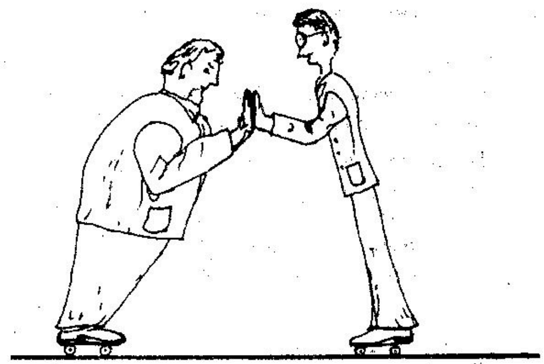
CAPÍTULO VII

MASA Y DENSIDAD



Inercia y masa

Piense usted en las siguientes situaciones:

- Si camina con un vaso lleno de agua en la mano y se detiene bruscamente, derrama agua.
- Si viaja en un bus concentrado en la lectura de un libro y el chofer frena bruscamente, resultará lanzado hacia adelante.
- Si es algo gordito y empuja a un compañero flacuchento, lo tirará lejos; si empuja a uno gordote, casi no lo mueve y tenga cuidado que él reaccionará sobre usted.
- En un ascensor "siente" la aceleración en la partida y en la llegada y "no siente" la rapidez cuando ésta es constante. Sensaciones similares se experimentan en el despegue y en el aterrizaje de un avión.

Estos son algunos ejemplos de un mismo tipo de fenómeno físico: el comportamiento de los objetos cuando experimentan aceleraciones, es decir, la resistencia que oponen a los cambios en su estado de movimiento.

El hecho de que este fenómeno físico se presente en **todos** los objetos conocidos hasta hoy, ha inducido a atribuir a los objetos una cierta propiedad, designada con el nombre de **inercia**. A la expresión cuantitativa de la inercia se la denomina **masa** (masa inercial).

No es difícil que usted se dé cuenta de que el tamaño o volumen de un objeto no puede ser usado como medida de la masa del objeto:

Suponga que sobre una mesa están colocadas dos esferas de igual diámetro y pintadas de igual color (igual apariencia). Le dicen que una es una pelota de ping-pong y la otra una bola de acero y le piden que las identifique sin levantarlas. Usted no las podrá distinguir por simple mirada, pero podrá hacerlo dándoles un "empujoncito".

Inicialmente el concepto de masa se introdujo como una medida de la "cantidad de materia" de un objeto y se consideraba su inercia proporcional a su masa. Si pensamos en un cubo macizo de aluminio y en otro de doble volumen y mismo metal, podemos suponer que la "cantidad de materia" del segundo cubo es el doble. Sin embargo, no se han encontrado métodos satisfactorios de medición de "cantidad de materia" con objetos de distintos materiales y distintas formas, por lo cual, este concepto no es de gran utilidad.

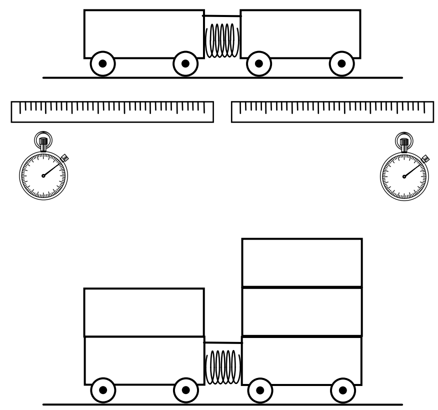
Un método para medir masas

Al introducir una cantidad física es imperativo anexar la descripción de, a lo menos, un método de medición de ella. Con el objeto de ir adquiriendo una idea cuantitativa de la masa podemos pensar en la siguiente situación:

> Dos personas están sobre patines idénticos. Los patines pueden rodar sin ningún impedimento sobre una superficie horizontal muy lisa. Las personas se colocan frente a frente con las palmas de sus manos juntas y se empujan mutuamente. Si observamos que después de separarse ellas retroceden con distinta rapidez, diremos que la que lo hace con *menor rapidez* tiene *mayor masa*.

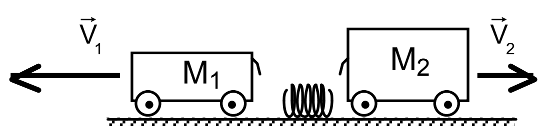
En la situación anterior presentamos la idea de comparar (medir) masas, relacionándolas con rapideces adquiridas. Reemplazando las personas por objetos, usted puede realizar el siguiente experimento:

Construya tres o más bloques de igual material y de igual tamaño y que tengan la forma de paralelepípedos rectos. Monte dos de los bloques sobre ruedas. Comprima un resorte entre estos bloques, manteniéndolos sujetos mediante un hilo; el resorte no debe estar ligado a ninguno de los bloques. Queme el hilo. El resorte se expandirá y empujará a los "carritos" antes de caer. Observe la rapidez de retroceso de cada uno de los carritos. Repita el experimento colocando uno o más bloques sobre los carritos.



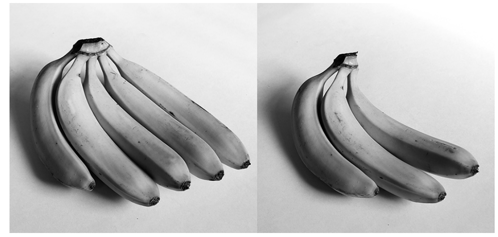
Si determina que después del impulso inicial los carritos retroceden con igual rapidez, dirá que sus masas son iguales. Si la rapidez de uno es la mitad que la del otro, dirá que la masa del primero es el doble que la masa del segundo, etc.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_2 \;\rightarrow\; M_1 = M_2 \\ v_1 = v_2/2 \;\rightarrow\; M_1 = 2M_2 \end{array}\right\} \frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1}$$



Al estudiar este "experimento" podrá concluir que la masa de un conjunto de bloques es la suma de las masas de cada bloque del conjunto. En este caso la "suma" es del mismo tipo que al operar con número reales.

Si tiene un racimo con 5 plátanos y otro con 3 plátanos, en total tiene 8 plátanos; la masa de los 8 plátanos es la suma de la masa de cada uno de los plátanos.



Esta relación está justificada para las masas de objetos usuales en condiciones ordinarias, como se encuentran en la vida diaria y en la práctica de la ingeniería. Sin embargo, queremos advertirle que esto no siempre sucede así. Por ejemplo, cuando un protón y un neutrón están ligados formando un deuterón, la masa del deuterón es menor que la suma de la masa del protón y la masa del neutrón:

$$M_D = 2{,}01355\,[u] \quad < \quad 1{,}00728\,[u] \quad + \quad 1{,}00867\,[u]$$

La diferencia de masa corresponde a la energía de ligazón del sistema formado por un protón y un neutrón.

Unidad básica y patrón de masa

Recordemos que para establecer una unidad de medición para cualquier cantidad física, se puede escoger un objeto o fenómeno arbitrario y el valor correspondiente se designa por 1 [nombre de la unidad]. El objeto o fenómeno mismo, por acuerdo internacional, pasa a convertirse en “patrón de medida de la cantidad física”.

Internacionalmente se ha adoptado como unidad y prototipo de masa a:

Un kilogramo es la masa de un cilindro particular de una aleación de platino e iridio acordado por la “*1 ª Conferencia General de Pesos y Medidas*”, celebrada en París en 1889, y que se encuentra depositado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, France).

Usaremos el símbolo: un kilogramo . . . . . . 1[kg].

El kilogramo prototipo se confeccionó como un cilindro recto con altura y diámetro iguales a 39[mm], intentando que tuviera una masa igual a la de 1000[cm^3] de agua pura a la temperatura de 4[ºC]. Mediciones más precisas efectuadas desde su establecimiento han mostrado que esto no es exactamente válido.

Divertimento: Es importante reconocer que el "kilogramo patrón" no tiene que corresponder necesariamente a la masa de cierta cantidad de agua. Sin embargo, mencionemos que desde hace ya miles de años se ha usado el agua como sustancia de referencia para establecer unidades de medición. Por ejemplo, se ha avanzado la hipótesis de que los sacerdotes en el pueblo de Caldea determinaban la unidad de masa (talento) como la masa del agua escurrida por los orificios de cierto recipiente durante la unidad de tiempo (día); ello determinaba simultáneamente el volumen del agua escurrida.

A diferencia de lo que sucede con los actuales patrones de las unidades de tiempo y distancia, los que están basados en propiedades físicas de ciertos átomos, el patrón de masa es todavía un objeto macroscópico. En un futuro cercano, cuando se aumente la precisión en la determinación de las masas atómicas a más de 7 cifras significativas, podremos tener también un patrón de masa basado en propiedades atómicas.

Masa: órdenes de magnitud

Las masas de diferentes formas de concentración de materia abarcan un amplio rango de órdenes de magnitud: desde valores muy pequeños $\left(\sim 10^{-30}\,[\text{kg}]\right)$ para la masa de un electrón, hasta valores muy grandes $\left(\sim 10^{41}\,[\text{kg}]\right)$ para ciertas galaxias.

Se ha determinado que la masa *en reposo* de un electrón vale:

$$m_e = \left(9{,}10938215 \pm 0{,}00000045\right)\cdot 10^{-31}[\text{kg}] \approx 9{,}11\cdot 10^{-31}[\text{kg}] \sim 10^{-30}[\text{kg}]$$

Las masas de los átomos, desde el Hidrógeno hasta el "elemento 164", tienen orden de magnitud entre $10^{-27}\,[\text{kg}]$ y $10^{-25}\,[\text{kg}]$.

Para expresar masas de núcleos, átomos y moléculas se usa frecuentemente la "unidad de masa atómica unificada" (1[u]), definida por:

$$1[\text{u}] = \frac{1}{12}\ \text{de la masa de un átomo de}\ C^{12}$$

lo que produce la equivalencia:

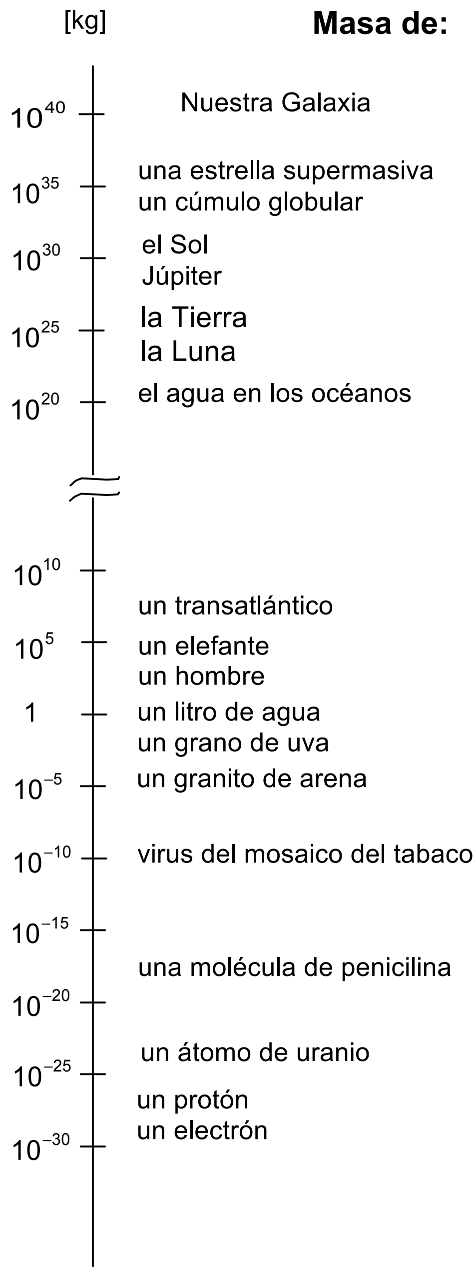
$$1[\text{u}] = \left(1{,}660538782 \pm 0{,}000000083\right)\cdot 10^{-27}[\text{kg}] \approx 1{,}66\cdot 10^{-27}[\text{kg}]$$

Una bacteria típica tiene una masa del orden de magnitud de 1 picogramo ($1[\text{pg}] = 10^{-12}[\text{g}] = 10^{-15}[\text{kg}]$). Un automóvil mediano tiene una masa del orden de magnitud de $10^3[\text{kg}]$. Los supertanques petroleros más grandes pueden transportar una carga de unas quinientas mil toneladas, es decir, una masa del orden de magnitud de $10^9[\text{kg}]$.

La masa de la Tierra es aproximadamente $6{,}0 \cdot 10^{24}$ [kg], la del Sol es $2{,}0 \cdot 10^{30}$ [kg] y la de nuestra galaxia es de $2{,}2 \cdot 10^{40}$ [kg].

La masa del Universo conocido ha sido estimada del orden de 10^{53} [kg] .

En el gráfico siguiente ilustramos, en una "escala de potencias de 10", los órdenes de magnitudes de las **masas** de ciertos objetos.



Ejercicios

7-1) Estime el valor, en [kg], de la masa del agua contenida en un saco de plástico en el cual cupiera aproximadamente su cuerpo.

7-2) Estime la masa (orden de magnitud en [kg]) de la cantidad de agua que llenaría una esfera hueca con un radio igual al de la Tierra. Compare con la masa de la Tierra.

7-3) Estime la masa del agua de los mares. Infórmese y estime la masa del agua del lago Peñuelas.

7-4) Calcule aproximadamente la masa del agua de la piscina de la USM.

7-5) Se dice que han caído "27 milímetros" de agua en un día de lluvia. Infórmese sobre el significado de esta expresión. Estime la masa de agua caída en ese día en la ciudad en que usted nació.

7-6) Infórmese sobre los valores de las masas del Sol, de la Tierra, de la molécula de oxígeno y del electrón. Calcule el cuociente entre la masa del Sol y la de la Tierra y el cuociente entre la masa de la molécula de oxígeno y la del electrón. Compare porcentualmente tales cuocientes.

7-7) Estime el número de electrones que tendrían, en conjunto, una masa de 1[kg].

7-8) Se acostumbra a expresar la masa en reposo de las partículas fundamentales en términos de la masa en reposo del electrón m_e. Por ejemplo:

leptón μ	$m_\mu \simeq 206{,}8 m_e$	mesón π	$m_{\pi^\circ} \simeq 264{,}1 m_e$
protón	$m_p \simeq 1836{,}2 m_e$	neutrón	$m_n \simeq 1838{,}7\, m_e$
hiperón Ω^-	$m_{\Omega^-} \simeq 3273 m_e$		

Exprese la masa de cada una de estas partículas en [kg] y en [u].

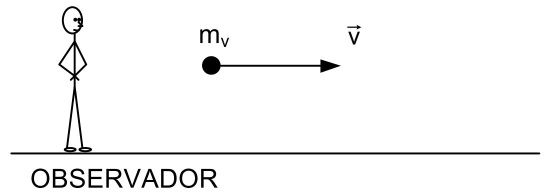
7-9) Considere que el número de estrellas en el universo es del orden de 10^{22} y que la masa promedio de una estrella es del orden de 10^{31}[kg]. Estime el número de protones en el Universo.

7-10) Estime el número de electrones que hay en la Tierra. Suponga que, en término medio, por cada electrón en la Tierra hay un protón y un neutrón.

7-11) Hasta hace poco se usaba la "unidad de masa atómica" , 1[u.m.a.], definida como 1/16 de la masa del isótopo O^{16} , con la equivalencia: 1[u.m.a.] $\triangleq 1{,}65979 \cdot 10^{-27}$[kg]. Esta difería ligeramente de una "escala química" en la que el valor 16 se asignaba a la masa atómica correspondiente al oxígeno natural (una mezcla de 99,76% de O^{16}; 0,039% de O^{17} y 0,204% de O^{18}). En la "*Conferencia de la Comisión Internacional para Masas Atómicas*" de 1961 se adoptó la "unidad de masa atómica unificada" basada en el isótopo C^{12}, que ya se la hemos presentado. El calificativo de "unificada" indica el acuerdo para su uso en Física y en Química. Calcule usted la equivalencia: 1[u.m.a.] $\triangleq$? [u].

7-12) Entre las unidades de masa usadas en Babilonia hallábanse el *talento y el ciclo*. Para ellos rigen las equivalencias 1[talento] $\triangleq$ 30,5[kg] y 1[talento] $\triangleq$ 3,6[ciclo]. Exprese el *ciclo* en término de kilogramos.

Comentario. Al comienzo del siglo XX, con la introducción de la teoría de la relatividad, el concepto de masa fue reexaminado. Ciertos resultados de mediciones relacionadas con el movimiento de las partículas, pueden interpretarse como que la masa de cada partícula aumenta con su rapidez según la relación:



$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

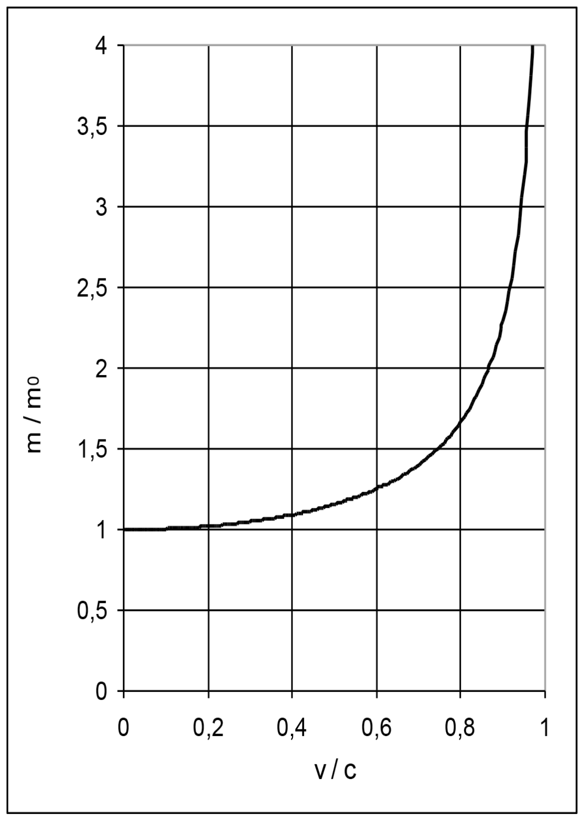
en donde:

c : rapidez de propagación de la luz en el vacío.

v : rapidez de la partícula.

m_0: masa de la partícula cuando está en reposo.

m_v: masa de la partícula cuando se mueve con rapidez v.



Esta relación ha sido ampliamente verificada en multitud de experimentos y al presente, no hay dudas sobre su validez.

Sin embargo, el aumento de masa es apreciable solamente cuando su rapidez es comparable con la rapidez de propagación de la luz en el vacío.

$$* \text{ Si } v = 0{,}81c \simeq 240.000\,[km/s] \quad \text{resulta que } m_v \simeq 1{,}7m_0$$

* Considerando rapideces extremadamente altas para cuerpos corrientes, como 50.000[km/h] , que al presente no ha sido mantenida por ningún cuerpo macroscópico en la Tierra, obtenemos que $m_v \simeq 1{,}000000002 \cdot m_0$ el aumento de masa es insignificante.

En consecuencia, para todas las aplicaciones en la vida diaria y en la práctica corriente de la ingeniería, podemos considerar que la masa de un cuerpo es **constante**.

La teoría de la relatividad muestra además otra importantísima característica de la masa: su relación con la energía. Más adelante en nuestro estudio comentaremos sobre ella.

Ejercicios

7-13) Controle la consistencia dimensional de la relación:

$$m_v = m_0 \cdot \left\{ 1 - \left(v/c \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

7-14) Calcule la rapidez con la que debería moverse un electrón, respecto a cierto observador en un laboratorio, para que éste detectara un aumento de 200% respecto al reposo en la masa del electrón.

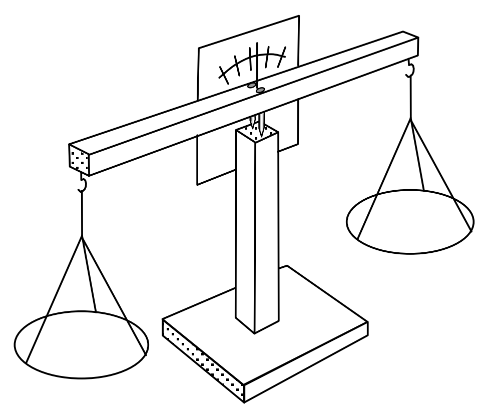
7-15) Examine la posibilidad de que la rapidez de una partícula fuese igual o mayor que *c*.

Otro método para comparar masas

El procedimiento descrito anteriormente, basado en la observación del movimiento de dos "carritos" para comparar la masa de los cuerpos, no es el más práctico. Corrientemente se usa una **balanza**.

Usted puede construir una "balanza de brazos iguales" con elementos simples:

Sobre una base de madera, fije un listón vertical. En el punto medio de un segundo listón fije un soporte "puntiagudo" por ejemplo, un par de clavos. En los extremos de este listón cuelgue dos platillos iguales, por ejemplo, tapas de tarro, usando tres cuerdas simétricamente dispuestas. Ajuste los platillos de modo que el listón superior quede horizontal.



Consideremos tres objetos, identificados por A, B y C. Se ha determinado, por el "método de los carritos", que A y B tienen igual masa y que la masa de C es el doble que la masa de A y de B: $m_A = m_B$ y $m_C = 2m_A = 2m_B$

Si se colocan los objetos A y B, uno en cada platillo de la balanza de brazos iguales ya preparada, se determina experimentalmente que la balanza se mantiene en equilibrio (el listón superior sigue horizontal). Además, si se colocan A y B en un platillo y C en el otro platillo, también se mantiene el equilibrio.

Este experimento muestra que ambo métodos para comparar masas, el los carritos y el de la balanza, son equivalentes.

Entonces, disponiendo de una colección de objetos de masa conocida, indicadas en kilogramos o múltiplos y submúltiplos de él, podemos determinar la masa de un objeto arbitrario:

Coloque este objeto en uno de los platillos y vaya colocando uno a uno los objetos de masa conocida en el otro platillo hasta obtener el equilibrio. La masa del objeto que está midiendo es igual a las sumas de las masas de los objetos que colocó en el otro platillo.

Usted podrá darse cuenta que los dos métodos de medición de masa ya indicados, carritos y balanza, son **equivalentes**, esto es, ambos dan el mismo valor para la masa de un mismo objeto.

Advertencia: masa y peso

Estamos seguros que usted ha usado frecuentemente las palabras **masa** y **peso**. Es nuestro deber advertirle que masa y peso son cantidades físicas conceptualmente diferentes, aunque están relacionadas. Esto lo trataremos más adelante, por el momento le pedimos que piense en la siguiente situación:

Considere las dos esferas de distinto material pero de igual diámetro, la pelota de ping-pong y la bola de acero a las que nos referimos anteriormente. Suponga que estas esferas están en una "cápsula espacial" situada en una región del espacio (por ejemplo, cierto lugar entre la Tierra y la Luna) en donde el "efecto gravitacional" no se manifiesta, es decir, las esferas no tienen peso. En tal lugar, todavía sería más difícil comunicar la misma aceleración a la bola de acero que a la pelota de ping-pong, esto es, ambas siguen teniendo la misma diferencia de masa.

¡Aún en la ausencia de peso, la masa de un objeto permanece!

Unidades de medición de masa

La unidad de medición de masa que está internacionalmente recomendada para ser empleada en Física es:

un kilogramo . . . . . 1[kg]

Para diferentes aplicaciones resulta conveniente usar otras unidades que tengan valores múltiplos o submúltiplos del kilogramo. En el "sistema métrico decimal de unidades" hacemos esto mediante "potencias de 10 ", las que indicamos por los prefijos ya convenidos, micro…, mili…, kilo…, mega.

En realidad, ya en la unidad kilogramo estamos usando el prefijo "kilo"; por lo cual tenemos:

Un gramo $1[g] \hat{=} 10^{-3}[kg]$ $\qquad 1[kg] \hat{=} 10^{3}[g]$

A partir del gramo podemos expresar masas más pequeñas, en términos de las unidades:

Un miligramo $1[mg] \hat{=} 10^{-6}[kg]$

Un microgramo $1[\mu g] \hat{=} 10^{-6}[g]$

A ciertas unidades múltiplos de 1[kg] se ha dado nombres especiales, por ejemplo:

Un quintal métrico $1[q] \hat{=} 10^{2}[kg]$

Una tonelada métrica $1[t] \hat{=} 10^{3}[kg]$

En el "sistema inglés de unidades de medición" la unidad fundamental de masa es la **libra** (*standard avoirdupois pound*). Inicialmente ella se basaba en un patrón propio: un cilindro recto de 1,15[in] de diámetro y 1,35[in] de altura, legalizado en 1855 y en custodia en el *Board of Trade, London*.

En la actualidad se define la libra en términos del "kilogramo patrón internacional":

Una libra (*one pound*) . . . . $1[lb] \hat{=} 0{,}45359237[kg]$

Para cálculos con tres cifras significativas usaremos las equivalencias aproximadas:

$1[lb] \hat{\simeq} 0{,}454[kg]$ $\qquad 1[kg] \hat{\simeq} 2{,}20[lb]$

y análogamente, al trabajar con cuatro cifras significativas usaremos:

$1[lb] \hat{=} 0{,}4536[kg]$ $\qquad 1[kg] \hat{=} 2{,}205[lb]$

Otras unidades de masa en el sistema inglés (*avoirdupois*) son:

Un dram (*one dram*) 1[dram]

Una onza (*one ounce*) 1[oz]

Una tonelada (*one ton*) 1[ton]

las que se definen por las equivalencias:

$16[oz] \hat{=} 1[lb]$ $\qquad 16[dram] \hat{=} 1[oz]$ $\qquad 1[ton] \hat{=} 2000\,[lb]$

Estas unidades inglesas llevan el calificativo *avoirdupois* para distinguirlas de otras unidades inglesas de masa con los distintivos de *apothecary* usadas en farmacia, y *troy* usadas para metales nobles y piedras preciosas.

Divertimento

La masa de piedras preciosas se expresa en la unidad:

un quilate (karat) . . . . . 1[kt]

para la cual casi todos los países han legalizado la equivalencia:

$$1[kt] \triangleq 0{,}200[g] \quad o \quad 1[g] \triangleq 5{,}00[kt]$$

La palabra "quilate" es también usada para expresar la **pureza** de metales nobles con el significado:

Un metal noble es de 24 quilates si es **puro**.

Por ejemplo, un objeto de oro de "18 quilates" se compone de: 18/24 = 3/4 de oro puro y 1/4 de otros metales que forman la aleación. Si la masa del objeto es 80[g], entonces 60[g] son de oro.

Ejemplos

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos que involucran conversiones de unidades, principalmente de masa:

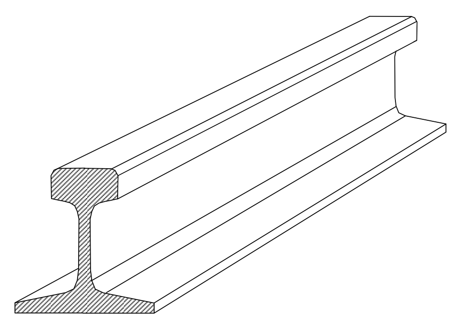
- Cierta barra de fierro perfilado cuyo largo mide 1,8[m] tiene una masa de 16,7[kg].

Supongamos que la barra es homogénea y calculemos la masa, en [lb], de un trozo de esa barra de 4,5[ft] de largo.

Llamemos M a la masa de la barra y L a su largo.

Suponer que la barra sea **homogénea** implica que la masa es proporcional al largo; esto es:

la masa de un trozo de largo ℓ es $m_\ell = \frac{M}{L} \cdot \ell$



Expresemos la masa y la longitud de la barra en unidades inglesas:

$$M = 16{,}7\,[kg] \triangleq 16{,}7\,[kg] \cdot \frac{1[lb]}{0{,}454[kg]}$$

$$\triangleq \frac{16{,}7}{0{,}454}[lb] \simeq 36{,}8[lb]$$

$$L = 1{,}8\,[m] \triangleq 1{,}8[m] \cdot \frac{1\,[ft]}{0{,}3048\,[m]} \triangleq$$

$$\triangleq \frac{1{,}8}{0{,}3048}[ft] \simeq 5{,}9[ft]$$

y con $\ell = 4{,}5[\text{ft}]$, resulta:

$$m_\ell = \frac{36{,}8\,[\text{lb}]}{5{,}9\,[\text{ft}]} \cdot 4{,}5\,[\text{ft}] \triangleq \frac{36{,}8 \cdot 4{,}5}{5{,}9}\,[\text{lb}] \simeq 28\,[\text{lb}]$$

por lo tanto, la masa de un trozo de 4,5[ft] tiene aproximadamente 28[lb].

- Una cantidad física tiene el valor $R = 74{,}3\,[\text{lb} \cdot \text{ft}/\text{s}^2]$. Encontremos su valor expresado en $\left[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2\right]$.

Usando el método de sustitución descrito en el capítulo dos:

$$R = 74{,}3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq \frac{74{,}3 \cdot 1[\text{lb}] \cdot 1[\text{ft}]}{1[\text{s}^2]}$$

y usar las equivalencias:

$$\begin{aligned} 1[\text{lb}] &\triangleq 0{,}4536[\text{kg}] \triangleq 453{,}6[\text{g}] \\ 1[\text{ft}] &\triangleq 0{,}3048[\text{m}] \triangleq 30{,}48[\text{cm}] \end{aligned}$$

entonces:

$$R = 74{,}3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq \frac{74{,}3 \cdot 453{,}6\,[\text{g}] \cdot 30{,}48[\text{cm}]}{1[\text{s}^2]} \triangleq$$

$$\triangleq 74{,}3 \cdot 453{,}6 \cdot 30{,}48\,[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2] \simeq 1{,}03 \cdot 10^6[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2]$$

Podemos también usar "factores de conversión":

$$R = 74{,}3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq 74{,}3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \cdot \frac{453{,}6\,[\text{g}]}{1[\text{lb}]} \cdot \frac{30{,}48\,[\text{cm}]}{1[\text{ft}]} \triangleq$$

$$\triangleq 74{,}3 \cdot 453{,}6 \cdot 30{,}48\left[\frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}\right] \cong 1{,}03 \cdot 10^6[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2]$$

Además, examinando las unidades en que está expresada la cantidad física *R*, podemos determinar que su dimensión es:

$$\dim(R) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \tau^{-2}$$

* Consideremos una partícula de masa m que se mueve con rapidez v. Asociamos a ella una cantidad física cuya magnitud se define por la ecuación $p = m \cdot v$.

$$\text{Con } \dim(m) = \mathscr{M} \quad \text{y} \quad \dim(v) = \mathscr{L} \cdot \tau^{-1}$$

Resulta $\dim(p) = \mathscr{M} \cdot \mathscr{L} \cdot \tau^{-1}$

Para una partícula con m = 127[g] y v = 40,6[km/h] , el valor de p , expresado en $[kg \cdot m/s]$, es:

$$p = m \cdot v = 127\,[g] \cdot 40{,}6\,[km/h] \triangleq$$

$$\triangleq 127\,[g] \cdot \frac{1\,[kg]}{1000\,[g]} \cdot 40{,}6\,[km/h] \cdot \frac{1\,[m/s]}{3{,}6\,[km/h]}$$

$$\triangleq \frac{127 \cdot 40{,}6}{1000 \cdot 3{,}6}\,[kg \cdot m/s] \quad \simeq \quad 1{,}43\,[kg \cdot m/s]$$

** Para un cuerpo de masa M que gira alrededor de un eje, resulta conveniente definir la cantidad física $I = k \cdot M$, donde $\dim(k) = \mathscr{L}^2$.

Consideremos cierto caso particular para el cual, en el "sistema inglés de mediciones", se tiene:

$$I = 0{,}28\,M \quad \text{con} \quad M = M_i\,[lb] \quad \text{para dar } I = I_i\,[ft^2 \cdot lb]$$

donde los números M_i e I_i son los "números de medición" correspondientes.

Por ejemplo, para M = 25,6 [lb] calculemos la cantidad I , expresándola en $[m^2 \cdot kg]$:

$$I = 0{,}28M \;=\; (0{,}28 \cdot 25{,}6)[ft^2 \cdot lb] \simeq 7{,}2\,[ft^2 \cdot lb] \triangleq$$

$$\triangleq 7{,}2\,[ft^2 \cdot lb] \cdot \left(\frac{0{,}3048\,[m]}{1\,[ft]}\right)^2 \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \triangleq$$

$$\triangleq 7{,}2 \cdot (0{,}3048)^2 \cdot 0{,}4536\,[m^2 kg] \simeq 0{,}30\,[m^2\,kg]$$

Este ejemplo numérico sugiere que podríamos obtener una relación para la cantidad física I de tal forma que al introducir M en [kg] resulte I en $[m^2 \cdot kg]$, esto es:

$$I = k\,M \qquad \text{con} \qquad M = M_m\,[kg] \qquad \text{produce } I = I_m\,[m^2 \cdot kg]$$

donde M_m e I_m son los correspondientes números de medición. Hay que encontrar el valor del factor α tal que $k = \alpha\,[m^2]$.

Para la masa tenemos simplemente:

$$M = M_i\,[lb] \triangleq M_i[lb] \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \triangleq 0{,}4536 \cdot M_i\,[kg] = M_m\,[kg]$$

En forma análoga:

$$I = I_i\,[ft^2 \cdot lb] \;\hat{=}\; I_i\,[ft^2 \cdot lb] \cdot \left(\frac{0{,}3048\,[m]}{1\,[ft]}\right)^2 \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; I_i \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot 0{,}4536\,[m^2 \cdot kg]$$

finalmente, usando $I_i = 0{,}28 M_i$ y ordenando términos:

$$I = 0{,}28 \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot \left(0{,}4536 M_i\right)\;[m^2 \cdot kg] =$$

$$= 0{,}28 \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot M_m\,[m^2 \cdot kg] \simeq$$

$$\simeq 2{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot M_m\,[m^2 \cdot kg] = I_m\,[m^2 \cdot kg]$$

o sea, el factor buscado tiene el valor $2{,}6 \cdot 10^{-2}$

El factor α puede ser obtenido más directamente, hágalo.

Ejercicios

7-16) Suponga que dispone de una "balanza de brazos iguales" y de un objeto cuya masa es 1[kg]. Describa cómo preparar dos cuerpos cuyas masas sean de 1/2[kg].

7-17) Exprese 2,75[t] en [mg] , [g] , [kg] , [q] y [Mg].

7-18) En un periódico inglés informan que ha caído un meteorito de 128[lb] de masa. Exprese esta masa en [ton] y en [kg].

7-19) En el sistema inglés "avoirdupois" se usa la unidad: 1[grain] con la equivalencia $7000\left[grain\right] \hat{=} 1\left[lb\right]$. Calcule la equivalencia entre "grain" y "gramo": 1[grain] $\hat{=}$? [g]. El "grain" es una unidad común para los tres sistemas ingleses avoirdupois, troy y aphothecary de unidades de medición de masa. En el sistema inglés "troy" para la "onza troy" rige la equivalencia $1\left[oz_t\right] \hat{=} 480\left[grain\right]$. Determine las equivalencias:

$$1[oz_t] \;\hat{=}\; ?\,[g] \qquad y \qquad 1[oz_t] \;\hat{=}\; ?\,[oz]$$

7-20) Una cantidad física K, asociada a una partícula en movimiento tiene el valor 840 $[kg \cdot m^2/s^2]$. Exprese el valor de K en $[lb \cdot ft^2/min^2]$. Determine la dimensión de K en términos de la dimensiones de tiempo, longitud y masa.

7-21) Considere una partícula de masa M = a [kg] que está a una cierta distancia r [m] de cierto objeto. Para un caso particular cierta cantidad física está determinada por la relación:

$$V(r) = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot a}{r}\;[kg \cdot m^2/s^2]$$

Determine la dimensión de V y la dimensión de la constante numérica. Elija un valor para M y represente gráficamente "V en función de r".

7-22) Considere una partícula de masa M que describe una órbita circunferencial de radio R con rapidez v. Una cantidad física importante en el estudio de tal movimiento es $L = R \cdot M \cdot v$. Para un caso particular se tiene $L = (7{,}1 \cdot 10^6 \cdot v)$ [kg · m²/s] cuando la rapidez v se da en [m/s]. Calcule el valor de L cuando la rapidez vale 18000 [mile/h]. Transforme la expresión L al "sistema inglés de mediciones" de tal forma que al usar v en [ft/s] resulte L en [lb · yd²/s]

7-23) Una esfera sólida y homogénea de masa M y radio R se hace girar alrededor de un eje que pasa por su centro, con rapidez angular ω.

Determine la dimensión de $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2MR^2}{5} \cdot \omega^2$

Piense en un objeto determinado e invente valores razonables para M y R en unidades del sistema métrico. Exprese, con tales valores, la cantidad T en función de ω^2, para ω [rad/s] . Modifique el factor numérico para que al introducir ω en [r.p.m.] no cambie el resultado de T.

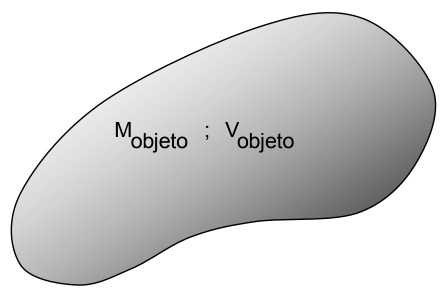
Densidad

Hemos mencionado dos objetos que tienen igual volumen, pero distinta masa: una pelota de ping-pong y una bola de acero de igual diámetro. También es fácil pensar en objetos que tengan igual masa y distinto volumen: un paquete de 1[kg] de algodón y un trozo de plomo de 1[kg] .

Esto nos induce, naturalmente, a establecer una relación entre la masa y el volumen de un objeto. Un método útil para comparar cantidades físicas es establecer el **cuociente** entre ellas. Definimos en consecuencia:

$$\text{densidad de un objeto} = \frac{\text{masa del objeto}}{\text{volumen del objeto}}$$

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{objeto}}{V_{objeto}}$$



Mencionemos que con igual propósito podemos considerar el cuociente inverso:

Volumen / masa

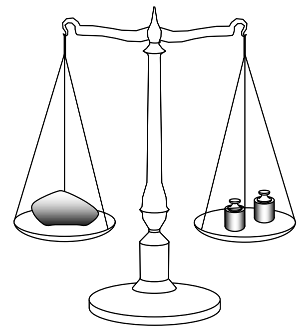
A este cuociente se da el nombre de "volumen específico".

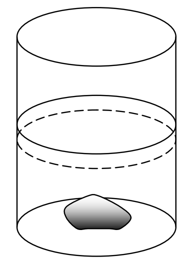
Un experimento

Determinemos la masa y el volumen de una piedra de tamaño conveniente.

Empleando una balanza realizamos varias mediciones, dando como promedio :

$$M_{piedra} \simeq 58\,[g]$$





Con un “vaso graduado” determinamos su volumen: echamos agua hasta cierto nivel h. Al sumergir la piedra el agua sube al nivel h’; el volumen de la piedra corresponde a la diferencia de los volúmenes indicados por los niveles. El resultado de varias mediciones fue:

$$V_{piedra} \simeq 21[cm^3]$$

Con estos datos determinamos:

$$\rho_{piedra} = \frac{M_{piedra}}{V_{piedra}} = \frac{58[g]}{21[cm^3]} \hat{=} \frac{58}{21}\left[g/cm^3\right] \simeq 2{,}8[g/cm^3]$$

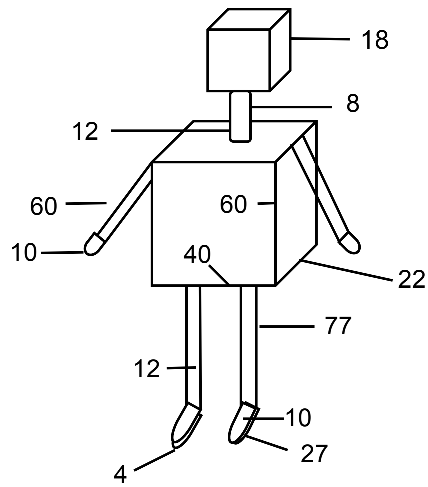
Con este procedimiento podemos determinar la densidad de cualquier cuerpo sólido, no soluble en agua, que no sea más grande que el vaso, y sin importar cuán complicada sea su geometría.

Un cálculo aproximado

Queremos encontrar un valor aproximado para la densidad del cuerpo humano.

Tomamos las “medidas” de un joven de 73[kg] de masa. Para calcular aproximadamente el volumen de su cuerpo, bosquejamos un “robot” tal como se indica en la figura.

El resultado de los cálculos, como usted puede verificarlo, da el valor:



Medidas en [cm]

$$V_{cuerpo} \simeq 80 \cdot 10^3 [cm^3] \triangleq 80\,[dm^3]$$

$$\rho_{cuerpo} = \frac{M_{cuerpo}}{V_{cuerpo}} \simeq \frac{73\,[kg]}{80\,[dm^3]}$$

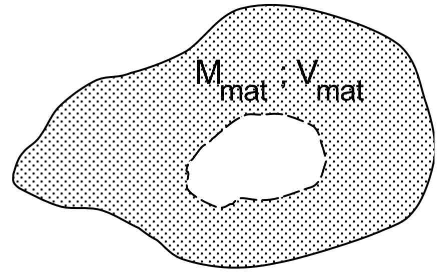
$$\triangleq \frac{73}{80}\left[kg/dm^3\right] \simeq 0{,}91\left[kg/dm^3\right]$$

Le proponemos que usted se entretenga calculando en esta forma la densidad de su propio cuerpo. Además, usted puede controlar el cálculo de su volumen usando una tina de baño; ingénieselas para hacerlo.

Densidad de un material

- Al definir la “densidad de un objeto” (masa del objeto/volumen del objeto) no hemos considerado la composición del objeto (tipo de materiales de los que está constituido), ni su configuración geométrica (posibles huecos en un cuerpo sólido), ni las condiciones externas a las que está sometido (presión, temperatura, etc.). Hemos considerado el objeto como un todo y en un ambiente externo particular.

Consideremos ahora un cuerpo sólido con una cavidad interior. Sin preocuparnos de la cavidad que puede estar “vacía” o contener un gas de masa despreciable respecto a la masa total del cuerpo, podemos definir:



$$\text{densidad media del material} = \frac{\text{masa del material}}{\text{volumen del material}}$$

$$\bar{\rho} = \frac{M_{mat}}{V_{mat}}$$

donde hemos usado el término "densidad media" para cubrir la posibilidad de que la composición del material varíe en diferentes porciones de él.

- Si un cuerpo es **homogéneo** las masas de porciones que tienen igual volumen son iguales. Esto es, si:

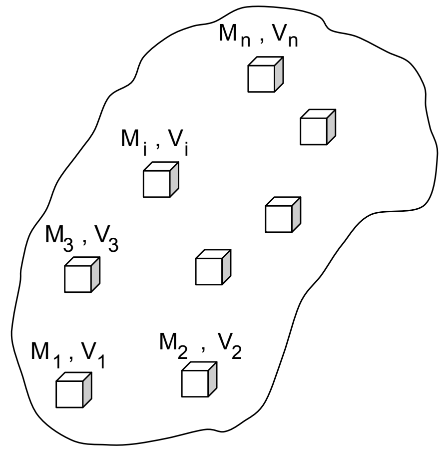
$$V_1 = V_2 = ... = V_i = \dots = V_n$$

entonces, para las correspondientes masas se cumple:

$$M_1 = M_2 = ... = M_i = \dots = M_n$$

y los cuocientes entre las correspondientes masas y volúmenes son iguales:

$$\frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} = \dots = \frac{M_i}{V_i} = \dots = \dots = \frac{M_n}{V_n}$$



Estos cuocientes definen una propiedad del material de que está confeccionado el cuerpo: la densidad del material. En otras palabras, densidad de un material es la masa por unidad de volumen de un cuerpo homogéneo confeccionado con este material:

$$\rho_{\text{material}} = \frac{M}{V}, \text{ de un cuerpo homogéneo.}$$

El valor de la densidad de un material, por ser una propiedad de él, puede ser usado como una característica para su identificación. Por ejemplo, en caso de minerales donde la homogeneidad varía, un rango de valores de densidades puede ser citado para tipificar muestras del mineral.

Dimensión y unidades de medición de densidad

De la definición de densidad como cuociente entre la masa y el volumen de un objeto o material, $\rho = M/V$ se deducen directamente su dimensión y las unidades de medición en que se expresa.

Como $\dim(\text{masa}) = \mathcal{M}$ y $\dim(\text{volumen}) = \mathcal{L}^3$, siendo $\mathcal{L}$ la dimensión de longitud, resulta:

$$\dim(\text{densidad}) = \dim(\text{masa}/\text{volumen}) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}^{-3}$$

Cada unidad de densidad resulta del cuociente entre unidades de masa y de volumen.

En el *Sistema Internacional de Unidades*, expresando la masa en [kg] y el volumen en [m^3], obtenemos:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_m\,[\text{kg}]}{V_m\,[\text{m}^3]} \triangleq \frac{M_m}{V_m}\left[\text{kg}/\text{m}^3\right] = \rho_m\left[\text{kg}/\text{m}^3\right]$$

o sea, la unidad básica de densidad es 1 [kg/m^3] .

En la práctica de la ingeniería y en otras ciencias, se usan corrientemente las unidades 1 [kg/dm^3] o 1 [g/cm^3]; tenemos por ejemplo, las equivalencias:

$$1\,[\text{kg/m}^3] \triangleq 10^{-3}\,[\text{kg/dm}^3] \qquad\qquad 1\,[\text{kg/dm}^3] \triangleq 1\,[\text{g/cm}^3]$$

En el sistema inglés de unidades se usan, entre otras, para densidad las unidades:

$$1\,[\text{lb/yd}^3],\qquad 1[\text{lb/ft}^3]\qquad \text{y}\qquad 1[\text{lb/gal}]$$

Usando las equivalencias de masa y volumen ya conocidas, podemos practicar transformaciones de unidades de densidad:

- Determinemos la equivalencia: 1[kg/dm^3] $\triangleq$? [lb/gal]

Recordemos las equivalencias:

$1[\text{lb}] \triangleq 0{,}4536\,[\text{kg}]$, $\qquad 1\,[\text{gal}] \triangleq 231[\text{in}^3]$ $\quad$ y $\quad 1\,[\text{in}] \triangleq 2{,}54\,[\text{cm}]$

Obtenemos sucesivamente:

$$1[\text{gal}] \;\triangleq\; 231[\text{in}^3] \;\triangleq\; 231[\text{in}^3]\cdot\left(\frac{2{,}54\,[\text{cm}]}{1[\text{in}]}\right)^3\cdot\left(\frac{1[\text{dm}]}{10\,[\text{cm}]}\right)^3 \;\triangleq$$

$$\triangleq\; \frac{231\cdot(2{,}54)^3}{10^3}[\text{dm}^3] \;\simeq\; 3{,}785\,[\text{dm}^3]$$

$$1\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right] \;\triangleq\; 1\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right]\cdot\frac{1[\text{lb}]}{0{,}4536\,[\text{kg}]}\cdot\frac{3{,}785\,[\text{dm}^3]}{1[\text{gal}]} \;\triangleq$$

$$\triangleq\; \frac{3{,}785}{0{,}4536}\left[\text{lb}/\text{gal}\right] \;\simeq\; 8{,}344\left[\text{lb}/\text{gal}\right]$$

- Este problema presenta la siguiente alternativa, si la densidad de cierta substancia está expresada por:

$$\rho = \rho_m\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right] \;\triangleq\; \rho_i\left[\text{lb}/\text{gal}\right]$$

nos interesa encontrar la relación entre los correspondientes números de medición ρ_m en el sistema métrico y ρ_i en el sistema inglés:

$$\rho = \rho_m\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right] \;\triangleq\; \rho_m\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right]\cdot\frac{1[\text{lb}]}{0{,}4536\,[\text{kg}]}\cdot\frac{3{,}785\,[\text{dm}^3]}{1[\text{gal}]}$$

$$\rho_m\cdot\frac{3{,}785}{0{,}4536}\left[\text{lb}/\text{gal}\right] \;\simeq\; 8{,}344\,\rho_m\left[\text{lb}/\text{gal}\right] = \rho_i\left[\text{lb}/\text{gal}\right]$$

entonces: $\rho_i = 8{,}344\rho_m$

Densidad: orden de magnitud

La masa de $1[\ell]$ de agua es 1[kg], aproximadamente. Entonces, la densidad del agua es aproximadamente 1[kg/dm^3] $\triangleq$ 10^3[kg/m^3] y escribimos: $\rho_{agua} \sim 10^3 \left[kg/m^3 \right]$.

Los valores de densidades que se presentan en la Naturaleza cubren un rango muy amplio de órdenes de magnitud, desde un valor estimado del orden de 10^{-25} [kg/m^3] para el Universo como un todo, hasta valores de 10^{18} [kg/m^3] para núcleos atómicos.

Con los valores estimados de la masa del Universo, del orden de 10^{53} [kg], y el del radio del Universo, del orden de 10^{26} [m] , resulta:

$$\rho_{universo} \sim 10^{53} \Big/ \left(10^{26}\right)^3 \left[kg/m^3 \right] = 10^{-25} \left[kg/m^3 \right]$$

Para un protón, con una masa del orden de 10^{-27}[kg] y un radio del orden de 10^{-15}[m], resulta:

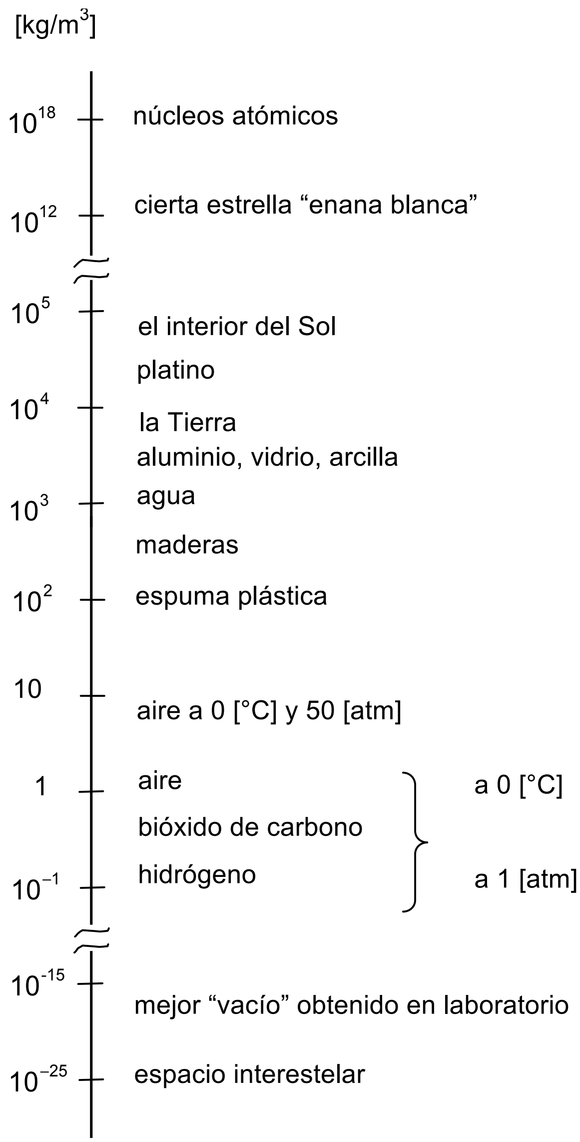
$$\rho_{protón} \sim 10^{-27} \Big/ \left(10^{-15}\right)^3 \left[kg/m^3 \right] = 10^{18} \left[kg/m^3 \right]$$

Para realizar un gran número de experimentos en Física y también para ciertos procesos industriales es necesario producir un “alto vacío”: disminuir al máximo la materia contenida en un recipiente. Aún con las técnicas más avanzadas no se ha logrado obtener densidades menores que del orden de 10^{-16} [kg/m^3] .

Con los valores del radio medio de la Tierra, $R_T \approx 6371[km]$ y de la masa de la Tierra, $M_T \approx 5{,}974 \cdot 10^{24}\,[kg]$, será fácil para usted verificar que la “densidad media de la Tierra” vale $\rho_t \simeq 5{,}5 \cdot 10^3 \left[kg/m^3 \right]$.

Hay estrellas tan *poco densas* que $\rho \sim 10^{-7} \left[kg/m^3 \right]$ y otras *tan densas* que $\rho \sim 10^{18} \left[kg/m^3 \right]$.

Orden de Magnitud de la Densidad de:



Ejercicios

7-24) Estime la masa del aire contenido en su dormitorio.

7-25) Estime la masa de un depósito de arena de forma cónica de 10[m] de radio basal y de 5[m] de altura.

7-26) Estime el volumen y la masa del cerro “La Campana”.

7-27) La atmósfera terrestre tiene una masa del orden de 10^{18}[kg]. Estime el espesor, o altura sobre la superficie de la Tierra, que tendría tal capa si fuese homogénea.

7-28) Considere que el agua que hay en la Tierra ocupa un volumen del orden de 10^{17}[m^3]. Calcule qué porcentaje del volumen y de la masa de la Tierra corresponde al agua.

7-29) Suponiendo que la masa del Universo estuviera uniformemente distribuida y usando el valor estimado de la "densidad del Universo" ¿cuánto mediría la arista de un cubo que contuviera una masa de 1[g]?

7-30) Suponiendo que el número de galaxias en el Universo conocido es del orden de 10^{11}, que en promedio hay del orden de 10^{10} estrellas por galaxia y que, en promedio, la masa de una estrella es del orden de 10^{30}[kg], ¿cuál sería el orden de magnitud de la densidad promedio de la materia estelar en el Universo conocido?

7-31) Determine el orden de magnitud de la densidad de masa de un protón.

7-32) La masa de un núcleo de "uranio-238" es 238,03[u]. Recuerde que el radio efectivo del núcleo está expresado por $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, donde A es el número másico y $R_0 \simeq 1{,}1$[F], un valor experimental. Calcule la densidad media del núcleo de ${}_{92}U^{238}$; exprese el resultado en [kg/m^3].

7-33) Calcule la densidad de la aleación del kilogramo prototipo.

7-34) Se ha encontrado que un cubo de metal de 1,0[in] de arista tiene una masa de 0,185[kg]. Calcule la densidad del metal, en [g/cm^3].

7-35) La capacidad de un recipiente es 15,0[ft^3]. Se vierte en él un líquido cuya densidad es 790[kg/m^3]. Calcule la masa de este líquido que se necesita para llenar el recipiente. Dé el resultado en [kg].

7-36) El osmio tiene una densidad de 22,5[g/cm^3]. Determine el largo, en [ft], de un alambre de osmio de 0,30[mm] de diámetro cuya masa es 3,2[lb].

7-37) En un día caluroso se evapora de un lago una capa de agua de 0,2[in] de espesor. Considere que el área del lago es 4,5[mile^2] y que la densidad de su agua es 0,995[kg/dm^3]. Calcule la masa del agua evaporada, en [kg].

7-38) Un cilindro hueco tiene un radio interior R_i = a[cm], un radio exterior R_e= 2a [cm] y una altura $H = 3a\left[cm\right]$. El cilindro tiene masa M = b[kg] y está construido homogéneamente con cierta aleación. Exprese la densidad de la aleación en función de a y b.

7-39) Una barra metálica tiene un largo de 3,1[m] y una sección transversal cuadrada de 2,5[cm] de lado. Su masa vale 16[kg] . Calcule la densidad de la barra.

7-40) Una mesa de forma irregular, está hecha de roble. Le informan que la densidad del roble es 850[kg/m^3] y que la masa de esa mesa es de 7,5[kg]. Determine el volumen de la madera de esa mesa.

7-41) Se ha medido la masa y el volumen de los siguientes objetos:

- una herradura de hierro tiene un volumen de 50[cm^3] y una masa de 390[g].
- un objeto de aluminio tiene un volumen de 55[cm^3] y una masa de 150[g].
- un clavo grande tiene un volumen de 1,14[cm^3] y una masa de 3,1[g].

Usando tales datos, indique de qué material está probablemente hecho el clavo mencionado.

7-42) Un cilindro hueco de cobre mide 0,30[m] de largo; su radio interior mide 0,035[m] y el espesor de su pared 0,15[dm]. La densidad del cobre es 8,9[kg/dm^3]. Calcule la masa del cilindro, en [g].

7-43) Se tiene una esfera de masa M y densidad ρ. Exprese el radio R de la esfera en términos de M y ρ.

7-44) La masa de una esfera es M y su radio es R. ¿Cuál es la masa de una esfera del mismo material y de radio 2R?

7-45) De un cubo macizo homogéneo se "saca" la esfera inscrita. Se encuentra que la masa de la esfera mide 6,2[kg] y que su volumen mide 0,56[dm^3]. Calcule la masa del cubo original.

Densidad de planetas y estrellas

Tierra: Se ha logrado medir o calcular con bastante precisión tanto la masa como el radio ecuatorial de la Tierra.

Para la masa de la Tierra se da el valor $M_t = 5{,}966 \cdot 10^{24}$ [kg]

Para el radio ecuatorial de la Tierra R_t se tiene:

valor normal: 6.378.388 [m]

determinaciones recientes: 6.378.533 ± 437 [m]

valor aproximado: $6{,}4 \cdot 10^{6}$ [m] $\triangleq$ $6{,}4 \cdot 10^{3}$[km]

orden de magnitud: 10^{7} [m]

La densidad media de la Tierra tiene un valor $\rho_t = 5{,}49 \cdot 10^{3} \left[kg/m^{3} \right]$

En la Tierra se consideran tres capas o estratos: corteza, manto y núcleo central. La corteza está compuesta, principalmente, por granito y basalto; tiene un espesor medio de 45[km] y una densidad media de $2{,}8 \cdot 10^{3}$[kg/m^{3}]. El manto es una capa sólida de roca dura que se extiende hacia abajo hasta unos 3000[km] de profundidad. El núcleo central contiene principalmente *Fe* y *Ni*, con un estrato exterior líquido y otro inferior sólido; su densidad media es aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{3}$[kg/m^{3}].

Planetas: En la tabla siguiente le presentamos datos sobre el radio, la masa y la densidad media de cada "planeta de nuestro Sistema Solar"; ellos están dados en relación a los correspondientes valores de la Tierra:

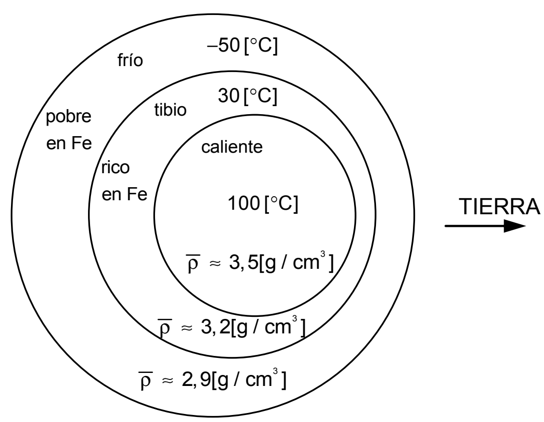
Planeta	$\mathbf{R_p/R_t}$	$\mathbf{M_p/M_t}$	$\boldsymbol{\rho_p/\rho_t}$
Mercurio	0,3583	0,0553	0,915
Venus	0,949	0,815	0,884
Tierra	1	1	1
Marte	0,533	0,107	0,768
Júpiter	11,21	317,8	0,241
Saturno	9,45	95,16	0,283
Urano	4,01	14,53	0,402
Neptuno	3,88	17,15	0,362

Luna: Se han determinado los siguientes valores para la masa y el radio medio de la Luna:

$M_{Luna} \simeq 7{,}347 \cdot 10^{22}$ [kg]

$R_{Luna} \simeq 1{,}738 \cdot 10^{6}$ [m]

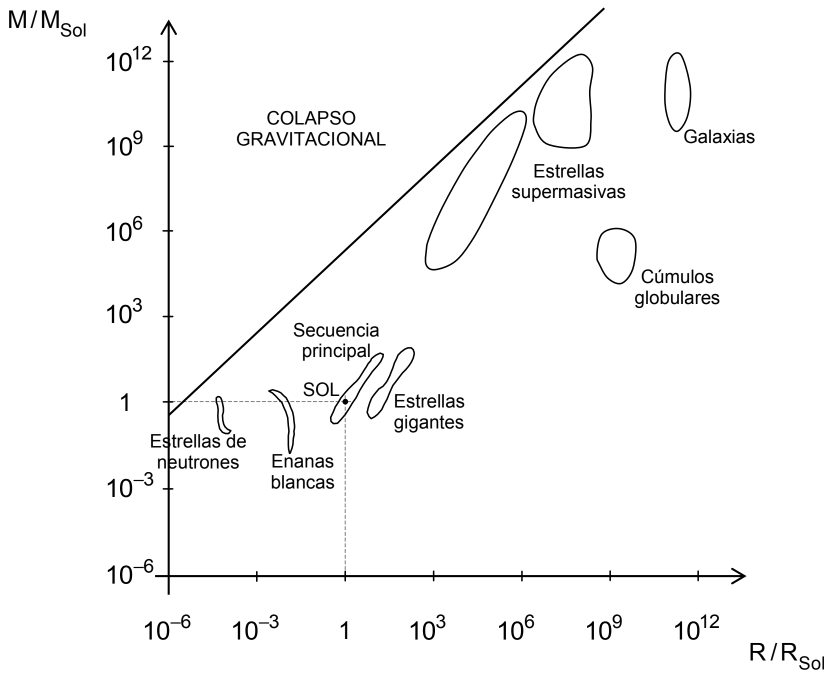
En la figura adjunta se representa esquemáticamente un modelo de la estructura interna de la Luna. En ella se distinguen tres regiones con diferentes características. En particular, se indica la densidad media de cada región.



Sol: Los valores determinados para el radio y la masa del Sol son: $R_{Sol} \simeq \left(6{,}9598 \pm 0{,}007\right) \cdot 10^{8}$[m] y $M_{Sol} \simeq \left(1{,}989 \pm 0{,}002\right) \cdot 10^{30}$[kg]

La densidad media del Sol resulta 1,41[kg/dm^3] y su región interior tiene una densidad media de 80[kg/dm^3].

Estrellas: La enorme cantidad de estrellas que hay en el Universo, su número es del orden de 10^{21}, se ha clasificado en ciertos grupos según sus masas y radios respecto a la masa y al radio del Sol. Nos limitaremos a invitarlo a que usted analice la figura siguiente:



La observación de los diferentes tipos de estrella da la posibilidad de estudiar el comportamiento de la materia en condiciones físicas excepcionalmente ricas en variedad de composición, de densidad, de temperatura, . . . etc.

Ejercicios

7-46) Imagínese que pudiera distinguir en la Tierra sólo dos partes, corteza y carozo, de la forma de dos esferas concéntricas, homogéneas, de densidades 2,8[kg/dm^3] y 9,5[kg/dm^3]. Calcule el radio que debería tener el carozo, en términos del radio de la Tierra , para que la densidad de la Tierra fuera 5,5[kg/dm^3] .

7-47) Con la información de la tabla sobre datos de planetas y usando los valores correspondientes para la Tierra, calcule una nueva tabla con los encabezamientos:

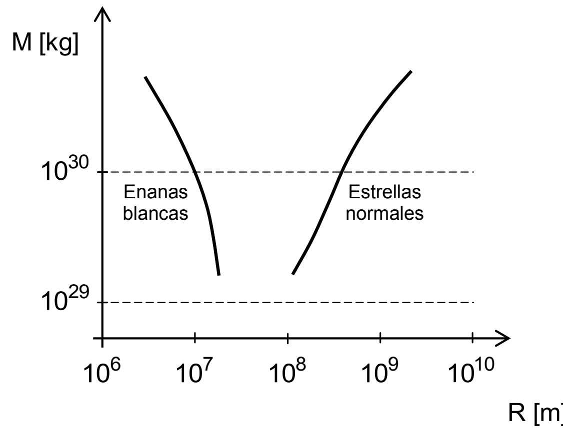
Planeta	$R_{planeta}$ 10^6 [m]	$M_{planeta}$ 10^{20} [kg]	$\rho_{planeta}$ 10^3 [kg/m^3]
…	…	…	…

Verifique, con los valores de masa y radio, los valores de densidad para cada planeta.

7-48) Con los datos de masa y radio medio de la Luna, calcule su densidad media. Suponga que la "Luna" fuera esférica, que las tres regiones mostradas en el corte transversal fueran círculos concéntricos, que tales regiones tuvieran las densidades medias indicadas en la figura correspondiente, y que la corteza exterior tuviera un espesor de 60[km] . Calcule el espesor de la región intermedia para que la densidad media de esa "Luna" fuera igual a la de la Luna.

7-49) Remítase al gráfico en que se muestra una agrupación de estrellas ordenadas según "M / M_{sol} en función de R/R_{sol} ". Elija usted una estrella (un punto en el gráfico) de cada uno de los siguientes grupos de estrellas: neutrónicas, enanas blancas, secuencia principal, gigantes y supermasivas. Determine el orden de magnitud de la densidad de cada una de esas estrellas.

7-50) El gráfico sobre las estrellas de la página anterior, puede también construirse usando la masa de las estrellas directamente en [kg] y sus radios en [m]. En la figura adjunta se ilustra tal método para los casos de estrellas "normales" o de secuencia principal y "enanas blancas" . Marque la ubicación del Sol en este gráfico, usando con cuidado la división de "escala de potencia de 10".



Compruebe usted que ambos gráficos son equivalentes, considere para ello especialmente casos extremos.

Densidad de sólidos

La densidad de un material sólido ρ fue definida como el cuociente entre la masa M y el volumen V de un trozo de un cuerpo homogéneo confeccionado con tal material: $\rho = M/V$.

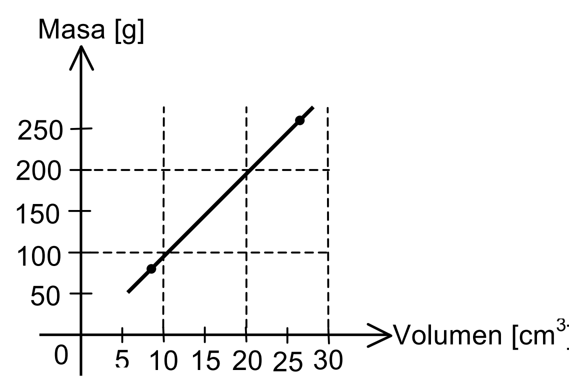
Decir que un cuerpo es homogéneo significa que su densidad es constante: ρ es constante .

Esto es, que su masa es proporcional a su volumen: $M = \rho\, V$.

Por ejemplo, si de una barra homogénea de cobre tomamos una muestra de 8,00[cm^3] y encontramos que su masa es 71,2[g], al tomar otra muestra de 27,0[cm^3] deberíamos encontrar que su masa es:

$$\frac{27{,}0}{8{,}00} \cdot 71{,}2 \;\; \simeq \;\; 240\,[\text{g}]$$

La densidad del cobre es 8,90[g/cm^3].



Para la determinación experimental de la densidad de un sólido puede usarse el método ya descrito: tome una muestra del material, determine su masa con una balanza y su volumen sumergiendo la muestra en una probeta graduada, parcialmente llena con un líquido en que el material no flote y no sea soluble. También puede usar una muestra del material de forma regular y simple que le permita calcular el volumen mediante fórmulas geométricas, midiendo solamente longitudes.

Valores típicos de la densidad de algunos materiales, válidos en rangos de presión y temperatura correspondientes al uso común de ellos:

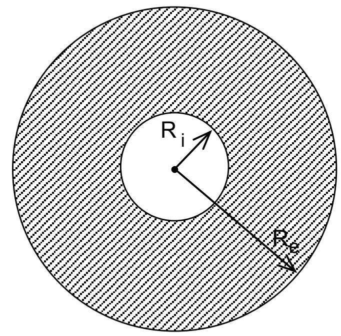
Aluminio	2,70 [kg/dm^3]	Arcilla	2,0 [kg/dm^3]
Zinc	7,20 [kg/dm^3]	Vidrio	2,5 [kg/dm^3]
Fierro	7,80 [kg/dm^3]	Cuarzo	2,6 [kg/dm^3]
Acero	7,83 [kg/dm^3]	Mármol	2,7 [kg/dm^3]
Bronce	8,50 [kg/dm^3]	Diamante	3,5 [kg/dm^3]
Cobre	8,90 [kg/dm^3]	Corcho	0,30 [kg/dm^3]
Plata	10,6 [kg/dm^3]	Pino	0,40 [kg/dm^3]
Plomo	11,4 [kg/dm^3]	Roble	0,7 [kg/dm^3]
Oro	19,3 [kg/dm^3]	Hulla	1,3 [kg/dm^3]
Platino	21,5 [kg/dm^3]	Azúcar	1,6 [kg/dm^3]
Hielo	0,92 [kg/dm^3]		

- Consideremos una esfera de fierro de 12[cm] de diámetro que tiene un hueco central de 4,0[cm] de diámetro. Calculemos el volumen y la masa del material y la densidad del objeto.

En la figura adjunta se muestra un "corte transversal" que pasa por su centro.

La densidad del material es un dato de este problema, ya que se indica que es fierro y corresponde a:

$$\rho_{mat} = 7{,}8\left[kg/dm^3\right]$$



Los datos geométricos, radios R_i = 2,0[cm] y R_e = 6,0[cm], nos permiten calcular el volumen del material:

$$V_{mat} = \frac{4\pi}{3}\left(R_e^3 - R_i^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(6{,}0^3 - 2{,}0^3\right) \simeq 8{,}7 \cdot 10^2[cm^3]$$

con lo cual la masa del material resulta:

$$M_{mat} = \rho_{mat} \cdot V_{mat} = 7{,}8\left[kg/dm^3\right] \cdot 8{,}7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}\,[dm^3]$$

$$\simeq 7{,}8 \cdot 0{,}87\left[kg\right] \simeq 6{,}8\left[kg\right]$$

Podemos calcular la densidad del objeto:

$$\rho_{objeto} = M_{objeto}/V_{objeto}\ ,$$

suponiendo que la masa de aire en el hueco es despreciable:

$$M_{objeto} \simeq M_{material} \simeq 6{,}8[kg]$$

y usando el volumen total de la esfera:

$$V_{objeto} = \frac{4\pi}{3}R_e^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \left(6{,}0\right)^3 \simeq 9{,}0 \cdot 10^2[cm^3] \triangleq 0{,}90\,[dm^3]$$

encontramos:

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{objeto}}{V_{objeto}} = \frac{6{,}8\,[kg]}{0{,}90\,[dm^3]} \simeq 7{,}6\,[kg/dm^3]$$

Si hubiésemos enunciado el problema inicialmente en la forma "calcule la densidad del objeto", podríamos haber seguido el camino alternativo siguiente:

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{obj}}{V_{obj}} \simeq \frac{M_{mat}}{V_{obj}} = \frac{\rho_{mat} \cdot V_{mat}}{V_{obj}} = \frac{\frac{4\pi}{3}\left(R_e^3 - R_i^3\right)}{\frac{4\pi}{3}R_e^3}\rho_{mat} =$$

$$= \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^3} \cdot \rho_{mat} = \left\{1 - \left(R_i/R_e\right)^3\right\}\rho_{mat} =$$

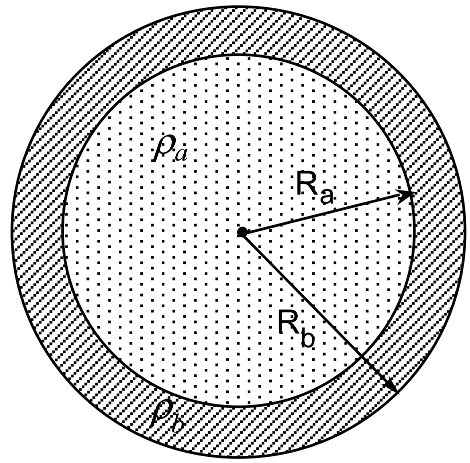
$$= \left\{1 - \left(\frac{2{,}0}{6{,}0}\right)^3\right\} \cdot 7{,}8 = \frac{26,}{27,} \cdot 7{,}8 \simeq 7{,}5\left[kg/dm^3\right]$$

¡En la medida que usted estudie y practique, adquirirá un mejor manejo de los conceptos físicos y podrá simplificar los aspectos algebraicos y de cálculo en la resolución de problemas!

- Alrededor de un eje cilíndrico de acero se ha colocado una "camisa" de bronce, de igual largo que el eje. El radio del eje es 21[mm] y el radio exterior de la "camisa" es 24[mm]; el largo del eje es 6,0[cm]. Calcule la masa del conjunto.

En el dibujo representamos la "sección transversal" del objeto. Los datos del problema son:

radio eje de acero:	R_a = 2,1 [cm]
radio "camisa" de bronce:	R_b = 2,4 [cm]
densidad del acero:	ρ_a = 7,83 [g/cm^3]
densidad del bronce:	ρ_b = 8,5 [g/cm^3]
largo común:	L = 6,0[cm]



SECCION TRANSVERSAL

Entonces:

$$M_{obj} = M_a + M_b = \rho_a V_a + \rho_b V_b =$$
$$= \rho_a \pi \cdot R_a^2 L + \rho_b \pi \cdot \left(R_b^2 - R_a^2\right) L =$$
$$= \pi \cdot \left\{\rho_a \cdot R_a^2 + \rho_b \cdot \left(R_b^2 - R_a^2\right)\right\} \cdot L$$

Introduciendo en esta expresión los radios y el largo en [cm] y las densidades en [g/cm^3], resulta directamente la masa en [g]:

$$M_{obj} \simeq 3,14 \cdot \left\{7,83 \cdot (2,1)^2 + 8,5 \cdot \left((2,4)^2 - (2,1)^2\right)\right\} \cdot 6,0$$
$$\simeq 3,14 \cdot \left\{34,5 + 11,5\right\} \cdot 6,0 \simeq 8,7 \cdot 10^2 [g] \;\; \triangleq \;\; 0,87\,[kg]$$

dando el resultado con el número apropiado de cifras significativas.

Podemos calcular, además, la densidad del objeto:

$$\rho_{obj} = \frac{M_{obj}}{V_{obj}} = \frac{\pi \cdot \left\{\rho_a R_a^2 + \rho_b \left(R_b^2 - R_a^2\right)\right\} L}{\pi \cdot R_b^2 \cdot L} =$$
$$= \frac{\rho_a R_a^2 + \rho_b \left(R_b^2 - R_a^2\right)}{R_b^2} =$$
$$= \rho_a \left(R_a / R_b\right)^2 + \rho_b \left\{1 - \left(R_a / R_b\right)^2\right\} = \rho_b + \left(\rho_a - \rho_b\right)\left(R_a / R_b\right)^2$$

Destaquemos que en la expresión:

$$\rho_{obj} = \rho_b - \left(R_a / R_b\right)^2 \left(\rho_b - \rho_a\right)$$

la consistencia dimensional es evidente ya que el cuociente $(R_a / R_b)^2$ es adimensional.

Además las unidades en que se exprese ρ_{obj} serán directamente las mismas que se usan para ρ_a y ρ_b; por supuesto, las unidades para R_a y R_b deben ser las mismas.

El valor numérico resulta: $\rho_{obj} \simeq 8{,}0\left[kg/dm^3\right]$

que es diferente del "promedio":

$$\rho_{prom} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2} \simeq 8{,}2\left[kg/dm^3\right]$$

En general se cumple que $\rho_{promedio} \neq \rho_{objeto}$. Para tener la igualdad es necesario que se cumplan ciertas condiciones:

$$\rho_{promedio} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2} = \rho_{obj} = \rho_b - \left(R_a / R_b\right)^2 \cdot \left(\rho_b - \rho_a\right)$$

y haciendo un poco de álgebra:

$$\rho_a - \rho_b = 2\left(\frac{R_a}{R_b}\right)^2 \cdot \left(\rho_a - \rho_b\right)$$

esto es:

$$\left(R_a / R_b\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad R_b = \sqrt{2}\, R_a$$

Es interesante destacar que, en este caso a lo menos, la igualdad $\rho_{promedio} = \rho_{objeto}$ se cumple con la relación entre los radios $R_b = \sqrt{2}\, R_a$, independientemente de los valores de las densidades de cada componente.

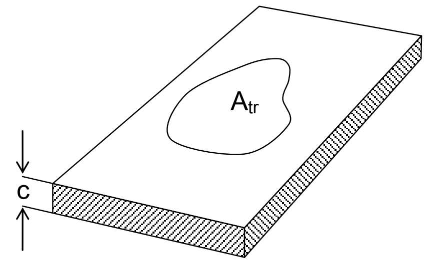
Planchas y láminas

Hablamos de planchas o láminas cuando en un cuerpo sólido una de las medidas lineales es mucho menor que las otras dos.

- Consideremos una plancha metálica que sea:

homogénea → densidad ρ constante

uniforme → espesor c constante



Nuestro problema es calcular la masa de un trozo de esta plancha de área A_{tr}

De acuerdo con la definición de densidad resulta:

$$M_{tr} = \rho \cdot V_{tr} = \rho\left(c \cdot A_{tr}\right) = \left(\rho \cdot c\right) \cdot A_{tr}$$

Observamos que en este caso la masa del trozo es proporcional a su área; la "constante de proporcionalidad" es:

$$\rho \cdot c = \rho_m \left[kg/m^3\right] \cdot c_m [m] = \sigma_m \left[kg/m^2\right] = \sigma$$

Esta cantidad σ característica de la lámina, representa una "masa por unidad de área" y recibe el nombre de **densidad superficial de masa**; tenemos:

$$M = \sigma \cdot A$$

- Deseamos determinar la masa de un pliego rectangular de cartón.

Si el pliego es más grande que la balanza de que disponemos, no podemos medir directamente su masa. Podemos proceder de la siguiente manera:

Cortamos un trozo de cartón (por ejemplo un cuadrado pequeño de lado ℓ) y medimos su masa, denotémosla por $M_{muestra}$. Calculamos la "densidad superficial":

$$\sigma_{cartón} = \frac{M_{muestra}}{A_{muestra}} = \frac{M_{muestra}}{\ell^2}$$

Medimos el ancho a y el largo b del pliego y calculamos su área:

$$A_{pliego} = a \cdot b$$

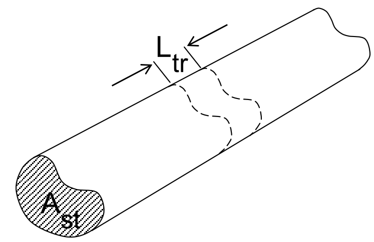
La masa del pliego resulta:

$$M_{pliego} = \sigma_{cartón} \cdot A_{pliego} = \frac{a \cdot b}{\ell^2} \cdot M_{muestra}$$

Barras y alambres

En barras y alambres las medidas lineales de la sección transversal son mucho menores que el largo.

- Consideremos una barra homogénea y uniforme:



homogénea $\rightarrow$ densidad, ρ , constante

uniforme $\rightarrow$ área de la sección transversal, A_{st}, constante

Deseamos calcular la masa que corresponde a un trozo de largo L_{tr} de esta barra.

Tenemos: $M_{tr} = \rho \cdot V_{tr} = \rho \cdot \left(A_{st} \cdot L_{tr}\right) = \left(\rho \cdot A_{st}\right) \cdot L_{tr} = \lambda \cdot L_{tr}$

Esta expresión implica que la masa del trozo es proporcional a su largo. En este caso la "constante de proporcionalidad", simbolizada por λ, representa una "masa por unidad de longitud" y la llamamos, en consecuencia, **densidad lineal de masa** .

Resulta: $M = \lambda \cdot L = \lambda_m \left[kg/m\right] \cdot L_m\, [m] = M_m\, [kg]$

- Supongamos que hemos comprado un rollo de alambre de masa $M_{alambre}$. Nos interesa saber la longitud del alambre.

Una solución sería medirlo directamente con un metro; pero si no queremos desarmar el rollo, podemos usar el siguiente procedimiento:

Tomamos una muestra de alambre de largo $L_{muestra}$.

Medimos la masa de la muestra $M_{muestra}$ y calculamos la densidad lineal:

$$\lambda_{muestra} = M_{muestra} / L_{muestra}$$

Entonces, suponiendo que el alambre es homogéneo y uniforme, λ constante, resulta:

$$\lambda_{alambre} = \lambda_{muestra}$$

y por lo tanto, la longitud buscada es:

$$L_{alambre} = \frac{M_{alambre}}{\lambda_{alambre}}$$

Ejercicios

7-51) Un objeto consta de dos partes homogéneas. La primera tiene volumen V y densidad ρ. La segunda parte tiene volumen doble y densidad triple que la primera parte. Determine la densidad media del objeto.

7-52) Se tiene una esfera hueca de fierro de radio interior R_i = 4,00[cm] y radio exterior R_e = 6,00[cm]. ¿Qué densidad debe tener un material que llene el hueco para que la esfera tenga una densidad media de 6,40[g/cm^3] ?.

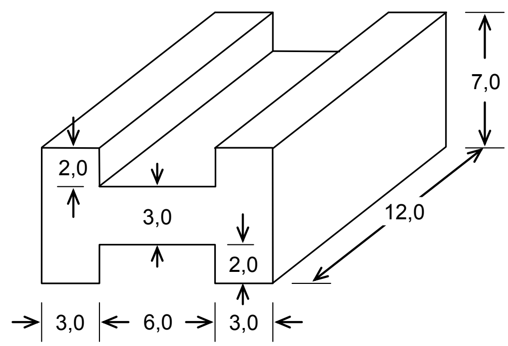
7-53) Una lámina tiene área S y masa M. ¿Cuál es la masa de otra lámina de igual material y espesor, pero de área 4S ?

7-54) Con 3,0[kg] de una aleación de cobre, se confecciona una lámina homogénea y de espesor constante de 5,0[mm]. Calcule la "densidad superficial de masa" y el área de la lámina.

7-55) Estime la masa de una "resma" (500 hojas) del papel usado en este texto.

7-56) Calcule la "densidad lineal de masa" de un alambre de platino de 2,0[m] de largo y de 0,30[mm] de diámetro.

7-57) Una pieza metálica, de la forma indicada en la figura adjunta, tiene una masa de 6,12[kg]. Las medidas están dadas en centímetros. Calcule su densidad e indique de qué material es probable que haya sido confeccionada.

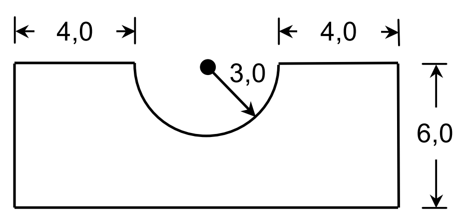


7-58) Sobre un objeto de fierro que tiene una superficie exterior de $7{,}9 \cdot 10^2 \left[cm^2\right]$ de área se ha depositado una película de cobre de 0,18[mm] de espesor. Suponga que tal espesor es constante y calcule la masa de cobre depositado.

7-59) Infórmese sobre la densidad media de ladrillos y de "mezcla de cemento y arena fraguada" y estime la masa de las paredes de una casa.

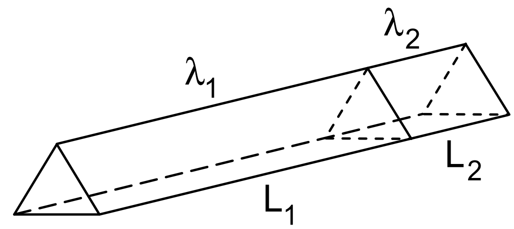
7-60) Un cuerpo esférico de radio R_i y densidad ρ_i se cubre con un material de densidad ρ_e de tal modo que se mantiene la forma esférica, alcanzando un radio R_e. Las relaciones entre las densidades y los radios son $\rho_e = \alpha\, \rho_i$ y $R_e = \beta R_i$, respectivamente. Encuentre las dimensiones y rango posible de valores para los coeficientes α y β. Calcule valores de α y β para que la densidad media del objeto sea igual al promedio de las densidades ρ_i y ρ_e .

7-61) La densidad superficial de una lámina es σ = 0,36 [kg/m^2]. Calcule la masa de una figura de la forma indicada en el dibujo hecha de esa lámina. Las medidas están dadas en centímetros.

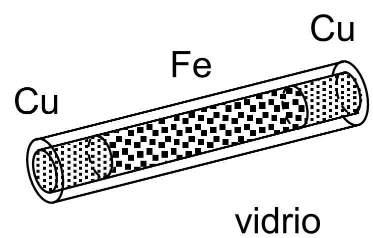


7-62) Una lámina de plata de 0,30[mm] de espesor se coloca entre dos placas de vidrio rectangulares, de 2,0[cm] de ancho, 5,0[cm] de largo y 1,5[mm] de espesor. Esta lámina cubre toda la superficie de las caras internas de las placas. Calcule la "densidad superficial media " de este conjunto.

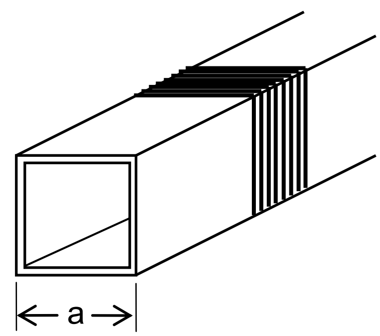
7-63) Una barra cuya sección transversal es un triángulo equilátero, está formada por la unión de un trozo de aluminio y otro de plomo de 0,4[yd] y 0,17[yd], respectivamente. La masa de la barra es 13[lb]. Calcule el valor, en [in], del lado del triángulo. Calcule λ_1 y λ_2.



7-64) El interior de un tubo de vidrio se ha llenado con limaduras de fierro y sus extremos se han cerrado con tapones de cobre. Las medidas del tubo son: 1,8[mm] de diámetro interior, 2,1[mm] de diámetro exterior y 8,0[cm] de largo. Los tapones de cobre, totalmente embutidos en el tubo, tienen 1,5[cm] de largo cada uno. Represente gráficamente la variación de la "densidad lineal del objeto" a lo largo del tubo.



7-65) Sobre una base plástica de sección transversal cuadrada de 5,0[cm] de lado, se enrollan ordenadamente 3 capas de alambre. Cada capa tiene 250 vueltas. El alambre es de cobre de 0,80[mm] de diámetro. Calcule la masa del cobre empleado.



Densidad de líquidos

Si disponemos de una balanza y de un "frasco graduado" podemos determinar experimentalmente la densidad de un líquido, usando el siguiente procedimiento:

- Determinamos la masa del frasco solo, M_f .
- Vertemos cierta cantidad del líquido cuya densidad queremos determinar en el frasco graduado y medimos directamente su volumen, V_ℓ .
- Determinamos la masa del frasco más la del líquido contenido, $M_{f\ell}$.
- La diferencia de ambas mediciones de masa da la masa de líquido:

$$M_\ell = M_{f\ell} - M_f$$

- Calculamos la densidad del líquido, $\rho_\ell = M_\ell / V_\ell$.

Si disponemos de una balanza y de un frasco que no tenga graduación de volumen, podemos modificar el procedimiento en la siguiente forma:

- Hacemos una marca en el frasco para indicar cierto volumen, V.
- Medimos la masa M_f del frasco solo.
- Echamos agua en el frasco hasta alcanzar la marca hecha y medimos la masa del frasco con agua M_{fa}. Se determina la masa del agua $M_a = M_{fa} - M_f$.
- Echamos el líquido en el frasco hasta la misma marca y medimos la masa $M_{f\ell}$ del frasco con el líquido. Calculamos la masa del líquido $M_\ell = M_{f\ell} - M_f$.
- La "densidad del líquido **relativa** al agua" es:

$$\rho_{\ell,a} = \frac{M_\ell / V_\ell}{M_a / V_a} = \frac{M_\ell / V}{M_a / V} = \frac{M_\ell}{M_a}\text{, sin dimensión.}$$

Entonces:

$$\rho_\ell = \frac{M_\ell}{M_a} \cdot \rho_a \simeq \frac{M_\ell}{M_a}\left[kg/dm^3 \right] \quad \text{con} \quad \rho_a \simeq 1{,}0 \left[kg/dm^3 \right]$$

Valores representativos de las densidades de algunos líquidos, determinados por éstos u otros procedimientos, en condiciones "normales" de temperatura y presión (0[ºC] y 1[atm]), se presentan en la siguiente tabla:

líquido	$\rho\left[\mathbf{kg}/\mathbf{dm}^3\right]$
gasolina	0,70
éter	0,74
alcohol etílico	0,79
Kerosene ("parafina")	0,80
benceno	0,88
agua de mar	1,025
leche	1,031
glicerina	1,26
tetracloruro de carbono	1,60
ácido sulfúrico	1,84
yoduro de metileno	3,3
mercurio	13,6

- Expresemos la densidad $\rho_b = 0,88\left[kg/dm^3\right]$ del benceno en [lb/ft^3]

  Usando las equivalencias:

$$1[lb] \triangleq 0,4536\,[kg] \quad y \quad 1[ft] \triangleq 0,3048\,[m] \triangleq 3,048\,[dm]$$

resulta:

$$\rho_b = 0,88\left[kg/dm^3\right] \triangleq 0,88\left[kg/dm^3\right] \cdot \frac{1\,[lb]}{0,4536\,[kg]} \cdot \left(\frac{3,048\,[dm]}{1\,[ft]}\right)^3 \triangleq$$

$$\triangleq \frac{0,88 \cdot (3,048)^3}{0,4536}\left[lb/ft^3\right] \simeq 55\left[lb/ft^3\right]$$

El dato ρ_b = 0,88[kg/dm^3] lo podemos interpretar diciendo que la densidad del benceno relativa al agua es $\rho_{b,a}$ = 0,88 (número adimensional). Entonces, para la densidad del agua en [lb/ft^3] obtenemos en forma inmediata:

$$\rho_a = \frac{\rho_b}{\rho_{b,a}} = \frac{55\left[lb/ft^3\right]}{0,88} \simeq 62\left[lb/ft^3\right]$$

dado que la densidad relativa tiene un valor que es independiente de las unidades de medición usadas.

- Probablemente usted sabe que el petróleo crudo no se encuentra en la naturaleza en piscinas subterráneas, sino que está empapando los mantos en los cuales aloja. Estos mantos están constituidos por rocas porosas llamadas "arenas productoras". Analizando muestras de estas rocas, se puede hacer un estudio de la productividad de un yacimiento.

Se define "porosidad de una roca" como la relación entre el volumen de huecos (poros) y el volumen total de la roca (incluyendo granos y poros); suele expresarse en forma porcentual:

$$P = \frac{\text{volumen de huecos}}{\text{volumen total de roca}} \cdot 100$$

Consideremos que se ha extraído un trozo de cierto manto de "arenas productoras", llamado "roca testigo" en la jerga petrolera, para el que se ha determinado en un laboratorio una masa de 16,2[kg] , un volumen de 3,46[dm^3] y una porosidad de 9,7%. Nos interesa estimar el número de "barriles de petróleo" que rendiría el manto cuyas medidas son aproximadamente 20[km] de ancho, 30 [km] de largo y 7,0[m] de espesor:

Suponiendo que la porosidad del manto es igual a la de la muestra:

$$P_{manto} = P_{muestra} = 9{,}7\%$$

y suponiendo que el volumen del petróleo es igual al de los poros:

$$V_{petróleo} = V_{poros}$$

entonces:

$$V_{petróleo} = \frac{P}{100} \cdot V_{total} = \frac{9{,}7}{100} \cdot \left(20 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 7{,}0\right)[m^3]$$

cuyo valor aproximado es:

$$V_{petróleo} \simeq 4{,}1 \cdot 10^8\,[m^3] \;\;\hat{=}\;\; 4{,}1 \cdot 10^{11}\,[\ell]$$

y usando las equivalencias:

$$1\,[\text{barrel}] \;\hat{=}\; 36\,[\text{Imp.gal.}] \quad \text{y} \quad 1\,[\text{Imp.gal}] \;\hat{=}\; 4{,}546\,[\ell]$$

esto es, $1[\text{barrel}] \;\hat{=}\; 36 \cdot 4{,}546[\ell] \;\simeq\; 164[\ell]$

resulta que el *número de barriles* es:

$$N_b = \frac{4{,}1 \cdot 10^{11}\,[\ell]}{164\,[\ell]} \simeq 2{,}5 \cdot 10^9$$

También nos parece interesante calcular la densidad ρ_r del material de la roca testigo, usando como dato la densidad del petróleo, $\rho_p = 0{,}84\,[kg / dm^3]$.

siendo:

$$\rho_r = \frac{M_r}{V_r} = \frac{M_{total} - M_p}{V_{total} - V_p}$$

y considerando:

$$V_p = \frac{P}{100} V_{total} \qquad \text{y} \qquad M_p = \rho_p \cdot V_p$$

se obtiene:

$$\rho_r = \frac{M_{total} - \rho_p \cdot \frac{P}{100} V_{total}}{V_{total} - \frac{P}{100} V_{total}} = \left(\frac{M_{total}}{V_{total}} - \frac{P}{100}\rho_p\right) \cdot \frac{100}{100 - P} =$$

$$= \left(\frac{16{,}2}{3{,}46} - \frac{9{,}7}{100} \cdot 0{,}84\right) \cdot \frac{100}{100 - 9{,}7}\left[kg/dm^3\right]$$

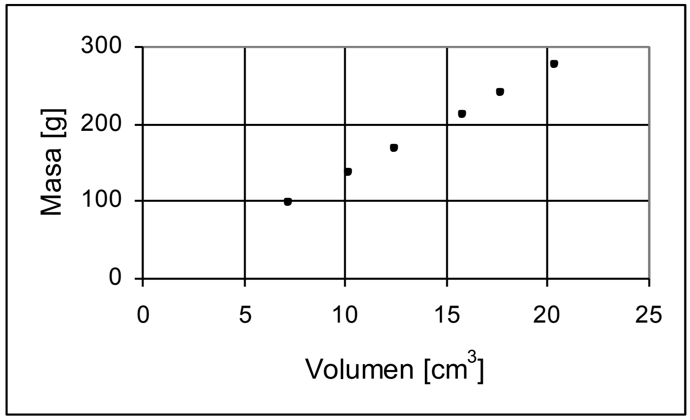
$$\approx 5{,}1\left[kg/dm^3\right]$$

el cual es un valor razonable para una roca sometida a presión a bastante profundidad.

Densidad del Mercurio

Determinando las masas y volúmenes de diferentes muestras de mercurio a la misma temperatura ambiental de 23[ºC], se han obtenido los valores:

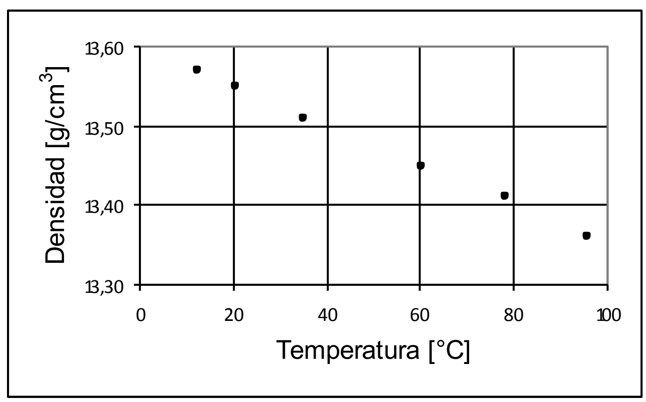
V[cm^3]	M[g]
7,2	97,5
10,2	137,2
12,5	169,3
15,8	212,8
17,7	240,2
20,4	276,1



Compruebe usted que el cuociente de estos valores es aproximadamente constante; $\rho_{Hg} \simeq 13{,}54\left[g/cm^3\right]$.

Haciendo una experiencia con una misma muestra de mercurio para determinar su densidad a diferentes temperaturas, se han encontrado los siguientes valores:

[°C]	[g/cm^3]
12,4	13,57
20,3	13,55
35,1	13,51
60,2	13,45
78,0	13,41
95,7	13,36



Observamos que la densidad del mercurio disminuye al aumentar la temperatura. Dentro del rango de temperaturas considerado, la densidad del mercurio se puede representar aproximadamente por la relación lineal:

$$\rho_{Hg} \simeq \left(13{,}60 - 0{,}0025t\right)\left[g/cm^3\right]$$

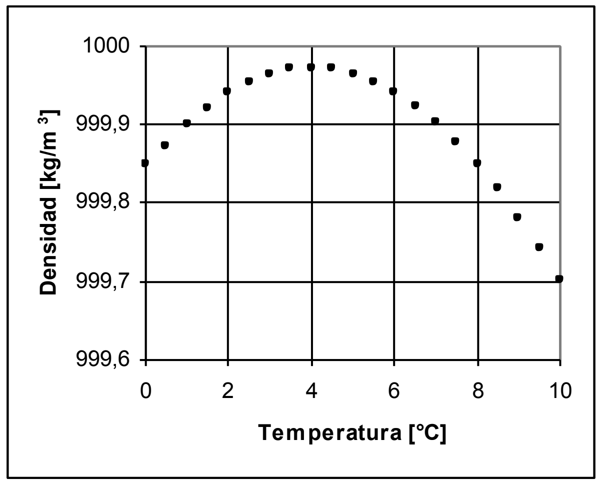
donde t representa a la temperatura expresada en [°C] .

Se ha encontrado experimentalmente que esta disminución de la densidad se produce porque el volumen de la muestra aumenta al aumentar la temperatura y porque la masa de la muestra no presenta variaciones detectables. Tal comportamiento es típico de la gran mayoría de sólidos y líquidos. Hacen excepción ciertos materiales como caucho y algunos sólidos cristalinos, dentro de un rango limitado de temperatura. Entre los líquidos que hacen excepción, nos interesa mostrar el comportamiento del agua.

Comportamiento anómalo del agua

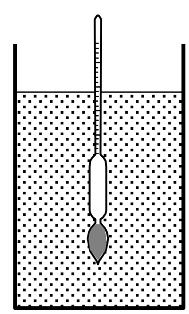
Mediciones muy precisas han permitido establecer que el agua tiene una **densidad máxima** de 999,973[kg/m^3] a la temperatura de 3,98[°C] (se suele indicar 1[kg/dm^3] a 4[°C]). A toda otra temperatura, la densidad del agua es menor. Para temperaturas mayores que 3,98[°C] el agua se dilata y disminuye su densidad; pero, al bajar la temperatura de 3,98[°C] a 0[°C] también se dilata, a diferencia de otros líquidos que al bajar la temperatura se contraen. Este comportamiento se muestra en la tabla y gráfico siguientes.

t [°C]	ρ_a **[kg/m^3]**
0,00	999,876
1,00	999,927
2,00	999,968
3,98	999,973
5,00	999,992
10,00	999,728
15,00	999,129
20,00	998,234



Esta simple anomalía permite la continuidad de la vida en las aguas de las regiones frías. Veamos lo que ocurre con el agua de un lago en invierno cuando la temperatura ambiente baja, por ejemplo, de unos 10[ºC] a valores menores que 0[ºC]. A medida que el agua de la superficie se enfría, se hace más densa y se hunde, subiendo agua más caliente desde el fondo a la superficie; este proceso de convección es muy eficiente y el lago se enfría hasta 4[ºC] . Luego, el agua de la superficie se enfría a temperatura inferior a 4[ºC], permaneciendo en la superficie, ya que su densidad es menor. El proceso de convección prácticamente se detiene, la superficie se hiela y el hielo, por ser menos denso que el agua, flota sobre ella. Aunque continúa el proceso de enfriamiento, éste se hace más lentamente porque el hielo y el agua son malos conductores del calor, de modo que la temperatura en las profundidades permanece en los 4[ºC] , permitiendo que la vida subsista.

Densímetro



Hemos indicado algunos métodos para la determinación de la densidad de líquidos. Queremos mencionar ahora que hay instrumentos, los **densímetros**, que permiten conocer la densidad de un líquido por una lectura directa de su escala. Un tipo de densímetro consiste en un simple flotador de vidrio, lastrado en su parte inferior y prolongado en forma de un tubo de vidrio. Debido al lastre, este instrumento flota de modo que el tubo queda en posición vertical.

El tubo queda más o menos sumergido según sea la densidad del líquido que se estudia. El valor de la densidad se lee directamente en una escala graduada en unidades apropiadas, por ejemplo [g/cm^3], colocada en el tubo. Tal vez usted ha visto usarlos como “lactómetros” o como indicadores del “estado de carga” de una batería o del “grado alcohólico” de bebidas.

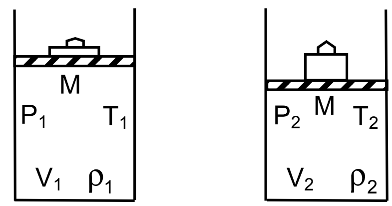
Densidad de gases

La densidad de los líquidos varía con la temperatura y con la presión; pero dentro de un amplio rango de valores de presión y de temperatura, los cambios son relativamente pequeños. En cambio, la densidad de los gases es muy sensible a los cambios de presión y temperatura; por ejemplo, para el aire tenemos:

$$\rho_{aire} \simeq \begin{cases} 1{,}3 \; [kg/m^3] & 0\,[°C] \;\; y \;\; 1\,[atm] \\ 0{,}95\,[kg/m^3] & 100\,[°C] \;\; y \;\; 1\,[atm] \\ 6{,}5 \; [kg/m^3] & 0\,[°C] \;\; y \;\; 5\,[atm] \end{cases}$$

Para una misma masa de gas que se encuentra en diferentes estados de temperatura absoluta y presión se cumple la relación aproximada:

$$\frac{\rho_1 \cdot T_1}{P_1} \simeq \frac{\rho_2 \cdot T_2}{P_2}$$

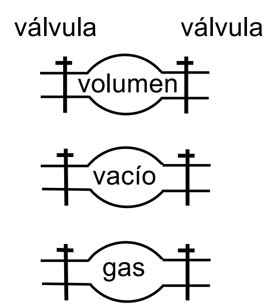


La densidad de los gases es más difícil de determinar que la de líquidos o sólidos. Un procedimiento, que requiere disponer de un matraz con válvulas, de una “bomba de vacío” y de instrumentos para medir presión y temperatura, es el siguiente:

Se determina el volumen V entre las válvulas del matraz, usando por ejemplo agua. Se produce vacío en el matraz y se determina su masa $M_{m,v}$.

Se introduce el gas cuya densidad se quiere determinar, controlando presión y temperatura. Se determina la masa $M_{m,g}$ del matraz con el gas. Se calcula la densidad del gas:

$$\rho_{gas} = \frac{M_{m,g} - M_{m,v}}{V}$$



Usando este u otros procedimientos, se ha determinado la densidad de numerosos gases en diferentes condiciones. Mostramos a continuación valores aproximados de la densidad de algunos gases en condiciones “normales”, $0[°C]$ de temperatura y $1[atm]$ de presión.

gas	$\rho\,[kg/m^3]$	gas	$\rho\,[kg/m^3]$
Hidrógeno (H_2)	0,09	Bióxido de Carbono (CO_2)	1,98
Metano (CH_4)	0,72	Propano (C_3H_8)	2,02
Nitrógeno (N_2)	1,25	Kriptón (Kr)	3,70
Aire	1,29	Xenón (Xe)	5,85
Etano (C_2H_6)	1,36	Radón (Rn)	9,73
Oxígeno (O_2)	1,43		

Divertimento. Se puede obtener una idea razonable de la variación de la densidad de la atmósfera terrestre con la altitud (densidad de una capa de aire a cierta altura h sobre la superficie de la Tierra), suponiendo que la temperatura de la atmósfera fuese constante y que la aceleración de gravedad fuese también constante. Con estas suposiciones se obtiene:

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-h/a}$$

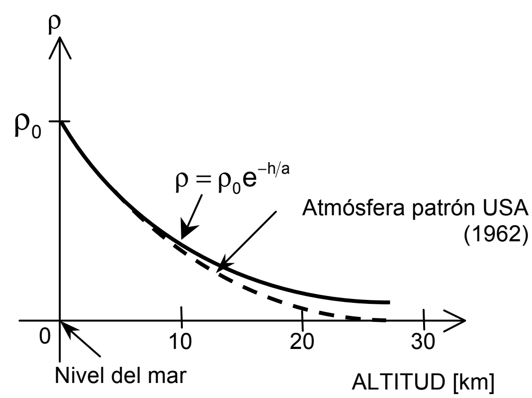
con:

$$a = P_0 / (g \cdot \rho_0)$$

$$P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5 \left[N/m^2\right]$$

$$g = 9{,}81 \left[m/s^2\right]$$

$$\rho_0 = 1{,}2 \left[kg/m^3\right] \text{a } 20[°C]$$



En la figura se representa tal variación de la densidad en función de la altitud. En la misma figura está, en línea segmentada, el resultado de un cálculo más refinado en el cual no se suponen la temperatura ni la aceleración de gravedad como constantes.

Ejercicios

7-66) Coloque un cubo de hielo en un vaso y luego llénelo con agua hasta el borde. Déjelo reposando en una mesa a temperatura ambiente ¿se derrama agua? Analice la situación.

7-67) Remítase a los datos de la densidad del agua en función de la temperatura (página 250). Calcule el volumen de 1[kg] de agua para los valores de temperatura allí dados y construya un gráfico para representar la variación de tal volumen en función de la temperatura.

7-68) Calcule la masa de aceite contenida en un tarro de 2 1/2 galones, sabiendo que la densidad relativa al agua de ese aceite es 0,9.

7-69) Un submarino de volumen $4{,}0 \cdot 10^3\ [m^3]$ tiene un masa de $3{,}1 \cdot 10^6\ [m^3]$. ¿Qué masa de agua debe hacer entrar a sus estanques para mantenerse entre aguas?

7-70) Se mezclan 120[g] de un líquido de densidad 0,91[g/cm^3] con 80[g] de otro líquido de densidad 0,84[g/cm^3]. Suponiendo que estos líquidos no reaccionan químicamente, calcule la densidad de la mezcla.

7-71) Se entrega leche de densidad 1,032[g/cm^3] y que contiene un 4% en volumen de materia grasa cuya densidad relativa al agua es 0,865. ¿Cuál es la densidad de la leche descremada?

7-72) Un cubo de plomo de 10,00[cm] de arista tiene un hueco interior de 600,0[cm^3]. El hueco se llena totalmente con glicerina. Determine la densidad media del objeto.

7-73) Se requiere construir una esfera de vidrio que tiene en su interior 200[cm^3] de hueco. Se pide calcular el radio externo de esta esfera si está llena de ácido sulfúrico y debe tener en total una masa de 1,7[kg] .

7-74) Exprese la densidad del oxígeno en $\left[g/ml\right]$.

7-75) Exprese la densidad del bióxido de carbono relativa al aire y relativa al hidrógeno (todos en las mismas condiciones "normales").

7-76) Sea $\rho_1 = a\left[kg/m^3\right]$ la densidad de cierta masa de gas a la presión $P_1 = b\left[N/m^2\right]$ y la temperatura absoluta T_1 = c [K].

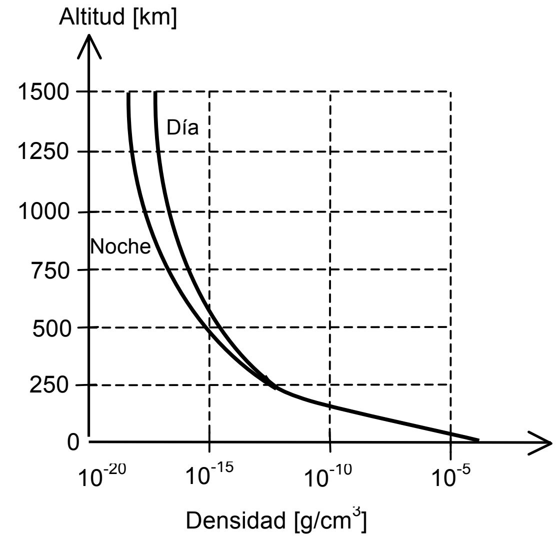
Calcule la densidad de este mismo gas al aumentar la presión a 3b [N/m^2] y disminuir la temperatura absoluta a c/2 [K].

7-77) Confeccione gráficos que representen la variación de la densidad del hidrógeno en función de la temperatura para presión constante y en función de la presión para temperatura constante.

7-78) Considere las densidades del agua: $\rho_h = 0{,}93\left[kg/dm^3\right]$ como hielo; $\rho_\ell = 1{,}0\left[g/cm^3\right]$ como líquido y $\rho_v = 1{,}3\left[kg/m^3\right]$ como vapor. Un tarro de base cuadrada, de lado $L = a\,[cm]$, está inicialmente lleno con agua líquida hasta altura $H = b\,[cm]$ y se pone a hervir. Exprese la masa del vapor producido, en términos de a y b , cuando la altura del agua en el tarro ha disminuido a 0,6 H.

7-79) Datos sobre la densidad de la atmósfera pueden obtenerse por sondas aéreas y por satélites artificiales. Hemos tomado información de dos fuentes, presentadas una por la tabla y la otra por el gráfico siguiente:

Altitud	**Densidad**	
[km]	$\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	$\left[\frac{\text{partícula}}{cm^3}\right]$
2	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2 \cdot 10^{19}$
10	$3{,}74 \cdot 10^{-4}$	$7{,}9 \cdot 10^{18}$
23	$5{,}75 \cdot 10^{-5}$	$1{,}2 \cdot 10^{18}$
32	$1{,}42 \cdot 10^{-5}$	$3{,}0 \cdot 10^{17}$
50	$1{,}02 \cdot 10^{-6}$	$2{,}2 \cdot 10^{16}$
78	$7{,}86 \cdot 10^{-8}$	$1{,}7 \cdot 10^{15}$
100	$3{,}70 \cdot 10^{-9}$	$8{,}5 \cdot 10^{13}$
213	$2{,}38 \cdot 10^{-12}$	$5{,}8 \cdot 10^{10}$
300	$1{,}29 \cdot 10^{-13}$	$3{,}2 \cdot 10^{9}$
400	$1{,}12 \cdot 10^{-14}$	$4{,}7 \cdot 10^{8}$
500	$3{,}69 \cdot 10^{-15}$	$1{,}6 \cdot 10^{8}$
700	$8{,}00 \cdot 10^{-16}$	$3{,}4 \cdot 10^{7}$
1000	$1{,}65 \cdot 10^{-16}$	$7{,}0 \cdot 10^{6}$
2000	$2{,}01 \cdot 10^{-18}$	$8{,}6 \cdot 10^{4}$
4000	$4{,}29 \cdot 10^{-21}$	$2{,}8 \cdot 10^{2}$



Construya un gráfico para representar los valores de la tabla y compárelo con el gráfico dado.

Constante de Avogadro y Cantidad de Substancia

La masa de un átomo de hidrógeno H^1 es aproximadamente igual a la masa de un protón, esto es:

$$m\left(H^1\right) \simeq 1{,}007\,[u] \simeq 1{,}673 \cdot 10^{-24}\,[g]$$

por lo cual, en 1,0[g] de hidrógeno, hay aproximadamente:

$$\frac{1{,}0\,[g]}{1{,}673 \cdot 10^{-24}\,[g]} \simeq 6{,}0 \cdot 10^{23} \text{ átomos.}$$

La masa de un átomo de C^{12} es, por definición, $m(C^{12}) = 12[u]$. Entonces, en forma análoga, el número de átomos que hay en 12,00[g] de C^{12} es:

$$\frac{12{,}00\,[g]}{12\,[u] \cdot 1{,}66057 \cdot 10^{-24}\,[g/u]} \simeq 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

El número de átomos que hay en A[g] del elemento ${}_ZX^A$ es aproximadamente igual al número de átomos que hay en 12[g] de ${}_6C^{12}$. El número de átomos que hay en exactamente 12[g] de C^{12} es igual al **número de Avogadro**, que es el valor numérico de la **constante de Avogadro**.

$$\text{Constante de Avogadro } = N_A = \left(6{,}02214179 \pm 0{,}00000030\right) \cdot 10^{23} \left[1/\text{mol}\right]$$

De acuerdo con recomendaciones internacionales, la decimocuarta Conferencia General de Pesos y Medidas (1971) adoptó para **el mol**, unidad de **cantidad de substancia**, la siguiente definición :

El mol es la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en exactamente 0,012[kg] de carbono 12.

Cuando se emplea “el mol” deben indicarse las entidades elementales del sistema, que pueden ser átomos, moléculas, radicales, iones, electrones, fotones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas.

Notemos que el mol está definido en base a la constante de Avogadro.

La constante de Avogadro se presenta también en muchas otras situaciones físicas. Es realmente una de las constantes fundamentales de la Naturaleza, que nos permite establecer una conexión entre el microcosmos y el mesocosmos.

La palabra **mol** deriva del latín “moles”, que significa montón o pila; la palabra **molécula** es su diminutivo, pequeño mol.

Debemos destacar que la definición de mol contiene al mismo tiempo el concepto de cantidad de substancia. La cantidad de substancia de un sistema expresa el cuociente entre el número de entidades elementales escogidas para describir la constitución de tal sistema y la constante de Avogadro.

$$\text{Cantidad de substancia } = \frac{\text{número de entidades elementales}}{\text{constante de Avogrado}}$$

$$S = \frac{n}{N_A} = \frac{n}{n_A}\,[\text{mol}] \quad \simeq \quad \frac{n}{6{,}022 \cdot 10^{23}}\,[\text{mol}]$$

Para el concepto “cantidad de substancia” se usan las expresiones “amount of substance” en inglés, “Stoffmenge” en alemán y “quantité de matière” en francés. El término francés recuerda “quantitas materiae”, que se usaba antiguamente para el concepto que hoy llamamos masa; este término no debe provocar confusiones, ya que masa y cantidad de substancia son conceptos totalmente distintos.

Definición de Masa Molar (MM)

Sea m la masa de un sistema y S su cantidad de substancia, entonces, el concepto masa molar MM lo definimos como:

Masa Molar de un sistema es el cuociente entre la masa m y la cantidad de materia S de ese sistema.

$$\text{Masa Molar} = \frac{\text{masa}}{\text{cantidad de substancia}}$$

$$\text{MM} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{a [kg]}}{\text{b [mol]}} = \frac{\text{a}}{\text{b}}\left[\text{kg/mol}\right]$$

Considerando como dimensiones fundamentales las de masa y la de cantidad de substancia, obtenemos:

$$\text{dim(masa molar)} = \frac{\text{dim(masa)}}{\text{dim(cantidad de substancia)}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{S}}$$

por tanto, la dimensión de masa molar es $\mathcal{M}\mathcal{S}^{-1}$.

La masa molar de una substancia corresponde a la masa de 1 [mol] de entidades elementales de dicha substancia.

Por ejemplo, por definición, 1 [mol] de átomos de C^{12} tiene una masa de 12[g], por lo tanto:

$$\text{MM}\left(\text{C}^{12}\right) = \frac{\text{m}}{\text{S}} = \frac{12\left[\text{g}\right]}{1\left[\text{mol}\right]} = 12\left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$$

Ejemplo: calcule la masa molar del electrón.

$$\text{Masa de un electrón } = \text{m}_\text{e} \approx 9{,}1\cdot 10^{-31}\left[\text{kg}\right]$$

$$\begin{aligned}\text{Masa de } 1\left[\text{mol}\right]\text{de electrones} &= \text{n}_\text{A}\cdot \text{m}_\text{e}\\ &\approx 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\left[\text{kg}\right]\\ &\approx 5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg}\right]\end{aligned}$$

$$\text{MM} = \frac{\text{m}}{\text{S}} = \frac{5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg}\right]}{1\left[\text{mol}\right]}$$

$$\text{MM}\left(\text{electrón}\right) \approx 5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg/mol}\right]$$

En la tabla periódica de los elementos se indica la masa molar promedio de los diferentes elementos considerando su abundancia natural.

Por ejemplo, $\text{MM}\left(\text{Cu}\right) \approx 63{,}54\left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$.

Algunas veces a la masa molar se la llama “peso atómico” o “masa atómica”.

Consideremos una muestra de 1[mol] de una substancia pura que se considera formada por átomos; sea X el símbolo químico de esos átomos.

Sea m(X)= a[u] la masa de uno de estos átomos.

Escribamos la constante de Avogadro en la forma $N_A = n_A$ [1/mol].

Entonces la masa molar del elemento X es:

$$MM(X) = m(X) \cdot N_A = a\,[u] \cdot n_A\,[1/\mathrm{mol}]$$

Como, por definición, la masa de un átomo de C^{12} es $m(C^{12})$ = 12[u] y como el número de átomos que hay en 12[g] de carbono 12 es igual al número de Avogadro n_A, resulta la equivalencia:

$$1[u] = \frac{1}{12} m\left[C^{12}\right] \triangleq \frac{1}{12} \cdot \frac{12\,[g]}{n_A} = \frac{1}{n_A}[g]$$

con la cual:

$$\begin{aligned} MM(X) &\triangleq a \cdot 1[u] \cdot n_A \left[1/\mathrm{mol}\right] \triangleq a \cdot \frac{1}{n_A}[g] \cdot n_A \left[1/\mathrm{mol}\right] \\ &\triangleq a\left[g/\mathrm{mol}\right] \end{aligned}$$

Lo anterior implica que si la masa de un átomo de cierto elemento es a[u], entonces, su masa molar es a[g/mol].

Podemos expresar la masa molar de una substancia constituida por átomos X en otra forma, por supuesto equivalente. Para ello escribimos la constante de Avogadro como el cuociente entre la masa molar y la masa de un átomo, tanto para el elemento X como para el C^{12}:

$$N_A = \frac{MM(X)}{m(X)} = \frac{MM(C^{12})}{m(C^{12})}$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} MM(X) &= \frac{m(X)}{m(C^{12})} \cdot MM(C^{12}) \\ &= \frac{m(x)}{m\left(C^{12}\right)} \cdot 12\left[\frac{g}{\mathrm{mol}}\right] \end{aligned}$$

donde hemos usado el valor $MM\left(C^{12}\right) = 12\left[g/\mathrm{mol}\right]$.

Hemos anotado explícitamente la razón $m(X)/m(C^{12})$ entre la masa m(X) de un átomo X y la masa $m(C^{12})$ de un átomo de carbono 12 , ambas expresadas en una misma unidad. Esta razón puede determinarse experimentalmente en forma mucho más precisa, por ejemplo por espectrometría de masas, que cada una de tales masas.

Consideremos el caso de una substancia pura que se supone está constituida de moléculas B que son combinaciones de átomos X e Y según la fórmula estructural $B = X_\alpha Y_\beta$.

La masa relativa a la masa de C^{12} de una de estas moléculas la podemos escribir de la forma:

$$\frac{m(B)}{m(C^{12})} = \alpha \cdot \frac{m(X)}{m(C^{12})} + \beta \cdot \frac{m(Y)}{m(C^{12})} = \alpha \cdot r(X) + \beta \cdot r(Y)$$

donde se usan los cuocientes $r(X) = m(X)/m(C^{12})$ y $r(Y) = m(Y)/m(C^{12})$ entre las masas de los átomos X e Y respecto a la masa $m(C^{12})$ de carbono 12 , por estar determinados con mejor precisión que cada una de las masas atómicas independientemente.

La masa molar de esta substancia queda entonces determinada por:

$$MM(B) = \frac{m(B)}{m(C^{12})} \cdot 12\left[\frac{g}{mol}\right]$$

La expresión de la masa molar para substancias de moléculas con estructuras químicas más complicadas se obtiene de modo similar.

Hemos presentado métodos para calcular valores de cantidades físicas relacionadas con la unidad 1[mol] usando resultados de mediciones de masas atómicas. Los resultados cuantitativos de análisis o dosimetría química pueden expresarse en moles; es decir, en unidades de cantidad de substancia de las partículas constituyentes.

Estudiemos a continuación algunos ejemplos sobre estas materias.

Ejemplos

- A un físico le proporcionan cierta cantidad de magnesio (Mg) diciéndole que es “100% químicamente puro”. El físico se interesa en saber si todos los átomos de Mg son iguales y analiza una muestra en un “espectrómetro de masas”. Obtiene los siguientes resultados:

isótopo	**masa [u]**	**abundancia %**
${}_{12}Mg^{24}$	23,98504	78,60
${}_{12}Mg^{25}$	24,98584	10,11
${}_{12}Mg^{26}$	25,98259	11,29

Calculemos, usando estos datos, **la masa atómica del magnesio.**

La masa atómica de un elemento se define como la suma de las masas de sus isótopos ponderadas por los respectivos porcentajes de abundancia natural. Entonces:

$$\begin{aligned} m(Mg) &= \frac{78,60}{100} m(Mg^{24}) + \frac{10,11}{100} m(Mg^{25}) + \frac{11,29}{100} m(Mg^{26}) \\ &\simeq (0,7860 \cdot 23,985 + 0,1011 \cdot 24,9858 + 0,1129 \cdot 25,9826)[u] \\ &\simeq 24,31[u] \end{aligned}$$

- El átomo de flúor F^{19} y el átomo de carbono C^{12} tienen masas que están en la razón $r(F^{19}) = 1,5832$. Calculemos la cantidad de substancia correspondiente a 43,2[g] de gas molecular F_2 .

La masa molar $MM(F_2)$ del gas molecular F_2 es:

$$MM\left(F_2\right) = 2\cdot\frac{m\left(F^{19}\right)}{m\left(C^{12}\right)}\cdot 0{,}012\left[\frac{kg}{mol}\right] = 2\cdot 1{,}5832\cdot 0{,}012\left[\frac{kg}{mol}\right]$$
$$\simeq 0{,}037997\left[kg/mol\right]$$

La cantidad de substancia S_G que corresponde a una masa M_G = 43,2[g] de gas F_2 es:

$$S_G = \frac{M_G}{MM\left(F_2\right)} \simeq \frac{43{,}2\cdot 10^{-3}\,[kg]}{0{,}0380\left[kg/mol\right]} \simeq 1{,}14\,[mol]$$

- Estimemos el tamaño de la molécula de agua.

La masa molar del agua es 0,018015[kg/mol] $\simeq$ 18[g/mol]. Esto es, en 18[g] de agua ($\simeq$ 1[mol] de agua) hay $n_A \simeq 6{,}\cdot 10^{23}$ moléculas de agua.

Considerando la densidad del agua igual a 1[g/cm^3], resulta que en 18[cm^3] hay aproximadamente $6{,}\cdot 10^{23}$ moléculas. A cada molécula le corresponde aproximadamente un volumen de:

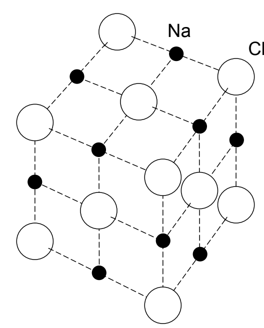
$$18\,[cm^3]/6{,}\cdot 10^{23} = 3{,}\cdot 10^{-23}\,[cm^3]$$

Suponiendo, además, que la molécula de agua tuviese una forma esférica de radio R, tenemos:

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \simeq 3{,}\cdot 10^{-23}\,[cm^3]$$

por tanto el radio $r \approx 1{,}927$ [Å], es decir, su diámetro $\approx 3{,}854$ [Å],

- Calculemos la separación interatómica en un cristal de cloruro de sodio. La densidad del NaCl cristalino es 2,16[g/cm^3] y la masa molar del NaCl es 58,5[g/mol].



Considerando que el NaCl forma un cristal cúbico y llamando d a la distancia interatómica y V_{at} al volumen por átomo, se cumple $V_{at} = d^3$.

El volumen atómico lo determinamos en la siguiente forma:

masa por "molécula": $m\left(NaCl\right) = \dfrac{MM\left(NaCl\right)}{N_A}$

volumen por "molécula": $V\left(NaCl\right) = m\left(NaCl\right)/\rho_c$

número de átomos por "molécula": η

volumen por átomo: $V_{at} = \dfrac{V\left(NaCl\right)}{\eta}$

Entonces:

$$d^3 = V_{at} = \frac{V(NaCl)}{\eta} = \frac{MM(NaCl)}{\eta \cdot N_A \cdot \rho_c}$$

$$= \frac{58,5[g/mol]}{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}[1/mol] \cdot 2,16[g/cm^3]}$$

$$= \frac{58,5 \cdot 10^{-23}}{2 \cdot 6,02 \cdot 2,16}[cm^3] \simeq 2,25 \cdot 10^{-23}[cm^3] \simeq 22,5\,[Å^3]$$

Dando para el espacio interatómico $d \simeq 2,82$ [Å]

Aunque realmente el Na y el Cl no forman moléculas al cristalizar, hemos usado el término "molécula" para facilitar la comprensión del problema.

Ejercicios

7-80) Los resultados de la masa y abundancia natural de los isótopos estables de una muestra de silicio están dados en la tabla adjunta. Calcule la masa atómica del silicio.

isótopo	**masa [u]**	**abundancia [%]**
${}_{14}Si^{28}$	27,97693	92,27
${}_{14}Si^{29}$	28,97649	4,68
${}_{14}Si^{30}$	29,97376	3,05

7-81) El cloro, elemento de número atómico Z =17, tiene una masa atómica de 35,453[u]. Sus únicos dos isótopos estables tienen masas relativas a la masa del C^{12} de $r(Cl^{35}) \simeq 2,9141$ y $r(Cl^{37}) \simeq 3,0805$ respectivamente. Calcule la abundancia natural de estos dos isótopos.

7-82) Determine aproximadamente el número de átomos que hay en 4[g] de uranio 235.

7-83) El nitrógeno tiene masa atómica igual a 14,0067 [u]. ¿Cuántos moles hay en 6,0[g] de nitrógeno?

7-84) Calcule el número de moléculas que hay en 0,021[kg] de helio. La masa atómica del He es 4,0026[u].

7-85) La densidad del cobre, a cierta temperatura, es 8,885[kg/dm^3]. La masa atómica del cobre es 63,57[u]. Calcule la cantidad de substancia, expresada en [kmol] y el número de átomos de cobre que hay en 1,0[m^3] de este metal.

7-86) La densidad es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen. Estime el número de moléculas que permanecen en 1[cm^3] de una cámara de alto vacío en que la densidad del aire en ella ha llegado a un valor de 10^{-13}[kg/m^3] . La masa molar media del aire es aproximadamente 29[g/mol].

7-87) El átomo de oxígeno en la molécula de agua ocupa aproximadamente la mitad del volumen de dicha molécula. Estime el diámetro de un átomo de oxígeno.

7-88) Analizando resultados obtenidos en la difracción de rayos X producida por un cristal se pueden obtener datos característicos del cristal como la separación interatómica a, el volumen de la "celda unitaria" Vc y el número de moléculas en la celda unitaria η_c, entre otros. Estos datos están relacionados a la densidad ρ del compuesto, un dato macroscópico, por $\eta_c = V_c \cdot \rho \cdot N_A / MM$ donde MM es la masa molar y N_A es la constante de Avogadro. Use los datos conocidos para la pirita $(FeS_2): \eta_c = 4,\ \ V_c = a^3$ con $a \simeq 5{,}41[Å],\ \rho \simeq 5{,}02\left[g/cm^3\right]$ y $MM \simeq 0{,}12\left[kg/mol\right]$, para calcular la constante de Avogadro.

7-89) En el análisis de una roca se encuentra que el 2,2% de su masa es potasio. En una muestra de 100[g] de potasio hay: 93,08[g] de K^{39}; 0,012[g] de K^{40} y 6,908[g] de K^{41}. Siendo K^{39}, K^{40} y K^{41} los isótopos naturales del potasio. Exprese porcentualmente la abundancia natural de cada isótopo del potasio. Calcule la cantidad de K^{40} en partes por millón (ppm) que hay en la roca.

7-90) Suponga que los elementos que se encuentran en la Tierra se formaron alrededor de unos $5 \cdot 10^9$[año] atrás. El isótopo radiactivo de potasio ${}_{19}K^{40}$, cuya semivida es $1{,}3 \cdot 10^9$[año] , tiene hoy una abundancia natural de 0,012% . Calcule la abundancia relativa de potasio 40 y de los isótopos estables de potasio hace cinco mil millones de años.

Concentración o densidad de cosas

Hemos discutido hasta ahora la densidad de substancias. El concepto de densidad se puede aplicar también a diversas cosas para establecer cuocientes de comparación. Así hablamos por ejemplo de “partículas por metro cúbico”, “ovejas por hectárea”, “automóviles por habitante”, etc. A continuación le presentamos algunos ejemplos:

- Chile continental tiene un área de 756.950[km^2] y sus habitantes en 2008 están estimados en 16.757.442 . Decimos que la “densidad de población del país” es de:

$$D = \frac{\text{Población [habitante]}}{A\,[km^2]}$$

$$= \frac{16.757.442}{756950} \cong 22\left[\frac{\text{habitante}}{km^2}\right]$$

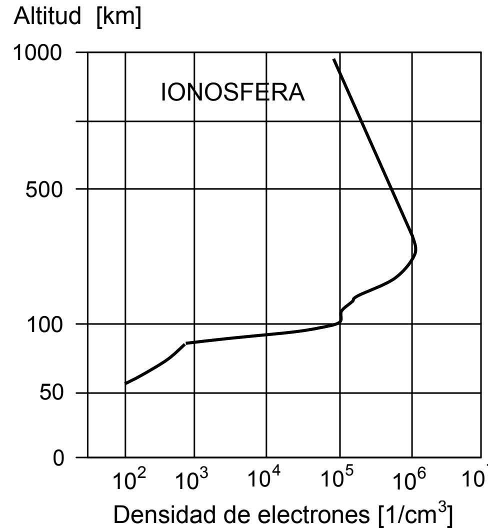
Vemos claramente que el concepto de densidad de población se parece mucho al de densidad superficial, que es masa por unidad de área. En la vida diaria tenemos muchos conceptos que se expresan de manera análoga.

- En una propaganda de pinturas nos dicen que un galón sirve para cubrir 60[m^2]. Sabiendo que un galón equivale aproximadamente a 3,8 litros, podemos calcular el **rendimiento** de la pintura en [m^2/ℓ]:

$$\text{rendimiento de la pintura } = \frac{60\,[m^2]}{3{,}8\,[\ell]} \simeq 16\left[m^2/\ell\right]$$

En el estudio de las partículas y de radiaciones el concepto de partículas por unidad de volumen es muy usado.

En el gráfico adjunto se muestra la variación de la **concentración** de electrones en función de la altitud sobre la superficie de la Tierra.



Ejercicios

7-91) Una información aparecida en un periódico dice: "Caen en promedio, alrededor de mil cien toneladas de polvo por milla cuadrada por año". Exprese esta información en $\left[kg / m^2 \cdot año\right]$.

7-92) La densidad en cierta región del universo en que abundan protones es del orden de $10^{-29}\left[g / cm^3\right]$. Se pide calcular el orden de magnitud de la concentración de protones en esa región, en [1/m^3].

7-93) Un conglomerado globular de estrellas es una distribución esférica del orden de 10^5 estrellas. El diámetro del conglomerado puede ser del orden de 40[pc]. Si supone que las estrellas están distribuidas uniformemente en el volumen del conglomerado. Calcule la "densidad media de estrellas" en este conglomerado.

7-94) Tome una novela. Ábrala al azar y determine cuántas palabras por decímetro cuadrado hay en una página. Estime el número de palabras escritas en ese libro.

7-95) En una caja se echan 3.000 bolitas de cristal de 0,8[mm] de diámetro. Estime el "número de bolitas por centímetro cúbico" que hay en la caja.

7-96) Considere una siembra de 700 hectáreas de trigo que rinde 17 quintales por hectárea. La densidad del trigo a granel es aproximadamente 1,4[g/cm^3]. ¿Cuántos camiones de 25[m^3] de capacidad de carga serían necesarios para transportar esa producción de trigo?

7-97) Para una buena atención de los alumnos en los laboratorios de enseñanza de Ciencias Naturales se recomienda un área de 3,0 a 3,5[m^2] por alumno. Determine las dimensiones apropiadas de un laboratorio para que trabajen simultáneamente 40 alumnos.

7-98) Se tiene una plancha de cobre de 2,3[m^2] de área y 3,5[mm] de espesor. En la plancha se deben hacer orificios de 1,0[cm] de radio. Los orificios quedan distribuidos de manera uniforme con una densidad media de orificios igual a 8,7[1/dm^2]. Calcule la masa de la plancha una vez hechos los orificios.