CAPÍTULO VIII

# TEMPERATURA Y DILATACIÓN

Es usual que antes de entrar a la ducha en la mañana acerquemos la mano al agua y apelando a nuestra experiencia sensorial, decidamos si está "fría" o "caliente" y regulemos las llaves hasta que el agua esté a nuestro gusto; es decir, **sentimos** lo caliente y lo frío de un objeto cuando lo tocamos o nos acercamos a él.

Una percepción de este tipo no tiene validez científica debido a que es subjetiva. Considere la siguiente experiencia:

> Se tienen tres recipientes con agua "fría" , "tibia" y "caliente", respectivamente. Sumergimos la mano derecha en el agua "caliente" y la izquierda en el agua "fría", y luego retiramos rápidamente ambas manos de los recipientes y las sumergimos en el agua "tibia". Observaremos que de cada mano se obtiene una percepción distinta. ¡Hágalo!.

El sentir lo frío o caliente, al tocar un objeto, depende también del material, de la calidad de la superficie y aun del color de tal objeto.

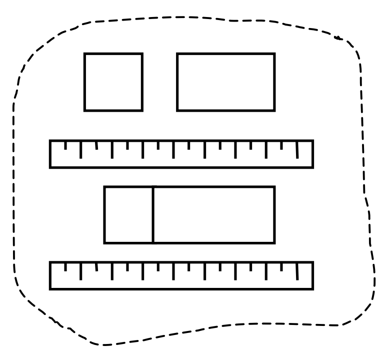
Para hacer cuantitativo este tipo de percepción, esto es, para poder indicar cuán "frío" o cuán "caliente" está un objeto, se introduce la cantidad física **temperatura**.

Preocupémonos inicialmente de definir la **igualdad de temperatura** de dos cuerpos. Para ello podemos observar los cambios que se producen en algunas propiedades físicas de dos cuerpos, previamente aislados, al ser puestos en contacto:

Escogemos dos bloques y medimos sus largos antes de ponerlos en contacto.

Ponemos ambos bloques en contacto y observamos los cambios de sus largos a medida que transcurre el tiempo.

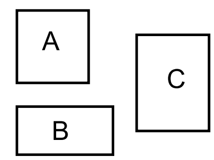
Cuando ya no detectamos ningún cambio de sus largos, diremos que ambos bloques tienen "igual temperatura'".



## *Principio cero de la Termodinámica*

En general, dos cuerpos aislados están en igualdad de temperatura cuando no se observan cambios en ninguna de sus propiedades físicas macroscópicas.

Si determinamos que la temperatura de los cuerpos A y C son las mismas y que la de los cuerpos B y C son las mismas, entonces concluiremos que la temperatura de A es igual a la temperatura de B.




Esto puede parecer obvio porque estamos familiarizados con este tipo de razonamiento, similar al axioma matemático “dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí”. Pero, puesto que la conclusión no es derivable de ningún otro principio físico, se le da el nombre de “Principio Cero de la Termodinámica”. Este principio justifica cualquier método de medición de temperatura.

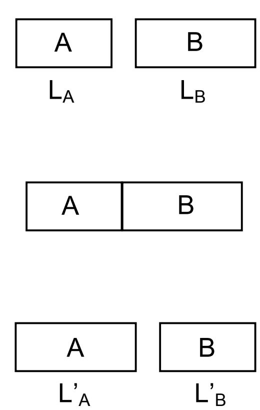
Aunque el vocablo “temperatura” es tan usado, la definición de **temperatura** en Física exige para su comprensión conocimientos que usted adquirirá posteriormente. Por el momento nos interesa medir temperatura, más que definir temperatura.

Asociamos temperatura a la sensación de “frío” o “caliente”.  La expresión “hace calor” se emplea en la vida diaria, como sinónimo de “alta temperatura ambiente”. En Física los conceptos de calor y temperatura son **totalmente distintos** y, por tanto, no puede reemplazarse uno por otro. No emplee la palabra “calor” por la palabra “caliente”.

## *Comparación de temperaturas*

Examinemos la siguiente situación experimental:

Consideremos dos bloques de cobre que inicialmente tienen largos $L_A$ y $L_B$. Si después de tenerlos en contacto durante cierto tiempo observamos que el bloque A se alargó $\left(L'_A > L_A\right)$ y que el B se acortó $\left(L'_B < L_B\right)$, diremos que la temperatura inicial $T_A$ de A era **menor** que la temperatura inicial $T_B$ de B:




$$L'_A > L_A \text{ y } L'_B < L_B \Rightarrow T_A < T_B$$

esto es, podemos comparar temperaturas.

Habiéndose establecido criterios para la igualdad y desigualdad de las temperaturas de dos cuerpos, estamos en condiciones de **graduar** uno de los cuerpos basándonos en las variaciones debidas a los cambios de temperatura de alguna de sus propiedades físicas. A este cuerpo así graduado le llamamos **termómetro**.

Si hemos elegido las variaciones de longitud para graduar, obtenemos un termómetro que nos indicará la temperatura de otro cuerpo cuando puesto en contacto con él su propia longitud se estabilice. Para no afectar significativamente la temperatura del otro cuerpo, entre otras precauciones, debe cuidarse que la masa del termómetro sea mucho menor que la del cuerpo.

Al hablar de temperatura nos referimos a la cantidad física que medimos con un termómetro.

## *Escalas de Temperatura*

Para graduar termómetros y poder medir temperaturas, necesitamos asignar ciertos valores a las temperaturas a las cuales se realizan procesos dados. Cada proceso elegido debe ser un fenómeno físico fácilmente reproducible y que dependa de manera estable de una temperatura fija. Al emplear los términos "estable" y "fija" queremos significar que el fenómeno se realiza siempre a la misma temperatura y ésta se mantiene constante durante todo el desarrollo del fenómeno.

Estas consideraciones nos permiten en la práctica establecer unidades de temperaturas y definir escalas de temperatura.

Describiremos a continuación uno de los métodos que permiten graduar un termómetro :

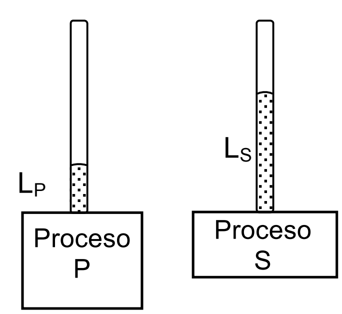
Sean P y S dos procesos que se desarrollan a temperaturas fijas. Asignemos a esas temperaturas los valores:

$t_P$ = a [ unidad de temperatura ] y
$t_S$ = b [ unidad de temperatura ] respectivamente.

Hagámonos de un pequeño tubo de vidrio que contenga, sin llenarlo, cierta cantidad de mercurio.

Coloquemos este tubo en contacto con la substancia en que se desarrolla el proceso P. La columna de mercurio alcanza un largo $L_P$; a este largo le asociamos el valor $t_P$ de temperatura.

Repitamos la operación de manera análoga con el proceso S; al largo $L_S$ le asociamos la temperatura $t_S$.




Cada vez que la columna de mercurio alcance los largos $L_P$ *o* $L_S$ diremos que la temperatura detectada es $t_P$ o $t_S$ según corresponda. Si la columna de mercurio alcanza un largo L tal que $L_P < L < L_S$, la temperatura detectada t está entre $t_P$ y $t_S$. Con este tubo podremos medir temperaturas mayores o menores que las indicadas, siempre que se cumplan ciertas condiciones que determinan el comportamiento del tubo y del mercurio.

**Escala Celsius**: Se escogen como sistemas de referencia hielo fundente (mezcla de hielo y agua químicamente puros) y vapor de agua pura en ebullición, ambos a presión normal. A las correspondientes temperaturas se asignan los valores 0 [°C] y 100 [°C]. La unidad de temperatura:

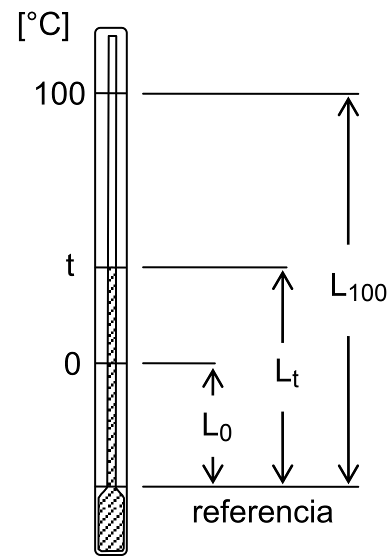
Un grado Celsius ...... 1 [°C]

queda definida como la **centésima** parte de tal rango de temperaturas.

Si para un termómetro de mercurio graduado según la escala Celsius el 0 [°C] corresponde a un largo $L_o$ y el 100 [°C] corresponde a un largo $L_{100}$ , entonces, al largo $L_t$ le corresponde una temperatura t determinada por:

$$t = \frac{L_t - L_0}{L_{100} - L_0} \cdot 100\,[°C] = a_t\,[°C]$$

relación válida mientras se cumpla la proporcionalidad entre la longitud de la columna y la temperatura.




Observe que el valor de t es independiente del nivel de referencia elegido para medir los largos.

**Escala Fahrenheit**: Esta escala se estableció originalmente asignando 0 [°F] a la temperatura de fusión de cierta mezcla frigorífica de hielo y cloruro de amonio y 96 [°F] a la temperatura de la sangre de un cuerpo humano sano. Actualmente esta escala se relaciona con la de Celsius de modo que la temperatura de 0 [°C] corresponde a 32 [°F] y la de 100 [°C] a 212 [°F]. Por tanto, la unidad de temperatura:

Un grado Fahrenheit ...... 1 [°F]

se obtiene como la 180 ava parte del rango de temperaturas entre 32 [°F] y 212 [°F].

Usemos un termómetro graduado en la escala Celsius y otro graduado en la escala Fahrenheit para medir una misma temperatura t. Las lecturas en los termómetros son $t_C = a_C$ [°C ] y $t_F = a_F$ [°F ], respectivamente, de modo que:

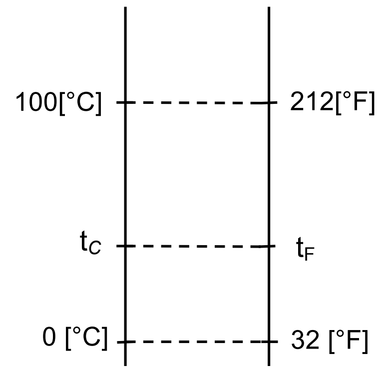
$$t = a_C \left[°C\right] \mathrel{\hat{=}} a_F \left[°F\right]$$

Para encontrar la relación entre las lecturas $t_C$ y $t_F$ establecemos la siguiente proporción:

$$\frac{t_C - 0[°C]}{100[°C] - 0[°C]} = \frac{t_F - 32[°F]}{212[°F] - 32[°F]}$$

$$\frac{t_C}{100[°C]} = \frac{t_F - 32[°F]}{180[°F]}$$

$$\frac{a_C[°C]}{100[°C]} = \frac{(a_F - 32)[°F]}{180[°F]}$$



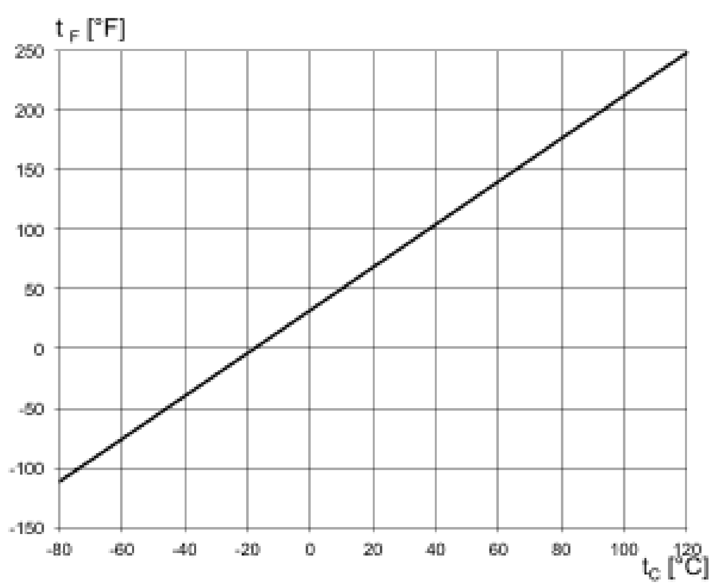

dando para los respectivos números de medición $a_C$ y $a_F$ la relación:

$$a_C = \frac{100}{180} \cdot (a_F - 32) = \frac{5}{9} \cdot (a_F - 32)$$

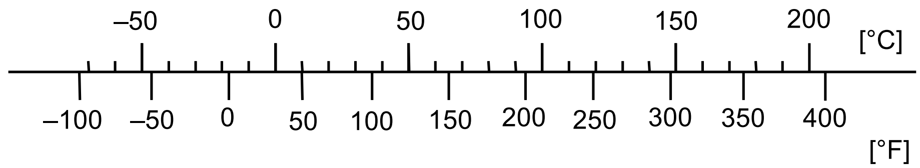
por lo cual:

$$t_C = \frac{5[°C]}{9[°F]} \cdot (t_F - 32[°F]) = a_C[°C]$$

La relación lineal $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32[°C]$ entre los pares de lecturas $t_F$ en escala Fahrenheit y $t_C$ en escala Celsius, correspondiendo cada par a una misma temperatura, queda ilustrada en el gráfico que sigue:



Otra forma de representar la relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es mediante el siguiente *monograma*:




**Escala Kelvin**: Consideraciones teóricas, avaladas por todos los experimentos efectuados a la fecha, establecen que por ningún proceso real puede enfriarse un sistema físico hasta alcanzar una determinada “temperatura mínima” (Tercer Principio de la Termodinámica). A esta temperatura se le asigna el valor “cero Kelvin”. Respecto a este cero, la temperatura es positiva para todo sistema físico.

Se introduce una escala de temperatura que usa como unidad de temperatura:

Un Kelvin . . . . . . 1 [ K ]

definida de tal modo que la temperatura a la cual hielo, agua líquida y vapor de agua coexisten en equilibrio es 273,16 [K] .[1] La temperatura medida en escala Kelvin se denomina “temperatura absoluta”.

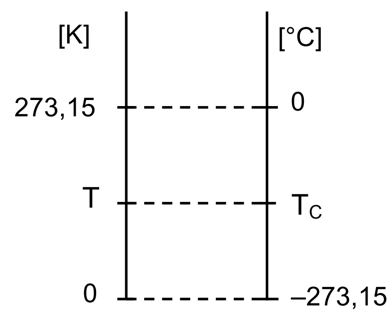
Por definición, la temperatura Celsius (símbolo $t_C$) se relaciona con la temperatura Kelvin ( símbolo *T* ) por:

$$t_C = T - T_f \;:\; \text{con} \;\; T_f = 273{,}15\,[K]$$

siendo 273,15 [K] el punto de ebullición del agua, a presión atmosférica.

La unidad “grado Celsius” es por lo tanto, equivalente a la unidad “Kelvin”:

$$1\big[K\big] \;\hat{=}\; 1\big[°C\big]$$




Un intervalo o diferencia de temperaturas tiene el mismo valor expresado en [°C] y en [K].

## *Ejemplos*

- Expresemos la temperatura 451 [°F] en [°C] y en [K].

Formando la proporción:

$$\frac{t_C}{100\big[°C\big]} = \frac{t_F - 32\big[°C\big]}{180\big[°F\big]} = \frac{\big(451\text{-}32\big)\big[°F\big]}{180\big[°F\big]} = \frac{419}{180}$$

---

[1] A esta temperatura se le llama el “punto triple del agua”.

obtenemos:

$$t_C = \frac{419}{180} \cdot 100\left[°C\right] = \frac{5}{9} \cdot 419\left[°C\right] \quad \simeq \quad 233\left[°C\right]$$

Recordando la definición:

$$t_C = T - 273{,}15\left[K\right]$$

resulta:

$$\begin{aligned} T &= 233\left[°C\right] + 273{,}15\left[K\right] \quad \triangleq \quad 233\left[K\right] + 273{,}15\left[K\right] \\ &\simeq \quad 506\left[K\right] \end{aligned}$$

- Supongamos que disponemos de un termómetro de mercurio y de otro de alcohol. Sabemos que el mercurio se solidifica a –38,9 [°C] y que el alcohol lo hace a –117 [°C]. Nos interesa determinar si podemos usar estos termómetros en un lugar donde la temperatura en invierno descienda hasta –60 [°F].

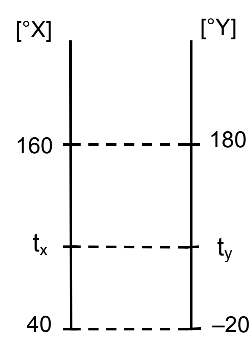
La temperatura $t_F = -60\left[°F\right]$ corresponde en [°C] a:

$$t_C = \frac{5}{9} \cdot \left(t_F - 32\left[°F\right]\right) = \frac{5}{9} \cdot \left(-60 - 32\right)\left[°C\right] \simeq -51\left[°C\right]$$

Como a esta temperatura el mercurio está solidificado, sólo nos serviría el termómetro de alcohol.

- Consideremos dos escalas de temperaturas que se han diseñado asignando a las temperaturas de dos procesos los valores 40 [°X] y 160 [°X] para una, y –20 [°Y] y 180 [°Y] para la otra, respectivamente. Deseamos expresar una temperatura de 57[°X ] "en grados Y".

Comencemos por deducir una expresión general que relacione ambas "escalas de temperatura" formando la proporción:




$$\frac{t_Y - \left(-20\right)\left[°Y\right]}{\left(180 - \left(-20\right)\right)\left[°Y\right]} = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{\left(160 - 40\right)\left[°X\right]}$$

$$t_Y + 20\left[°Y\right] = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{120\left[°X\right]} \cdot 200\left[°Y\right]$$

$$t_Y = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{120\left[°X\right]} \cdot 200\left[°Y\right] - 20\left[°Y\right]$$

Entonces, para la temperatura expresada por $t_X = 57$ [°X] resulta el valor equivalente:

$$t_Y = \left\{\frac{57 - 40}{120} \cdot 200 - 20\right\}\left[°Y\right] \quad \simeq \quad 8\left[°Y\right]$$

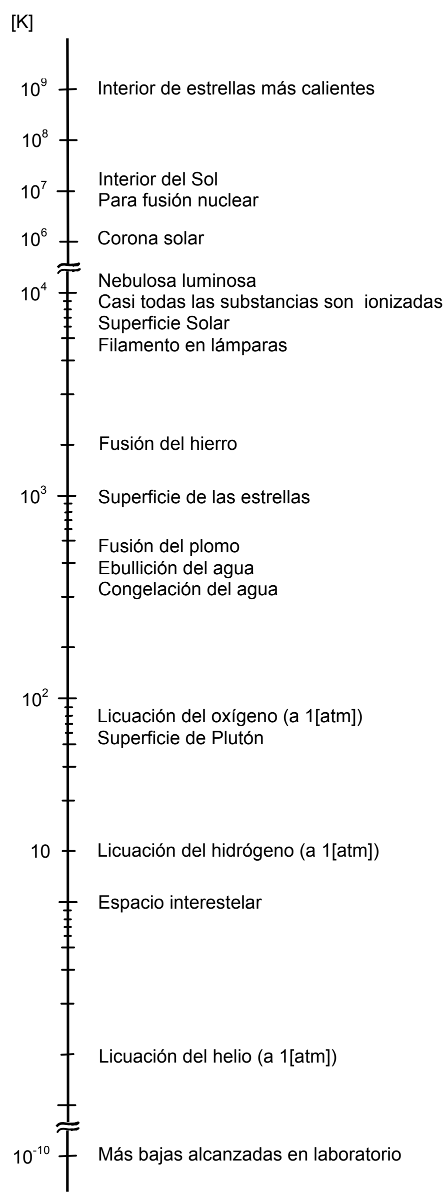
## *Temperatura: órdenes de magnitud*

Hemos señalado la existencia de una temperatura mínima inalcanzable de 0 [K]. Con técnicas modernas se pueden alcanzar fácilmente temperaturas del orden de 1 [K] sumergiendo un sistema en helio líquido. Con un esfuerzo apreciablemente mayor es posible trabajar con temperaturas tan bajas como $10^{-2}$ [K] o aún $10^{-3}$ [K]. Las temperaturas más bajas obtenidas en laboratorios son del orden de $10^{-10}$ [K].

La temperatura del espacio interestelar es del orden de 10 [K] y la temperatura ambiente en la Tierra es del orden de $10^2$ [K] (entre unos –70 [°C] y 50 [°C]). El orden de magnitud de la temperatura de fusión de la mayoría de los metales es $10^3$ [K].

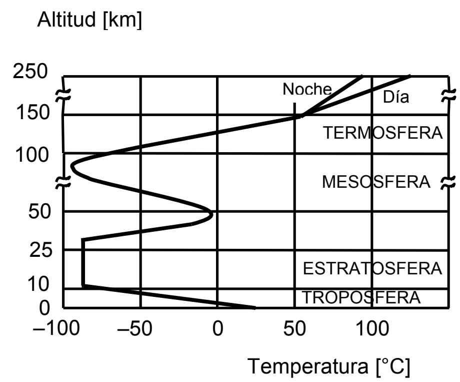
La temperatura en la superficie de las estrellas es del orden de $10^3$ [K] a $10^4$ [K] y los interiores de ellas alcanzan hasta $10^9$ [K]. En los procesos de fisión nuclear se alcanzan temperaturas hasta $10^8$ [K] ; temperaturas de tal magnitud permiten iniciar procesos de fusión nuclear. Especulaciones teóricas recientes predicen que las temperaturas en el Universo tendrían un límite máximo del orden de $10^{13}$ [K].

## Temperaturas

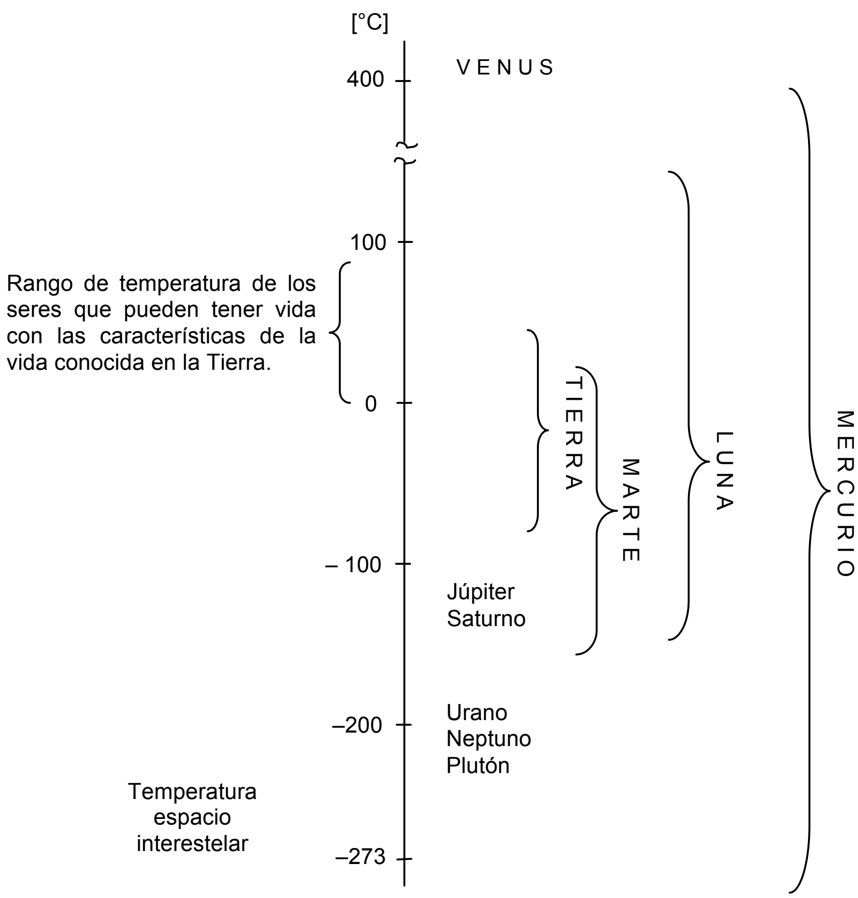


## *Temperaturas: Atmósfera. Planetas*

- En el gráfico adjunto le mostramos las variaciones de la temperatura de la atmósfera con la altitud (altura con respecto a la superficie de la Tierra).




- En la escala presentada a continuación le informamos de los rangos de temperaturas en los planetas de nuestro sistema solar.



## *Ejercicios*

**8-1)** Se considera como temperatura normal del cuerpo humano la de 37 [°C]. Exprese esta temperatura en [°F] y compárela con la usada originalmente por Fahrenheit para establecer su escala. Comente.

**8-2)** Puede transformarse una temperatura expresada en [°F] a su equivalente en [°C] sumándole 40, multiplicando la suma por 5/9 y restando 40 del producto. Verifique la exactitud del procedimiento.

¿Cómo se debería modificar el procedimiento anterior para convertir temperatura Celsius a temperatura Fahrenheit?

**8-3)** La variación de la temperatura anual en cierta localidad se extiende desde –30 [°C] hasta 30 [°C]. Exprese este rango de temperaturas en grados Fahrenheit.

**8-4)** ¿A qué temperatura dan la misma lectura las escalas de Fahrenheit y Celsius?

**8-5)** Complete las subdivisiones en la escala Fahrenheit del monograma de la página 268 y compruebe algebraicamente la correspondencia de algunos valores.

**8-6)** ¿A qué temperatura la lectura en la escala Celsius corresponde a un tercio de la lectura en la escala Fahrenheit? Dé el resultado en [°C].

**8-7)** Para determinada temperatura, las lecturas en las escalas Celsius y Fahrenheit son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario. Determine esa temperatura.

**8-8)** Transformar el intervalo de temperatura correspondiente a 18 [°F] en su equivalente de la escala Celsius.

**8-9)** Una escala centígrada de temperatura propuesta por Celsius en 1742 tenía el 0 correspondiente con el punto de ebullición del agua y el 100 con el de fusión del hielo. Obtenga el valor correspondiente a la temperatura de 68 [°F] en esa escala.

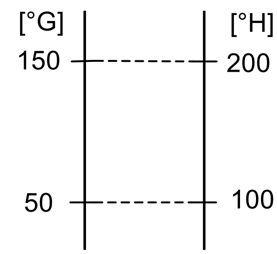
**8-10)** Se aumenta la temperatura absoluta de un objeto en un 10,0% , desde 0,0 [°C] . Calcule la temperatura, en [°C] , que alcanza el objeto.

**8-11)** Un cuerpo que tiene una temperatura de 25 [°C] se coloca en un horno de tal modo que su temperatura aumenta uniformemente con rapidez de 0,050 [K/s] . Calcule la temperatura del cuerpo a los 10 [min] después de ser colocado en el horno.

**8-12)** La temperatura de una habitación sube desde X [°F] hasta Y [°F] . Transforme este aumento de temperatura a [K] .

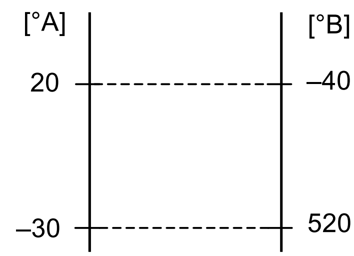
**8-13)** ¿A qué temperatura dan la misma lectura las escalas Fahrenheit y Kelvin?

**8-14)** Se calibran dos termómetros de tal modo que a un punto de referencia se asignan los valores 50 [°G] y 100 [°H], respectivamente; a otro punto de referencia se asignan los valores 150 [°G] y 200 [°H], respectivamente. Exprese la temperatura de 27 [°H] en [°G].



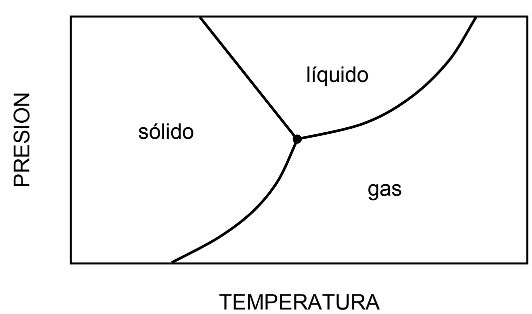

**8-15)** En cierta escala G de temperatura se asigna el valor 0 [°G] al punto de ebullición normal del agua y 150 [°G] al punto de fusión del hielo. Calcule a qué temperatura las lecturas en la escala G y en la escala Celsius coinciden numéricamente.

**8-16)** Se diseñan dos escalas lineales de temperatura usando las unidades 1 [°A] y 1 [°B] y cuyas temperaturas de referencia (puntos fijos) coinciden según el esquema de la figura. Calcule la lectura en cada escala que corresponda al cero de la otra.




**8-17)** En la "escala Rankine" se usa como unidad de temperatura "un grado Rankine" (1[°R ]) con la equivalencia 1 [°R] $\triangleq$ 1 [°F ] . La "temperatura Rankine" $T_R$ está relacionada con la "temperatura Fahrenheit" $t_F$ por $T_R = t_F + 459{,}67$ [°R]. Exprese la temperatura 0 [°R] en [K]. Determine una expresión general para relacionar temperaturas en escala Rankine y en escala Kelvin.

**8-18)** Se define el "punto triple" del agua como el estado en el cual coexisten en equilibrio térmico las fases sólida, líquida y gaseosa del agua. Por acuerdo internacional (Décima Conferencia de Pesos y Medidas, París, 1954) a la temperatura del punto triple del agua se asigna el valor de 273,16 [ K ].




Podemos construir un termómetro basado en las variaciones que experimenta una cantidad física F con los cambios de temperatura y graduarlo tomando como referencia el valor $F_{pt}$ que asume la cantidad F cuando la temperatura es la del punto triple del agua; al indicar sólo un punto de referencia, está implícito que el otro punto de referencia corresponde al 0 [ K ].

Considere que la propiedad física F escogida varía con la temperatura T de acuerdo a la relación lineal $T(F) = \lambda F$. Determine la constante de proporcionalidad considerando la condición $T(F_{pt}) = T_{pt}$ correspondiente al punto triple del agua y escriba la función T(F) usando el resultado obtenido. Si en un caso particular se tiene $F_{pt}$ = 72,7 [unidad] ¿qué temperatura indicaría el termómetro cuando la medición de F diera el valor de 17,4 [ unidad ]?

**8-19)** La graduación de la "escala práctica internacional de temperaturas", en el rango de 0 [°C] a 660 [°C], se basa en las variaciones que experimenta la resistencia eléctrica de un "termómetro de platino" con los cambios de temperatura, usándose la fórmula:

$$R(t_c) = R_0 \cdot \left(1 + At_c + Bt_c^2\right)$$

siendo $R(t_c)$ el valor de la resistencia a la temperatura $t_c$ en la escala Celsius.

Los valores de la resistencia medidos para las temperaturas del punto triple del agua ( 273,16 [K]), del punto de ebullición del agua (100,00 [°C]) y del punto de ebullición del azufre (444,60 [°C] ) son 12,00 [Ω]; 14,82 [Ω] y 27,18 [Ω], respectivamente. Calcule los valores de las constantes $R_o$ , A y B. Si al colocar el termómetro sobre un objeto se mide que su resistencia vale 30 [Ω] ¿cuál es la temperatura del objeto?. Represente gráficamente la función $R(t_c)$.

**8-20)** Consiga un termómetro "de mercurio", que esté graduado por lo menos hasta 100 [°C]. Coloque el termómetro en agua hirviendo durante algunos minutos. Saque el termómetro del agua y observe la variación de la columna del mercurio en el transcurso del tiempo; tomando nota de la indicación del termómetro, por ejemplo, cada 5[s] durante el primer medio minuto, cada 10[s] durante el siguiente minuto y luego cada 20[s], hasta que la lectura del termómetro prácticamente no cambie. Suponga que en esta situación experimental la lectura T del termómetro en función del tiempo t queda descrita aproximadamente por:

$$T(t) - T_a = \left(T_0 - T_a\right) \cdot 2^{-t/\tau}$$

siendo $T_a$ la temperatura ambiente, $T_o$ la temperatura en el instante $t = 0$ y $\tau$ un parámetro de dimensión tiempo. Basado en sus datos, calcule el valor de $\tau$ y represente T en función del tiempo. Comente.

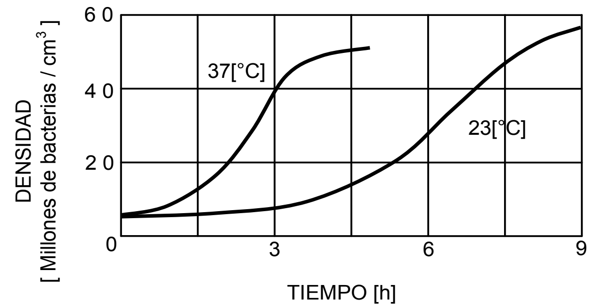
**8-21)** Los procesos metabólicos en los organismos vivos se realizan en un rango relativamente estrecho de temperaturas. Sin embargo, algunas excepciones aumentan significativamente ese rango. Por ejemplo, granos de polen y semillas de algunas plantas han recobrado su actividad normal después de haber sido expuestas a la temperatura del helio líquido y algunas bacterias pueden sobrevivir por varios meses a las temperaturas cercanas a –180 [°C]. Por otra parte, algunos animales de "sangre fría", como el pez "Barbus thermalis", viven en aguas termales de 50 [°C]; algunas especies de bacterias se desarrollan vigorosamente a temperaturas de 70 [°C] y otras viven en arenas petrolíferas a unos 100 [°C]; y aún más, ciertos virus resisten temperaturas de casi 150 [°C].

Ubique en la "escala de temperaturas" de la página 271 la siguiente información:

–268 [°C] , sobreviven granos de polen y semillas
–254 [°C] , sobreviven especies particulares de hongos
–8 [°C] , desarrollo de algunos mohos primitivos
1 [°C] , temperatura del cuerpo de la ardilla "Citellus tridecemlimeatus" invernando
36 [°C] , temperatura media de mamíferos
40 [°C] , temperatura media de pájaros
70 [°C] , cierta bacteria termofílica
85 [°C] , alga verdeazul en aguas termales
100 [°C] , bacteria en pozos petrolíferos profundos.

**8-22)** La temperatura en un cultivo bacteriano influye en el tamaño de las bacterias y en su proliferación.

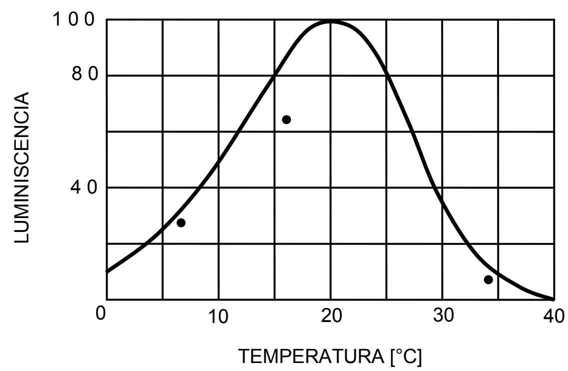
Las curvas de la figura adjunta representan la densidad de un cultivo de la bacteria "Escherichia coli" en función del tiempo a dos diferentes temperaturas.




Comente sobre el efecto que tiene la temperatura en la rapidez de crecimiento y en la población bacterial total. Estime, por interpolación, el número relativo de bacterias en función del tiempo si la temperatura del cultivo fuera 31 [°C].

**8-23)** La luminiscencia de ciertas bacterias varía con la temperatura. Para medir la luminiscencia relativa de la bacteria "Photobacterium phosphoreum" se preparó un cultivo en solución salina en un frasco transparente, que se fotografió sin ayuda de luz exterior.

Los resultados de una serie de mediciones de luminosidad a diferentes temperaturas se muestran en el gráfico adjunto. La curva indica la luminosidad relativa de las bacterias cuando la temperatura de ellas se ha aumentado progresivamente.




Los puntos representan las mediciones efectuadas mientras el cultivo bacteriano se enfriaba, después de haberlo calentado hasta 40 [°C].

Considere que las variaciones de la luminiscencia con cambios de temperatura pueden ser descritas adecuadamente por la función

$$L(T) = \frac{L_m}{1 + A \cdot (T - T_m)^2}$$

y úsela para representar la luminosidad de las bacterias cuando su temperatura se ha disminuido desde 40 [°C] hasta 0 [°C].

**8-24)** En la tabla adjunta se encuentran las temperaturas de fusión y de ebullición de algunas substancias.

"**Punto de ebullición"** de una substancia es la temperatura a la cual sus fases de gas y de líquido subsisten en equilibrio térmico a presión normal.

**"Punto de fusión"** de una substancia es la temperatura a la cual sus fases de sólido y líquido subsisten en equilibrio térmico a presión normal.

| Substancia | Temperatura de fusión [K] | Temperatura de ebullición [K] |
|---|---|---|
| Tungsteno | 3650 | 5800 |
| Oro | 1340 | 2090 |
| Plomo | 600 | 2020 |
| Agua | 273 | 373 |
| Nitrógeno | 66 | 77 |
| Hidrógeno | 13.8 | 20,3 |

Construya una tabla similar en que las temperaturas estén expresadas en "grados Celsius".

**8-25)** Experimentalmente se ha determinado que la temperatura de la llama en un arco eléctrico es aproximadamente de 4000 [ºC]. En la lista que le presentamos a continuación le damos a conocer algunos valores máximos de temperaturas de llamas producidas por combustión:

1700 [°C] , gas de cañería
3900 [°C] , oxi-hidrógeno
3300 [°C] , oxi-acetileno
3500 [°C] , oxi-aluminio
4300 [°C] , hidrógeno-flúor
4700 [°C] , oxi-cianógeno

Considere los "puntos de fusión" de los siguientes materiales:

3150 [°F] , sílica
3750 [°F] , alúmina
5050 [°F] , magnesio
6100 [°F] , tungsteno
6400 [°F] , carburo de zirconio
7250 [°F] , carburo de hafnio

Suponga que desea fundir muestras de estos materiales colocándolas en llamas producidas por combustión o arco eléctrico. Indique de qué llamas podría hacer uso para cada una de las muestras.

**8-26)** Para la fabricación de algunos componentes electrónicos se requiere que ciertos átomos difundan en un material dado. En la descripción de tal proceso interviene la cantidad física *D* cuya variación con la temperatura absoluta T está dada por

$$D(T) = D_0 2^{-\alpha/T}$$

¿Cuál es la dimensión de $\alpha$ si $\dim(T) = \theta$?

Calcule el valor de $\alpha$ si $D_0 = 20\left[cm^2/s\right]$ y D vale $3{,}1 \cdot 10^{-4}\left[cm^2/s\right]$ cuando la temperatura es 200 [°C].

Represente gráficamente D en función de la temperatura para el rango entre 20 [ºC ] y 400 [ºC ].

## *Dilatación*

La experiencia nos dice que al cambiar la temperatura de un cuerpo se producen variaciones en su tamaño; cambian, por ejemplo, los valores de las aristas de un prisma, el diámetro de una esfera, el diámetro y la altura en un cilindro, el largo y el ancho de una plancha, el radio de un disco, el diámetro de un anillo o el largo de una barra.

Aunque las dilataciones afectan el **volumen** de los cuerpos, en determinadas circunstancias podemos considerar "dilataciones en **longitud**" cuando el largo es muy grande con respecto a las medidas lineales de las secciones transversales, como en alambres, cables, rieles y barras. Análogamente, consideramos "dilataciones en **superficie**" cuando examinamos láminas o planchas, donde el espesor es pequeño con respecto a cualquier medida lineal de la superficie.

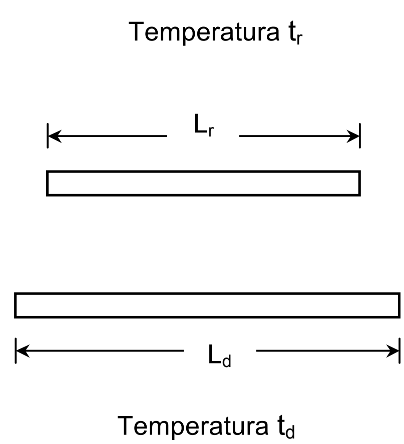
## *Dilatación lineal*

Al medir el largo de una barra a diferentes temperaturas se encuentra que éste cambia con la temperatura.

Sea $L_r$ el largo de una barra medido a una temperatura de referencia $t_r$, y sea $L_d$ su largo a otra temperatura $t_d$.

Los valores del cambio de temperatura

$$\Delta t = t_d - t_r$$




y del correspondiente cambio de longitud

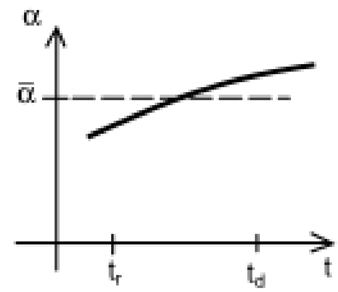
$$\Delta L = L_d - L_r$$

determinados experimentalmente, pueden ser relacionados por la expresión *aproximada*:

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \bar{\alpha}\,\Delta t$$

El "cambio unitario de longitud" $\Delta L / L_r$ es proporcional al cambio de temperatura $\Delta t$. El factor de proporcionalidad $\bar{\alpha}$, llamado "coeficiente de dilatación lineal medio", es una característica del material.

El coeficiente de dilatación lineal de un material dado es función de la temperatura. El valor medio de él depende del rango de temperaturas considerado y de la temperatura de referencia escogida. Sin embargo, en la práctica los posibles valores medios no tienen diferencias significativas en un rango de temperaturas del orden de $10^2$ [°C].



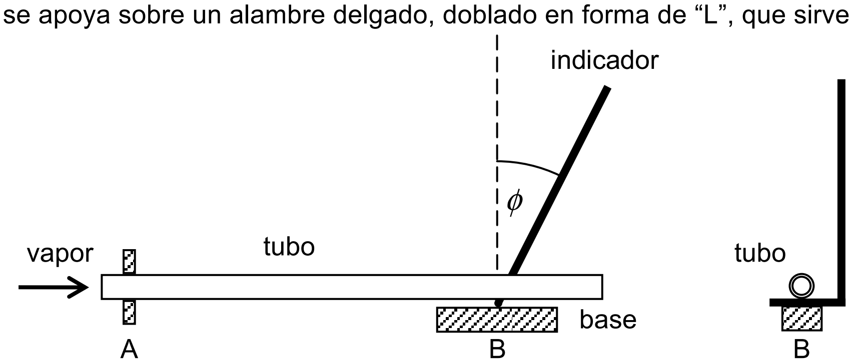

*Por requerimientos de consistencia dimensional:*

$$\dim\left(\frac{\Delta L}{L_r}\right) = \dim\left(\bar{\alpha}\Delta t\right) = 1$$

Además, si en los cálculos las temperaturas se expresan en cierta unidad [ u.t. ], con lo cual $\Delta t = a$ [u.t.] , entonces $\alpha = b\left[1/\text{u.t.}\right]$ es la forma correcta de expresar el coeficiente de expansión lineal.

## *Un experimento*

Sujetamos un tubo de cobre mediante un fijador colocado cerca de uno de sus extremos. El otro extremo del tubo se apoya sobre un alambre delgado, doblado en forma de "L", que sirve de indicador.




Medimos la temperatura ambiente $t_a$. Medimos la longitud $L_a$ entre el fijador A y el punto B en que el tubo se apoya en el alambre indicador. Medimos el diámetro D del alambre indicador.

Hacemos pasar vapor de agua por el tubo de cobre durante cierto tiempo para que éste adquiera la temperatura $t_v$ del vapor. Medimos el ángulo $\phi$ descrito por el alambre indicador.

Los valores obtenidos en las mediciones fueron:

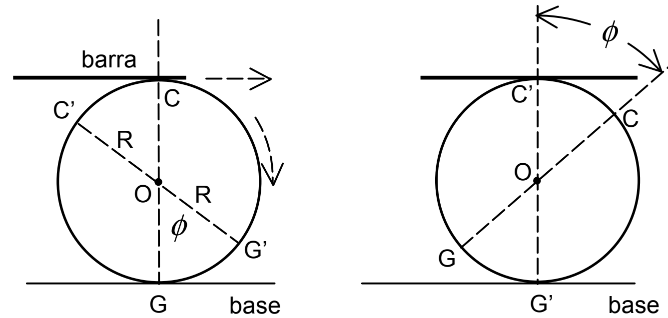
$$D = 0{,}60\left[\text{mm}\right] \qquad t_a = 16\left[°\text{C}\right] \qquad L_a = 62{,}0\left[\text{cm}\right]$$

$$t_v = 100\left[°\text{C}\right] \qquad \phi = 85°$$

La dilatación del tubo de cobre hace que el alambre indicador gire. La relación entre el incremento $\Delta L$ en el largo del tubo, el ángulo de giro $\phi$, en radianes, y el diámetro $D$ del alambre, puede ser encontrada mediante el siguiente razonamiento:

Si un cilindro rueda un ángulo $\phi$, sin resbalar, su apoyo en la base cambia del punto G al punto G', corriéndose una distancia $R\phi$.

Si además, una barra colocada sobre el cilindro no resbala, su punto de apoyo cambia de C a C', corriéndose también en $R\phi$. Resulta, por tanto, que al girar el cilindro un ángulo $\phi$, el punto de apoyo de la barra sobre el cilindro se desplaza, respecto a un observador fijo en la base, una distancia $2R\phi$, siempre que no haya resbalamiento.




Obtenemos así la relación $\Delta L \simeq D \cdot \phi$

Entonces, las mediciones efectuadas nos permiten calcular, aproximadamente, el coeficiente de dilatación lineal del cobre:

$$\alpha_{Cu} = \frac{\Delta L}{L_a} \cdot \frac{1}{\Delta t} \simeq \frac{D \cdot \phi}{L_a \cdot \left(t_v - t_a\right)} =$$

$$= \frac{0{,}60\left[mm\right] \cdot \dfrac{85 \cdot 2\pi}{360}\left[rad\right]}{620\left[mm\right] \cdot \left(100 - 16\right)\left[°C\right]}$$

obteniendo $\alpha_{Cu} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$

## *Coeficientes de dilatación lineal*

- En la tabla siguiente indicamos valores medios típicos de coeficientes de dilatación (expansión) lineal de algunas substancias:

| **Material** | $\alpha$ $[1/°C]$ | **Material** | $\alpha$ $[1/°C]$ |
|---|---|---|---|
| Cuarzo | $4{,}0 \cdot 10^{-7}$ | Bronce | $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ |
| Invar | $9{,}0 \cdot 10^{-7}$ | Aluminio | $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ |
| Vidrio | $5{,}0 \cdot 10^{-6}$ | Zinc | $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ |
| Acero | $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ | Plomo | $2{,}9 \cdot 10^{-5}$ |
| Cobre | $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ | Hielo | $5{,}1 \cdot 10^{-5}$ |
| Latón | $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ | Caucho | $8{,}0 \cdot 10^{-5}$ |

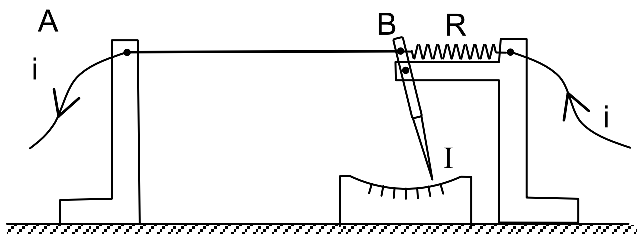
El valor indicado para el coeficiente de expansión lineal del hielo es válido en el rango de temperaturas entre –10 [°C] y 0 [°C].

Que el coeficiente de expansión del acero sea $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ [1/°C] significa que el largo de un alambre de acero de 1[km] aumentaría en 12[mm] si la temperatura subiera en 1 [°C ].

El cuarzo, por tener el coeficiente de expansión relativamente más pequeño, sirve para construir patrones secundarios de longitud y recipientes irrompibles al ser sometidos a cambios bruscos de temperatura.

El "invar" es una aleación de níquel y hierro ( 36% de Ni ) cuyo coeficiente de dilatación lineal es unas 20 veces menor que el de los metales ordinarios, por lo cual es utilizado en la fabricación de piezas de aparatos cuyo funcionamiento se quiere que sea prácticamente independiente de cambios de temperatura.

- El esquema de otro aparato que nos permite determinar coeficientes de expansión, es el siguiente:




Un hilo metálico fino, por ejemplo de cromo-níquel, va de A a B y es mantenido tenso por un resorte R. El hilo se calienta por medio de una corriente eléctrica. La variación de temperatura produce un alargamiento del hilo metálico. La acción del resorte permite detectar el alargamiento mediante la aguja indicadora I.

Lo más interesante de este aparato es que nos permite visualizar el modo como se alarga o se acorta un hilo de cierto material. Si se usa un hilo de acero y se le calienta hasta los 900 [°C] y después se lo deja enfriar se verá que la aguja se mueve de manera irregular entre los 900 [°C] y 800 [°C], lo que nos indica que las variaciones de longitud del acero no son proporcionales a los cambios $\Delta t$ de temperatura en ese rango.

Estudios similares nos indican los rangos de temperaturas dentro de los cuales nos es permitido usar los coeficientes de expansión lineal como constantes en la expresión aproximada $\Delta t \simeq L\,\alpha\,\Delta t$.

## *Aproximaciones de "primer orden"*

Hemos indicado que el cambio del largo de una barra producido por un cambio de temperatura puede expresarse aproximadamente por:

$$L = L_r \,\bar{\alpha}\,\Delta t$$

siendo $L_r$ el largo de la barra medido a la temperatura de referencia $t_r$.

Los valores experimentales de los coeficientes de dilatación lineal tienen en general un orden de magnitud menor o igual a $10^{-5}$ [1/°C]. Aún considerando variaciones de temperatura del orden de $10^2$ [°C] , el producto $\bar{\alpha}\,\Delta t$ tiene a lo más un orden de magnitud de $10^{-3}$:

$$\bar{\alpha} \sim 10^{-5}\left[1/°C\right] \quad \text{y} \quad \Delta t \sim 10^2\left[°C\right] \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha}\,\Delta t \sim 10^{-3} << 1$$

Cuando en el estudio de algunas situaciones físicas están involucradas cantidades cuyas magnitudes son "mucho menor que uno" puede resultar conveniente, tanto en el desarrollo algebraico como en los cálculos numéricos, efectuar juiciosamente ciertas *aproximaciones*. En esta oportunidad trataremos un tipo de aproximaciones que, siendo de utilidad general, tendrán aplicación inmediata en problemas de dilatación.

- Consideremos la expresión $(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2$

  Si $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$(1+\delta)^2 = 1 + 8 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-6}$$
$$= 1{,}008016 \;\simeq\; 1{,}008 = 1 + 2\delta$$

  Si $\delta = -4 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$(1+\delta)^2 = 1 - 8 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-6}$$
$$= 0{,}992016 \;\simeq\; 0{,}992 = 1 + 2\delta = 1 - 2|\delta|$$

Entonces, si $|\delta| << 1$ se cumple $\delta^2 << |\delta|$ y en la suma $1 + 2\delta + \delta^2$ el término $\delta^2$ puede ser "despreciado" respecto al término $1 + 2\delta$, obteniendo la aproximación de "primer orden" en $\delta$:

$$(1+\delta)^2 \simeq 1 + 2\delta$$

- Consideremos la expresión $(1+\delta)^3 = 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3$

  Si $\delta = 7 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$(1+\delta)^3 = 1 + 21 \cdot 10^{-3} + 147 \cdot 10^{-6} + 343 \cdot 10^{-9}$$
$$= 1{,}021147343 \;\simeq\; 1{,}021 = 1 + 3\delta$$

Al comparar los órdenes de magnitud de los términos de $1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3$:

$$3\delta \sim 10^{-2} \qquad 3\delta^2 \sim 10^{-4} \qquad \delta^3 \sim 10^{-7}$$

observamos, que los términos en $\delta^2$ y en $\delta^3$ pueden ser despreciados en la suma con respecto al término $1+3\delta$.

Entonces, si $|\delta| << 1$ resulta $|\delta^3| << 3\delta^2 << 1+3\delta$, por lo cual adoptamos como buena aproximación de "primer orden en $\delta$ a:

$$(1+\delta)^3 \simeq 1+3\delta$$

- Busquemos una aproximación para $\dfrac{1}{1+\delta}$

Si $\delta = 7\cdot10^{-3}$resulta:

$$\frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{1{,}007} = 0{,}99304866...$$
$$\simeq 0{,}993 = 1-\delta$$

Si $\delta = -7\cdot10^{-3}$ resulta:

$$\frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{0{,}993} = 1{,}00704935...$$
$$\simeq 1{,}007 = 1-\delta = 1+|\delta|$$

Procediendo algebraicamente:

$$1:(1+\delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3...$$

| | |
|---|---|
| producto | $1+\delta$ |
| resta | $-\delta$ |
| producto | $-\delta-\delta^2$ |
| resta | $\delta^2$ |
| producto | $\delta^2+\delta^3$ |
| resta | $-\delta^3$ |

notamos que si $|\delta| << 1$ podemos usar la aproximación:

$$\frac{1}{1+\delta} = (1+\delta)^{-1} \simeq 1-\delta$$

que es una aproximación de primer orden en $\delta$.

- Para encontrar una aproximación de primer orden en $\delta$ para $\sqrt{1+\delta}$, podemos usar el siguiente método:

Si $\left|\eta\right| << 1$ tenemos que $\quad (1+\eta)^2 \simeq 1+2\eta$

por tanto $\quad 1+\eta \simeq \sqrt{1+2\eta}$

y haciendo $\delta = 2\eta$ obtenemos:

$$\sqrt{1+\delta} = (1+\delta)^{1/2} \simeq 1+\frac{1}{2}\delta$$

- En general, si $\left|\delta\right| << 1$ vale la aproximación de primer orden en $\delta$:

$$(1+\delta)^p \simeq 1+p\delta$$

para cualquier $p$ real.

- Usando los resultados anteriores podemos encontrar fácilmente una aproximación para el cuociente $\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2}$ cuando $\left|\delta_1\right| << 1$ y $\left|\delta_2\right| << 1$:

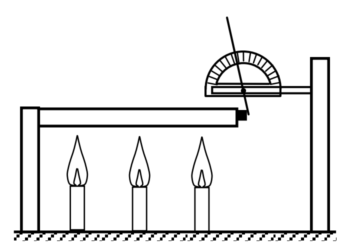
$$\begin{aligned} \frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} &\simeq (1+\delta_1)\cdot(1-\delta_2) = 1+\delta_1-\delta_2-\delta_1\cdot\delta_2 \\ &\simeq 1+(\delta_1-\delta_2) \end{aligned}$$

resultado que se obtiene al despreciar en la suma el término $\delta_1\delta_2$ que es de "segundo orden de pequeñez": si $\delta_1 \sim 10^{-3}$ y $\delta_2 \sim 10^{-3}$ resulta $\delta_1\delta_2 \sim 10^{-6}$.

## *Ejercicios*

**8-27)** Escoja una esfera metálica. Construya un anillo metálico que a la temperatura ambiente tenga un diámetro "igual" al diámetro de la esfera. Caliente o enfríe el anillo o la esfera y observe la factibilidad de que la esfera pase o no por el anillo.

**8-28)** Arme el aparato mostrado en la figura. Fije la varilla metálica por uno de sus extremos. Sujete el transportador y coloque la aguja indicadora, teniendo su punto de giro coincidente con el centro del transportador. Haga que a la temperatura ambiente la aguja indicadora toque justamente el extremo libre de la varilla.



Caliente la barra; use, por ejemplo, algunos mecheros. Obtenga una relación entre la lectura en el transportador y el aumento del largo de la varilla. Efectúe mediciones y cálculos para determinar el coeficiente de expansión lineal de la varilla.

**8-29)** Use diferentes pares de valores de $\delta_1$ y $\delta_2$ de la tabla adjunta para calcular valores aproximados de las expresiones:

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} \quad \text{y} \quad \frac{\delta_1}{1+\delta_2}$$

| $\delta_1$ | $\delta_2$ |
|---|---|
| $7\cdot 10^{-2}$ | $5\cdot 10^{-3}$ |
| $3\cdot 10^{-4}$ | $9\cdot 10^{-4}$ |
| $8\cdot 10^{-6}$ | $2\cdot 10^{-5}$ |

- Efectuando la división $\left(1+\delta_1\right):\left(1+\delta_2\right)$ compruebe la correspondiente aproximación lineal dada en el texto.

- Determine aproximaciones de primer y de segundo orden de la expresión:

$$\delta_1 / \left(1+\delta_2\right)$$

## *Ejemplos de dilatación lineal*

Los resultados experimentales de los cambios de longitud de una barra son adecuadamente descritos por la relación aproximada:

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \alpha \Delta t$$

siendo $\Delta L$ el cambio de longitud respecto a la longitud $L_r$ correspondiente a una temperatura de referencia $t_r$ convenientemente elegida, $\Delta t$ el cambio de temperatura respecto a $t_r$ y $\alpha$ el valor medio del coeficiente de dilatación lineal del material.

Una expresión para el largo $L_d$ de la barra a una temperatura dada $t_d$ puede obtenerse mediante el siguiente desarrollo algebraico:

$$\Delta t = t_d - t_r$$

$$\Delta L = L_d - L_r$$

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \frac{L_d - L_r}{L_r} = \alpha \cdot \Delta t = \alpha \cdot \left(t_d - t_r\right)$$

$$L_d - L_r = L_r \cdot \alpha \cdot \left(t_d - t_r\right)$$

dando como resultado:

$$L_d = L_r \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_d - t_r\right)\right\}$$

- El diseño de un aparato físico requiere que una varilla de acero y otra de cobre tengan una diferencia de largo constante a cualquier temperatura. ¿Cuál debe ser el largo de estas varillas a una temperatura $t_o$ para que tal diferencia sea de 11,0[cm]?

Sean:

$t_q$ una temperatura cualquiera.

$\alpha_a$ y $\alpha_c$ los respectivos coeficientes de dilatación del acero y del cobre a la temperatura $t_q$

$\ell_{oa}$ y $\ell_a$ los largos de la varilla de acero a $t_o$ y a $t_q$ respectivamente.

$\ell_{oc}$ y $\ell_c$ los largos de la varilla de cobre a $t_o$ y a $t_q$ respectivamente.

Haciendo $\Delta t = t_q - t_o$, establecemos las relaciones:

$$\ell_a = \ell_{oa} \cdot \left(1 + \alpha_a \cdot \Delta t\right) \quad \text{y} \quad \ell_c = \ell_{oc} \cdot \left(1 + \alpha_c \cdot \Delta t\right)$$

La diferencia entre ambas es:

$$\left(\ell_a - \ell_c\right) = \left(\ell_{oa} - \ell_{oc}\right) + \left(\ell_{oa} \cdot \alpha_a - \ell_{oc} \cdot \alpha_c\right) \cdot \Delta t$$

La condición de que las diferencias de longitudes sean constantes a cualquier temperatura:

$$\ell_a - \ell_c = \ell_{oa} - \ell_{oc} = K \text{, constante}$$

implica:

$$\left(\ell_{oa} \cdot \alpha_a - \ell_{oc} \cdot \alpha_c\right) \cdot \Delta t = 0 \quad \rightarrow \quad \ell_{oa} \cdot \alpha_a = \ell_{oc} \cdot \alpha_c$$

Esto es, los largos a la temperatura $t_o$ son inversamente proporcionales a los coeficientes de dilatación:

$$\frac{\ell_{oa}}{\ell_{oc}} = \frac{\alpha_c}{\alpha_a}$$

Entonces:

$$\ell_{oa} - \ell_{oc} = K = \ell_{oa} - \frac{\alpha_a}{\alpha_c} \cdot \ell_{oa} = \left(1 - \frac{\alpha_a}{\alpha_c}\right) \cdot \ell_{oa}$$

$$= \frac{\alpha_c}{\alpha_a} \cdot \ell_{oc} - \ell_{oc} = \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_a} - 1\right) \cdot \ell_{oc}$$

con lo cual:

$$\ell_{oa} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c - \alpha_a} \cdot K \qquad \text{y} \qquad \ell_{oc} = \frac{\alpha_a}{\alpha_c - \alpha_a} \cdot K$$

Introduciendo el valor K = 11,0[cm] y los valores numéricos de los coeficientes de dilatación lineal a 25[°C]: $\alpha_c = 1{,}66 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$ y $\alpha_a = 1{,}23 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$, resulta que a 25 [°C] el largo de la varilla de acero debe ser 42,5[cm] y el de la de cobre 31,5[cm] .

Le hacemos notar que si bien las expresiones algebraicas obtenidas aparecen como válidas para cualquier temperatura, ellas están limitadas por los fenómenos físicos que pueden producirse y de los cuales no da cuenta la ley aproximada $\Delta L = L_r\, \alpha \Delta t$ que usamos como base. Por ejemplo, uno de estos fenómenos es la fusión de los metales.

- Un reloj de péndulo de largo $L_e$ a la temperatura $t_e$, marca la hora exactamente. El coeficiente de expansión lineal del material del péndulo es $1{,}85 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$. ¿Cuánto atrasará por día, aproximadamente, si la temperatura del ambiente sube en 10[°C]?

El período de un péndulo, que corresponde al tiempo de una oscilación completa, es proporcional a la raíz cuadrada del largo del péndulo:

$$\tau = \gamma \cdot \sqrt{L}$$

donde el factor $\gamma$ es tal que al introducir el largo en [cm] , el período resulta en [ s ] .

A la temperatura $t_e$ el largo es $L_e$ y el período es $\tau_e = \gamma\sqrt{L_e}$ .

Cuando la temperatura sube en $\Delta t$ el largo del péndulo aumenta a:

$$L_s = L_e \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta t\right) = L_e + \alpha \cdot L_e \cdot \Delta t$$

y el período correspondiente es $\tau_s = \gamma \cdot \sqrt{L_s}$

El número de segundos que el reloj “pierde” por cada oscilación es:

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \tau_s - \tau_e = \gamma \cdot \left\{\sqrt{L_s} - \sqrt{L_e}\right\} \\ &= \gamma \cdot \left(\sqrt{L_s} - \sqrt{L_e}\right) \cdot \frac{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}} = \gamma \cdot \frac{\left(L_s - L_e\right)}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}} = \gamma \cdot \frac{\alpha \cdot L_e \cdot \Delta t}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}}\end{aligned}$$

Como el coeficiente de dilatación es pequeño $\left(\alpha << 1\right)$, podemos **aproximar**:

$$\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e} \simeq 2\sqrt{L_e}$$

con lo cual:

$$\Delta\tau = \gamma \cdot \frac{\alpha \cdot L_e \cdot \Delta t}{2\sqrt{L_e}} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \sqrt{L_e} \cdot \Delta t}{2} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} \cdot \tau_e$$

Además, el número de oscilaciones que ejecuta el péndulo en un día de temperatura ambiente $t_e$ es $N = 86400[s] / \tau_e$. Suponiendo que el péndulo ejecutara este mismo número de oscilaciones por día, a pesar del cambio de temperatura, resulta entonces que el "atraso del reloj por día" es aproximadamente:

$$\Delta\tau \simeq \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} \tau_e \cdot \frac{86400[s]}{\tau_e} = \alpha \cdot \Delta t \cdot 43200[s] =$$
$$= 1{,}85 \cdot 10^{-5} [1/°C] \cdot 10 [°C] \cdot 4{,}32 \cdot 10^4 [s] \simeq 8[s]$$

• Para asegurar un ajuste "técnicamente perfecto", los remaches de aluminio usados en la construcción de aeroplanos se hacen ligeramente más gruesos que los orificios y se enfrían, por ejemplo con "hielo seco" ($CO_2$ sólido), antes de ser introducidos en aquellos. Suponga que el diámetro de un orificio sea de 17,50[mm] a una temperatura ambiente de 20 [°C ]. Calcule el diámetro del remache a 20 [°C] para que su diámetro sea igual al del orificio cuando el remache se enfríe a –78 [ C], la temperatura del hielo seco.

Tomando como temperatura de referencia $t_r$ = –78 [°C] para la cual se desea que el diámetro del remache sea $D_r$ = 17,50[mm] , resulta:

$$D_{20} - D_r = D_r \cdot \alpha_{Al} \cdot (20[°C] - t_r)$$

$$D_{20} - 17{,}50[mm] = 17{,}50[mm] \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} [1/°C] \cdot (20 + 78)[°C] =$$
$$\simeq 4{,}1 \cdot 10^{-2} [mm]$$

Por tanto, el diámetro del remache a 20 [°C] debe ser aproximadamente 17,54[mm ] .

Compruebe usted que al resolver el problema tomando como temperatura de referencia 20 [°C] obtendrá este mismo resultado aproximado.

• La medición del largo de una barra se ha efectuado con una regla de acero graduada en milímetros y que ha sido calibrada a 18 [°C] . La longitud medida fue de 68,27[cm] a la temperatura ambiente de 29 [°C] ¿ Qué error se cometió ?

A 18 [°C] la lectura 68,27 es igual al largo $L_{18}$ = 68,27[cm].
A 29 [°C] el largo correspondiente a la lectura 68,27 es:

$$L_{29} = L_{18} \cdot \{1 + \alpha_a \cdot (29[°C] - 18[°C])\}$$

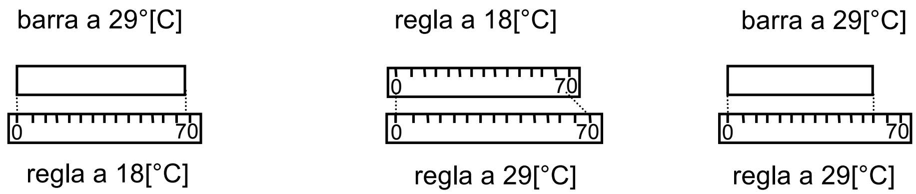
Entonces, la variación de la indicación de la regla es:

$$L_{29} - L_{18} = L_{18} \cdot 11[°C] \cdot \alpha_a$$

y usando el dato $\alpha_a = 1{,}2 \cdot 10^{-5} [1/°C]$, obtenemos para el error cometido en la lectura el valor:

$$L_{29} - L_{18} = 68{,}27[cm] \cdot 11[°C] \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} [1/°C] \simeq 0{,}01[cm]$$

Esto indica que el largo "verdadero" de la barra a la temperatura ambiente de 29[°C] es de ( 68,27 + 0,01 ) [cm] .




La regla indicaría el largo verdadero de la barra a 29[°C]

Como las marcas en la regla se "separan" la regla indicaría un valor "menor" que si no se dilatara.

Este ejemplo nos señala que para efectuar mediciones con gran precisión es necesario tomar en cuenta tanto la temperatura a la que se calibra el instrumento como la temperatura a la que se efectúa la medición.

- Dos láminas, A y B , de metales diferentes, tienen igual largo a la temperatura $t_r$ . Están remachadas juntas de modo que cuando aumenta la temperatura se doblan. Suponiendo que se doblen en forma de un arco de circunferencia, se pide calcular el radio de esa circunferencia.

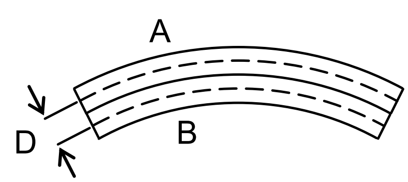
Sean:

| | |
|---|---|
| $L_r$ | el largo inicial común de ambas láminas. |
| $\alpha_A$ y $\alpha_B$ | los coeficientes de expansión lineal de A y B, respectivamente. |
| $\Delta t$ | el aumento de temperatura. |
| $L_A$ y $L_B$ | los largos dilatados de las líneas centrales de A y B, respectivamente. |
| $d_A$ y $d_B$ | los espesores de A y B, respectivamente. |

Suponiendo que las líneas centrales de las láminas se dilatan independientemente, tenemos:

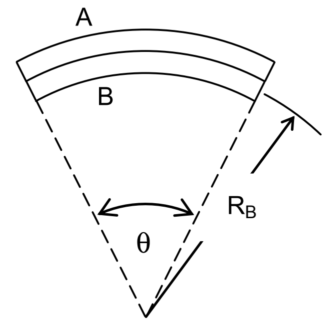
$$L_A = L_r \cdot \left(1 + \alpha_A \cdot \Delta t\right)$$

$$L_B = L_r \cdot \left(1 + \alpha_B \cdot \Delta t\right)$$



Considerando que la separación entre las líneas centrales de A y B es $D = \left(d_A + d_B\right)/2$ y suponiendo que la línea central de B forma un arco de circunferencia de radio $R_B$, tenemos:

$$L_A = \left(R_B + D\right) \cdot \theta$$
$$L_B = R_B \cdot \theta$$




Igualando los cuocientes $L_A / L_B$ resulta:

$$\frac{R_B + D}{R_B} = \frac{1 + \alpha_A \cdot \Delta t}{1 + \alpha_B \cdot \Delta t}$$

Reconociendo que los productos $\delta_A = \alpha_A \Delta t$ y $\delta_B = \alpha_B \Delta t$ tienen valores cuyo orden de magnitud típico es de $10^{-3}$<<1, podemos usar la aproximación:

$$\frac{1 + \alpha_A \cdot \Delta t}{1 + \alpha_B \cdot \Delta t} \simeq 1 + \left(\alpha_A - \alpha_B\right) \cdot \Delta t$$

Entonces: $\quad 1 + \dfrac{D}{R_B} \simeq 1 + \left(\alpha_A - \alpha_B\right) \cdot \Delta t$

dando como resultado: $\quad R_B \simeq \dfrac{d_A + d_B}{2\left(\alpha_A - \alpha_B\right) \cdot \Delta t}$

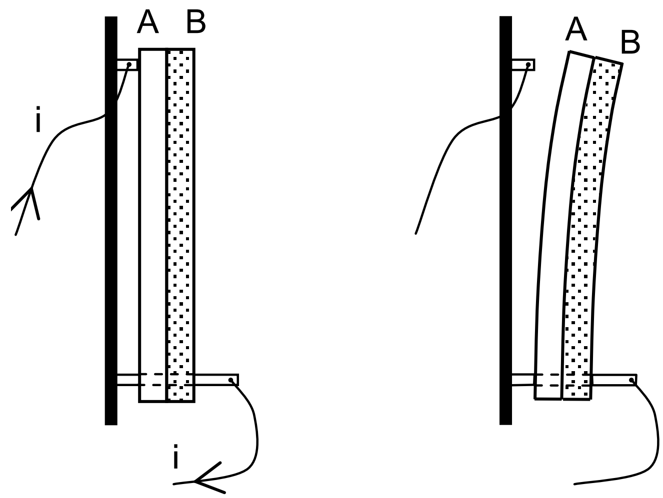
Para obtener el valor del radio $R_B$ hemos supuesto que el par de láminas adquiere al dilatarse la forma de un arco de circunferencia. En la realidad, el radio de curvatura será algo mayor que el calculado debido a que hemos despreciado los efectos de una fuerza compresora sobre A y de una extensora sobre B.

Note, además, que si $\alpha_A = \alpha_B$ las láminas no se curvan $\left(R_B \to \infty\right)$

El dispositivo analizado en este problema tiene una aplicación directa: la construcción de "termostatos" usando láminas bimetálicas.

Por ejemplo, tenemos dos varillas metálicas A y B unidas una al lado de la otra. Si $\alpha_A > \alpha_B$ el conjunto se dobla, al calentarse, tal como se indica en la figura.

El doblamiento de un par bimetálico se puede usar para abrir o cerrar circuitos eléctricos cuando un sistema ha llegado a una temperatura prefijada. Pares bimetálicos encuentran aplicación en refrigeradores, calentadores de agua, señalizadores de viraje en automóviles y otros aparatos.




## *Ejercicios.*

**8-30)** Considere dos barras de aluminio que tienen 1,00[m] de largo cuando una se mide a 0 [°C] y la otra a 25 [°C]. Determine la diferencia entre sus largos a 20 [°C].

**8-31)** Supongamos que unos rieles de acero midan 18,0[m] de largo al ser colocados en un día de invierno, en que la temperatura es de –2 [°C]. Determine el espacio que debe dejarse entre ellos para que estén justamente en contacto un día de verano en que la temperatura sea 40 [°C].

**8-32)** La medición del largo de un puente de acero, efectuada a cierta temperatura, dio el resultado 200,0[ft]. Calcule la diferencia entre su largo en un día de invierno cuando la temperatura es de –20 [°F] y en un día de verano cuando la temperatura es de 100 [°F].

**8-33)** Un tubo fabricado de cierta aleación mide 10,00[ft] a 73 [°F] y se encuentra que incrementa su longitud en 0,75 [in] cuando se calienta a 570 [°F]. Calcule el coeficiente de expansión lineal de la aleación.

**8-34)** Determine el coeficiente de expansión lineal de una barra que tiene un largo $L_a$ a la temperatura $t_a$ y un largo $L_b$ a $t_b$. Compruebe que si tomara como referencia $L_a$ y $t_a$, obtendría $\alpha = \left(L_b - L_a\right) / \left\{L_a \cdot \left(t_b - t_a\right)\right\}$ ¿Qué expresión obtendría si usara como referencia $L_b$ y $t_b$? Compare ambas expresiones para $\alpha$. Reemplace los valores del ejercicio anterior en cada una de las expresiones e indique si son o no significativamente diferentes.

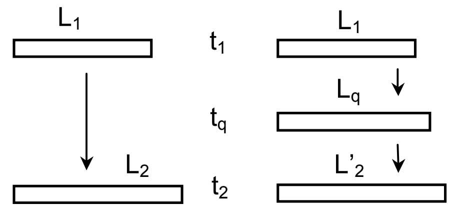
## *Comentarios*

- Dos barras del mismo coeficiente de expansión lineal $\alpha$ se cortan de modo que tengan igual largo a una temperatura $t_1$. Una de ellas se lleva directamente a un lugar de temperatura ambiente $t_2$ . La otra se coloca primero en un ambiente de temperatura $t_q$ , y luego se traslada al lugar de temperatura $t_2$. Si calculamos los largos de las barras a la temperatura $t_2$ mediante la relación aproximada usual, ¿obtendremos el mismo valor al considerar los diferentes procesos?

Sea $L_1$ el largo de cada barra a la temperatura $t_1$.

El largo $L_2$ a la temperatura $t_2$ de la barra que cambia directamente del ambiente de temperatura $t_1$ al de temperatura $t_2$ está dado por:

$$L_2 = L_1 \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_1\right)\right\}$$




No se estipula que $t_1 < t_2$ ni que $t_1 < t_q < t_2$

En el caso de la otra barra, obtenemos primero el largo $L_q$ a temperatura $t_q$:

$$L_q = L_1 \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_q - t_1\right)\right\}$$

y luego, el largo $L_2^{'}$ a temperatura $t_2$:

$$L_2^{'} = L_q \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_q\right)\right\}$$

Reemplazando el valor previo de $L_q$ resulta:

$$\begin{aligned} L_2^{'} &= L_1 \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_q - t_1\right)\right\} \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_q\right)\right\} \\ &= L_1 \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left[\left(t_2 - t_q\right) + \left(t_q - t_1\right)\right] + \alpha^2 \left(t_q - t_1\right)\left(t_2 - t_q\right)\right\} \end{aligned}$$

Manteniendo el criterio de aproximación al primer orden en $\alpha \Delta t$, que estamos usando, aceptamos como válida la expresión:

$$L_2^{'} \simeq L_1 \cdot \left\{1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_1\right)\right\}$$

Observamos que los cálculos para los largos de cada barra a la misma temperatura $t_2$ dan el mismo resultado en aproximación de primer orden:

$$L_2^{'} \simeq L_2$$

lo que está de acuerdo al consenso de que si dos barras de idéntico material tienen igual largo a una misma temperatura, mantendrán la igualdad de largo cada vez que tengan igual temperatura, independientemente de la historia de las barras. Sin embargo, en algunos casos esto no es efectivo, ya que en ciertos rangos de temperaturas pueden producirse, por ejemplo, cambios en la estructura cristalina de las barras que afecten a su largo y al comportamiento físico subsiguiente.

- Si el largo de una barra es $L_r$ a cierta temperatura de referencia $t_r$ ¿cuál será la diferencia de los largos de la barra a dos temperaturas $t_1$ y $t_2$ dadas ?

El largo de la barra en función de la temperatura $t$ está dado por:

$$L(t) = L_r \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t - t_r)\right\}$$

entonces:

$$L_1 = L(t_1) = L_r \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t_1 - t_r)\right\}$$
$$L_2 = L(t_2) = L_r \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t_2 - t_r)\right\}$$

de donde:

$$L_2 - L_1 = L_r \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

Por no aparecer en esta expresión la temperatura de referencia $t_r$, la diferencia de largos queda condicionada a la medición $L_r$, que puede hacerse a cualquier temperatura. Por otra parte, es razonable pensar que para dos temperaturas dadas la diferencia de largos estaría determinada sin ambigüedad por la diferencia de temperatura. Podemos justificar tal discrepancia basándonos en el hecho de que estamos empleando relaciones aproximadas de primer orden en $\alpha \Delta t$. Por ejemplo, al tomar como condiciones de referencia $\{t_1, L_1\}$ o $\{t_2, L_2\}$ se obtienen las expresiones

$$L_2 - L_1 = L_1\, \alpha \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{o} \quad L_2 - L_1 = L_2\, \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

respectivamente, cuyas evaluaciones dan el mismo resultado aproximado ya que predomina el factor $\alpha \Delta t$, que tiene orden de magnitud $10^{-3}$ en situaciones físicas reales.

En todo caso, para evitar ambigüedades de este tipo, u otras similares, los resultados de mediciones de longitud se suelen entregar a una temperatura de referencia fijada por acuerdos internacionales, por ejemplo 20 [°C].

- Cuando en el desarrollo de problemas de dilatación lineal se usa la relación

$$L_d = L_r \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t_d - t_r)\right\},$$

se suele hacer coincidir la temperatura y el largo de referencia con las condiciones iniciales detectadas de la descripción del proceso que requiere ser analizado. Surge la pregunta ¿qué influencia tiene en los resultados el considerar como condiciones iniciales las condiciones finales del proceso y viceversa?

Para respondernos a esta pregunta, consideremos primero las condiciones iniciales $\{t_i, L_i\}$. Entonces, el largo $L_f$ a temperatura $t_f$ está dado por:

$$L_f = L_i \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t_f - t_i)\right\}$$

Por otra parte, si consideramos como referencia $\{t_f, L_f\}$ para el largo inicial $L_i$ a temperatura $t_i$ escribimos:

$$L_i = L_f \cdot \left\{1 + \alpha \cdot (t_i - t_f)\right\}$$

y despejando $L_f$ resulta:

$$L_f = \frac{L_i}{1+\alpha\cdot\left(t_i - t_f\right)} \simeq L_i \cdot \left\{1-\alpha\cdot\left(t_i - t_f\right)\right\}$$

por tanto:

$$L_f \simeq L_i \cdot \left\{1-\alpha\cdot\left(t_f - t_i\right)\right\}$$

Esta expresión para $L_f$ , obtenida al hacer la aproximación de primer orden en $\alpha\Delta t$, coincide con la escrita para $L_f$ a partir de las condiciones iniciales $\{ t_i , L_i \}$ .

## *Ejercicios*

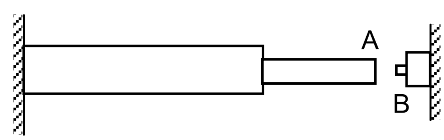
**8-35)** Transforme los coeficientes de expansión lineal de la tabla en la página 279, que están expresados en la unidad [1/°C ], de modo que queden expresados en [1/°F] .

**8-36)** Se desea que, a cualquier temperatura, dos barras de distintas aleaciones, sea una 16[cm] más larga que la otra. Calcule las longitudes de estas barras a 18 [°C]. Los coeficientes de dilatación de las aleaciones valen $8{,}9\cdot 10^{-6}\left[1/°C\right]$ y $34\cdot 10^{-6}\left[1/°C\right]$ a tal temperatura.

**8-37)** Una cinta de acero para medir, de 100,00 [ft], proporciona medidas “correctas” a la temperatura 65 [°F] . La distancia entre dos puntos medida con esta cinta, un día cuando la temperatura era 95 [°F], fue 76,58 [ft]. ¿Cuál es la distancia “real” entre los puntos a 95 [°F]?

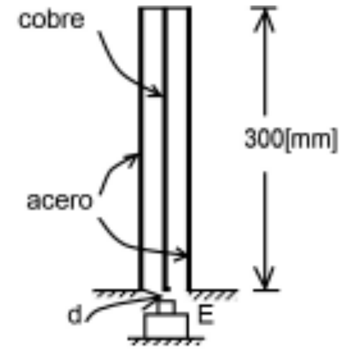
8-38) Un reloj ha sido ajustado para que su péndulo tenga un período de oscilación de 2,0 [s] al encontrarse en un ambiente de 25 [°C]. La varilla que forma parte del péndulo es de bronce. Determine, aproximadamente, el número de segundos que atrasaría o adelantaría el reloj en un día en que la temperatura ambiente fuera de 15 [°C].

**8-39)** Un dispositivo como el representado en la figura puede usarse para proteger térmicamente un circuito eléctrico. Está formado por dos varillas soldadas, una de acero de 4,0 [mm] de diámetro y una de cobre de 2,0 mm] de diámetro.




Sus largos a la temperatura de 20[°C] son, respectivamente 30,0 [cm] y 15,0[cm]. ¿A qué temperatura se produce la desconexión, si ésta tiene efecto cuando el punto A del dispositivo toca el interruptor B, que se encuentra a 0,12 [mm] de A cuando la temperatura es 20 [°C]?

**8-40)** Un interruptor de "acción térmica", como el esquematizado en la figura, está construido con tres varillas. Las dos varillas exteriores son de acero y la central es de cobre. ¿A qué distancia *d* debe ponerse el interruptor eléctrico E para que al aumentar la temperatura en 200 [°C] se produzca el contacto?

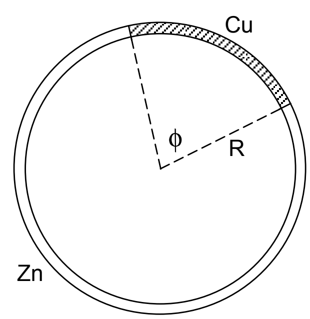



**8-41)** Una rueda tiene un radio de 30,00 [cm] y una llanta de hierro tiene 29,98 [cm] de radio interior. ¿Cuánto debe aumentarse la temperatura de la llanta para que ajuste "perfectamente" en la rueda?

**8-42)** Un anillo de acero cuyo diámetro interior es de 3,000 [in] a 20 [°C], se calienta y se coloca en un cilindro de bronce que mide 3,002 [in] de diámetro a 20 [°C]. ¿Cuál es la temperatura mínima a la que debe calentarse el anillo? Si posteriormente el anillo y el cilindro se enfriaran a qué temperatura se deslizaría el anillo del cilindro?

**8-43)** Un alambre homogéneo se dobla en forma de anillo dejándose una separación de 2,83 [cm] entre los extremos del alambre. Al incrementar uniformemente la temperatura del alambre en 176 [°C] se encuentra que la separación aumenta a 2,85[cm] . Calcule el coeficiente de expansión lineal del alambre.

**8-44)** Dos trozos de alambre, uno de cobre y otro de zinc, están soldados por sus extremos y forman un anillo como se indica en la figura. Inicialmente, a la temperatura $T_1$, el radio del anillo es $R_1$ y el arco de Cu subtiende un ángulo $\phi_1$. Determine, haciendo ciertas suposiciones convenientes, el ángulo $\phi_2$ que subtendería el arco de Cu a una temperatura $T_2$.




## *Dilatación de superficies*

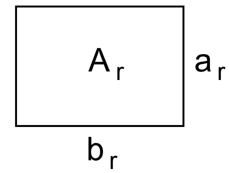
Cuando varía la temperatura de una placa, su superficie cambia. Consideremos, por ejemplo, una placa rectangular de lados $a_r$ y $b_r$ a cierta temperatura de referencia $t_r$. Cuando la temperatura cambia en $\Delta t$ los lados de la placa cambian a:

$$a = a_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)$$
$$b = b_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)$$

El área original de la placa era:

$$A_r = a_r \cdot b_r$$

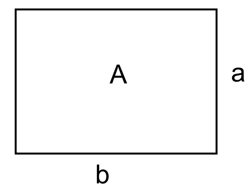
Temperatura $t_r$




y al variar la temperatura en $\Delta t$ es:

$$A = a \cdot b = a_r \cdot \left(1+\alpha\Delta t\right) \cdot b_r \cdot \left(1+\alpha\Delta t\right)$$
$$= A_r \cdot \left(1+2\alpha\Delta t+\alpha^2\left(\Delta t\right)^2\right)$$

Temperatura $t_r + \Delta t$




Como el coeficiente de expansión lineal $\alpha$ es “muy pequeño”, $\alpha \sim 10^{-5}\left[1/°C\right]$, el término en $\alpha^2$ puede “despreciarse” con respecto al término en $\alpha$, aún para $\Delta t \sim 10^3\left[°C\right]$, $\alpha\Delta t \sim 10^{-2}$ y $\left(\alpha\Delta t\right)^2 \sim 10^{-4} \ll 10^{-2}$, podemos en consecuencia considerar como una buena aproximación:

$$A \simeq A_r \cdot \left(1+\beta\Delta t\right)$$

donde hemos puesto $\beta = 2\alpha$. Llamamos a $\beta$, “coeficiente de expansión superficial”.

Aunque, por motivos de simplicidad, hemos usado una superficie rectangular para obtener la expresión:

$$A_t \simeq A_r \cdot \left(1+\beta\Delta t\right) \quad \text{con} \quad \Delta t = t - t_r$$

ella es válida para superficies de cualquier forma, por supuesto dentro de cierto rango de temperaturas y en las condiciones que las aproximaciones efectuadas sigan rigiendo.

Además, podemos escribir esta última expresión en las formas:

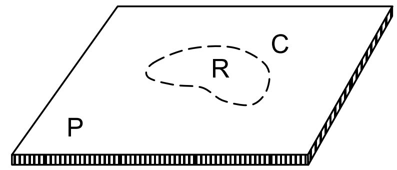
$$\Delta A = A_t - A_r = \beta A_r \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta A}{A_r} = \beta\Delta t$$

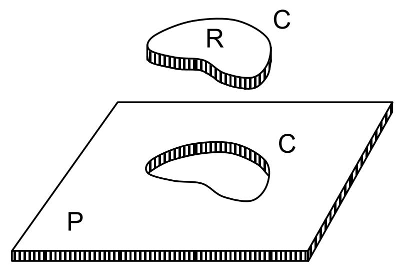
que nos dicen que el cambio de área $\Delta A$, respecto al área $A_r$ a la temperatura de referencia $t_r$, es proporcional al área de referencia $A_r$ y al cambio de temperatura $\Delta t = t - t_r$. Siendo el factor de proporcionalidad $\beta$ el “coeficiente de expansión superficial”.

Consideremos el siguiente “experimento”:

En una placa homogénea P dibujamos un contorno C que determina la región R en la placa. Cuando la temperatura de la placa aumenta, se encuentra que el área de la placa aumenta y que el área de la región R también aumenta; donde los respectivos cambios de áreas son igualmente proporcionales a las áreas iniciales.




Separamos de la placa P la región R haciendo un “corte ideal” (no se pierde material) a lo largo del contorno C. Al aumentar uniformemente la temperatura de la placa agujereada y de la región R, se encuentra que la región R cabe exactamente en el hueco de la placa, cuando las temperaturas son iguales.




Por tanto, podemos decir que “los huecos en las placas se dilatan como si estuvieran constituidos del mismo material de la placa”.

## *Ejemplos*

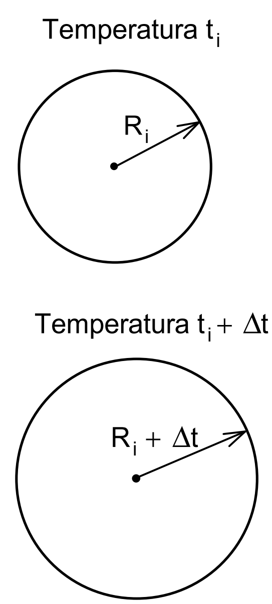
- El radio de un círculo es $R_i$ a la temperatura $t_i$ y cambia en $\Delta R = \alpha R_i \Delta t$ al cambiar la temperatura en $\Delta t$, respecto a $t_i$. Considerando el área como función del radio, $A(R) = \pi R^2$, calcule el correspondiente cambio de área como función del cambio de temperatura.

Si $A = A(R)$, el cambio de área $\Delta A$ correspondiente a un cambio de radio $\Delta R$ está dado por:

$$\Delta A = A(R_i + \Delta R) - A(R_i)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Delta A &= \pi \cdot (R_i + \Delta R)^2 - \pi \cdot R_i^2 \\ &= \pi \cdot \left\{R_i^2 + 2R_i\,\Delta R + (\Delta R)^2\right\} - \pi R_i^2 \\ &= \pi \cdot \left\{2R_i \cdot \alpha R_i\,\Delta t + (\alpha \Delta R_i \Delta t)^2\right\} = \\ &= A_i \cdot \left\{2\alpha\Delta t + (\alpha\Delta t)^2\right\}\end{aligned}$$

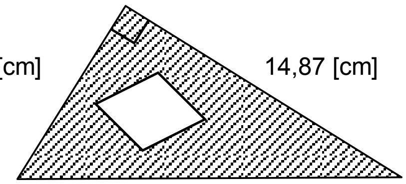



y manteniendo sólo el término de primer orden en $\alpha\Delta t$ resulta:

$$\Delta A \simeq 2\alpha A_i \Delta t$$

La expresión obtenida, $\Delta A = \beta A_i \Delta t$ , concuerda con lo afirmado anteriormente de que en la dilatación de superficies el cambio de área es independiente de la forma.

- Una lámina de zinc tiene la forma mostrada en la figura adjunta. Los largos de los catetos corresponden a mediciones hechas a cierta temperatura. A esa misma temperatura el área del hueco es un 48% del área de la superficie del material. Calcule el "área del hueco" cuando la temperatura aumenta en 96 [°C].




A la temperatura inicial sean:

$A_t$ : área del triángulo

$A_m$ : área del material

$A_h$ : área del hueco

Entonces:

$$A_t = A_m + A_h = A_m + \frac{48}{100} A_m = \frac{148}{100} A_m$$

por tanto:

$$A_h = \frac{48}{100} A_m = \frac{48}{100} \cdot \frac{100}{148} A_t =$$

$$= \frac{48}{148} \cdot \frac{9{,}34[\text{cm}] \cdot 14{,}87[\text{cm}]}{2} \simeq 22{,}5[\text{cm}^2]$$

Como el coeficiente de expansión superficial del zinc es $\beta = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} \left[ 1/°\text{C} \right]$, al aumentar la temperatura en $\Delta t = 96[°\text{C}]$ el área del hueco aumenta en:

$$\Delta A_h = \beta A_h \Delta t \simeq 5{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 22{,}5 \left[ \text{cm}^2 \right] \cdot 96 \left[ °\text{C} \right]$$
$$\simeq 0{,}11[\text{cm}^2]$$

Con lo cual el área del hueco aumenta aproximadamente desde 22,5 [cm$^2$] a 22,6 [cm$^2$] cuando la temperatura aumenta en 96 [°C].

## *Dilatación de volumen*

Se ha establecido que una variación de temperatura produce un cambio de volumen en un sólido. Para encontrar una relación entre tal cambio de volumen y la variación de temperatura, podemos considerar el caso de un cubo de arista $a_r$, y volumen $V_r = a_r^3$, a la temperatura de referencia $t_r$.

Cuando la temperatura cambia en $\Delta t = t - t_r$ la arista cambia en $\Delta a = \alpha a_r \Delta t$, siendo $\alpha$ el coeficiente de expansión lineal del material de que está confeccionado el cubo. Entonces, el volumen del cubo a la temperatura $t$ será:

$$V = a^3 = \left(a_r + \Delta a\right)^3 = \left\{a_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)\right\}^3$$
$$= a_r^3 \cdot \left\{1 + 3\alpha\Delta t + 3\alpha^2\left(\Delta t\right)^2 + \alpha^3\left(\Delta t\right)^3\right\}$$

Despreciando los términos en $\alpha^2$ y $\alpha^3$ por ser muy pequeños en relación al término en $\alpha$, podemos escribir aproximadamente:

$$V \simeq V_r \cdot \left(1 + \gamma \Delta t\right)$$

donde hemos puesto $\gamma = 3\alpha$, factor llamado “coeficiente de dilatación volumétrica”.

Esta relación la consideramos aproximadamente válida para cualquier sólido, no importando cual sea su forma.

El cambio de volumen de **líquidos** también puede expresarse en primera aproximación por:

$$\Delta V = V - V_r = \gamma V_r \Delta t \quad \text{con} \quad \Delta t = t - t_r$$

donde el coeficiente de dilatación volumétrica $\gamma$ debe ser determinado directamente para cada líquido; en general su valor depende del rango de temperaturas considerado.

Por ejemplo, indicamos como valores característicos:

$$\gamma_{\text{mercurio}} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$
$$\gamma_{\text{glicerina}} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$
$$\gamma_{\text{bencina}} = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$

En particular, para el agua podemos indicar un valor medio $\gamma = 2{,}1 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$ válido entre 20 [°C ] y 80 [°C ] . Para temperaturas entre 0 [°C] y 20 [°C] , recordando su comportamiento anómalo, la expresión $V = V_0 \cdot \left(1 + \gamma t\right)$ no tiene real validez; la variación del volumen con la temperatura quedaría mejor expresada por ecuaciones de las formas:

$$V = V_0 \cdot \left(a + bt + ct^2\right) \qquad \text{ó} \qquad V = V_0 \cdot \left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3\right)$$

## *Variación de la densidad con la temperatura*

Ya que el volumen de una muestra de cualquier substancia cambia con la temperatura, resulta que su densidad cambia con la temperatura:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{V_r \cdot \left(1 + \gamma\,\Delta t\right)} = \frac{M/V_r}{1 + \gamma\,\Delta t} = \frac{\rho_r}{1 + \gamma\,\Delta t}$$

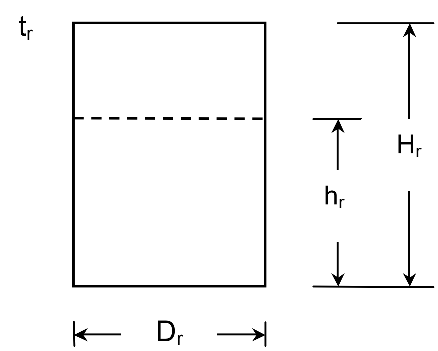
donde hemos considerado que la masa de la muestra permanece constante.

Si $\gamma\,\Delta t \ll 1$ , puede usar la aproximación $\rho \simeq \rho_r \cdot \left(1 - \gamma\,\Delta t\right)$

## *Ejemplos*

- Un tambor cilíndrico de latón, de diámetro basal $D_r$ y altura $H_r$ a la temperatura $t_r$ , está parcialmente lleno con aceite hasta una altura $h_r$ . Designe por $\alpha_\ell$ al coeficiente de dilatación lineal del latón y por $\gamma_a$ al coeficiente de expansión cúbica del aceite. Determine la altura $h$ que alcanza el aceite cuando la temperatura aumenta a $t$ *.*

La altura que alcanza el aceite en el tambor cambia por dos motivos: la expansión del volumen de aceite y la expansión de la superficie basal del tambor.




A la temperatura $t_r$:

el área de la superficie basal del tambor es:

$$A_r = \frac{\pi}{4} \cdot D_r^2$$

el volumen de aceite es: $V_r = A_r \cdot h_r$

Cuando la temperatura es $t$ :

la variación de temperatura es: $\Delta t = t - t_r$

el área basal es: $A = A_r \cdot \left(1 + 2\alpha_\ell \Delta t\right)$

el volumen del aceite es: $V = V_r \cdot \left(1 + \gamma_a \Delta t\right)$

Por tanto, la nueva altura que alcanza el aceite es:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{V_r \cdot \left(1 + \gamma_a \Delta t\right)}{A_r \cdot \left(1 + 2\alpha_\ell \Delta t\right)}$$

$$h = \frac{1+\gamma_a \cdot (t - t_r)}{1+2\alpha_\ell \cdot (t - t_r)} h_r$$

$$h \simeq \left\{1 + \left(\gamma_a - 2\alpha_\ell\right)\Delta t\right\} h_r$$

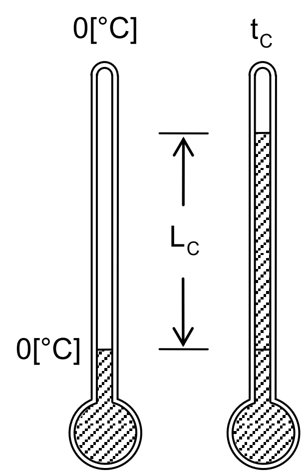
Este resultado es correcto siempre que el aceite no derrame por el borde del tambor, es decir, mientras sea $h < H$.

- Considere un termómetro construido de vidrio en la forma de un bulbo prolongado en un tubo capilar, parcialmente lleno de mercurio. Sean $\alpha_v$ el coeficiente de expansión lineal del vidrio y $\gamma_m$ el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio. ¿Cuál es el largo de la columna de mercurio en el capilar, referido al nivel del mercurio a 0 [°C] , cuando la temperatura es $t_C$ ?

Sean a la temperatura de referencia 0 [°C ] :

$A_0$: el área de la sección transversal del tubo capilar.

$V_0$ : la capacidad del bulbo y de la parte del capilar ocupado por el mercurio. $V_0$ es también el volumen del mercurio a 0 [ °C].




Cuando la temperatura cambia de 0 [°C] a $t_C$, la capacidad $V_0$ cambia a:

$$V_B = V_0 \cdot (1 + 3\alpha_v t_c)$$

El volumen del mercurio a la temperatura $t_C$ es:

$$V_M = V_0 \cdot (1 + \gamma_m t_c)$$

El volumen de mercurio que “avanza” por el tubo capilar es la diferencia de tales volúmenes:

$$\begin{aligned} V_C = V_M - V_B &= V_0 \cdot (1 + \gamma_m t_C) - V_0 \cdot (1 + 3\alpha_v t_C) \\ &= V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) \cdot t_C \end{aligned}$$

Este volumen debe ser igual al producto del largo $L_C$ de la columna de mercurio en el capilar por el área de la sección transversal a la temperatura $t_C$, por lo tanto:

$$L_C \cdot A_0 \cdot (1 + 2\alpha_v t_C) = V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) \cdot t_C$$

$$L_C = \frac{V_0 \cdot \left(\gamma_m - 3\alpha_v\right) \cdot t_C}{A_0 \cdot \left(1 + 2\alpha_v t_C\right)}$$

Como $\alpha_v = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\left[1/°C\right]$, aún si $t_C$ fuera 200 [ºC] tendríamos $2\alpha_v t_C \simeq 0{,}002$ valor que podemos despreciar en la suma con **uno** y quedarnos con la aproximación:

$$L_C = \frac{V_0 \cdot \left(\gamma_m - 3\alpha_v\right)}{A_0} \cdot t_C$$

Ya que $\eta = V_0 \cdot \left(\gamma_m - 3\alpha_v\right) / A_0$ es una constante para un termómetro dado, podemos escribir:

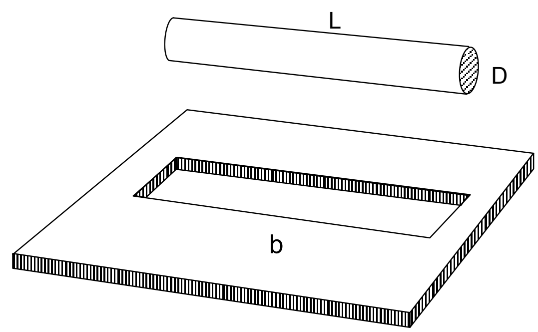
$$L_C \simeq \eta t_C$$

mostrando que el largo de la columna de mercurio es aproximadamente proporcional a la temperatura.

## *Ejercicios*

**8-45)** En una placa de aluminio hay un agujero circular que tiene 3,27[cm] de diámetro a 0 [°F]. Calcule el diámetro del agujero cuando la temperatura de la placa sea 95 [°C].

**8-46)** Considere una superficie con una ranura que a la temperatura de 18 [ºC ] tiene largo b = 49,97 [cm] y ancho 3,00 [cm]. Una barra cilíndrica metálica a la temperatura de 18[ºC] mide L=50,00 [cm] de largo y D=2,00[cm] de diámetro. Si el coeficiente de expansión lineal del material de la barra es $\alpha = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\left[1/C°\right]$, calcule la temperatura a la cual la barra pasa justamente, sin inclinarla, por la ranura.




**8-47)** Un cono recto de radio basal R y altura h es sometido a un cambio de temperatura $\Delta t$. El coeficiente de dilatación volumétrica del material del cono es $\gamma$. Determine, a partir de las variaciones de R y h, una expresión algebraica para la variación del volumen del cono.

**8-48)** El coeficiente de dilatación lineal de cierta aleación es $\alpha$ = 0,000054 [1/ºC]. Calcule su coeficiente de dilatación cúbica en [1/ºF].

**8-49)** Cuando la temperatura de una moneda aumenta en 86 [ºC] su diámetro aumenta en 0,17%. Efectuando operaciones con dos cifras significativas, calcule el coeficiente de dilatación lineal de la aleación de la moneda. Calcule el porcentaje de aumento del área de una cara, el porcentaje de aumento del espesor y el porcentaje de aumento del volumen de la moneda.

**8-50)** Un depósito de latón cuya capacidad es 1,50 [gal] se llena de glicerina a la temperatura de $54\left[°F\right]$. Determine aproximadamente la cantidad de glicerina que se derrama cuando la temperatura sube a $107\left[°F\right]$.

**8-51)** Un frasco de vidrio cuyo volumen es 1000 [cm$^3$] a 1,2 [ºC] se llena de mercurio a dicha temperatura. Cuando el frasco y el mercurio se calientan a 92,7 [ºC] se derraman 14,8 [cm$^3$] de mercurio. Determine el coeficiente de expansión lineal de este vidrio.

**8-52)** A la temperatura de 25 [ºC] el volumen de cierto matraz de vidrio hasta una señal de referencia que lleva en el cuello, es 100 [cm$^3$]. El matraz está lleno hasta dicha señal con un líquido, cuyo coeficiente de dilatación cúbica es $1{,}2\cdot 10^{-3}\left[1/°C\right]$, estando tanto el matraz como el líquido a 25 [ºC]. El coeficiente de dilatación lineal de ese vidrio es $5{,}8\cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$. La sección transversal del cuello es 13 [mm$^2$] y puede considerarse como constante. Calcule cuánto ascenderá o descenderá el líquido en el cuello cuando la temperatura se eleve hasta 48 [ºC ].