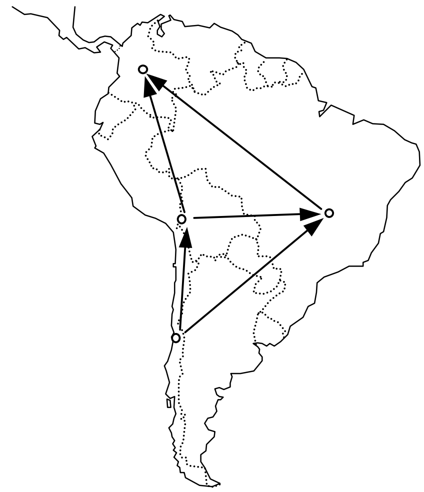
CAPÍTULO V

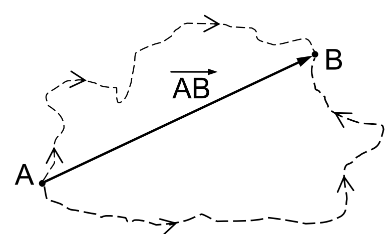
DESPLAZAMIENTO VECTORES



Hemos indicado que un cuerpo se mueve cuando cambia de posición en el espacio.

Es muy importante en Física saber medir ese cambio de posición, introduciendo el concepto de **desplazamiento**. Este concepto debe contener e indicar no sólo la magnitud del cambio de posición, sino además, la dirección en que se ha efectuado el cambio.

Si un cuerpo se ha movido de la posición A a la posición B, no importando qué trayectoria haya seguido, definimos como desplazamiento de este cuerpo al **trazo dirigido** que va desde la posición A a la final B.

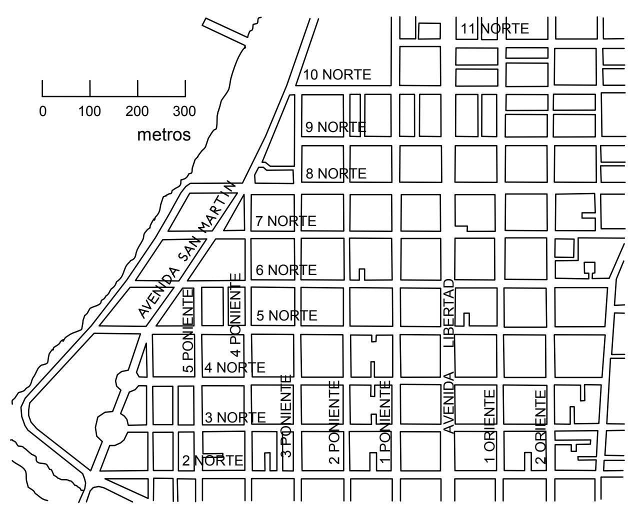


El desplazamiento de A a B, que podemos simbolizar por $\overrightarrow{AB}$, es uno de los ejemplos del ente matemático que indica magnitud y dirección, llamado **vector**.

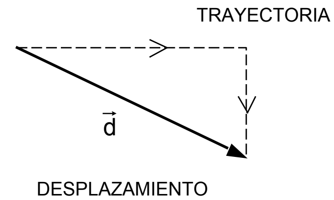
- Supongamos que un turista camina a lo largo de 2 Norte desde 4 Poniente hasta 2 Oriente. El desplazamiento correspondiente lo representamos por el vector:

cuya magnitud, de acuerdo a la escala del plano, es aproximadamente 650[m].

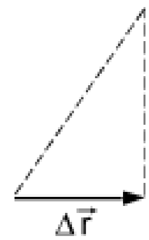
- Otra persona parte de la intersección entre 3 Poniente y 4 Norte, anda por 4 Norte hasta 1 Oriente, luego dobla y "baja" por 1 Oriente hasta la 2 Norte.



El desplazamiento de esta persona, de aproximadamente 470[m] de magnitud, está indicado por el vector $\vec{d}$:



- Desde la esquina de 5 Norte con San Martín, un peatón se dirige por San Martín hasta 8 Norte y en seguida regresa por 4 Poniente hasta 5 Norte. Su desplazamiento corresponde al vector $\Delta\vec{r}$ de la figura. La magnitud de este vector es aproximadamente $200[\text{m}]$.



Ejemplo

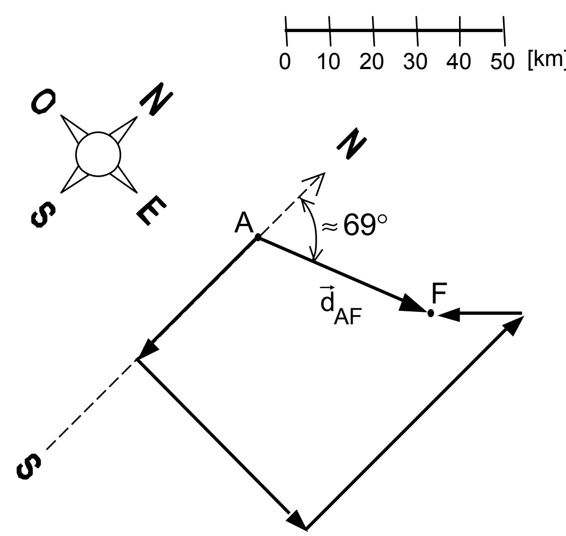
Representemos, a escala, la siguiente trayectoria de un móvil que partiendo de un punto **A** viaja: $40[\text{km}]$ al S, luego $55[\text{km}]$ al E, $70[\text{km}]$ al N y finalmente $20[\text{km}]$ al SO. Determinemos la distancia recorrida y la magnitud y dirección del desplazamiento en este movimiento.

Elegimos como sistema de referencia el punto inicial A y la dirección Sur – Norte, y con una escala adecuada dibujamos los sucesivos desplazamientos.

La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria, es:

$$(40 + 55 + 70 + 20)[\text{km}] = 185[\text{km}]$$

La magnitud del desplazamiento total en este movimiento es igual a la magnitud del vector $\vec{d}_{AF}$ dibujado entre la posición inicial **A** y la final **F**. Su valor es de $44[\text{km}]$, aproximadamente.



La dirección del desplazamiento la podemos expresar mediante el ángulo formado por el correspondiente trazo dirigido y una dirección de referencia. En este caso el ángulo formado por el vector $\vec{d}_{AF}$ y la dirección Sur-Norte es aproximadamente 69°.

Fíjese que al representar la información sobre el movimiento, hemos indicado no sólo las magnitudes de los sucesivos desplazamientos, sino también sus direcciones, sin las cuales no podríamos determinar la trayectoria descrita por el móvil. Similarmente, el desplazamiento resultante queda determinado sin ambigüedad al indicar su magnitud y su dirección.

Ejercicios

5-1) Determine el menor valor de la longitud de la trayectoria y la magnitud del vector desplazamiento para ir desde la intersección de 6 Norte con San Martín, hasta la intersección de 8 Norte con 2 Oriente.

5-2) Un niño en su bicicleta efectúa una circunvalación a una manzana de su ciudad, regresando al mismo punto de partida. Determine la magnitud del desplazamiento.

5-3) Un jugador de fútbol entrenando trota $40[m]$ a lo largo de la orilla de la cancha y después de girar en 30° hacia la cancha, trota $20[m]$ más. Represente, a escala, la trayectoria y el desplazamiento del jugador. Determine la magnitud del desplazamiento y su dirección respecto a la orilla de la cancha.

5-4) Suponga que la Tierra describe una circunferencia alrededor del Sol a una distancia de 150 millones de kilómetros. Represente a escala la trayectoria y el desplazamiento de la Tierra cuando da un cuarto de vuelta. Escoja un sistema de referencia adecuado. Determine la magnitud del desplazamiento de la Tierra.

5-5) Un futbolista chutea un tiro libre desde una distancia de 30 metros del arquero, que está en el centro del arco. La pelota entra justo rozando el vertical y el horizontal del arco. Consígase las dimensiones del arco. Haga un diagrama de la escena, situando al futbolista en la forma que usted estime conveniente. Determine la magnitud del desplazamiento de la pelota. Piense si cambiando la posición del futbolista, manteniendo los 30 metros, varía la magnitud del desplazamiento de la pelota.

Vocabulario: escalares

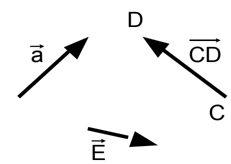
En el estudio de la Física encontramos cantidades como tiempo, masa, carga eléctrica, temperatura, energía, etc., que quedan completamente expresadas por un número real y una unidad de medición correspondiente. Al trabajar, en el contexto de la Física clásica no relativista, con las magnitudes de este tipo de cantidades físicas, usamos el álgebra de los números reales, lo que está de acuerdo con los experimentos. Dichas cantidades son cantidades **escalares**.

También en Física encontramos otras cantidades que sólo quedan determinadas cuando se conoce, además de su magnitud, su dirección, y que obedecen reglas algebraicas propias. Al igual que el desplazamiento, la velocidad, aceleración, fuerza, torque, intensidad de campo eléctrico, etc., gozan de las propiedades de los **vectores**.

Vectores: representación y notación

Representamos a los vectores por trazos dirigidos.

Simbolizamos a los vectores por una expresión literal con una flecha encima, por ejemplo: $\vec{a}$, $\vec{E}$, $\overrightarrow{CD}$.



En el vector $\overrightarrow{CD}$ el orden de las letras indica el punto inicial y el final, respectivamente.

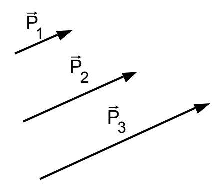
La magnitud, norma o módulo de un vector la expresamos encerrando su símbolo entre "doble barras" o quitando la flecha a la expresión literal correspondiente. Por ejemplo:

la magnitud de $\vec{a}$ la escribimos: $\left\|\vec{a}\right\| = a$

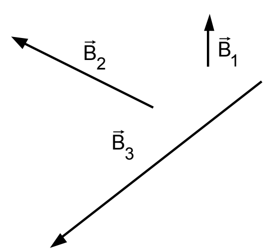
la magnitud de $\overrightarrow{CD}$ la escribimos: $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \overline{CD}$

Al representar vectores a escala, la longitud de los trazos empleados la haremos proporcional a sus magnitudes. Por ejemplo:

$$P_1 = \left\|\vec{P}_1\right\| = 10$$
$$P_2 = \left\|\vec{P}_2\right\| = 20$$
$$P_3 = \left\|\vec{P}_3\right\| = 30$$



$$B_1 = \left\|\vec{B}_1\right\| = 1{,}4$$
$$B_2 = \left\|\vec{B}_2\right\| = 4{,}2$$
$$B_3 = \left\|\vec{B}_3\right\| = 7{,}0$$



Vector cero o vector nulo

Un vector cuya magnitud es cero se denomina vector cero. Lo simbolizamos por $\vec{0}$ o simplemente 0. Convenimos que el vector $\vec{0}$ tiene cualquier dirección.

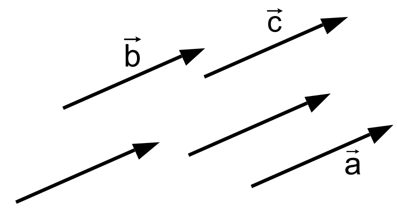
La magnitud de todo vector no nulo es, por definición, un número positivo.

Vectores iguales

Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección son iguales.

La igualdad de vectores es, por convenio, independiente de sus posiciones. Por ejemplo, en la figura tenemos que:

$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \cdots$

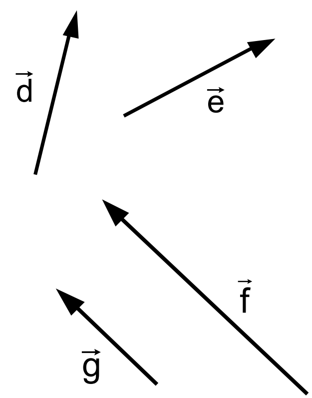


Aunque dos vectores tengan igual magnitud, ellos pueden ser diferentes. En la figura se muestra que:

$$\left\|\vec{d}\right\| = \left\|\vec{e}\right\| \quad , \quad \vec{d} \neq \vec{e}$$

y también, aunque:

"dirección de $\vec{f}$" = "dirección de $\vec{g}$" , $\vec{f} \neq \vec{g}$.

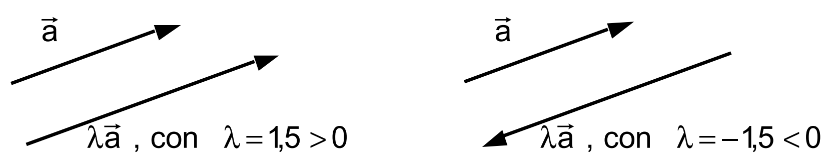


Multiplicación de un vector por un escalar

Al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar λ resulta otro vector $\lambda\vec{a}$ cuya magnitud es $|\lambda|$ veces la magnitud de $\vec{a}$:

$$\left\|\lambda\vec{a}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\vec{a}\right\|$$

y cuya dirección es igual a la dirección de $\vec{a}$ si $\lambda > 0$, y opuesta a la de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.



También se suele decir que el vector que resulta al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar λ negativo ($\lambda < 0$) tiene "igual dirección y sentido contrario" que el vector. La frase entre comillas es equivalente a "dirección opuesta". Nos sentiremos libres de usar cualquiera de estos convenios, siempre que no se presenten ambigüedades de interpretación.

- Dos vectores paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos, son proporcionales. Esto lo escribimos:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} \quad \text{o} \quad \vec{b} = \beta\vec{a} \qquad (\beta = 1/\alpha)$$

- Tenemos las siguientes relaciones entre el "escalar cero" y el "vector cero":

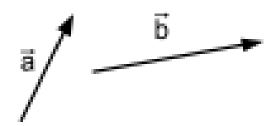
$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad , \quad \text{para todo vector } \vec{a}$$
$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad , \quad \text{para todo escalar } \lambda$$

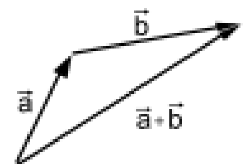
con lo cual, si $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$, o ambos.

Adición de vectores

La suma vectorial $\vec{a} + \vec{b}$ es por definición un vector cuyo punto inicial es el inicial de $\vec{a}$ y cuyo punto final es el final de $\vec{b}$, colocados como se muestra en la figura.

Este método de realizar la adición de vectores es conocido como "regla del triángulo".

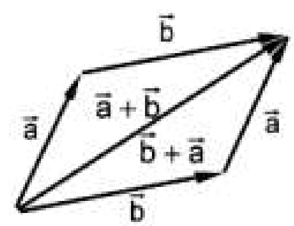




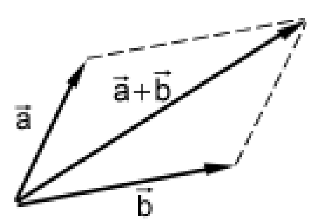
- De la figura adjunta se infiere que:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

es decir, la adición de vectores es conmutativa.



Otro método para realizar la suma de dos vectores es conocido como la "regla del paralelogramo". Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores. Para sumar los vectores se dibujan con su inicio en común. Luego se traza, por el extremo de cada uno, una paralela al otro. La suma $\vec{a} + \vec{b}$ es la diagonal correspondiente al vértice con el inicio de los vectores.

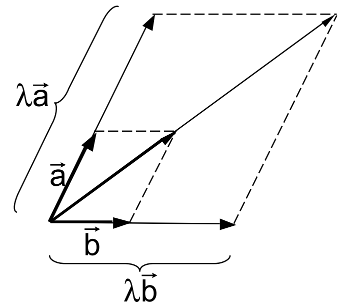


Analice este método para comprobar que es coherente con la definición inicial de la suma de vectores. Ambos métodos serán usados en los futuros desarrollos.

- La multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la adición de vectores. Es decir:

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

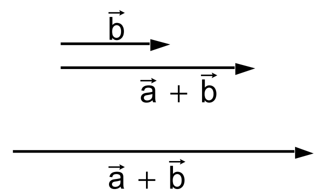
cuya demostración se realiza aplicando en la figura adjunta los teoremas de proporcionalidad de trazos en figuras semejantes.



Magnitud de la suma $\vec{a}+\vec{b}$

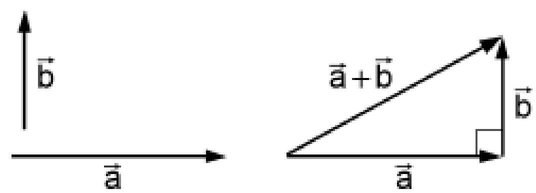
* Si ambos vectores tienen **igual dirección** se cumple que:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



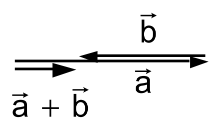
- Si los dos vectores son perpendiculares podemos aplicar el Teorema de Pitágoras y obtenemos:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2}$$



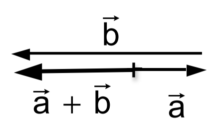
- Si los vectores tienen **direcciones opuestas** resulta:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \quad \text{si} \quad \|\vec{a}\| > \|\vec{b}\|$$



y cuando $\|\vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$ se cumple

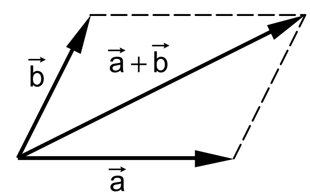
$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{b}\| - \|\vec{a}\|$$

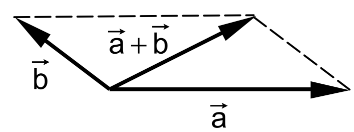


lo que equivale a decir que: $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \left|\,\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\,\right|$

En general, la magnitud de la suma $\vec{a}+\vec{b}$ depende de las direcciones relativas de $\vec{a}$ y de $\vec{b}$, cumpliéndose que:

$$\left|\,\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\,\right| \;\leq\; \|\vec{a}+\vec{b}\| \;\leq\; \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$$

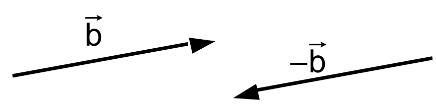




Resta de dos vectores

Se llama **aditivo inverso** del vector $\vec{b}$ al vector $-\vec{b}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{b}$ y la dirección opuesta. Tal vector resulta de multiplicar $\vec{b}$ por el escalar -1:

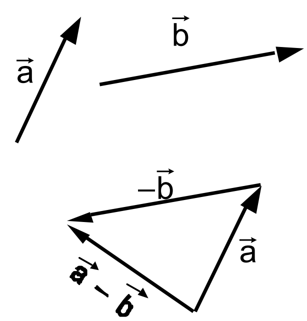
$$(-1)\cdot\vec{b} \;=\; -\vec{b}$$



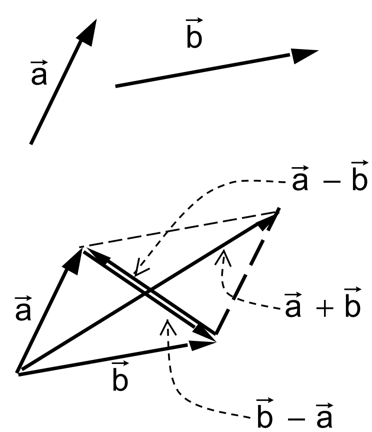
Para efectuar la resta $\vec{a}-\vec{b}$ se suma vectorialmente al vector $\vec{a}$ el aditivo inverso del vector $\vec{b}$, es decir:

$$\vec{a}-\vec{b} \;=\; \vec{a}+(-\vec{b})$$

como se ilustra en la figura adjunta.

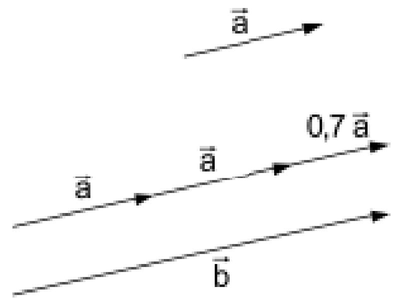


Observe que, si se ubican los vectores con su origen en común y se construye el paralelogramo, una de sus diagonales representa el vector $\vec{a}+\vec{b}$, y la otra, la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ o $\vec{b}-\vec{a}$. En este último caso, la dirección del vector diferencia va hacia el vector "minuendo", es decir, el que está en el inicio de la resta.



Ejemplos sobre operaciones con vectores

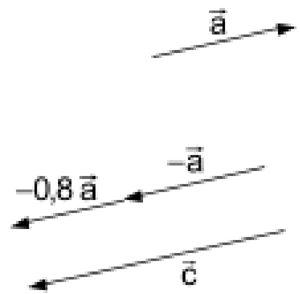
- Dado el vector $\vec{a}$ indicado en la figura, construyamos los vectores $\vec{b} = 2{,}7\vec{a}$ y $\vec{c} = -1{,}8\vec{a}$.



Para resolver este ejercicio recordamos que el vector $\vec{b}$ es paralelo (igual dirección) al vector $\vec{a}$ y su magnitud (módulo, norma) es 2,7 veces mayor:

$$b = \left\|\vec{b}\right\| = \left\|2{,}7\vec{a}\right\| = 2{,}7\left\|\vec{a}\right\| = 2{,}7a$$

El vector $\vec{c}$ tiene dirección contraria a la del vector $\vec{a}$ y su módulo es 1,8 veces el módulo de $\vec{a}$.



$$c = \left\|\vec{c}\right\| = \left\|-1{,}8\vec{a}\right\| =$$
$$= \left|-1{,}8\right| \cdot \left\|\vec{a}\right\| = 1{,}8a$$

Note que a, siendo el módulo del vector $\vec{a}$, es positivo $\left(a > 0\right)$ por tanto:

$$b = 2{,}7a > 0 \qquad \text{y} \qquad c = 1{,}8a > 0$$

- Sea $\vec{d}$ un vector dado. Determinamos el vector $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ donde $\vec{u} = 2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d}$ y $\vec{v} = 3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d}$

Los valores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en función de $\vec{d}$ son:

$$\vec{u} = 2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d} = \left(2{,}3 + 0{,}8\right)\vec{d} = 3{,}1\vec{d}$$

$$\vec{v} = 3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d} = \left(3{,}4 - 1{,}9\right)\vec{d} = 1{,}5\vec{d}$$

con lo cual:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = 1{,}5\vec{d} - 3{,}1\vec{d} = -1{,}6\vec{d}$$

Una forma más directa de hacer tal diferencia es:

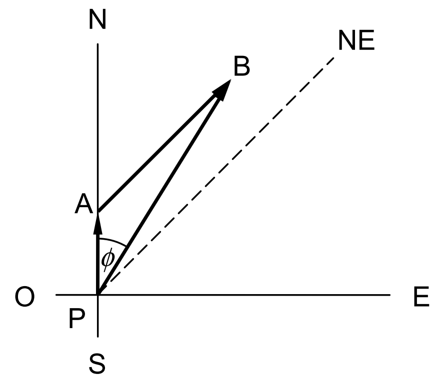
$$\vec{w} = \left(3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d}\right) - \left(2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d}\right)$$
$$= \left(3{,}4 - 1{,}9 - 2{,}3 - 0{,}8\right)\vec{d} =$$
$$= -1{,}6\vec{d}$$

- Un barco parte de un puerto y recorre 120 [km] hacia el Norte y luego 270[km] hacia el Noreste. Determinemos su ubicación final respecto al punto de partida.

El recorrido del barco lo representamos, a escala, en la figura adjunta, donde **P** indica el puerto de partida, **A** el punto donde gira al NE y **B** la posición alcanzada.

Entonces, los sucesivos desplazamiento están dados por los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{AB}$, de módulos:

$a = \overline{PA} = 120[km]$ y $b = \overline{AB} = 270[km]$



La ubicación final del barco está determinada por el vector $\overrightarrow{PB}$:

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$

Por tanto, la magnitud del desplazamiento total es $d = \left\|\overrightarrow{PB}\right\| \simeq 365[km]$ y su dirección está dada por el ángulo $\simeq 32°$, respecto a la dirección Sur a Norte.

Es decir, el barco está a 365[km] del puerto en dirección de 32° al Este del Norte.

- Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 52°; el módulo de $\vec{A}$ vale 3,2[mm]. ¿Cuál debe ser el módulo de $\vec{B}$ para que el vector $\vec{A} - \vec{B}$ sea perpendicular a $\vec{A}$?

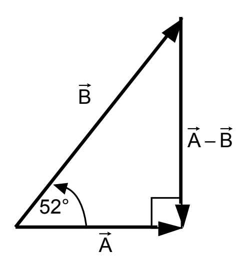
Para resolver gráficamente este problema:

Dibujamos a escala el vector $\vec{A}$.

En el inicio de $\vec{A}$ copiamos el ángulo de 52°.

Levantamos una perpendicular al vector $\vec{A}$ en su punto final.

La intersección de la perpendicular con el lado libre del ángulo nos determina el punto final del vector $\vec{B}$.

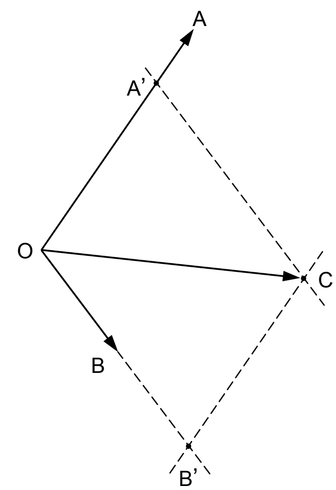


Tomando en cuenta la escala usada, el módulo del vector $\vec{B}$ resulta ser aproximadamente igual a 5,2 [mm].

- Demostremos que si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos vectores no nulos y no paralelos, cualquier vector en el plano determinado por ellos puede ser expresado en la forma $\lambda\,\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$ siendo λ y μ dos escalares adecuados.

Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ nos determinan un plano.

Escogemos un punto C arbitrario de ese plano.



Por C trazamos paralelas a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ determinando los puntos B' y A'

Entonces: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$

pero como: $\overrightarrow{OA'}=\lambda\,\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB'}=\mu\,\overrightarrow{OB}$

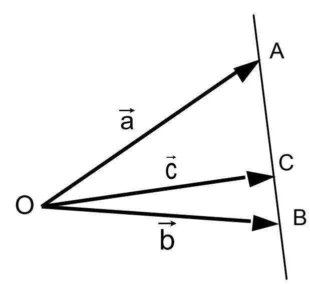
resulta: $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$

Habiendo escogido un punto C de modo arbitrario, hemos probado que cualquier vector coplanar con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ puede ser expresado en la forma $\lambda\,\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$.

- Sean $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ y $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ tres vectores dados con un punto común O, arbitrario. Si los puntos A, B y C son colineales se cumple que $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ con $\lambda+\mu=1$.

De la figura podemos escribir que:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a} \quad y \quad \overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$$



Pero $\overrightarrow{AC}=\mu\,\overrightarrow{AB}$ por ser A, B y C colineales.

por tanto $\vec{c}-\vec{a}=\mu\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$,

de donde $\vec{c}=\mu\vec{b}+\left(1-\mu\right)\vec{a}$

Haciendo $\lambda=1-\mu$ tenemos que: $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ con $\lambda+\mu=1$, relación que buscábamos demostrar.

Además, en este caso las longitudes de los trazos AC y CB están en la razón μ/λ. Una demostración es la siguiente:

Como $\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{AB}$, la longitud del trazo AC es:

$$\overline{AC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \mu \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \mu\,\overline{AB}$$

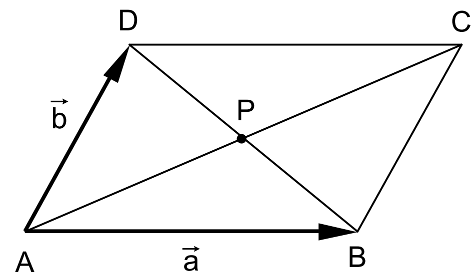
y la longitud del trazo CB es:

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = (1-\mu)\,\overline{AB} = \lambda\,\overline{AB}$$

es decir $\overline{AC} : \overline{CB} = \mu : \lambda$

- Demostremos que en un paralelogramo las diagonales se dimidian.

Sean $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$



Sea P el punto de intersección de las diagonales.

Ya que los puntos finales de $\vec{a}$, $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{b}$ son colineales.

$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ con $\lambda + \mu = 1$

Por otra parte

$\overrightarrow{AP} = \nu\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ por ser $\overrightarrow{AP}$ paralelo con $\overrightarrow{AC}$.

De lo anterior deducimos que:

$\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} = \nu\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

Es decir : $(\lambda - \nu)\vec{a} = (\nu - \mu)\vec{b}$.

Sabiendo que la igualdad $\alpha\,\vec{p} = \beta\,\vec{q}$ con $\vec{p}$ y $\vec{q}$ vectores no paralelos y no nulos, sólo se cumple si $\alpha = \beta = 0$, tenemos que:

$$\lambda - \nu = 0 \quad y \quad \nu - \mu = 0$$

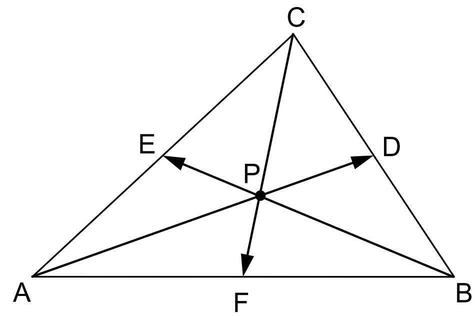
Como además $\lambda + \mu = 1$, según condición anterior, resulta:

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$$

Por tanto, P es punto medio de AC y BD.

- Demostremos que las transversales de gravedad de un triángulo son concurrentes y se cortan en la razón 2:1 a partir del vértice.

Sean D y F puntos medios de dos lados del triángulo.



Hagamos $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$

De acuerdo al resultado del problema anterior.

Se cumple de $\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ y que $\overrightarrow{AF} = \vec{c}/2$

Sea P el punto de intersección de las transversales de gravedad con vértices en A y C. Entonces:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{d} = \frac{\lambda}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

Como los puntos C, P y F son colineales, podemos escribir:

$\overrightarrow{AP} = \nu\vec{b} + \mu\frac{\vec{c}}{2}$ siendo $\nu + \mu = 1$

y por consiguiente:

$$\frac{\lambda}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \nu\,\vec{b} + \frac{\mu}{2}\,\vec{c}$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} - \nu\right)\vec{b} = \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\vec{c}$$

Además, dado que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ **no** son paralelos se cumple:

$$\frac{\lambda}{2} - \nu = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$$

y considerando $\nu + \mu = 1$, resulta:

$$\mu = \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Luego : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, de donde

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2:1$$

y también

$$\overline{CP} : \overline{PF} = \mu : \nu = 2:1$$

Procediendo de manera análoga para las dos transversales con vértice en A y B, se completa la demostración.

Ejercicios

5-6) Dibuje un vector $\vec{a}$ cualquiera luego construya los vectores:

$$4\vec{a};\quad \vec{a}/3;\quad 2{,}3\vec{a};\quad -2\vec{a};\quad -4\,\vec{a}/5 \;\text{ y } -1{,}9\vec{a}$$

5-7) Sean $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores dados. Calcule las siguientes sumas de vectores:

$$2{,}3\vec{b}+3{,}4\vec{b}-0{,}6\vec{b}+0{,}8\vec{b}-5{,}8\vec{b}=?$$

$$-4{,}1\vec{c}-3{,}5\vec{c}+3\vec{c}/5-3\vec{c}/10=?$$

$$-1{,}5\vec{b}+3{,}5\vec{b}-0{,}6\vec{b}+0{,}8\vec{b}=?$$

$$-3{,}2\vec{c}+2{,}3\vec{c}-1{,}7\vec{c}+1{,}4\vec{c}=?$$

$$\frac{3\vec{b}}{5}+\frac{4\vec{b}}{5}-\frac{7\vec{b}}{10}-\vec{b}=?$$

5-8) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores paralelos y que cumplen además las condiciones:

$$\vec{a}=1{,}7\vec{b} \;\text{ y }\; \vec{b}=1{,}2\vec{c}$$

Exprese en función de $\vec{b}$ cada uno de los siguientes vectores:

$$\vec{p}=0{,}6\vec{a}+1{,}4\vec{b}-1{,}6\vec{c}$$

$$\vec{q}=\frac{\vec{a}}{5}-\frac{2\vec{b}}{3}-\frac{4\vec{c}}{3}$$

$$\vec{r}=1{,}2\vec{a}-2{,}3\vec{b}+2{,}3\vec{c}$$

$$\vec{t}=\frac{\vec{a}}{3}-\frac{4\vec{b}}{5}+\frac{2\vec{c}}{3}$$

$$\vec{s}=2{,}3\vec{a}-\frac{4\vec{b}}{7}-1{,}2\vec{c}$$

$$\vec{u}=0{,}8\vec{a}+1{,}5\vec{b}-2{,}3\vec{c}$$

Exprese también estos vectores en términos de $\vec{a}$ y luego en términos de $\vec{c}$

5-9) Demuestre que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0$ siendo λ y μ distintos de cero.

5-10) Un aeroplano vuela 180[km] hacia el Este y luego 120[km] a 50° al Norte del Oeste. Determine gráficamente el desplazamiento resultante (magnitud y dirección).

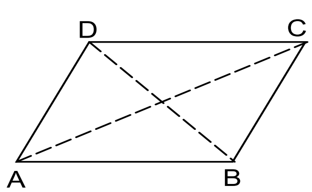
5-11) Efectúe gráficamente las siguientes sumas vectoriales:

- Un vector de módulo 2,3[cm] hacia el Este más un vector de módulo 3,1[cm] hacia el Noreste.
- Un vector de módulo 9,2[cm] hacia el Este más un vector de módulo 12,4[cm] hacia el Noreste.

Compare ambas sumas ¿Se cumple $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$?

5-12) Sea ABCD un paralelogramo y sean $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Exprese $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{BD}$ en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



5-13) Se dan dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ tales que $\left\|\vec{U}+\vec{V}\right\|=\left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|$. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$. Examine posibilidades. Comente.

5-14) Sea $\vec{A}$ un vector fijo y sea $\vec{B}$ el símbolo de todos los vectores de igual módulo que $\vec{A}$ pero de dirección variable. Examine el valor de la expresión $\|\vec{A}-\vec{B}\|-\|\vec{A}\|$, preocupándose en qué casos es mayor, igual o menor que cero.

5-15) Dados dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tales que $\|\vec{F}_1\| = 5{,}0[N]$, $\|\vec{F}_2\| = 4{,}2[N]$ y $\|\vec{F}_1+\vec{F}_2\| = 2{,}3[N]$, determine gráficamente el módulo de $\vec{F}_1-\vec{F}_2$ y el ángulo que forman $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

5-16) Dibuje dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera. Verifique, por gráficos que se cumple $\|\vec{A}+\vec{B}\| \leq \|\vec{A}\|+\|\vec{B}\|$ y $\|\vec{A}-\vec{B}\| \geq \left| \|\vec{A}\|-\|\vec{B}\| \right|$.

5-17) Considere tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que tienen un origen común O. ¿Qué condiciones deben satisfacer tales vectores para que O y sus extremos sean los vértices de un paralelogramo?

5-18) Dibuje un vector $\vec{p}$ de 4,0[cm] de módulo, en dirección 70° al Este del Norte y otro vector $\vec{q}$ de 6,5[cm] de módulo en dirección 130° al Este del Norte. Construya el vector $\vec{r} = -2\vec{p}+3\vec{q}$. Determine el módulo y la dirección de $\vec{r}$.

5-19) Dibuje un vector $\vec{C}$. Construya dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de tal modo que $\vec{C}$ sea la suma de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Al representar un vector dado como la suma de dos vectores ¿quedan éstos determinados sin ambigüedad?

5-20) Dibuje un vector $\vec{C}$. Exprese $\vec{C}$ como la suma de vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que cumplan $\|\vec{A}\|=\|\vec{B}\|$. Discuta si la solución es única.

5-21) Dibuje un vector $\vec{C}$. Exprese $\vec{C}$ como la suma de vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que $\vec{A}\perp\vec{B}$ ¿Es la solución única?

5-22) Dados los vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ y $\vec{r}$, construya los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que:

$$\vec{a} = \vec{p} - \frac{\vec{q}-\vec{r}}{3} \qquad \vec{b} = \vec{r} + \frac{\vec{p}-\vec{q}}{2} \qquad \vec{c} = \frac{\vec{p}}{2} - \frac{\vec{p}-\vec{r}}{2}$$

5-23) Dados dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$, construya:

$$\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{c} - \sqrt{3}\,\vec{d} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \sqrt{5}\,\vec{c} + \vec{d}/2$$

5-24) Sea $\vec{v}$ un vector no nulo cualquiera. Exprese, en función de $\vec{v}$, un vector en la dirección $\vec{v}$ y que tenga módulo uno.

5-25) Dado un vector $\vec{a}$ y escalares λ y μ, demuestre que $\lambda(\mu\,\vec{a}) = \mu(\lambda\,\vec{a})$.

5-26) Sean ABC un triángulo equilátero de lado a, y F el pie de la perpendicular bajada desde el vértice C. Calcule los módulos de los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}$.

5-27) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores de igual módulo, cuyas direcciones forman ángulos de 0°, 120° y 240° con respecto a cierto rayo dado. Determine la suma $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

5-28) Construya un pentágono regular. Desde su centro dibuje los vectores a sus vértices. Determine la suma de tales vectores.

5-29) Sean A, B, C y D cuatro puntos no alineados situados en un mismo plano. Encuentre tres puntos M, N y Q, tales que:

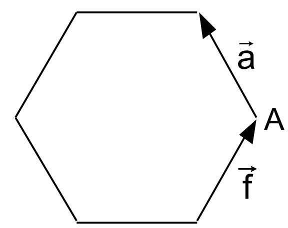
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{NB}$$

5-30) Considere dos puntos A y B. Determine a lo menos dos puntos Q tales que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AQ}\right).$$

5-31) Dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son perpendiculares y tienen magnitudes 4 y 9 respectivamente. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de $\vec{p} - \vec{q}$. Calcule la magnitud de tal diferencia y compárela con la obtenida gráficamente.

5-32) Un hexágono regular está formado por seis vectores de igual módulo a. Sean $\vec{a}$ y $\vec{f}$ dos vectores adyacentes. Exprese, en términos de $\vec{a}$ y $\vec{f}$, los vectores correspondientes a los otros lados y los vectores correspondientes a las diagonales desde el punto A.



5-33) Dado un triángulo ABC y un punto A', se pide completar un nuevo triángulo de modo que para un punto O cualquiera se cumpla:

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

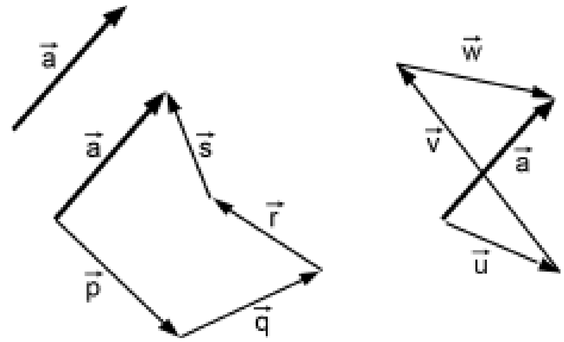
¿Cómo es el nuevo triángulo con respecto al primero?

5-34) Considere dos puntos A y B. Determine a los menos un punto P tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}$ sea ortogonal a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$.

5-35) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores que tienen un punto inicial común O. Demuestre que si existen tres escalares λ, μ y ν tales que $\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{c} = 0$ y $\lambda + \mu + \nu = 0$, entonces, los puntos terminales de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son colineales.

Componentes vectoriales de un vector

Hemos aprendido que la adición de dos o más vectores da como resultado un vector. Consideremos ahora el problema recíproco: dado un vector encontrar los vectores sumandos. Fácilmente nos damos cuenta que un vector se puede expresar como la suma de numerosos conjuntos de dos, tres o más vectores.



Por ejemplo, dado el vector $\vec{a}$ podemos escribir:

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s}$$

y también:

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

como se muestra en la figura.

Estos vectores no necesariamente están en un mismo plano.

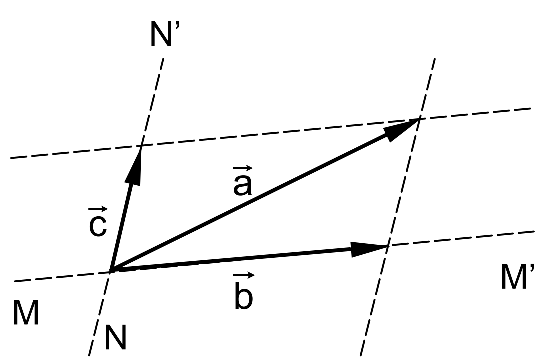
A los vectores que sumados dan el vector original los llamaremos **"componentes vectoriales del vector".**

En particular, podemos descomponer un vector en dos componentes vectoriales. El problema consiste en encontrar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que sumados den un vector $\vec{a}$ conocido. El problema así presentado no tiene solución única. El problema queda determinado si agregamos la condición de que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean coplanares con el vector $\vec{a}$ dado y que tengan direcciones fijas determinadas.

Sea $\vec{a}$ el vector dado y sean MM' y NN' las direcciones exigidas. Trazando por el punto final $\vec{a}$ las paralelas a esas direcciones obtenemos los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que cumplen:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

Notemos que ahora tenemos sólo un par de vectores que sumados dan $\vec{a}$. Por tanto, esos vectores son las componentes vectoriales únicas de $\vec{a}$ con las condiciones que hemos fijado.



Vector unimodular o unitario

Dado cualquier vector $\vec{v}$, distinto de cero, llamamos "vector unimodular en la dirección de $\vec{v}$" al siguiente vector:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad ; \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

El vector $\hat{u}$ tiene magnitud o módulo 1:

$$\|\hat{u}\| = \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1$$

y caracteriza a una determinada dirección.

Suponga que la velocidad de un avión es:

$$\vec{v} = \left(350 \left[km / h \right], \text{ hacia el norte} \right)$$

La magnitud de esta velocidad es el escalar positivo $\|\vec{v}\| = 350 \left[km / h \right]$

Hagamos el producto del vector $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$, es decir, dividamos el vector por su propia magnitud:

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left(350 \left[km/h \right], \text{ hacia el norte} \right)}{350 \left[km/h \right]}$$

El resultado es un vector que tiene igual dirección que $\vec{v}$, y cuya magnitud es $\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{350 \left[km/h \right]}{350 \left[km/h \right]} = 1 \left[\text{sin unidades} \right]$, es decir, un vector ***unitario***:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(1 \left[\text{sin unidades} \right], \text{ hacia el norte} \right)$$

Podemos designar este valor usando el símbolo $\hat{u}_{norte}$, en donde la flecha de vector ha sido reemplazada por un pequeño "techo" que indica que el vector tiene magnitud 1.

$$\hat{u}_{norte} = \left(1 \left[\text{sin unidades} \right], \text{ hacia el norte} \right)$$

Aunque el vector $\hat{u}_{norte}$ fue obtenido a partir de una velocidad, este vector en sí no tiene ninguna relación con la velocidad del avión. Es un vector adimensional de magnitud 1 que apunta hacia el norte. En consecuencia, puede ser utilizado para expresar cualquier otro vector que esté en la dirección sur-norte, como puede verse en los ejemplos que vienen a continuación

Ejemplos

- La fuerza $\vec{F} = \left(17[\text{N}],\ \text{en dirección sur}\right)$, puede expresarse como:

$$\vec{F} = -17[\text{N}]\,\hat{u}_{norte}$$

- La velocidad del avión puede escribirse como:

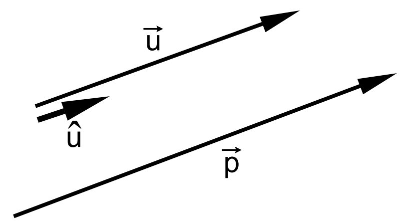
$$\vec{v} = 350\left[\text{km}/\text{h}\right]\hat{u}_{norte}$$

Podemos establecer como principio general que basta un solo vector unitario para expresar todos los vectores paralelos o antiparalelos a una dirección dada.

Cualquier vector paralelo a $\vec{v}$ se puede escribir en la forma $\alpha\,\hat{u}$, siendo α un escalar.

Por ejemplo, si $\vec{p}$ es paralelo a $\vec{v}$:

$$\vec{p} = p_u\,\hat{u}$$



donde p_u es un escalar positivo (negativo) si $\vec{p}$ tiene igual (opuesta) dirección que $\vec{u}$.

El módulo de $\vec{p}$ es:

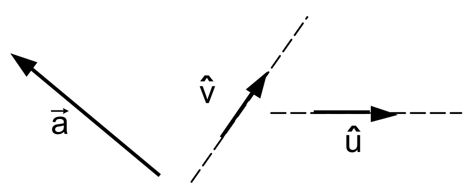
$$\left\|\vec{p}\right\| = \left\|p_u\,\hat{u}\right\| = \left|p_u\right| \cdot \left\|\hat{u}\right\| = \left|p_u\right|$$

Esto es, el valor absoluto del escalar p_u es igual al módulo del vector $\vec{p}$.

Componentes escalares de un vector

Volvamos a considerar el problema de escribir un vector dado como la suma de dos componentes vectoriales coplanares con direcciones fijas establecidas previamente.

Caractericemos tales direcciones fijas por dos vectores unimodulares $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.



Sea $\vec{a}$ el vector dado, podemos entonces escribir:

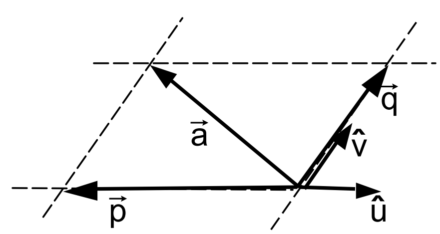
$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$$

Como $\vec{p} = \alpha\,\hat{u}$ y $\vec{q} = \beta\,\hat{v}$, siendo α y β escalares, resulta:

$$\vec{a} = \alpha\,\hat{u} + \beta\,\hat{v}$$

lo que solemos escribir:

$$\vec{a} = a_u\,\hat{u} + a_v\,\hat{v}$$



A estos números a_u y a_v le llamamos las "**componentes escalares**" de $\vec{a}$ en las direcciones $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.

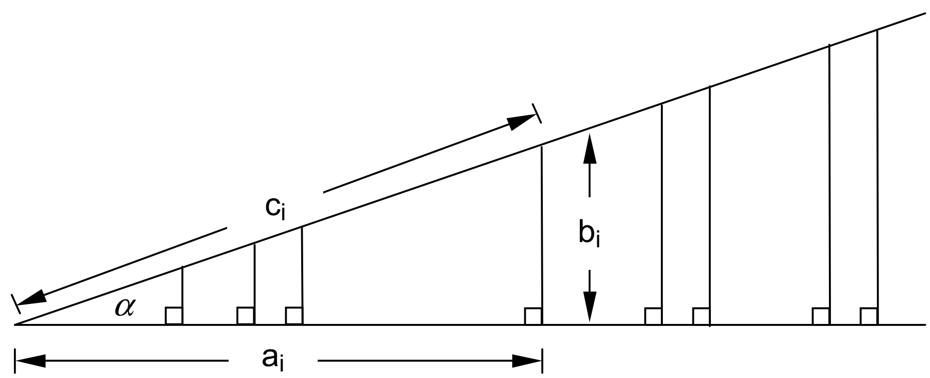
Notamos que, en el ejemplo dibujado, la componente escalar a_u es negativa y la a_v es positiva.

Dado que el cálculo de las componentes escalares de un vector es particularmente simple cuando las direcciones fijadas son perpendiculares, restringiremos nuestro estudio a "sistemas de ejes coordenados ortogonales". Estos sistemas de coordenadas son los de mayor uso en los primeros niveles de Física.

Mediciones en triángulos semejantes con un ángulo común

Dibujamos un ángulo α. Construimos perpendiculares a uno de sus lados, formándose un conjunto de triángulos rectángulos, semejantes, con un ángulo común.

Designamos por a_1 , a_2 , ...a_i..., a_n y b_1 , b_2 , ... , b_i... , b_n las longitudes de los catetos y por c_1 , c_2 , ...c_i, ... , c_n las longitudes de las correspondientes hipotenusas.

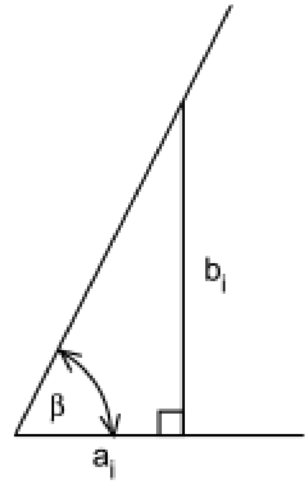


Para cuatro de tales triángulos medimos las longitudes de sus lados y calculamos los cuocientes presentados en la tabla.

a_i [mm]	b_i [mm]	c_i [mm]	$\frac{b_i}{c_i}$	$\frac{a_i}{c_i}$	$\frac{b_i}{a_i}$
29,0	7,4	29,8	0,248	0,973	0,255
67,0	17,8	69,2	0,257	0,968	0,266
97,0	25,9	100,4	0,258	0,966	0,267
120,0	32,0	124,0	0,258	0,968	0,267

Procediendo de manera análoga con un ángulo diferente, obtuvimos los siguientes resultados de la tabla.

a_i [mm]	b_i [mm]	c_i [mm]	$\frac{b_i}{c_i}$	$\frac{a_i}{c_i}$	$\frac{b_i}{a_i}$
27,0	58,3	646,4	0,905	0,419	2,159
36,0	77,7	85,7	0,907	0,420	2,158
42,0	90,5	99,8	0,907	0,421	2,158
51,0	110,0	121,3	0,907	0,420	2,157



La geometría establece, en los "teoremas de figuras semejantes", que las longitudes de lados homólogos son proporcionales, es decir, que las razones entre ellas son constantes.

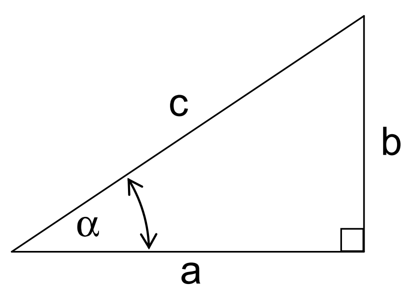
Mediante las tablas anteriores queremos que usted visualice, en particular, que en triángulos rectángulos semejantes los cuocientes entre las longitudes de los lados tienen valores constantes que dependen de los ángulos de esos triángulos.

Consideremos un triángulo rectángulo. Con respecto al ángulo α, a un cateto lo llamamos opuesto y al otro adyacente. Los cuocientes:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$



son características del ángulo α y se designan por nombres especiales :

Seno de α ……….. sen α = b/c
Coseno de α …….. cos α = a/c
Tangente de α ……..tg α = b/a

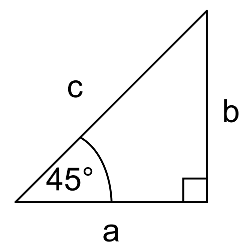
Estas relaciones se las hemos presentado a usted para que podamos operar con ellas en el cálculo de componentes de vectores. Usted estudiará Trigonometría en forma fundamental y detallada en sus cursos de Matemática.

Ejemplos

- Consideremos un triángulo rectángulo isósceles.

En él:

$$b = a \quad y \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}\,a$$



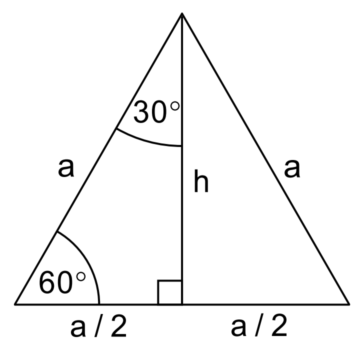
Por tanto:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\big/2 = \cos 45°$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{b}{a} = 1$$

- Consideremos un triángulo equilátero de lado a. Su altura es $h = \sqrt{3}\,a\big/2$ (aplique Pitágoras).

Entonces:



$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{a} = \sqrt{3}\big/2 \simeq 0{,}866 = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}500 = \operatorname{sen} 30°$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{h}{a/2} = \sqrt{3} \simeq 1{,}732$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{a/2}{h} = 1\big/\sqrt{3} \simeq 0{,}577$$

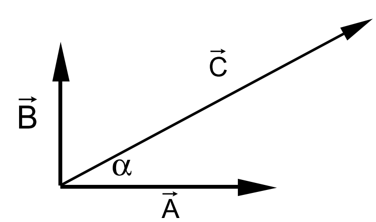
- Dibujemos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que $\vec{A} \perp \vec{B}$. Sea $\vec{C}$ un vector en el plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forme un ángulo α con el vector $\vec{A}$. Determinemos dos escalares λ y μ, tales que $\vec{C} = \lambda\,\vec{A} + \mu\,\vec{B}$. Entonces, para el caso dibujado:

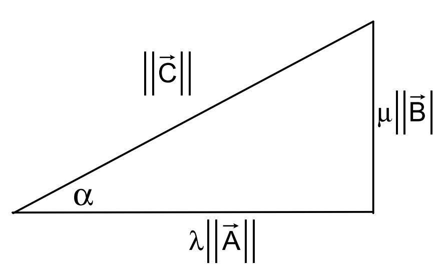
$$\lambda\left\|\vec{A}\right\| = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \cos\alpha$$

$$\mu\left\|\vec{B}\right\| = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\lambda = \frac{\left\|\vec{C}\right\|}{\left\|\vec{A}\right\|} \cdot \cos\alpha$$

$$\mu = \frac{\left\|\vec{C}\right\|}{\left\|\vec{B}\right\|} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$



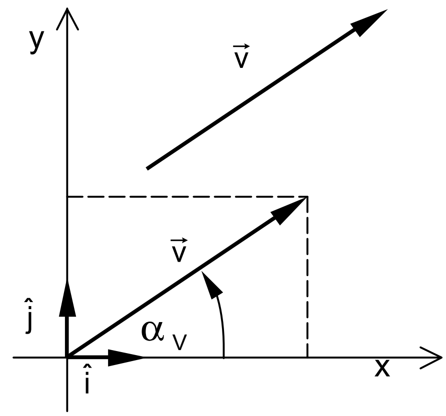


En particular, si elegimos $\left\|\vec{A}\right\| = \left\|\vec{B}\right\| = 1$, resulta:

$$C_A = \lambda = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \cos\alpha \qquad y \qquad C_B = \mu = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Los números C_A y C_B son las **componentes escalares del vector** $\vec{C}$ en las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente. También decimos que C_A y C_B son las **proyecciones** del vector $\vec{C}$ sobre estas mismas direcciones.

Componentes ortogonales de un vector



- Elijamos un sistema de dos ejes ortogonales. Denotemos por $\hat{i}$ y $\hat{j}$ los vectores unimodulares $\left(\left\|\hat{i}\right\| = \left\|\hat{j}\right\| = 1 \right)$ en la direcciones del "eje x" y del "eje y" respectivamente.

Sea $\vec{V}$ un vector en el plano formado por tales ejes.

Este vector está determinado si conocemos su módulo, $V = \left\|\vec{V}\right\|$, y su dirección.

Podemos indicar la dirección por el ángulo que $\vec{V}$ forma con el "eje x": $\alpha_v = \sphericalangle\left(\vec{V}, \hat{i}\right)$.

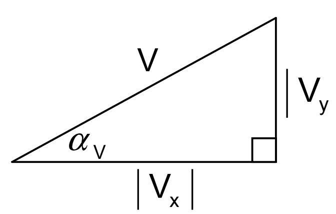
También el vector $\vec{V}$ está determinado por sus componentes en la "dirección x" y en la "dirección y".

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{C}_x + \vec{C}_y \qquad && \left(\vec{C}_x \ , \ \vec{C}_y : \text{ componentes vectoriales}\right) \\ &= V_x\hat{i} + V_y\hat{j} && \left(V_x \ , \ V_y : \text{ componentes escalares}\right) \end{aligned}$$

Donde $\left\|\vec{C}_x\right\| = \left|V_x\right|$ y $\left\|\vec{C}_y\right\| = \left|V_y\right|$

Ambas caracterizaciones del vector $\vec{V}$ están relacionadas por:

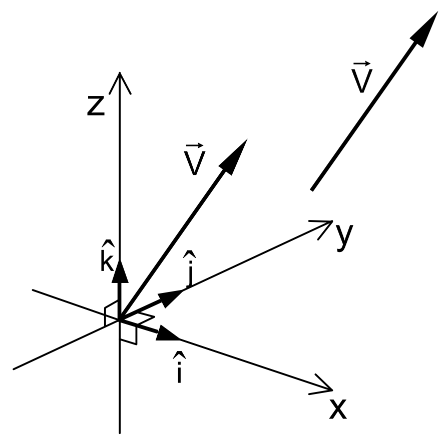
$$\begin{cases} V_x = V \cdot \cos\left(\alpha_v\right) \\ V_y = V \cdot \operatorname{sen}\left(\alpha_v\right) \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ \operatorname{tg}\left(\alpha_v\right) = V_y / V_x \end{cases}$$



Si $\vec{V} \neq 0$, sus componentes V_x y V_y pueden ser positivas o negativas. Siendo su módulo V positivo, los signos de V_x y V_y dependen de los signos de $\operatorname{sen}(\alpha_v)$ y $\cos(\alpha_v)$, esto es de la dirección de $\vec{V}$.

- Al trabajar en el espacio euclidiano de tres dimensiones escogemos una tríada de ejes perpendiculares entre sí.

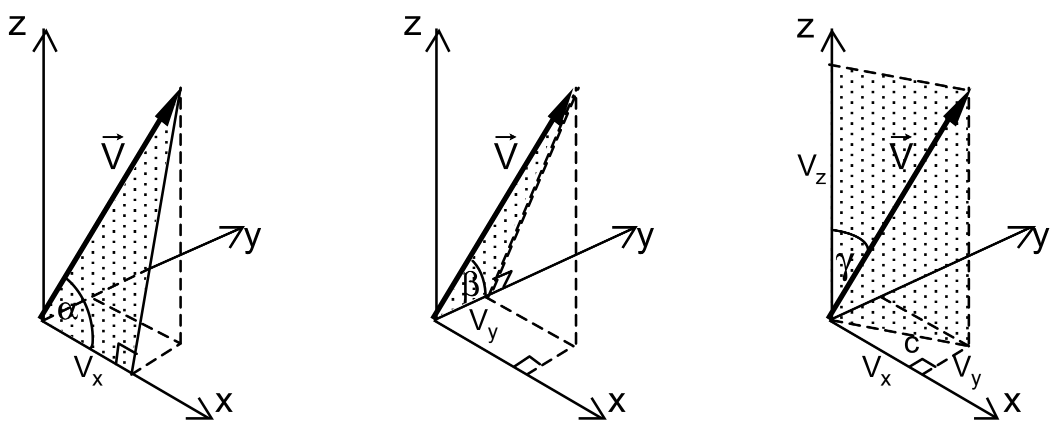
Llamemos $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ a los vectores unimodulares en las direcciones de los ejes, x, y , z respectivamente.



Un vector $\vec{V}$ en el espacio lo expresamos como:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$$

Siendo V_x, V_y y V_z sus componentes escalares o proyecciones sobre los respectivos ejes.



El módulo del vector $\vec{V}$ está dado por:

$$V = \left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{c^2 + V_z^2} \quad , \quad \text{con } c^2 = V_x^2 + V_y^2$$

por lo tanto:

$$V = \left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

La dirección del vector $\vec{V}$ queda determinada por los ángulos que él forma con los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:

$$\alpha = \sphericalangle\left(\vec{V}, \hat{i}\right) \qquad \beta = \sphericalangle\left(\vec{V}, \hat{j}\right) \qquad \gamma = \sphericalangle\left(\vec{V}, \hat{k}\right)$$

los que se determinan, por ejemplo, usando

$$\cos\alpha = V_x / V, \qquad \mathrm{tg}\gamma = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} / V_z$$

y otras relaciones análogas que dejamos a usted la tarea de buscar.

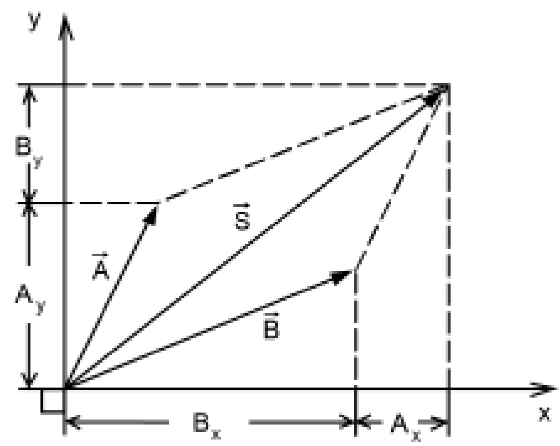
- El producto de un escalar λ por un vector $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_Z\hat{k}$ es:

$$\lambda A = \lambda\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)$$
$$= \lambda A_x\hat{i} + \lambda A_y\hat{j} + \lambda A_z\hat{k}$$

- Al expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por sus componentes rectangulares, realizamos su adición en la siguiente forma:

$$\vec{A} + \vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)$$
$$= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$= \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} + \left(A_z + B_z\right)\hat{k}$$

La suma así obtenida es igual a lo que resulta usando el método geométrico antes visto, como se puede comprobar en la figura adjunta.



Si $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces:

$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$

- Para que los vectores $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ y $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ sean iguales, sus componentes deben ser iguales, esto es:

$$a_x = b_x \qquad a_y = b_y \qquad a_z = b_z$$

La igualdad de dos vectores en un espacio de tres dimensiones implica tres ecuaciones escalares:

Ejemplos

- Calculemos la suma de los vectores $\vec{A} = 3{,}1\,\hat{i} - 2\hat{j} + 7\,\hat{k}$ y $\vec{B} = -2{,}2\,\hat{i} + \hat{j} + 0{,}2\hat{k}$.

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= \left(3{,}1\hat{i} - 2\,\hat{j} + 7\,\hat{k}\right) + \left(-2{,}2\,\hat{i} + \hat{j} + 0{,}2\,\hat{k}\right)\\ &= \left(3{,}1 - 2{,}2\right)\hat{i} + \left(-2 + 1\right)\hat{j} + \left(7 + 0{,}2\right)\hat{k}\\ &= 0{,}9\,\hat{i} - \hat{j} + 7{,}2\hat{k}\end{aligned}$$

Le recomendamos que represente gráficamente los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} + \vec{B}$.

- Sean $\vec{a} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$ y $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ dos vectores dados.

  Calculemos la magnitud de $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \left(3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 8\vec{k}\right) - \left(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}\right)\\ &= \left(3 - 3\right)\vec{i} + \left(-6 - 2\right)\vec{j} + \left(8 - 6\right)\vec{k}\\ &= -8\hat{j} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| = \sqrt{\left(-8\right)^2 + \left(2\right)^2} = \sqrt{68} \simeq 8{,}2$$

- Un vector $\vec{a}$ de módulo 5,0 forma un ángulo de 30° con el eje z. Su proyección en el plano xy forma un ángulo de 45° con el eje x. Calculemos los componentes escalares del vector $\vec{a}$.

El módulo de $\vec{a}$ es $a = \left\|\vec{a}\right\| = 5$

La proyección p de $\vec{a}$ sobre el plano xy es:

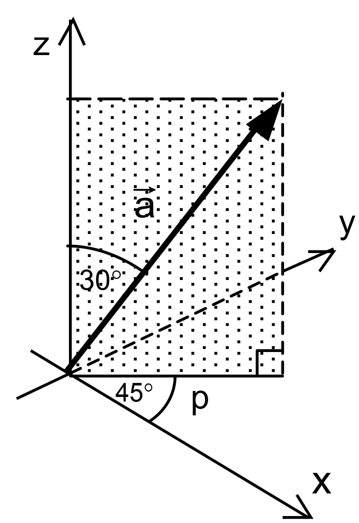
$p = a \cdot \cos 60° = 5{,}0 \cdot 0{,}50 = 2{,}5$

entonces:

$a_x = p \cdot \cos 45° \simeq 2{,}5 \cdot 0{,}71 \simeq 1{,}8$

$a_y = p \cdot \mathrm{sen} 45° \simeq 2{,}5 \cdot 0{,}71 \simeq 1{,}8$

$a_z = a \cdot \cos 30° \simeq 5{,}0 \cdot 0{,}87 \simeq 4{,}4$



Vector posición

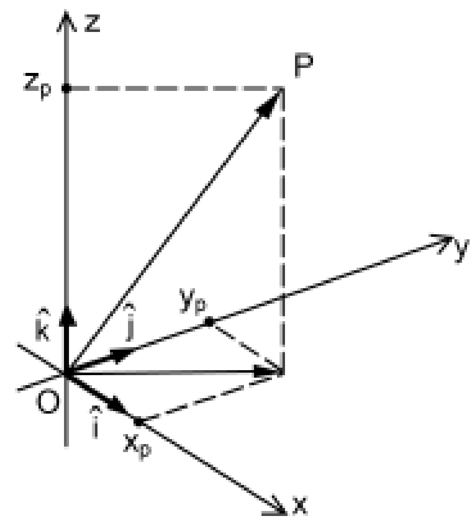
Para indicar la ubicación de un punto es necesario elegir previamente un sistema de referencia.

Tomemos como referencia un "sistema de ejes coordenados ortogonales" con origen O.

En tal sistema, la posición de un punto P está dada por el vector $\overrightarrow{OP}$ cuyas componentes son las coordenadas $\{x_p, y_p, z_p\}$ del punto P.

$$\overrightarrow{OP} = x_p\,\hat{i} + y_p\,\hat{j} + z_p\,\hat{k}$$

Este vector $\overrightarrow{OP}$ es el **vector posición** del punto P y suele anotarse por $\vec{r}_p = \overrightarrow{OP}$.



La distancia del punto P al origen O es igual al módulo del vector posición $\overrightarrow{OP}$:

$$d_{OP} = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

* Encontremos la distancia entre los puntos A y B cuyas coordenadas, en un sistema de referencia escogido, son respectivamente:

$$\{x_A\ ,\ y_A\ ,\ z_A\} \quad \text{y} \quad \{x_B\ ,\ y_B\ ,\ z_B\}$$

Los vectores posición de estos puntos son:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x_A\,\hat{i} + y_A\,\hat{j} + z_A\,\hat{k}$$

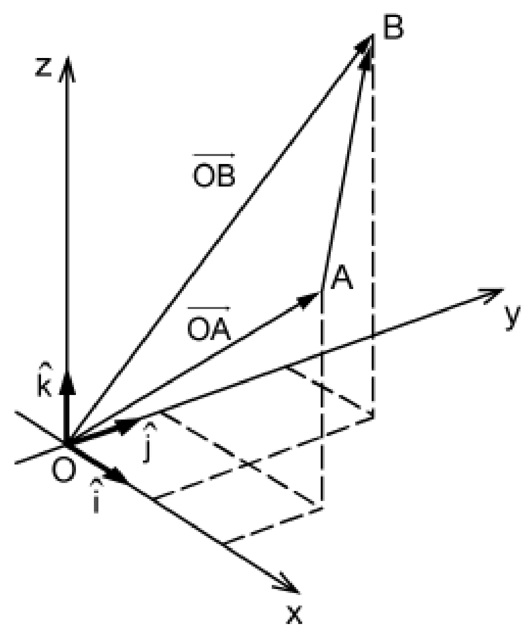
$$\vec{r}_B = \overrightarrow{OB} = x_B\,\hat{i} + y_B\,\hat{j} + z_B\,\hat{k}$$

De la figura vemos que la distancia entre los puntos A y B es la magnitud (norma, módulo) del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d_{AB} = \overline{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Ya que se cumple: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

Se tiene: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$



Expresando este vector en término de sus componentes:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\right)\hat{i} + \left(y_B - y_A\right)\hat{j} + \left(z_B - z_A\right)\hat{k}$$

obtenemos:

$$d_{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

** Calculemos la distancia entre los puntos A y B dados por

$$A = \left\{0 \ ; \ 4{,}0 \ ; \ -2{,}0\right\}\left[m\right] \qquad y \qquad B = \left\{6{,}0 \ ; \ -3{,}0 \ ; \ 1{,}0\right\}\left[m\right]$$

(coordenadas expresadas en metros).

$$\overrightarrow{OA} = 0\,\hat{i} + 4{,}0\,\hat{j} - 2{,}0\,\hat{k} = 4{,}0\,\hat{j} - 2{,}0\,\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = 6{,}0\,\hat{i} - 3{,}0\,\hat{j} + 1{,}0\,\hat{k} = 6{,}0\,\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + \hat{k}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6{,}0\,\hat{i} - 7{,}0\,\hat{j} + 3{,}0\,\hat{k}$$
$$d_{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{36 + 49 + 9{,}0} = \sqrt{94} \simeq 9{,}7\left[m\right]$$

¡Represente los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$!

Ejercicios

5-36) Determine un vector que tenga la misma dirección pero sentido contrario que el vector $\vec{A} = 3\,\hat{i} - 4\,\hat{k}$ y cuyo módulo sea 10.

5-37) Considere los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 3\,\hat{i} - 2\,\hat{j} \qquad \vec{B} = -\hat{i} + 3\,\hat{j} \qquad \vec{C} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} \qquad \vec{D} = -2\,\hat{i} - 3\,\hat{j}$$

Determine los vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} \ , \ \vec{C} - \vec{D} \ , \ 2\vec{A} - 3\vec{D} \ , \ 3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C} - 5\vec{D}$$

en forma algebraica y en forma gráfica. Compare.

5-38) Determine los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para los cuales se tiene:

$$\vec{A} + \vec{B} = 11\hat{i} - \hat{j} \qquad y \qquad \vec{A} - \vec{B} = -5\,\hat{i} + 11\hat{j}$$

5-39) Un vector $\vec{v}$, de módulo 6,0, forma un ángulo de 30° con el eje z. Su proyección sobre el plano xy forma un ángulo de 60° con el eje x. La proyección de un vector $\vec{w}$ sobre el eje z es 4,0. La proyección del vector $\vec{w}$ en el plano xy vale 6,0 y hace un ángulo de 120° con el eje x. Calcule las componentes escalares del vector $\vec{v} - \vec{w}$.

5-40) Sean $\vec{p} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 7\,\hat{k}$, $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j} + 10\,\hat{k}$, $\vec{c} = 3\,\hat{i} - 5\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ tres vectores que tienen un punto inicial común. Verifique si los tres puntos finales de esos vectores están sobre una misma recta.

5-41) Dados los vectores $\vec{A} = 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j}$ y $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$, calcule la magnitud y la dirección resultante (suma), la magnitud y dirección de $\vec{A} - \vec{B}$ y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Resuelva este ejercicio gráficamente y compare.

5-42) Dado un vector $\vec{A}$, haga una discusión de las posibilidades para un vector $\vec{B}$ y un escalar λ tal que se cumple la igualdad $\vec{A} + \vec{B} = \lambda\,\vec{A}$.

5-43) En referencia a los vectores de la figura adjunta se anotan las siguientes relaciones:

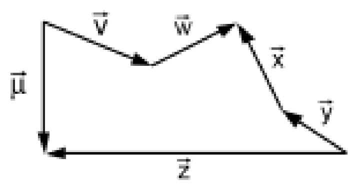
a) $\vec{v} + \vec{w} - \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} - \vec{\mu} = \vec{0}$

b) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{x} - \vec{y} - \vec{z} - \vec{\mu} = \vec{0}$

c) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{\mu} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$

d) $\vec{\mu} + \vec{v} + \vec{z} = -\vec{x} - \vec{y} - \vec{w}$

e) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{z} = -\vec{\mu} - \vec{y} - \vec{x}$



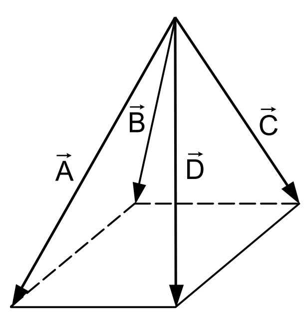
¿Hay entre ellas algunas correctas?

5-44) Determine la magnitud del vector $\vec{A} = a\,\hat{i} + a\,\hat{j} + a\,\hat{k}$

5-45) Dado los vectores $\vec{F}_1 = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 3\,\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = -4\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + \hat{k}$, calcule:

$$\left\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right\| \;,\; \left\|\vec{F}_1\right\| + \left\|\vec{F}_2\right\| \;,\; \left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\| \quad \text{y} \quad \left\|\vec{F}_1\right\| - \left\|\vec{F}_2\right\|$$

5-46) Las aristas laterales de la pirámide de base cuadrada determinan los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$. Exprese el vector $\vec{A}$ en términos de los vectores $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$.



5-47) Considere los siguientes cuatro pares de vectores:

$3\,\hat{i} + 9\,\hat{j}$ y $-3\,\hat{i} - 9\,\hat{j}$ $\qquad$ $2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$ y $3\,\hat{i} - \hat{j}$

$\sqrt{2}\,\hat{i} - \hat{j}$ y $-\sqrt{8}\,\hat{i} + 2\,\hat{j}$ $\qquad$ $7\,\hat{i} + 7\,\hat{j}$ y $3\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$

¿Cuál de ellos corresponde a dos vectores mutuamente perpendiculares?

5-48) Cierto vector $\vec{P}$ cambia con el tiempo según la relación $\vec{P}(t) = 2t\,\hat{i} - t^2\,\hat{j}$, siendo t el tiempo expresado en segundos. Calcule el valor de $P(t)$ en el instante $t = 2{,}0\,[s]$.

5-49) Determine los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para los cuales se tiene:

$$\vec{A} + \vec{B} = 7\,\hat{j} - 6\,\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{A} - \vec{B} = 3\,\hat{j} + 12\,\hat{k}$$

5-50) Sabiendo que $\vec{A} = \lambda\,\vec{B}$, examine las condiciones para que:

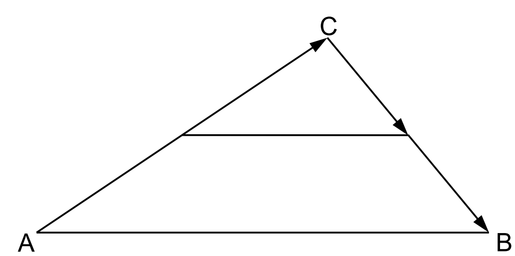
$$\left\|\vec{A}\right\| \text{ sea igual a } \lambda\left\|\vec{B}\right\|$$

$$\left\|\vec{A}\right\| \text{ sea mayor que } \left\|\vec{B}\right\|$$

$$\left\|\vec{B}\right\| \text{ sea mayor que } \left\|\vec{A}\right\|$$

5-51) Dos personas parten de un mismo punto y se mueven del siguiente modo: una de ellas recorre 10[km] en la dirección del vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y la otra recorre 5[km] en la dirección del vector $\vec{b} = 8\hat{i} - 6\hat{j}$. Determine la distancia que separa ambas personas una vez finalizados sus recorridos.

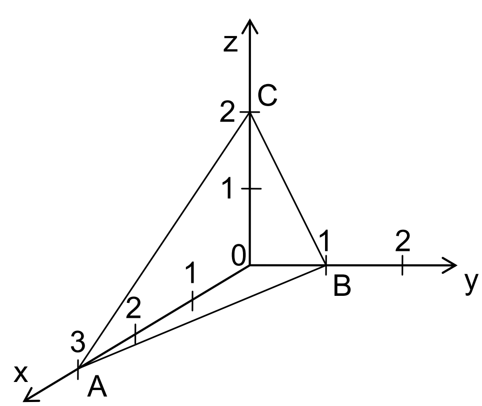
5-52) La mediana de un triángulo es la recta que une los puntos medios de dos lados. Demostrar, utilizando vectores, que la mediana mide la mitad del tercer lado.



5-53) Dados los vectores $\vec{A} = 4\,\hat{i} + 3\,\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\,\hat{i} - \hat{k}$, calcule la magnitud y la dirección de la resultante (suma) y la magnitud y dirección de la diferencia $\vec{B} - \vec{A}$. Resuelva también este ejercicio gráficamente y compare.

5-54) Considere los puntos A, B y C ubicados como se muestra en el sistema de coordenadas ortogonales de la figura adjunta. Calcule:

$$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \quad \text{y} \quad \left\|\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB}\right\|$$



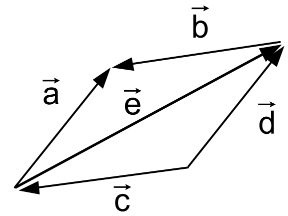
5-55) Dado el vector $\vec{A} = 3\,\hat{i} + 2\,\hat{j}$, calcule el vector unitario $\hat{A}$ en la dirección de $\vec{A}$.

5-56) En referencia a la figura adjunta se han anotado las igualdades:

$\vec{e} = \vec{c} + \vec{d}$ $\qquad$ $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{e} = -\vec{c} + \vec{d}$ $\qquad$ $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$

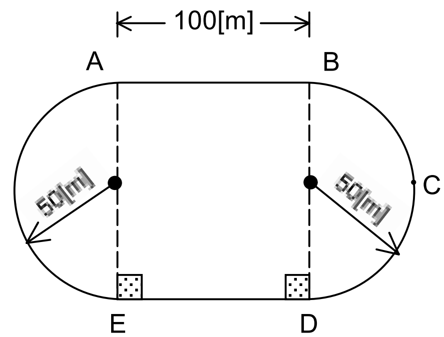
¿Son algunas de ellas correctas?



5-57) Calcule el módulo de $\vec{a} + \vec{b}$, siendo $\vec{a} = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j}$ y $\vec{b} = 4\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$.

5-58) Una persona parte de un punto P y para llegar a otro punto Q debe recorre 5[km] en la dirección NE. Luego debe dirigirse al punto R para lo cual debe recorrer otros 5[km] en la dirección del vector $\vec{a} = 12\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$, estando el eje x orientado en la dirección SE. Determine el vector de desplazamiento total.

5-59) Un atleta corre por una pista como la indicada en la figura. Represente gráficamente los vectores desplazamiento respecto al punto de partida A cuando pasa por B, C, D y E. Determine la magnitud y la dirección de tales vectores.



5-60) Sabiendo que $\vec{u} = 6\hat{i} + 12\hat{j}$ y $\vec{v} = -12\hat{i} + 6\hat{j}$, examine la validez de la siguientes afirmaciones :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ $\qquad$ $\vec{u}$ es perpendicular con $\vec{v}$

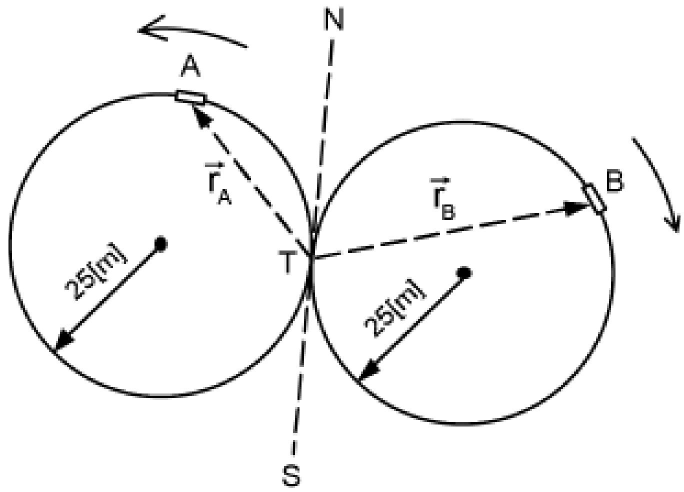
$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ $\qquad$ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$

5-61) Sean $\vec{p} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j}$, $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{r} = 3\hat{i} - 5\hat{j}$ tres vectores que tiene un punto inicial común. Verifique si los tres puntos finales de esos vectores están sobre una misma recta.

5-62) Calcule el módulo de $\hat{i} - \hat{j}$ y el módulo de $\hat{j} + \hat{k}$.

5-63) Dos trencitos A y B corren por vía circulares como las que se indican en la figura. El tren A demora 8[min] en dar una vuelta completa y el tren B sólo demora 4[min] en ello. Si ambos trenes parten simultáneamente de la estación T, calcule para 2[min] después de la partida:

- El vector posición $\vec{r}_A$ del tren A con respecto a la estación.
- El vector posición $\vec{r}_B$ del tren B con respecto a la estación.
- El vector desplazamiento relativo $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ de A con respecto a B.



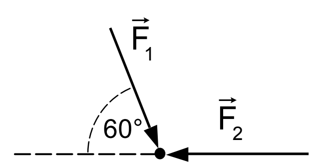
5-64) Dado los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{i} - \hat{k}$, calcule $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, $\left\|\vec{A} + \vec{B}\right\|$ y $\left\|\vec{A} - \vec{B}\right\|$.

5-65) Dado el vector $\vec{H} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, encuentre los vectores en la dirección del vector $\vec{H}$ y en la dirección opuesta, y cuyas magnitudes sean ambas iguales a uno.

5-66) Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas tal como se muestra en la figura. Los módulos de esas fuerzas valen

$\left\|\vec{F}_1\right\| = 40[kp]$ y $\left\|\vec{F}_2\right\| = 70[kp]$

Calcule la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



5-67) Sobre un cuerpo se aplican tres fuerzas, las que expresadas en una misma unidad, que no se indica, son:

$$\vec{F}_1 = 6\hat{i} \ , \ \vec{F}_2 = 4\hat{j} \quad y \quad \vec{F}_3 = 6\hat{i} + 4\hat{j}$$

Calcule la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$