' = b$ [cm de gráfico] en el *eje de estatura*, el *factor de escala para estatura* es:

$$\sigma_H = \frac{\Delta H}{\Delta l'} = \frac{h}{b} \left[cm/cm \text{ de gráfico} \right]$$

Consideremos el punto P del gráfico. La medición de las longitudes, a lo largo de las líneas segmentadas representativas de estatura y edad y la aplicación de los respectivos factores de escala nos permite obtener la estatura alcanzada por el niño a la edad correspondiente:

la estatura es 104[cm] a los 3,3[año] de edad.

Nota: Hemos expresado la estatura por un número entero de centímetros y la edad por uno con décimos de años. Al calcular los factores de escalas (divisiones) y luego al usarlos (multiplicaciones) pueden salir más cifras, pero ellas no son significativas; piense en lo difícil que sería medir la estatura de un niño con precisión de décimas de centímetro, en los errores cometidos al medir en el gráfico con una regla graduada en milímetros, etc.

Aplicando el método recién indicado hemos obtenido los siguientes valores:

T[año] :	0	0,4	0,8	1,0	2,0	4,5	9,0	13,0	15,0
H[cm] :	50	65	73	76	92	111	137	156	175

donde hemos usado T y H para simbolizar la edad y la estatura respectivamente.

Con estos valores podemos calcular el crecimiento (incremento de estatura) durante ciertos intervalos de tiempo, por ejemplo:

Durante el primer año de vida (desde el nacimiento, T = 0, hasta T = 1,0[año]) el crecimiento fue:

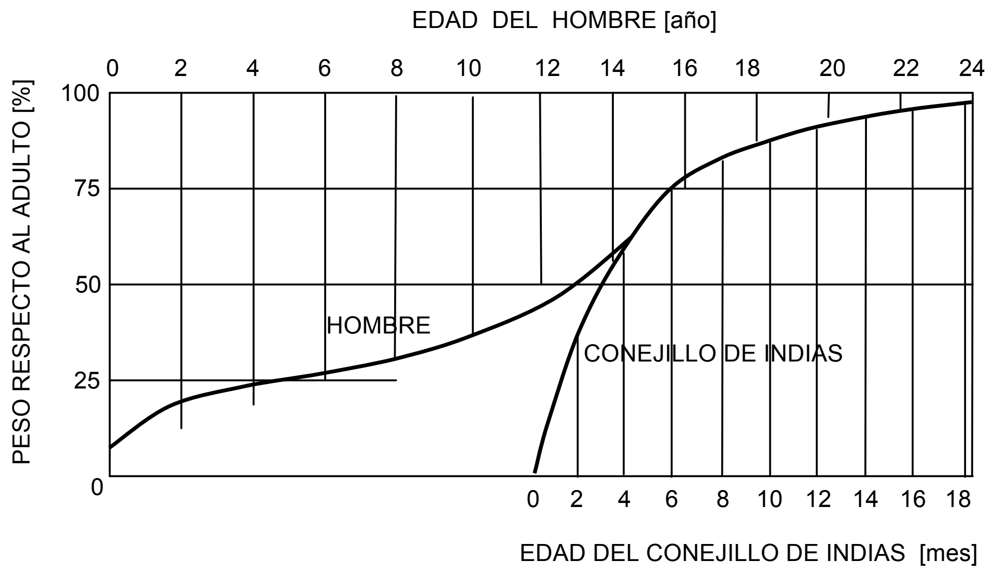
$$\Delta H = (76 - 50)[cm] = 26[cm]$$

El *estirón* entre los 13 y 15 años, ΔT = 2,0[año] fue:

$$\Delta H = (175 - 156)[cm] = 19[cm]$$

Continúe usted con la determinación de la estatura y edad para todos los puntos del gráfico. Calcule los aumentos de estatura entre pares de valores consecutivos. Haga una tabla con los valores de edades, estaturas e incrementos de estatura; la tabla puede encabezarla con T [año] , H [cm] y ΔH [cm] respectivamente. Construya un gráfico para representar los incrementos de estatura versus tiempo, y comente.

- El crecimiento de un animal no sólo se refleja en el aumento de estatura; podemos considerar también, entre otras características, el aumento de peso. En el gráfico siguiente le mostramos la variación temporal de peso, como porcentaje del peso del adulto, de un hombre y de otro mamífero (un conejillo de Indias):



Resulta interesante que, después de una etapa inicial de crecimiento, la variación porcentual de peso es la misma en ambas especies. Naturalmente, la escala de tiempo es diferente; ello se debe a que el tiempo medio de vida para cada especie es distinto. El crecimiento de otros mamíferos revela igual comportamiento.

Vocabulario: interpolación

Las mediciones efectuadas en un experimento nos proporcionan, en general, un conjunto finito de pares de **datos numéricos** correspondientes a dos variables. Con el objeto de visualizar el fenómeno físico involucrado en el experimento construimos un gráfico con tales datos.

A menudo podemos obtener fácilmente información útil de un gráfico. En realidad, la única información cierta en un gráfico son los **puntos** representativos de los datos y esto siempre que junto a ellos se indiquen los límites de precisión de las respectivas mediciones. Más aún, en ciertos casos se pierde precisión al colocar los puntos en un gráfico.

Usualmente dibujamos una **curva** que pase por estos puntos. El trazado de la curva depende de actos de decisión personal; la experiencia, conocimiento o interpretación del fenómeno físico en estudio nos guía al hacerlo.

El proceso de estimar valores **entre** puntos correspondientes a datos se llama **interpolación**.

Al dibujar una curva pasando por los datos obtenidos en mediciones estamos esencialmente interpolando, ya que al hacerlo generamos infinitos puntos que no provienen de mediciones.

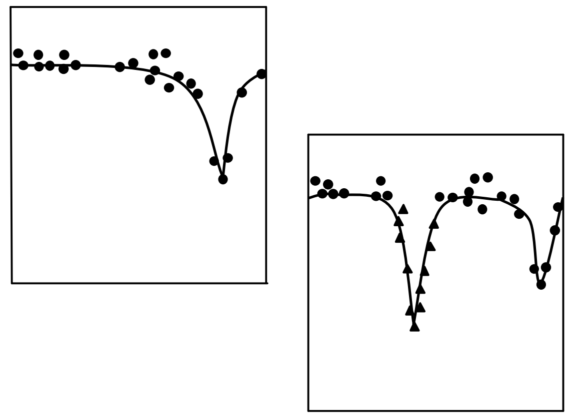
El proceso de hacer predicciones basadas en la **extensión** de una curva más allá de los puntos límites que corresponden a mediciones se llama **extrapolación**.

Cuando trabajamos con un gráfico es conveniente conocer las condiciones bajo las cuales fue obtenida la información y es necesario usar el gráfico con cuidado, especialmente en los procesos de interpolación y extrapolación. Queremos ilustrar este punto con dos casos extremos:

* Los resultados de un experimento se han representado por pequeños círculos en el gráfico superior y se ha trazado una curva (interpolación) considerando ese conjunto de puntos.

Sin embargo, una repetición del experimento tomando más datos para la sección central de la variable estudiada, dio los resultados representados por los triángulos en el dibujo inferior.

En este caso la interpolación inicial no era válida.



** Las mediciones de otro experimento están representadas por los círculos en el gráfico que se muestra abajo a la izquierda. Se ha trazado una curva que pasa entre esos puntos y luego se ha extrapolado linealmente (recta segmentada en ese gráfico). Predicciones teóricas posteriores indicaron que los resultados experimentales deberían corresponder a la curva del gráfico de la derecha. Cuando se dieron las condiciones técnicas para completar el experimento, se obtuvieron los datos representados por los triángulos en tal gráfico. Observe que en este caso la extrapolación había fallado.

En varias oportunidades usted tendrá necesidad de interpolar o extrapolar para resolver algunos de los ejercicios que le propondremos; sin embargo, a menos que se lo pidamos explícitamente, hágalo con cuidado y tranquilidad, pero sin considerar la posibilidad de que se presenten las situaciones extremas que acabamos de ilustrar. Hemos querido que usted se dé cuenta que tales situaciones pueden ocurrir; tal vez en algunos de sus trabajos futuros se encuentre con ellas.

En algunas situaciones, las curvas representativas de fenómenos físicos que varían con el tiempo son trazadas directamente por instrumentos registradores; es el caso, por ejemplo, de sismógrafos, cardiógrafos y encefalógrafos. Análogamente en la pantalla de un osciloscopio un instrumento que usted aprenderá a utilizar en el futuro se puede ver y fotografiar las curvas que describen el comportamiento de cantidades físicas en función del tiempo. En tales casos no necesitamos interpolar: los instrumentos lo hacen por nosotros.

Un método para comparar

Un día decidimos comprar duraznos. Antes de adquirirlos, comparamos precios de venta de duraznos, de igual tipo y calidad, en diferentes lugares. Leímos los siguientes avisos:

$ A la docena de duraznos

$ B el *kilo* de duraznos

Para decidir dónde nos convenía comprar, nos pareció lógico comparar el precio por **unidad de duraznos**.

En el primer caso calculamos directamente:

$$\text{precio de 1 durazno} = \frac{\$A}{12} = \frac{A}{12}\left[\$/\text{durazno}\right]$$

En el segundo caso, primero contamos el número de duraznos en el *kilo*, resultaron N ; entonces calculamos :

$$\text{precio de 1 durazno} = \frac{\$B}{N} = \frac{B}{N}\left[\$/\text{durazno}\right]$$

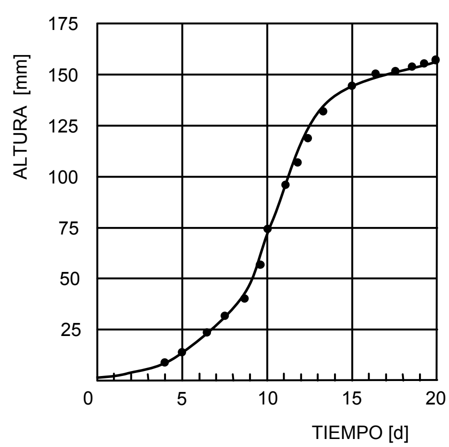
Esto es, con el objeto de establecer una buena base de comparación, valores por unidades, calculamos **cuocientes**.

Aunque tal vez a usted no le parezca efectivo a primera vista, un gran número de situaciones en física y en matemática se resuelven por analogía con el caso de "compra de duraznos".

Crecimiento de una plántula

Plántula es el nombre que se da a la planta joven desde el momento en que el embrión emerge de la semilla hasta que se independiza de los alimentos almacenados en esta última.

En el gráfico adjunto están representados datos obtenidos diariamente durante el crecimiento de una plántula de lupino (una gramínea). El instante en que comienza el desarrollo de la plántula se ha elegido como $t = 0[d]$ y a la altura correspondiente se ha dado el valor $h = 0[mm]$.



Podemos informar sobre el crecimiento de la plántula dando el valor de la mayor altura registrada y el tiempo requerido para tal desarrollo o indicando las alturas alcanzadas en diferentes tiempos y los correspondientes aumentos de altura promedio por día; también podemos decir cuáles son los aumentos de altura por unidad de tiempo para intervalos de tiempo entre mediciones sucesivas o entre varias mediciones.

Siguiendo esta pauta con datos que leemos del gráfico obtenemos resultados como los siguientes:

- La plántula alcanza una altura máxima de 159[mm] a los 19 días. Esto implica que el crecimiento **promedio** por día queda determinado por el **cuociente**:

$$\frac{159\left[\mathrm{mm}\right]}{19\left[\mathrm{d}\right]} \simeq 8{,}4\left[\mathrm{mm/d}\right],$$

lo que leemos "*8,4 milímetros <u>por</u> día*".

Expresamos esta información de otro modo, haciendo referencia al comienzo del desarrollo de la plántula, diciendo que:

durante el intervalo de tiempo $\Delta t = 19 - 0 = 19[\mathrm{d}]$ el incremento de altura es $\Delta h = 159 - 0 = 159[\mathrm{mm}]$ y en consecuencia, la **rapidez media de crecimiento** es

$$\bar{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{159\left[\mathrm{mm}\right]}{19\left[\mathrm{d}\right]} \simeq 8{,}4\left[\mathrm{mm/d}\right]$$

- Consideremos la altura *h* alcanzada por la plántula en cualquier tiempo *t* , lo que escribimos $h(t)$ y leemos *" la función h de t ".*

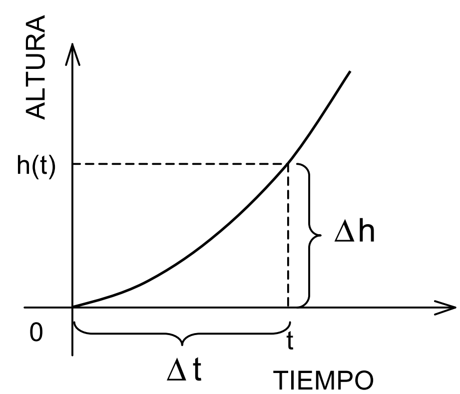
Los incrementos de tiempo y de altura relativos a los valores iniciales $t = 0$ y $h = 0$ son respectivamente:

$$\Delta t = t - 0 = t$$

$$\Delta h = h(t) - 0 = h(t)$$

entonces, la rapidez media de crecimiento (acumulativo) es:

$$\bar{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t) - 0}{t - 0}$$



Leyendo algunos puntos del primer gráfico y calculando las respectivas *rapideces de crecimiento* obtenemos los siguientes valores:

t [d]	**h [mm]**	$\bar{v}_h$ **[mm/d]**
5	18	3,6
9	56	6,2
15	141	9,4
19	159	8,4

Mirando estos valores, nos damos cuenta de que el crecimiento **no es uniforme**: durante algunos intervalos de tiempo la plántula crece más rápidamente que durante otros.

- Esto nos conduce a interrogarnos sobre las *rapideces medias de crecimiento* para diferentes intervalos de tiempo, no necesariamente referidas al instante inicial $t = 0[d]$. Por ejemplo:

Entre el quinto y el sexto día, $\Delta t = (6 - 5)[d] = 1[d]$, se produce un incremento de altura igual a $\Delta h = (22 - 18)[mm] = 4[mm]$ y la *rapidez media de crecimiento* resulta

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4[mm]}{1[d]} = 4[mm/d]$$

Repitiendo la secuencia de operaciones para lo ocurrido entre el noveno y el décimo día tenemos:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{(75-56)[mm]}{(10-9)[d]} = \frac{19[mm]}{1[d]} = 19[mm/d]$$

Concluimos que en el segundo ejemplo la rapidez de crecimiento es mayor.

- Elijamos, con el objeto de generalizar la discusión inmediatamente anterior, una secuencia de valores crecientes de tiempo:

$$t_1 \ , \ t_2 \ \ldots. \ , \ t_i \ , \ \ldots. \ t_m \ , \ \ldots.$$

a la que corresponde una secuencia de valores respectivos de altura de la plántula:

$$h_1 \ , \ h_2 \ , \ \ldots. \ , \ h_i \ , \ \ldots. \ h_m \ , \ \ldots.$$

Entonces, durante el intervalo de tiempo:

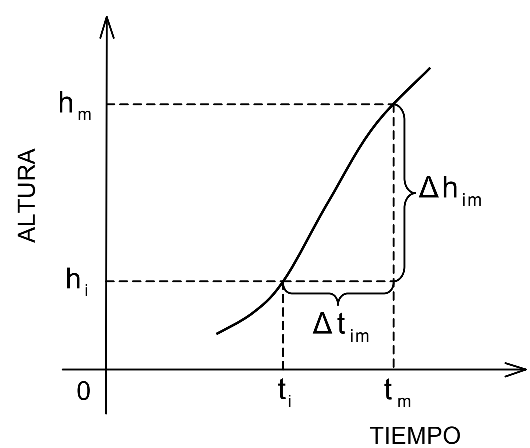
$$\Delta t_{im} = t_m - t_i$$

se ha producido un cambio de altura:

$$\Delta h_{im} = h_m - h_i$$

y la rapidez media de crecimiento, para tal intervalo de tiempo, queda determinada por el cuociente:

$$\overline{v}_{im} = \frac{\Delta h_{im}}{\Delta t_{im}}$$



- En particular, utilizando las mediciones diarias representadas por **puntos** en el gráfico “crecimiento de una plántula”, confeccionamos la tabla siguiente de valores:

t [d]	Δ t [d]	h [mm]	Δ h [mm]	$\frac{\Delta h}{\Delta t}\left[\frac{mm}{d}\right]$
0		0		
	4		12	3
4		12		
	1		6	6
5		18		
	1		4	4
6		22		
	1		10	10
7		32		
	1		9	9
8		41		
	1		16	16
9		57		
	1		19	19
10		76		
	1		16	16
11		92		
	1		14	14
12		106		
	1		12	12
13		118		
	1		14	14
14		132		
	1		9	9
15		141		
	1		9	9
16		150		
	1		4	4
17		154		
	1		3	3
18		157		
	1		2	2
19		159		
	1		0	0
20		159		

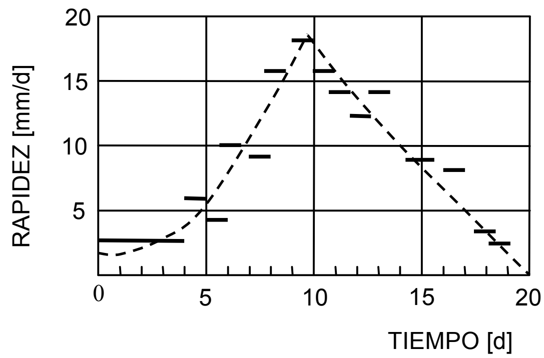
Advertimos que cuando el intervalo de tiempo tiene el valor **uno** en cierta unidad de medición (en este caso $\Delta t = 1[d]$), el valor numérico del *cambio de altura* dado en una unidad de medición conveniente (en este caso $\Delta h\,[mm]$) y el valor numérico de la *rapidez de crecimiento* expresada en términos de las mismas unidades usadas para h y t, son iguales. Por supuesto, *cambio de altura* y *rapidez de cambio de altura* son conceptualmente diferentes y el que tengan igual valor numérico es algo circunstancial; al efectuar cambios de unidades, por ejemplo:

$$\bar{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{15\left[mm\right]}{1\left[d\right]} = 15\left[mm/d\right] \mathrel{\hat{=}} \frac{15}{24}\left[mm/h\right] \simeq 0{,}63\left[mm/h\right]$$

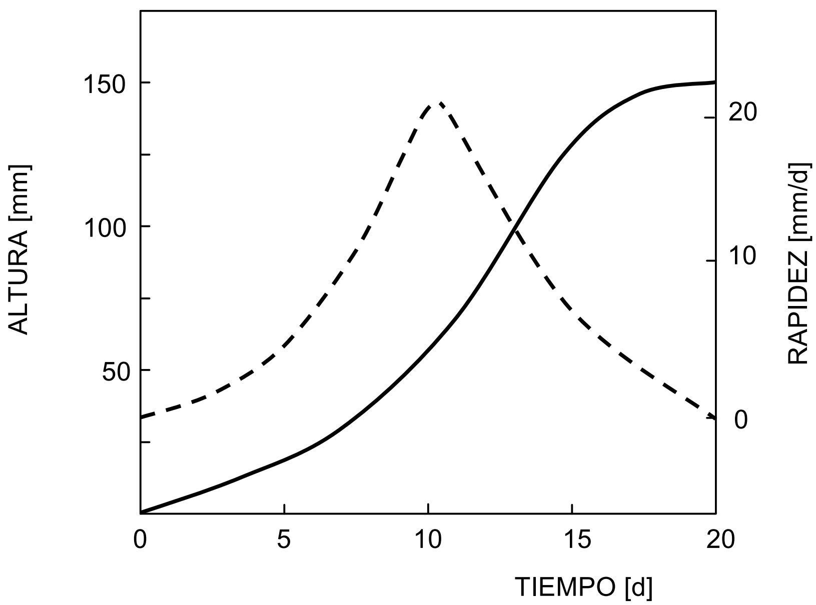
vemos que los valores numéricos de Δh y $\bar{v}_h$ son diferentes.

Los valores de rapidez **media** de crecimiento $\overline{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, determinados en la tabla previa, están representados en la figura adjunta por trazos horizontales. Cada trazo abarca el intervalo de tiempo usado para calcular la rapidez media correspondiente.

Nuevamente notamos que la rapidez de crecimiento no es constante en el tiempo.



En el gráfico que sigue, se muestra una representación conjunta de la altura de la plántula y de su rapidez media de crecimiento, ambas en función del tiempo.



En el gráfico anterior podemos darnos cuenta que la **inclinación** o **pendiente** de la curva $h(t)$, para la altura, proporciona una imagen visual de la magnitud de la *rapidez de crecimiento*.

Le recomendamos que usted reconstruya la tabla numérica previa leyendo valores directamente del gráfico inicial. Después elija un cierto rango de dos o tres días de duración y calcule *rapideces medias de crecimiento* para intervalos de tiempo cada vez menores, por ejemplo cada medio día, cada cuarto de día, etc. Compare y comente.

A través del presente estudio sobre la forma de crecimiento de una plántula hemos introducido la noción de rapidez media de crecimiento; en forma análoga definiremos la rapidez media de cambio para otras cantidades físicas.

Rapidez media de cambio

La producción de un determinado cambio en cierta magnitud física puede requerir tiempos diferentes; mientras menor (mayor) sea el tiempo requerido para un mismo cambio, decimos que éste se produce más rápidamente (lentamente). Aunque tengamos una idea intuitiva de que los cambios pueden ser lentos o rápidos, esto no basta para la Física. Debemos dar un carácter cuantitativo a la noción de rapidez.

La sola indicación del valor del cambio ΔF de la cantidad física F no da ninguna información sobre el intervalo de tiempo Δt empleado para que tal cambio haya ocurrido. Relacionamos ambos conceptos definiendo **rapidez media de cambio** de la cantidad física F por el cuociente:

$$\text{rapidez media de cambio de } F = \frac{\text{cambio de la cantidad física } F}{\text{intervalo de tiempo requerido para tal cambio}}$$

lo que escrito simbólicamente es:

$$\overline{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

Si denotamos la "dimensión de la cantidad física F" por

$$\dim(F) = \mathcal{F}$$

resulta:

$$\dim(\overline{v}_F) = \frac{\dim(F)}{\dim(\text{tiempo})} = \frac{\mathcal{F}}{\tau} = \mathcal{F} \cdot \tau^{-1}$$

Análogamente, las unidades de medición para la rapidez de cambio $\overline{v}_F$ se producen calculando el cuociente entre una unidad elegida para la cantidad F y una cantidad elegida para expresar el intervalo de tiempo. Entonces:

$$\overline{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{a\left[\text{unidad de } F\right]}{b\left[\text{unidad de } t\right]} = \frac{a}{b}\left[\frac{\text{unidad de } F}{\text{unidad de } t}\right]$$

Ejercicios

3-6) Estime la rapidez media con la cual se quema un palo de fósforo y con la que se consume una vela. Exprese los resultados en [cm/min].

3-7) Estime la rapidez media de crecimiento de su pelo y de sus uñas. Exprese los resultados en [m/s].

3-8) Determine su *rapidez media de lectura* al leer por ejemplo, una novela. Exprese el resultado en [página/h].

3-9) Deje caer en un pedazo de papel unas gotas de aceite. Determine la *rapidez de expansión* de la mancha; exprese el resultado en unidades convenientes. Comente.

3-10) Infle un globo. Idee métodos para medir la rapidez con la cual lo infla; exprese el resultado en unidades convenientes. Comente.

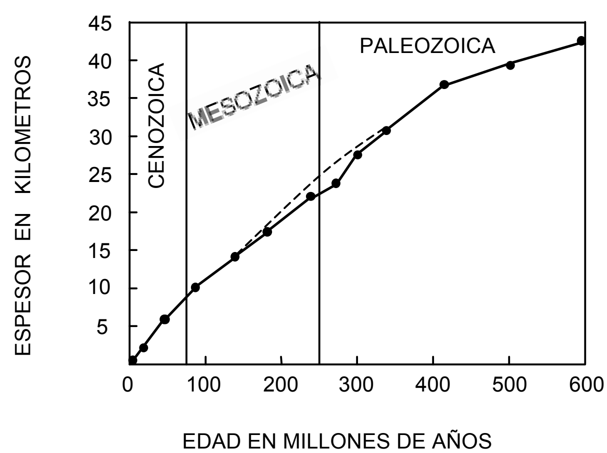
3-11) Elija un recipiente (botella, tarro, olla, ...) y mida su volumen. Mida el tiempo que necesita para llenar el recipiente con agua corriente, abriendo bien la llave de agua. Determine la *rapidez de llenado*; exprese el resultado en [ℓ/min]. Calcule cuánto demora en llenarse un estanque cilíndrico de 8 [dm] de diámetro y 60[cm] de altura usando la misma llave de agua, igualmente abierta.

3-12) Suponga que el 28 de diciembre del año pasado le regalaron una bolsa con 800 calugas y que al día siguiente abre la bolsa y saca **una** caluga y luego, cada dos días saca el doble número de calugas que la vez anterior, hasta que ellas se terminen. Determine una expresión matemática y haga un gráfico que indiquen el número de calugas que van quedando en la bolsa en función del tiempo.

3-13) En el gráfico adjunto se muestra el espesor que hipotéticamente tendría una capa sedimentaria en función de su edad.

Usando este gráfico, calcule en qué Era, Cenozoica, Mesozoica o Paleozoica, la "rapidez media de sedimentación" fue mayor.

Por la tendencia indicada en el gráfico ¿cuál sería el espesor de una capa sedimentaria de 750 millones de años de edad?



3-14) Considere el experimento sobre la variación de la temperatura del agua en función del tiempo previamente presentado (pág. 88). Calcule y represente la "rapidez media de cambio de temperatura", esto es:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}\ \left[{}^{\circ}C/\min\right], \quad \text{en función del tiempo.}$$

3-15) Usando la técnica de cultivo hidropónico (las semillas se depositan sobre toalla de papel humedecida con líquidos nutritivos) obtuvimos una matita de trigo y medimos el crecimiento de su tallo. Denotando por **L** el largo del tallo y por **t** el tiempo transcurrido desde la colocación de la semilla en el papel secante, los resultados fueron:

t [h] :	72	120	168	216	264	312
L [cm] :	0,2	0,7	1,9	4,2	6,7	9,4

Represente el largo del tallo en función del tiempo. Calcule y represente la rapidez media de crecimiento: $\frac{\Delta L}{\Delta t}\left[cm/h\right]$.

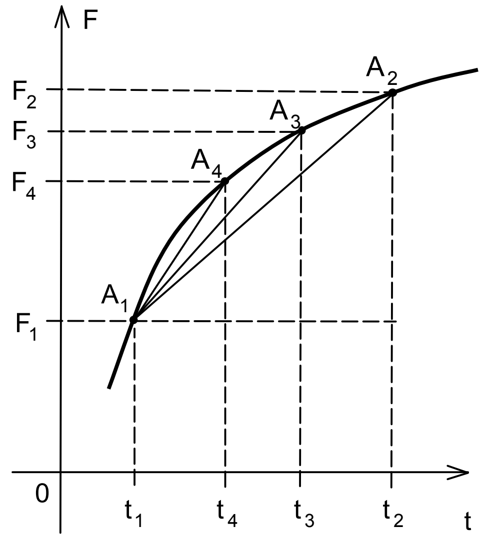
3-16) Los datos sobre el número de habitantes de una pequeña ciudad están indicados en la tabla adjunta. Calcule los porcentajes de aumento de población durante intervalos de tiempo sucesivos. Haga un gráfico con estos valores. Compare con los valores para la población de Chile y comente. Calcule la "rapidez media de cambio de población" para cada uno de los intervalos de tiempo ya considerados. Identifique en el gráfico el año en que no hay variación en la rapidez de cambio de la población y el año en que la rapidez de cambio comienza a disminuir.

Año	**Población**
1860	41.000
1870	46.000
1880	53.000
1890	61.000
1900	66.000
1910	70.000
1920	74.000
1930	77.500
1940	80.000
1950	81.500
1960	82.000

3-17) Considere los datos de perforación de cierto pozo petrolífero. Los primeros 250[m] se perforaron con una rapidez media de 10[m/h]. A esa profundidad se encontró roca dura, debido a lo cual la rapidez media de perforación decreció a 2,2[m/h] para los siguientes 400[m]. Calcule el tiempo empleado y la "rapidez media de perforación" para la apertura completa del pozo.

Rapidez instantánea de cambio

Suponga que una cantidad física varía de acuerdo a la curva del gráfico adjunto.



Piense usted que esa cantidad física es la temperatura registrada por un termógrafo. La rapidez media de la cantidad física F entre los instantes (t_1, t_2), (t_1, t_3) y (t_1, t_4) es:

$$\bar{v}_{1-2} = \frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-2}}{\Delta t_{1-2}}$$

$$\bar{v}_{1-3} = \frac{F_3 - F_1}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-3}}{\Delta t_{1-3}}$$

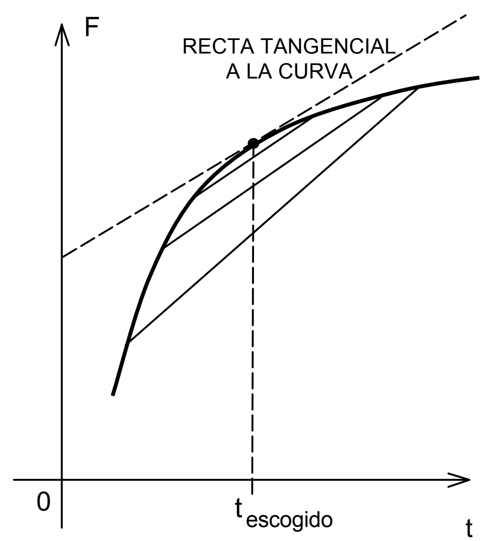
$$\bar{v}_{1-4} = \frac{F_4 - F_1}{t_4 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-4}}{\Delta t_{1-4}}$$

Vemos que las rapideces medias de los diversos intervalos de tiempo se corresponden con las pendientes de las rectas (A_1, A_2), (A_1, A_3) y (A_1, A_4).

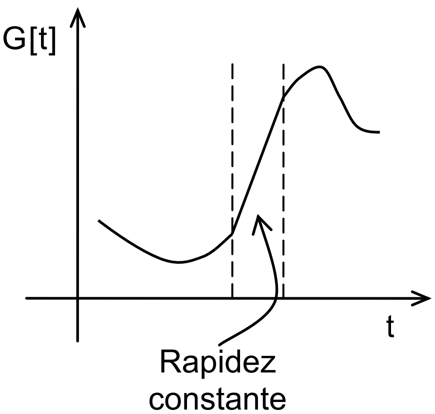
Escojamos un tiempo determinado o **instante**. Tomemos intervalos de tiempo cada vez más pequeños que "encierren" al instante escogido. Si resulta que el valor del cuociente $\Delta F/\Delta t$ se va "estabilizando", hablamos de "la rapidez en ese **instante**" o de **rapidez instantánea** de cambio.

El mejor valor de la rapidez de cambio en el instante $t_{escogido}$ corresponde a la pendiente de la curva en ese instante. Esta puede obtenerse aproximadamente dibujando una recta tangencial a la curva en el punto correspondiente, y calculando su pendiente.

$$v_F = \left(\bar{v}_F, \text{para } \Delta t \text{ pequeño}\right) = \begin{pmatrix}\text{pendiente} \\ \text{de la curva}\end{pmatrix}$$



Considere la función G(t) representada en el gráfico adjunto. Si el cuociente $\Delta G / \Delta t$ tiene el mismo valor para cada intervalo de tiempo dentro de cierto rango o, lo que es equivalente, si la rapidez instantánea es igual para cada "instante de este rango", hablamos de rapidez constante de cambio. En este caso decimos que el cambio de la cantidad física es uniforme con el tiempo.



En resumen, distinguimos tres conceptos:

rapidez media **rapidez instantánea** **rapidez constante**

Aceleración media de cambio

Al observar los gráficos recién estudiados, vemos que la rapidez instantánea de cambio suele variar con el tiempo. En la Naturaleza tenemos claros ejemplos. El crecimiento de los niños tiene notables cambios de rapidez de acuerdo con la edad. Las plantas disminuyen sus cambios en invierno y son admirables en primavera. Además, cada vez que nos trasladamos en bus por la ciudad, su rapidez es extraordinariamente variable. El estudio de las variaciones de las rapideces de cambio nos induce a definir la aceleración de cambio, como:

Para una cantidad física G definimos:

$$\text{aceleración media de cambio de G} = \frac{\text{cambio de la rapidez instantánea de cambio de G}}{\text{intervalo de tiempo requerido para tal cambio}}$$

$$\bar{a}_G = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$$

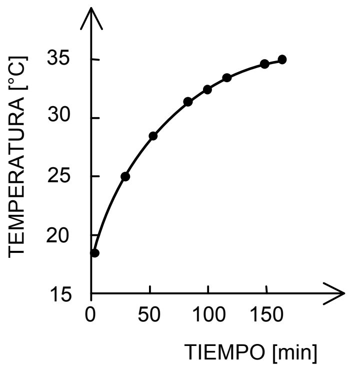
$$\dim(\bar{a}_G) = \frac{\dim(v_G)}{\dim(\Delta t)} = \frac{\dim(G)/\dim(\Delta t)}{\dim(\Delta t)}$$

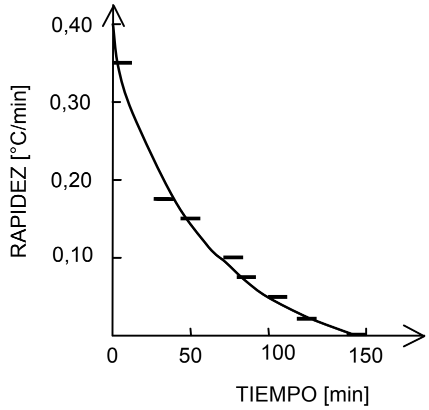
$$\dim\left(\bar{a}_G\right) = \frac{\dim(G)/\tau}{\tau}$$

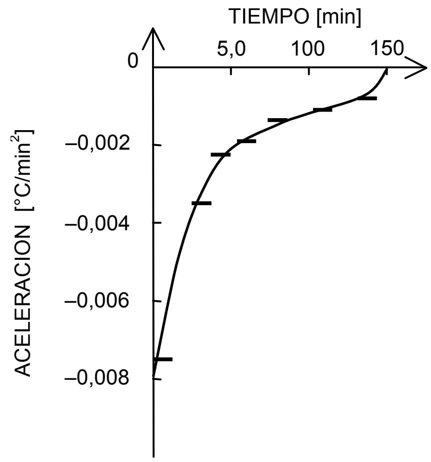
$$\dim(\bar{a}_G) = \frac{\dim(G)}{\tau^2}$$

- Refirámonos nuevamente al experimento sobre la variación de la temperatura T[ºC] que experimenta el agua contenida en un vaso en función del tiempo (página 88). Al desarrollar el ejercicio 3-14 usted ha calculado y representado la "rapidez media de cambio de temperatura" $\bar{v} = \Delta T / \Delta t$ [ºC/min]. Calcule usted ahora, interpolando cuando sea necesario, la "aceleración media de cambio de temperatura" $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ [ºC/min^2].

Para la parte del ensayo correspondiente al calentamiento del agua, representamos la temperatura, la rapidez y la aceleración de cambio de temperatura en función del tiempo:







Ejercicios

3-18) Un globo, supuesto esférico, es inflado a partir de un diámetro de 10[cm]. Se controla al diámetro del globo cada 5[min]. Luego el globo se desinfla, continuándose con el control.

- Construya una tabla con la rapidez media de cambio del área del globo, en función del tiempo en intervalos de 10[min].
- Grafique la rapidez media de cambio del volumen en función del tiempo a intervalos de 5[min].
- Determine y represente, en función del tiempo, las aceleraciones medias de cambio de área y de cambio de volumen.

hora	**d[cm]**
12:00	10
12:05	12
12:10	13
12:15	15
12:20	17
12:25	21
12:30	24
12:35	31
12:40	33
12:45	31
12:50	23
12:55	20
13:00	18
13:05	17
13:10	14
13:15	12
13:20	10
13:25	10
13:30	10

Vocabulario: proporcionalidad

Si las cantidades F y G están relacionadas en tal forma que:

$$\text{al} \left\{ \begin{matrix} \text{duplicar} \\ \text{triplicar} \\ \ldots\ldots \\ \text{multiplicar} \\ \text{por } \beta \end{matrix} \right\} \text{ el valor de G se } \left\{ \begin{matrix} \text{duplica} \\ \text{triplica} \\ \ldots\ldots \\ \text{multiplica} \\ \text{por } \beta \end{matrix} \right\} \text{ el valor de F ,}$$

decimos que " **F es proporcional** a G ".

Esto lo anotamos $F \propto G$, con el significado $F = \lambda \cdot G$

y damos a λ el nombre de **constante de proporcionalidad**.

En este caso también decimos que " F es una **función lineal** de G"

y escribimos: $F(G) = \lambda \cdot G$

Dando a G los valores b, 2b y 3b sucesivamente, obtenemos:

$F(b) = \lambda \cdot b = a$

$F(2b) = \lambda \cdot 2b = 2a$

$F(3b) = \lambda \cdot 3b = 3a$

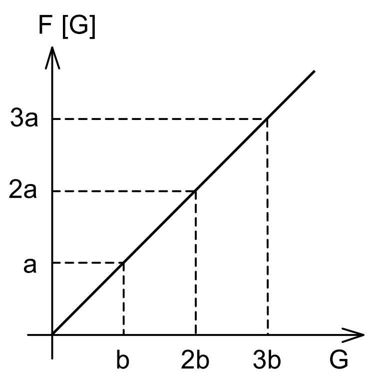
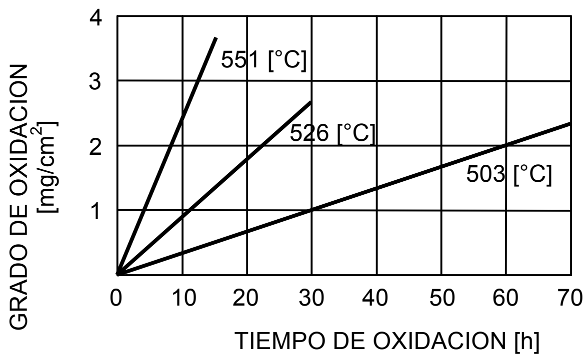


Ilustración. La mayoría de los metales al estar en contacto con el aire reaccionan con él y se van produciendo óxidos metálicos. Excepciones son los llamados "metales nobles" como el oro y el platino. Podría concluirse que tal efecto impediría el uso de metales en la atmósfera terrestre; sin embargo, tal afirmación no tiene mayor valor por no considerar la **rapidez** con que se efectúa la reacción y es precisamente el hecho que en algunos casos tal tipo de reacción sea "lenta", o que se tomen precauciones para que así lo sea lo que nos permite usar metales para construcciones y artefactos proyectados para larga duración.

Bajo ciertas condiciones el "grado de oxidación" (aumento de masa por unidad de superficie) de algunos metales es proporcional al tiempo: G.O. = A · t, donde A es un coeficiente que depende de la temperatura y t es el tiempo que el metal está expuesto al oxígeno.

Algunos datos obtenidos en un proceso de oxidación de magnesio puro en oxígeno se representan en el gráfico adjunto.



Compruebe usted que la “rapidez de oxidación” aumenta al aumentar la temperatura a la que se efectúa la reacción.

Cálculo algebraico de “rapidez media de cambio”

Consideremos una cantidad física $F(t)$ descrita por una expresión matemática dada.

Recuerde, por ejemplo, que si una muestra de isótopos radiactivos tiene N núcleos en el instante que decimos llamar $t = 0$, el número de núcleos que no se han desintegrado (en término medio) en un instante cualquiera t está expresado por:

$$n(t) = N \cdot 2^{-t/T}$$

donde T es la semivida del correspondiente tipo de isótopos. Note que debe usar la misma “unidad de tiempo”, tanto en t como en T.

Designamos por $F(t)$ el valor de la cantidad F cuando el tiempo tiene el valor t y por $F(t + \Delta t)$ el valor correspondiente al tiempo $t + \Delta t$.

Entonces, el **cambio** de la cantidad física F durante el transcurso de tiempo desde el instante t al $t + \Delta t$ (intervalo de tiempo Δt), lo anotamos por:

$$\Delta F = F(t+\Delta t) - F(t)$$

con lo cual la “**rapidez media** de cambio de F” durante tal intervalo de tiempo resulta :

$$\bar{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad ,$$

expresión algebraica que debe ser desarrollada para cada situación que deseemos estudiar.

- Examinemos el caso particular en que una cantidad física F varía **proporcionalmente** con el tiempo, esto es:

$$F(t) = \lambda \cdot t$$

Le advertimos que esta expresión tiene significado físico sólo si:

$$\dim(F) = \dim(\lambda) \cdot \dim(t) = \dim(\lambda) \cdot \tau = \mathcal{F}$$

implicando que la "dimensión de λ" debe ser: $\dim(\lambda) = \mathcal{F} \cdot \tau^{-1}$.

Además, para cálculos numéricos deben usarse las unidades de medición correspondientes, lo cual requiere:

$$\lambda = b \left[\frac{\text{unidad usada para F}}{\text{unidad usada para t}} \right]$$

Al considerar el transcurso del tiempo de un valor t a un valor $t + \Delta t$ obtenemos:

$$F(t + \Delta t) = \lambda \cdot (t + \Delta t) = \lambda \cdot t + \lambda \cdot \Delta t$$

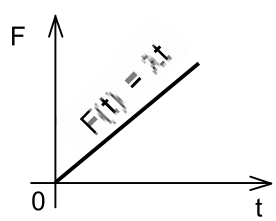
por lo tanto:

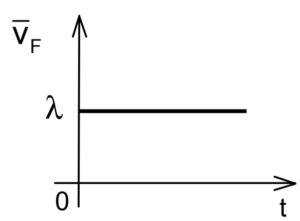
$$\Delta F = F(t + \Delta t) - F(t) = (\lambda \cdot t + \lambda \cdot \Delta t) - \lambda t = \lambda \cdot \Delta t$$

lo que da para la "rapidez media de cambio" la expresión:

$$\bar{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\Delta t} = \lambda$$

Observe que la rapidez media tiene un valor **constante**, el que es independiente del instante escogido y del intervalo de tiempo transcurrido a partir de ese instante. Esto significa que mientras el valor de una cantidad física sea **proporcional** al tiempo, el valor de la rapidez media y el valor de la rapidez instantánea son iguales y constantes.

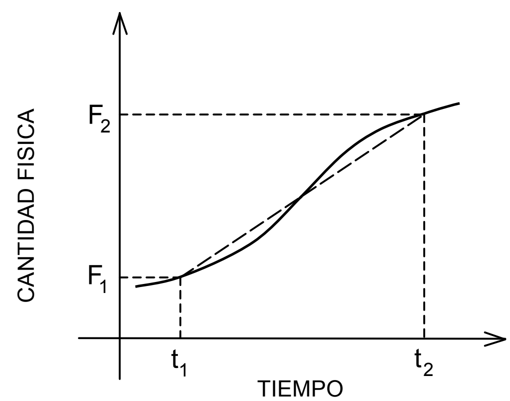




Comentario

En la mayoría de los casos las cantidades que se presentan en la naturaleza no cambian uniformemente con el tiempo, esto es, su rapidez de cambio no es constante.

La curva $F(t)$ del gráfico adjunto representa el cambio de cierta cantidad física F en función del tiempo; el trazo recto segmentado representa un cambio “equivalente” con rapidez constante durante el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2.



- Encontremos una expresión para la rapidez media de cambio $\bar{v}_n$ del número de núcleos en una muestra radioactiva durante el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + \Delta t$.

Como hemos visto en una muestra radioactiva de semivida T, el número de núcleos que queda sin decaer al cabo de un tiempo t está dado por la expresión:

$$n(t) = N \cdot 2^{-t/T}$$

siendo N el número inicial de núcleos y T la semivida del isótopo.

En un instante posterior $t + \Delta t$, el número de núcleos sin decaer que queda en la muestra puede expresarse como:

$$n(t + \Delta t) = N \cdot 2^{-(t+\Delta t)/T}$$

por lo tanto, la variación en el número de núcleos en el intervalo Δt es igual a:

$$\Delta n = N \cdot 2^{-(t+\Delta t)/T} - N \cdot 2^{-t/T}$$

la cual puede reducirse por factorización a :

$$\Delta n = N \cdot 2^{-t/T} \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)$$

Compruebe usted que la expresión entre paréntesis es negativa, por lo tanto Δn es negativo, como debe ser, ya que el número de núcleos radioactivos está disminuyendo.

Finalmente, la rapidez media de cambio $\bar{v}_n$ queda expresada como:

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{N \cdot 2^{-t/T} \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)}{\Delta t} .$$

Observe que el factor $N \cdot 2^{-t/T}$ es simplemente el número de núcleos en el instante *t*, de modo que podemos escribir:

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{n(t) \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)}{\Delta t}$$

es decir, la rapidez media de cambio disminuye proporcionalmente al número de núcleos en la muestra: mientras menos núcleos quedan, más lentamente disminuye el número.

Finalmente observe que, mientras que n es una función sólo del tiempo t, la rapidez media es función del tiempo t y del intervalo de tiempo Δt:

$$\overline{v}_n = f(t, \Delta t)$$

Ejercicios

3-19) Una cantidad física *P* cambia con el tiempo *t* según la expresión

$$P(t) = A \cdot \left(B + C\,t^3\right)$$

donde $\dim(P) = \varepsilon$, $\dim(t) = \tau$ y $\dim(B) = 1$.

Determine dim(A) y dim(C) para que tal expresión sea dimensionalmente consistente.

3-20) Cuando cierto estanque está lleno, la altura del agua es 49[dm] . Debido al consumo, la altura H del agua cambia con el tiempo según la relación:

$$H(t) = (-\,9t + 49)\ [\text{dm}]$$

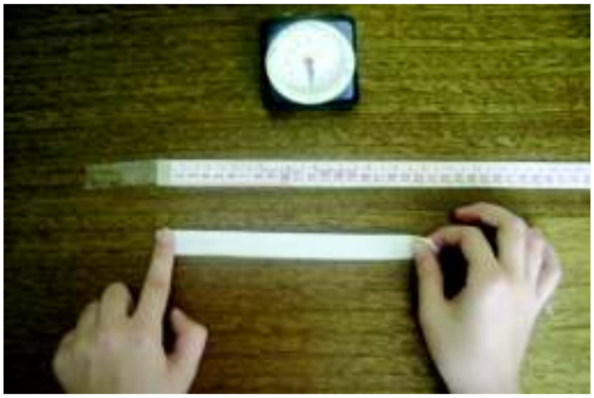
donde t es el tiempo, en días, medido desde que comienza a usarse el estanque.

Calcule la “rapidez de cambio de la altura”.

- Un día hicimos el siguiente “experimento”:

Cortamos un trozo de un elástico corriente, marcamos un punto cerca de cada uno de los extremos, colocamos el elástico sobre una regla y medimos el largo del pedazo de elástico entre las marcas ya hechas; obtuvimos:

$$L_0 = 51[\text{mm}]$$



Dejando un extremo fijo y tirando del otro extremo produjimos un alargamiento del elástico.

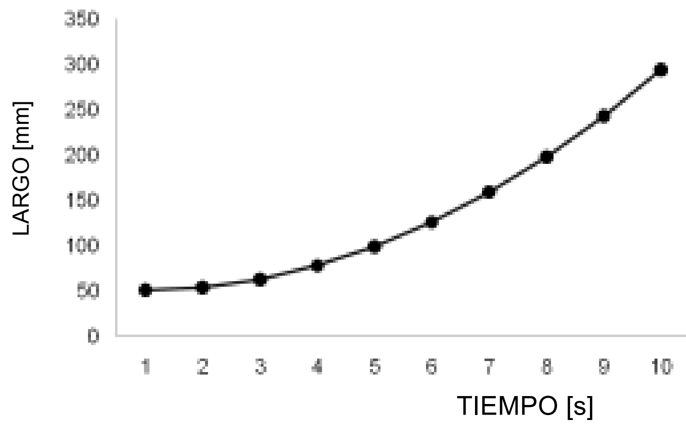
Después de repetidos ensayos estiramos el elástico en forma tal que nos atrevemos a proponer como **modelo matemático** para representar la longitud del elástico en función del tiempo:

$$L(t) = L_0 + \beta \cdot t^2$$

donde hemos elegido $t = 0[s]$ el instante en que comenzamos a estirar el elástico y, según nuestras mediciones, $\beta = 3\left[mm/s^2\right]$.

Con el objeto de visualizar la "variación del largo del elástico" en el transcurso del tiempo, **calculamos** éste, según la fórmula dada, para diversos instantes:

t	**L(t)**
[s]	**[mm]**
0	51
1	54
2	63
3	78
4	99
5	126
6	159
7	198
8	243
9	294



Advertencia: Cuando use en Física una relación matemática, debe pensar en características físicas que puedan determinar un **rango de validez** para la aplicación de dicha relación. En el presente caso, si se usara la fórmula para valores "grandes" de t, por ejemplo $t = 40[s]$, la fórmula daría $L(40) \simeq 4851[mm]$; casi 5 metros, sin embargo, ¡ya antes se habría cortado el elástico y la fórmula matemática no lo puede saber!

Retornando a nuestro ejemplo, calculemos la "rapidez media de alargamiento" para intervalos de tiempo Δt en forma "algebraica":

$$L(t) = L_0 + \beta \cdot t^2$$

$$L(t + \Delta t) = L_0 + \beta \cdot (t + \Delta t)^2 = L_0 + \beta \cdot \left(t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right)$$

$$= \left(L_0 + \beta t^2\right) + 2\beta t \cdot \Delta t + \beta \cdot (\Delta t)^2$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(t+\Delta t) - L(t) \\ &= \left(L_0 + \beta t^2\right) + 2\beta t\cdot \Delta t + \beta\cdot(\Delta t)^2 - \left(L_0 + \beta t^2\right) \\ &= 2\beta t \cdot \Delta t + \beta\cdot(\Delta t)^2 = \beta\cdot(2t+\Delta t)\cdot\Delta t \end{aligned}$$

y entonces, la "rapidez media de alargamiento" correspondiente al intervalo de tiempo Δt entre los tiempos t y $t+\Delta t$ es:

$$\bar{v}_a = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\beta\cdot(2t+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = \beta\cdot(2t+\Delta t)$$

Veamos algunas aplicaciones numéricas de esta expresión, usando el valor $\beta \simeq 3\left[mm/s^2\right]$:

t [s]	Δt [s]	$2t+\Delta t$ [s]	$\beta\cdot(2t+\Delta t)$ [mm/s]	$2\beta t$ [mm/s]
2	0,3	4,3	12,9	12
2	0,1	4,1	12,3	12
2	0,06	4,06	12,18	12
2	0,02	4,02	12,06	12
6	0,3	12,3	36,9	36
6	0,1	12,1	36,3	36
6	0,06	12,06	36,18	36
6	0,02	12,02	36,06	36

Observe que si los intervalos de tiempo Δt son **pequeños** en comparación con los valores de t, su incidencia en el cálculo de $\bar{v}_a$ puede ser **despreciada**; esto es, podemos **aproximar**:

$$\bar{v}_a = \beta\cdot(2t+\Delta t) \simeq \beta\cdot 2t$$

resultando:

$$\bar{v}_a \simeq 2\beta t$$

y sabiendo que $v_a \simeq \bar{v}_a$ para intervalos muy pequeños, entonces la rapidez instantánea es $v_a = 2\beta t$

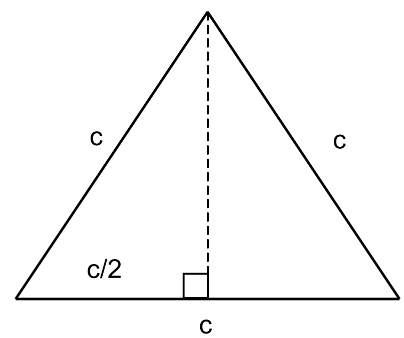
Dejamos a usted la tarea de efectuar cálculos numéricos y de representar gráficamente la rapidez media de alargamiento, y sus valores aproximados, en función del tiempo.

- Piense en un trozo de cartón recortado en la forma de un triángulo equilátero que está colocado sobre una superficie plana. Suponga que alrededor del triángulo va enrollando un hilo delgado en tal forma que cada lado del triángulo aumenta con rapidez media constante K[mm/s].

Calculemos la "rapidez media de incremento de área":

Llamemos *c* a cada lado del triángulo; su área está determinada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$



Calculamos la altura *h* "por Pitágoras":

$$c^2 = (c/2)^2 + h^2$$

lo que da: $$h = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

y reemplazándola obtenemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \gamma c^2 \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Consideramos el área del triángulo como función de su lado:

$$A(c) = \gamma c^2 \quad ,$$

entonces, cuando el lado aumenta en Δc obtenemos un nuevo valor para el área:

$$A(c + \Delta c) = \gamma \cdot (c + \Delta c)^2$$

y el incremento correspondiente es:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(c + \Delta c) - A(c) = \gamma \cdot (c + \Delta c)^2 - \gamma c^2 \\ &= \gamma \cdot (2c + \Delta c) \cdot \Delta c \end{aligned}$$

Ya que el hilo es delgado, los incrementos sucesivos del lado son "pequeños" respecto al valor del lado: $\Delta c << c$, lo que permite la aproximación $2c + \Delta c \simeq 2c$ dando:

$$\Delta A \simeq \gamma \cdot 2c \cdot \Delta c$$

y con ella la "rapidez media de incremento de área" resulta:

$$\bar{v}_A = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\gamma \cdot 2c \cdot \Delta c}{\Delta t} = \gamma \cdot 2c \cdot \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

Pero, $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ es la "rapidez media de aumento del lado": $\bar{v}_c = \frac{\Delta c}{\Delta t} = K$, con lo cual:

$$\bar{v}_A = 2\gamma \cdot c \cdot K = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \cdot K$$

Usando las unidades: [mm] para c y [mm/s] para K , resulta $\bar{v}_A$ expresada en [mm^2/s] .

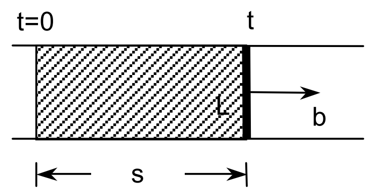
Ejercicios

3-21) El perímetro de una circunferencia varía según la ley $P(t) = 6\pi t$, con P en [cm] y t en [s]. Calcule la rapidez media de cambio del radio.

3-22) Suponga que en un triángulo equilátero la altura h varía con el tiempo de acuerdo a $h(t) = 3{,}00 - 0{,}04\,t$, con h en [cm] y t en [s]. Calcule la rapidez de variación del perímetro del triángulo equilátero.

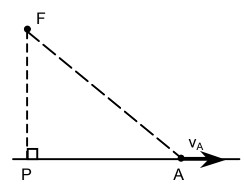
3-23) Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos varían en el tiempo según: $a = a(t) = 0{,}9\,t\,[\text{cm}]$ y $b = b(t) = 1{,}2\,t\,[\text{cm}]$ con t expresado en [s]. Obtenga la rapidez media de variación de la hipotenusa del triángulo.

3-24) Una barra de largo $L[\text{cm}]$ se mueve con rapidez constante $b[\text{cm/s}]$ a la derecha. En un instante t la barra se encuentra a la distancia $s[\text{cm}]$ de una posición de referencia, en $t = 0$. Determine la "rapidez de cambio del área barrida por la barra".



3-25) Suponga que el radio de una esfera aumenta con el tiempo de acuerdo con la función $R(t) = R_0 + at$ con $a > 0$. Calcule la "rapidez media de cambio de la superficie" ; considere también el caso de "pequeños" intervalos de tiempo.

3-26) El punto F está fijo y el punto A describe una trayectoria rectilínea con rapidez constante v_A. Determine la "rapidez media de cambio de área del triángulo FPA".



3-27) Cierta variable física η varía con el tiempo según la relación $\eta(t) = A / t$ donde A es una constante. Si η se mide en $[\Omega]$, determine unidades apropiadas para A. Si $\eta = 5[\Omega]$ cuando $t = 15[\text{s}]$ calcule el valor de A. Represente gráficamente $\eta(t)$ en función de t. Determine algebraicamente la rapidez media de cambio $\eta(t)$ para pequeños intervalos de tiempo. Represente gráficamente tal rapidez de cambio para intervalos pequeños en función del tiempo.

3-28) Un hombre de altura h camina en línea recta con rapidez constante en la vecindad de una lámpara puntiforme, la que está colocada a altura H sobre la acera. Encuentre una expresión algebraica para la "rapidez media de cambio del largo de la sombra del hombre", entre los instantes t y $t + \Delta t$.