

CAPÍTULO IX

FUERZAS



La idea primera de fuerza está íntimamente ligada a la actividad muscular. Al empujar una carretilla, al arrastrar un mueble, al trepar un cerro, al levantar y sostener una piedra, al lanzar una pelota, al doblar un tubo, al estirar un elástico, nuestros músculos nos hacen saber que estamos ejerciendo una fuerza.

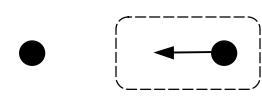
Las situaciones presentadas ilustran cambios del estado de movimiento y deformaciones de objetos. Podemos definir fuerza como la causa o agente físico que produce cambios del estado de movimiento (aceleraciones), deformaciones y equilibrios de objetos. Observe que estamos definiendo fuerza por los efectos que ella produce.

Hablamos de:

la fuerza que “**actúa** sobre un objeto” (la que produce efectos en él).

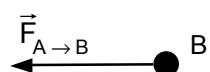


a fuerza “**ejercida** por un objeto sobre otro”, pero carece de sentido hablar de la fuerza que “**tiene** un objeto”.



A → ← B

Las fuerzas son **interacciones** entre objetos y no son propiedades de los objetos en sí. En otras palabras, la fuerza no es una propiedad de los cuerpos como la masa o el volumen, sino más bien una “información” que recibe cada uno de los cuerpos de la presencia de los otros. Una interacción entre los objetos, significa que hay una fuerza actuando sobre cada uno de ellos, esto es, las fuerzas se presentan siempre en “parejas”. Debido a esto, usaremos la siguiente notación para nominar las fuerzas de interacción entre dos cuerpos A y B.



en donde:

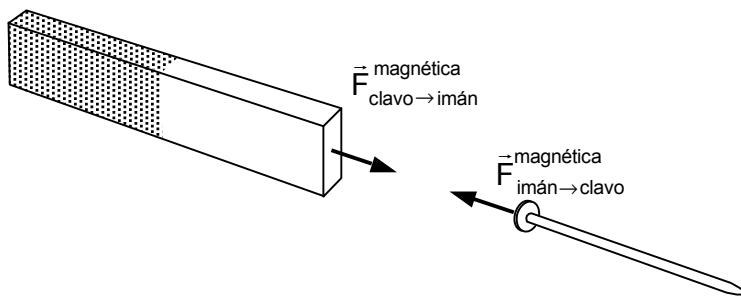
$\vec{F}_{B \rightarrow A}$: es la fuerza ejercida **por** el cuerpo B **sobre** el cuerpo A

$\vec{F}_{A \rightarrow B}$: es la fuerza ejercida **por** el cuerpo A **sobre** el cuerpo B.

En ocasiones, cuando sea conveniente, indicaremos además el **tipo de fuerza**.

Consideremos algunos ejemplos para ilustrar este punto.

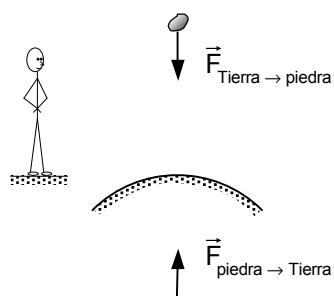
- Al acercar un imán a un clavo observamos que el clavo es atraído por el imán. Si mantenemos el imán en la vecindad de un riel, sentimos que el imán es atraído por el riel. En el primer caso podríamos decir que el imán ejerce una fuerza sobre el clavo y en el otro, que es el riel el que ejerce una fuerza sobre el imán. Lo que sucede en realidad es que cada objeto actúa sobre el otro en cada caso. Si mantenemos el imán en una mano y el clavo en la otra y los acercamos "sentimos" ambas fuerzas. En el caso imán-riel también existen las dos fuerzas, pero tenemos que buscar otros métodos para detectarlas.



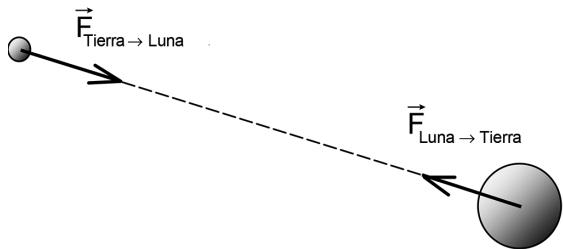
$\vec{F}_{\text{clavo} \rightarrow \text{imán}}^{\text{mag}}$: Es la fuerza magnética ejercida por el clavo sobre el imán

$\vec{F}_{\text{imán} \rightarrow \text{clavo}}^{\text{mag}}$: Es la fuerza magnética ejercida por el imán sobre el clavo

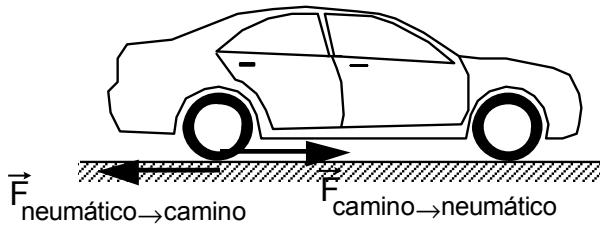
- Al soltar una piedra desde una altura cualquiera observamos que la piedra cae a la Tierra y decimos que la Tierra atrae a la piedra con cierta fuerza. Pero también la piedra atrae a la Tierra, lo que está de acuerdo con nuestro concepto de interacción. Aunque realmente la piedra y la Tierra se acercan una a otra, decimos que "la piedra cae sobre la Tierra" porque la aceleración que adquiere la Tierra es prácticamente cero.



- La Tierra atrae a la Luna y la mantiene girando en órbita alrededor suyo. A su vez, la Luna ejerce una fuerza sobre la Tierra; esta fuerza se hace notoria, por ejemplo, en el movimiento de las mareas.



- Aunque un automóvil tuviera un motor "muy poderoso" su desplazamiento no sería posible si no estuviera presente la fuerza de roce que el camino ejerce sobre los neumáticos del automóvil. También los neumáticos ejercen una fuerza sobre el camino.



Notemos que en algunos de estos ejemplos la interacción tiene lugar aún cuando los objetos estén separados, es decir, no tienen superficies en contacto directo. En tales casos, se suele hablar de **acción a distancia**.

La caída de una piedra, el movimiento de satélites y planetas y la agrupación de estrellas en galaxias son algunos casos de un mismo tipo de interacción, la **interacción gravitacional**.

Las fuerzas musculares, las ejercidas por resortes y elásticos, el roce y las interacciones intermoleculares e interatómicas son diversas formas en que se manifiesta la **interacción electromagnética**.

En las actividades de la vida diaria y en la práctica corriente de la ingeniería las interacciones gravitacionales y electromagnéticas son las que se presentan más frecuentemente. En Física todas las interacciones que permiten la descripción de los fenómenos pueden clasificarse en:

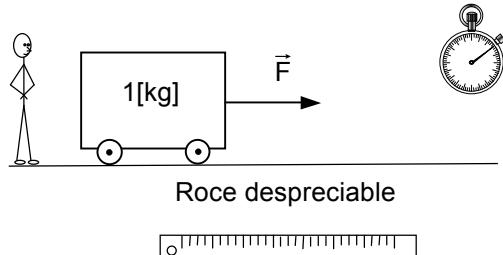
- Interacción gravitacional
- Interacción electromagnética
- Interacción fuerte (nuclear)
- Interacción débil (leptónica)

Los protones y neutrones permanecen juntos formando un núcleo atómico debido a la interacción nuclear. La interacción leptónica es responsable, en particular, de la desintegración radiactiva de un neutrón ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$). Estos tipos de interacciones se presentan, también, entre otras partículas fundamentales.

Medición de una fuerza

Hemos definido fuerza por los efectos que ella produce; en particular, al aplicar una fuerza a un cuerpo, éste puede adquirir una aceleración. Esto nos da la posibilidad de elaborar un método para medir fuerzas y definir unidades de fuerza.

Aplicaremos una fuerza a un cuerpo de 1[kg] de masa, de modo que éste adquiera una aceleración de 1[m/s²]. A la magnitud de esta fuerza le asignamos el valor “un newton”; siendo “1” el número de medición y “newton” el nombre de la unidad correspondiente.



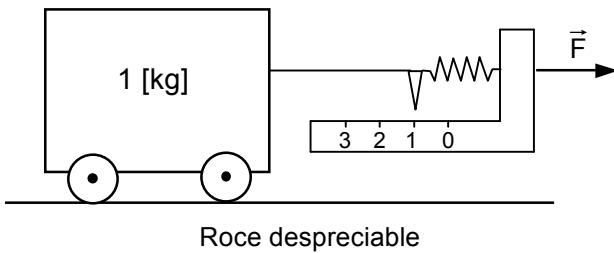
Unidad de fuerza:

Un newton 1[N]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{masa} & 1[\text{kg}] \\ \text{aceleración} & 1[\text{m/s}^2] \end{array} \right\} \text{ fuerza } 1[\text{N}]$$

El método anteriormente indicado implica medir aceleraciones para comparar fuerzas. Basado en él, explicaremos la graduación de un instrumento que nos permita medir directamente una fuerza. Recurriremos a otro efecto que puede producir una fuerza, una deformación. Como objeto deformable elegiremos un resorte, que tiene la propiedad de recuperar su forma inicial cuando la fuerza deje de actuar.

Cuando el cuerpo de masa 1[kg] adquiere la aceleración de 1[m/s²] colocaremos una marca frente al indicador con la anotación 1[N], cuando la aceleración tenga el valor 2[m/s²] colocaremos frente al indicador 2[N] y así sucesivamente. Cuando la rapidez del carro sea constante colocaremos la marca 0[N] .

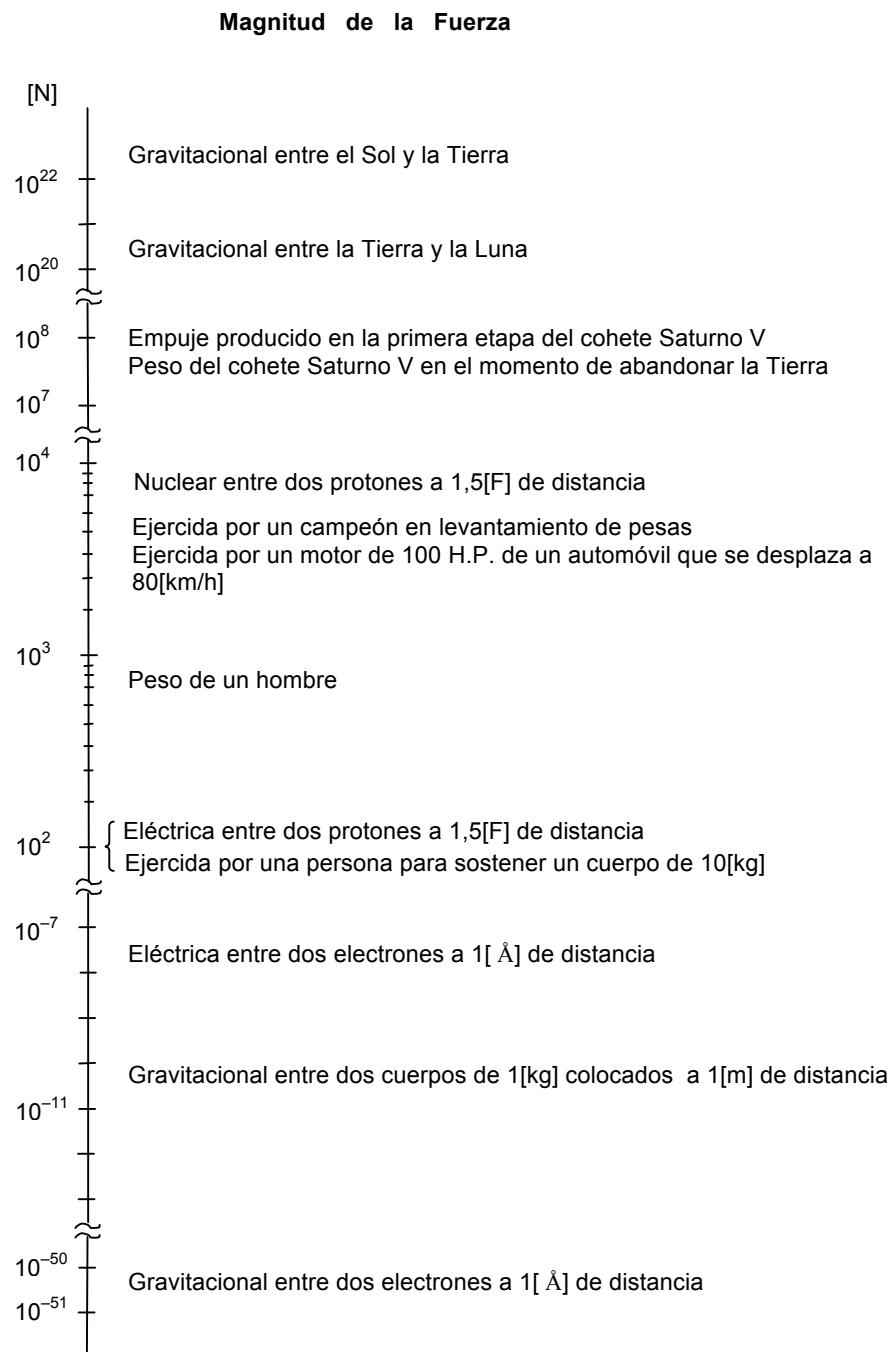


Un resorte calibrado de esta manera se llama *dinamómetro* o *balanza de Newton*.

Debemos aclarar que no todas las fuerzas pueden ser medidas por este procedimiento. Para lograr medir algunas interacciones se requiere de técnicas especiales muy refinadas.

Fuerza: órdenes de magnitud

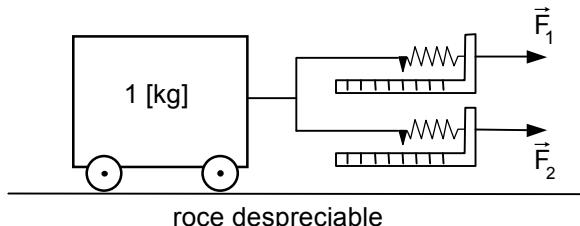
La determinación de los valores de las fuerzas, ya sea por mediciones o por cálculo, es en general un asunto de no fácil solución. Le presentamos a continuación una escala en que se indican valores estimados de magnitudes de fuerzas que intervienen en algunas circunstancias específicas.



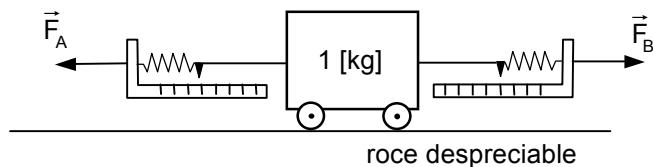
Superposición de fuerzas

Hemos considerado el efecto de una fuerza sobre un carrito cuya masa es 1[kg]. Consideraremos ahora el efecto producido por más de una fuerza actuando sobre el mismo carrito.

- Aplicamos dos fuerzas sobre el carrito en la forma que se indica en la figura. Medimos las magnitudes de las fuerzas en las correspondientes "balanzas de Newton" y determinamos la aceleración del carrito usando regla y cronómetro.



- Cuando las *balanzas de Newton* indican cada una 1[N], la aceleración es $2[m/s^2]$. Resultado igual al que se obtiene aplicando una sola fuerza de 2[N] de magnitud.
- Cuando las lecturas son 2[N] y 2[N] respectivamente, se obtiene la aceleración de $4[m/s^2]$. Aceleración que corresponde a una "fuerza neta" de magnitud igual a 4[N].
- Al hacer un experimento similar, pero aplicando las fuerzas como se muestra en la figura adjunta, observamos que:



- Si la lectura de A es 1[N] y la de B es 3[N] el carrito se mueve hacia la derecha con aceleración $2[m/s^2]$, como si hubiera una sola fuerza de 2[N] aplicada hacia la derecha.
- Si la lectura de A es 5[N] y la de B es 2[N], el carrito se mueve hacia la izquierda con aceleración $3[m/s^2]$. La "fuerza resultante" es de 3[N] dirigida hacia la izquierda.
- Si las lecturas de A y B son **iguales**, la aceleración es **cero**. La fuerza neta es **cero**.

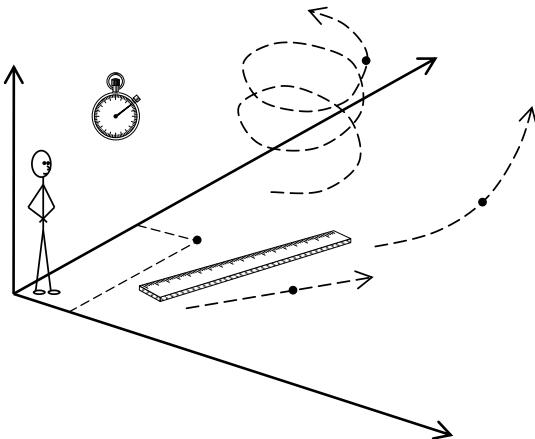
En los casos particulares estudiados vemos que las dos fuerzas consideradas actuaban sobre el carrito produciendo un efecto equivalente al de una sola fuerza, a la que llamamos fuerza neta o fuerza resultante.

Más adelante, estudiando casos generales del movimiento de traslación de un cuerpo, veremos que el efecto de varias fuerzas actuando sobre el cuerpo será equivalente al efecto de una única fuerza neta o resultante.

Leyes del movimiento

Al estar usted situado en cierto lugar, podrá determinar si un objeto está en reposo o en movimiento respecto a su ubicación. En un caso como éste, usted cumple con las condiciones mínimas para ser un “observador en un sistema de referencia”.

Si este observador tiene una regla y un cronómetro puede medir cambios de posición de un objeto en el transcurso del tiempo y determinar velocidades y aceleraciones, y verificar si el movimiento es rectilíneo con rapidez constante o rectilíneo acelerado o si el objeto describe una trayectoria curvilínea con rapidez constante o variable.



Pero un observador premunido sólo de regla y cronómetro no podrá indicar a qué se deben los diferentes tipos de movimiento que pueda tener un objeto y, por tanto, no puede predecir ni reproducir movimientos.

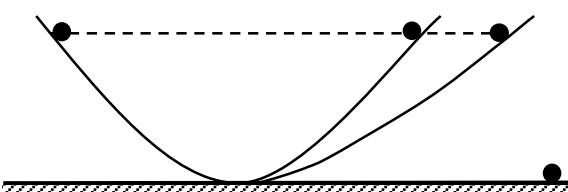
El enunciado de las leyes que nos permiten describir y predecir el movimiento de los objetos macroscópicos aparecen en el Libro I de la obra fundamental de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado en 1687. Esta obra, considerada el primer tratado sistemático de Física Teórica, marca un momento dramático en la historia de las ciencias naturales. Antes de Newton, el movimiento de los planetas era un misterio, su obra contribuyó a resolverlo. A partir de Newton, la Física ha avanzado segura y rápidamente.

Primer principio de Newton. Principio de Inercia

Todo cuerpo sigue en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta a menos que sea obligado a cambiar ese estado por obra de fuerzas a él aplicadas.

Aunque Newton fue el primero en expresar esta ley en términos generales, ella fue anticipada por Galileo. Basándose en sus observaciones del movimiento de la lentejuela de un péndulo, Galileo razonó de la siguiente forma:

Si un cuerpo cae libremente por un plano inclinado, subirá por el plano inclinado adyacente alcanzando la misma altura de partida, suponiendo ambos planos sin fricción. La altura alcanzada será independiente del camino recorrido al ir cambiando el plano de subida.



Cuando este plano coincide con la horizontal el cuerpo nunca podrá alcanzar su altura primitiva, y por tanto, concluyó Galileo, se moverá indefinidamente con rapidez constante.

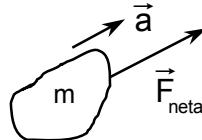
Segundo principio de Newton

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y tiene la dirección de la recta según la cual esa fuerza se aplica.

Este enunciado es la traducción literal del original, escrito por Newton en latín. Una manera de expresar matemáticamente este principio es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \vec{a}$$

Implicando que $F_{\text{neta}} = m a$, donde:



F_{neta} la magnitud de la fuerza neta actuando sobre un cuerpo.

m la masa del cuerpo.

a la magnitud de la aceleración adquirida por el cuerpo en la dirección de la fuerza neta.

Las expresiones para la fuerza \vec{F} deben ser "inventadas" para cada clase de agente que produce interacciones. Las expresiones obtenidas se suelen llamar *leyes de fuerza*, de las cuales estudiaremos algunas más adelante cuando tratemos de interacción gravitacional, eléctrica u otras.

Para verificar la validez de una determinada "ley de fuerza", debemos comparar las predicciones sobre el movimiento de un cuerpo al usar esa ley en conjunto con $\vec{F}_{\text{neta}} = m \vec{a}$, con los valores obtenidos experimentalmente.

La concordancia de las predicciones con la experimentación producirá la aceptación de la ley de fuerza propuesta, dentro de los límites condicionados por la experimentación.

La *dimensión de fuerza* en términos de las dimensiones de masa, longitud y tiempo queda determinada por:

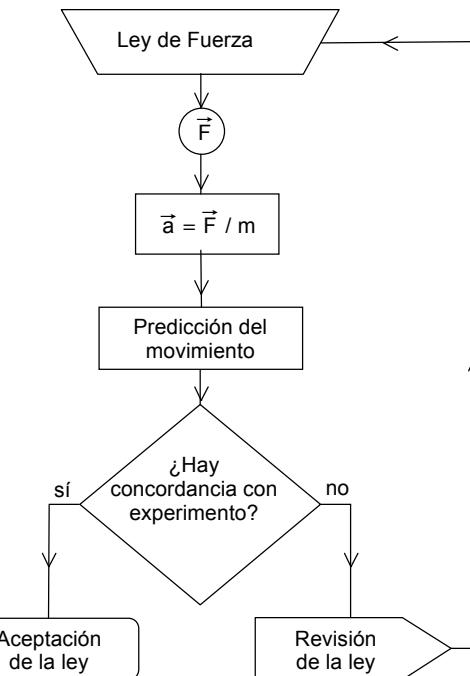
$$\begin{aligned} \text{dim}(\text{fuerza}) &= \text{dim}(\text{masa} \cdot \text{aceleración}) \\ F &= M L T^{-2} \end{aligned}$$

Hemos definido que el valor de una fuerza es 1[N] cuando imprime la aceleración de 1[m/s²] a un cuerpo de 1[kg] de masa, entonces:

$$F = 1[\text{N}] = m \cdot a = 1[\text{kg}] \cdot 1[\text{m/s}^2] \hat{=} 1[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$$

por tanto: 1[N] $\hat{=} 1[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$

Si un cuerpo tiene la masa de 1[g] y adquiere la aceleración de 1[cm/s²] tendremos:



$$F = m \cdot a = 1[g] \cdot 1[cm/s^2] \hat{=} 10^{-3}[kg] \cdot 10^{-2}[m/s^2] = 10^{-5}[N]$$

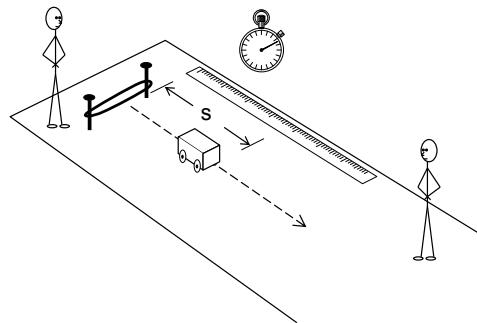
e introduciendo la unidad: $1[\text{dina}] \hat{=} 1[g \cdot cm/s^2]$ resulta:

$$1[\text{dina}] \hat{=} 10^{-5}[N]$$

Dado que la segunda ley de Newton es una de las más importantes y útiles en Física, nos parece conveniente describirle un experimento fácilmente realizable y que le permita captar el comportamiento interrelacionado entre fuerza, masa y aceleración.

Fijemos en el suelo dos clavos a distancia conveniente para mantener tenso un elástico.

Con un carrito presionamos el elástico. Cuando soltamos el carrito, el elástico ejerce una fuerza \bar{F} sobre el carrito durante un “pequeño” intervalo de tiempo Δt .



Considerando que la fuerza neta aplicada al carrito tiene dirección constante y magnitud variable en el tiempo, la aceleración media \bar{a} del carrito durante el pequeño intervalo de tiempo Δt queda determinada por el “valor medio” de la magnitud de la fuerza durante ese intervalo Δt .

Además, como el carrito parte del reposo ($v_i = 0$), al final del intervalo Δt , en el instante en que pierde contacto con el elástico, ha adquirido una rapidez v dada por:

$$v = \bar{a} \cdot \Delta t$$

Si suponemos que el movimiento continúa con tal rapidez v durante cierto tiempo t_f , en el cual la influencia del roce no sea significativa, el camino s recorrido por el carrito en el tiempo t_f es:

$$s \approx v \cdot t_f$$

Entonces:

$$\bar{a} = \frac{v}{\Delta t} \approx \frac{s}{\Delta t \cdot t_f}$$

Esta expresión aproximada nos permite **comparar** aceleraciones al efectuar mediciones de la distancia s recorrida por el carrito en un tiempo t_f fijo, por ejemplo de 1[s].

La primera parte del experimento consiste en ir variando la masa del carrito, cuidando que las deformaciones del elástico sean las mismas, con lo que se logra que el valor medio de la fuerza aplicada al carrito sea constante para diferentes valores de masa.

La experiencia nos dice que al aumentar la masa, el intervalo de tiempo Δt que el elástico permanece en contacto con el carrito aumenta. Este efecto lo podemos representar aproximadamente haciendo Δt proporcional a la raíz de la masa: $\Delta t \propto \sqrt{m}$. Con lo cual, la relación entre la distancia s recorrida por el carrito en un tiempo fijo t_f y la aceleración media \bar{a} puede ser escrita:

$$a = \gamma \frac{s}{\sqrt{m}}, \quad \text{siendo } \gamma \text{ la constante de proporcionalidad.}$$

Si m_1 , s_1 y a_1 son los valores de la primera medición, comparamos masas y aceleraciones de las otras mediciones mediante los cuocientes:

$$\frac{m}{m_1} \quad \text{y} \quad \frac{a}{a_1} = \frac{s}{s_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m}}$$

Obtuvimos los siguientes resultados:

m [kg]	s [m]	$\frac{m}{m_1}$	$\frac{a}{a_1}$	$\frac{m}{m_1} \cdot \frac{a}{a_1}$
0,97	2,01	1,00	1,00	1,00
2,01	1,42	2,07	0,49	1,01
3,16	1,13	3,26	0,31	1,03
5,20	0,91	5,36	0,19	1,02

Ellos nos muestran que para una fuerza constante la aceleración es inversamente proporcional a la masa, cumpliéndose para las magnitudes que:

$$F = \text{constante} \rightarrow a \propto 1/m$$

En la segunda parte del experimento variamos el número de elásticos colocando uno, dos o más elásticos iguales, y dejamos la masa del carrito constante. Cada vez que impulsemos el carrito con cada grupo de elásticos, cuidaremos que éstos tengan igual deformación. Efectuando las mediciones en forma análoga a lo hecho en la primera parte, y considerando que en esta situación el intervalo de tiempo Δt que los elásticos están en contacto con el carrito depende del número n de elásticos según la expresión aproximada $\Delta t \propto 1/\sqrt{n}$, establecemos la relación:

$$\frac{a}{a_1} \approx \frac{s}{s_1} \sqrt{n}$$

Obtuvimos los siguientes resultados:

n	s [m]	a/a ₁	a
1	1,28	1,00	1 · 1,00 · a ₁
2	1,72	1,90	2 · 0,95 · a ₁
3	2,18	2,94	3 · 0,98 · a ₁
4	2,44	3,82	4 · 0,96 · a ₁

lo que nos permite concluir que la aceleración es proporcional a la fuerza cuando la masa es constante:

$$m = \text{constante} \rightarrow a \propto F$$

Así, con un experimento simple podemos apreciar los valores de la aceleración que adquiere un cuerpo de acuerdo a la relación $\vec{F} = m \vec{a}$. Naturalmente, en un experimento de esta clase se introducen errores causados especialmente por el roce y el comportamiento de los elásticos.

¡Le recomendamos "fuertemente" que usted haga este experimento!

Tercer principio de Newton. Principio de Acción Reacción

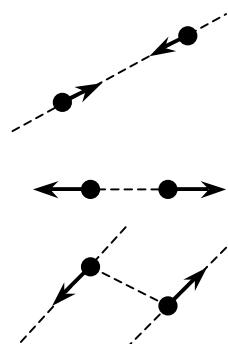
Para cada acción existe siempre opuesta una reacción contraria o las acciones mutuas de dos cuerpos de uno sobre el otro son siempre iguales y dirigidas a partes contrarias.

Esta es una traducción literal de lo escrito por Newton. En el enunciado de Newton *acción* y *reacción* son las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos debido a la interacción entre ellos. La acción no es una causa de la reacción, sino que ambas coexisten y, por eso, cualquiera de estas fuerzas puede ser designada por acción o por reacción.

Aunque acción y reacción son fuerzas de igual magnitud y dirección contraria, no se anulan porque actúan en distintos cuerpos.

El hecho que acción y reacción tengan direcciones contrarias no implica que necesariamente estén sobre una misma recta.

En la figura se ilustra el caso más común en que acción y reacción están en una misma recta y el caso menos frecuente en que acción y reacción no lo están.

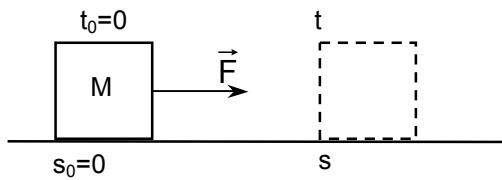


Al hablar del "movimiento de un cuerpo" nos referimos a su cambio de posición respecto a un "observador en cierto sistema de referencia". El movimiento de un mismo cuerpo es en general descrito en forma diferente por diferentes observadores; por ejemplo, para un determinado observador cierto cuerpo describe una trayectoria rectilínea con rapidez constante y para otro observador el movimiento resulta curvilíneo. Las leyes del movimiento establecidas por Newton requieren de un sistema de referencia "fijo", ideal, o de uno que se mueva con velocidad constante respecto a él; tales sistemas de referencia se denominan *sistemas inerciales*.

A partir de los primeros años del siglo XX se hizo sentir la necesidad de una revisión de los conceptos fundamentales de espacio y tiempo desde el punto de vista de sus mediciones. Ello condujo al establecimiento de la "teoría restringida de la relatividad"; teoría que contiene a la física newtoniana como una buena aproximación válida para los casos en que los cuerpos tienen rapideces muy pequeñas respecto a la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Posteriormente se desarrolló la "teoría general de la relatividad". También desde el nacimiento de este siglo se fue encontrando que la física basada en los principios de Newton resultaba inadecuada en el ámbito de los fenómenos moleculares, atómicos, nucleares y subnucleares; esto ha originado el establecimiento de la Física Cuántica.

Ejemplos

- A un cuerpo de 5,80[kg] de masa que está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal lisa, se aplica una fuerza neta constante, de 12,7[N] de magnitud, durante 10,2[s]. Calcule la distancia recorrida por el cuerpo hasta el instante en que deja de actuar la fuerza y hasta 2,2[s] después.



Llamando $t = 0$ al instante en que aplicamos la fuerza, tenemos las condiciones iniciales:

$$s_0 = 0, \text{ por elección del punto de referencia.}$$

$$v_0 = 0, \text{ por estar el cuerpo inicialmente en reposo.}$$

Como la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es constante, y la masa del cuerpo es también constante, la aceleración del cuerpo será constante, siendo su valor:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12,7[\text{N}]}{5,80[\text{kg}]} \approx 2,19 [\text{m} / \text{s}^2]$$

Entonces, para un instante t en el intervalo que actúa la fuerza; esto es

$$0 \leq t \leq t_F = 10,2[\text{s}],$$

tenemos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v}{t}$$

esto da para la rapidez en el instante t :

$$v = a \cdot t, \quad 0 \leq t \leq t_F$$

La distancia recorrida por el cuerpo hasta ese instante t , la obtenemos según:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s - s_0 = v_{\text{promedio}} \Delta t = \frac{v + v_0}{2} \cdot (t - t_0) \\ &= s - 0 = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2\end{aligned}$$

por tanto:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq t_F$$

Para el instante $t = t_F = 10,2 \text{ [s]}$, en que deja de actuar la fuerza, obtenemos:

$$v_F = a \cdot t_F = 2,19 \text{ [m/s}^2] \cdot 10,2 \text{ [s]} \approx 22,3 \text{ [m/s]}$$

$$s_F = \frac{a}{2} \cdot t_F^2 = \frac{2,19 \text{ [m/s}^2]}{2} (10,2 \text{ [s]})^2 \approx 114 \text{ [m]}$$

Si a partir del instante t_F consideramos que el roce es despreciable, fuerza neta igual **cero**, el cuerpo continuará moviéndose con rapidez constante:

$$v = v_F \quad , \quad t > t_F$$

y se encontrará a una distancia s , desde el punto de partida, dada por:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s - s_F = v \cdot \Delta t = v_F \cdot (t - t_F) \\ s &= s_F + v_F \cdot (t - t_F) , \quad t > t_F\end{aligned}$$

En particular, para el instante $t = 12,4 \text{ [s]}$ tendremos:

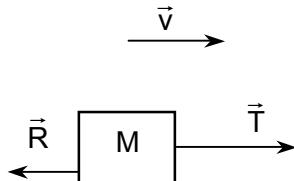
$$v = v_F = 22,3 \text{ [m/s]}$$

$$s = 114 \text{ [m]} + 22,3 \text{ [m]} \cdot (12,4 - 10,2) \text{ [s]} \approx 163 \text{ [m]}$$

Las relaciones encontradas $v = v_F$ y $s = s_F + v_F \cdot (t - t_F)$ para $t > t_F$, seguirán siendo válidas mientras no se modifiquen las condiciones en que se realiza el movimiento del cuerpo; por ejemplo, mientras no cambien las características de la superficie sobre la cual se apoya el cuerpo (deje de ser lisa y horizontal) o bien, se encuentren obstáculos o se termine la superficie.

- Un bloque cuya masa es 12,0[kg] reposa sobre una mesa horizontal. En cierto instante se le aplica una fuerza \vec{T} horizontal y constante, debido a la cual adquiere una rapidez de 6,5[m/s] en 2,8[s]. Suponiendo que la fuerza de roce \vec{R} entre el bloque en movimiento y la mesa es constante y de magnitud igual a 8,3[N] ¿cuál es la valor de la fuerza \vec{T} ?

El enunciado previo nos permite dibujar la siguiente figura de análisis:



La aceleración del bloque es:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{(6,5 - 0)[m/s]}{(2,8 - 0)[s]} \approx 2,3[m/s^2]$$

La magnitud de la fuerza neta actuando sobre el bloque tiene el valor:

$$F_{\text{neta}} = m \cdot a = 12,0[\text{kg}] \cdot 2,3[\text{m/s}^2] = 27,6[\text{N}]$$

Como la fuerza de roce se opone al movimiento del cuerpo, resulta que para las magnitudes de las fuerzas se cumple:

$$F_{\text{neta}} = T - R$$

y por lo tanto:

$$T = F_{\text{neta}} + R = 27,6[\text{N}] + 8,3[\text{N}] \approx 36[\text{N}]$$

- La rapidez w de propagación de cierto tipo de ondas en un lago en determinadas condiciones, se expresa por la fórmula:

$$w^2 = \frac{g}{k} + \frac{T \cdot k}{\rho}$$

donde g es la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y k y T son ciertas cantidades físicas. Determine las dimensiones de k y de T en término de las dimensiones de tiempo, longitud y masa.

Para que la fórmula dada sea válida en Física, debe ser dimensionalmente consistente; esto es, cada uno de sus términos debe tener la misma dimensión, por lo tanto:

$$\dim(w^2) = \dim\left(\frac{g}{k}\right) = \dim\left(\frac{T \cdot k}{\rho}\right)$$

Como $\dim\left(\frac{g}{k}\right) = \frac{\dim(g)}{\dim(k)} = \dim(w^2)$ resulta:

$$\dim(k) = \frac{\dim(g)}{\dim(w^2)} = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2}}{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-1})^2} = \mathcal{L}^{-1}$$

En forma análoga, $\dim\left(\frac{T}{\rho}\right) = \frac{\dim(T) \dim(\rho)}{\dim(\rho)} = \dim(w^2)$, por lo cual:

$$\dim(T) = \frac{\dim(w^2) \cdot \dim(\rho)}{\dim(k)} = \frac{(\mathcal{L}T^{-1})^2 \cdot \mathcal{M}L^{-3}}{\mathcal{L}^{-1}} = \mathcal{M}T^{-2}$$

Esto es, $\dim(k) = \mathcal{L}^{-1}$ y $\dim(T) = \mathcal{M}T^{-2}$.

- Una barra metálica tiene una densidad $\rho = 8,1[\text{kg/dm}^3]$ y una propiedad física caracterizada por $Y = 1,9 \cdot 10^{12} [\text{dina/cm}^2]$. Para la descripción de cierto fenómeno que se produce en tal barra se necesita la expresión $U = \sqrt{Y/\rho}$. Determine la dimensión y el valor de U.

Observando las unidades de medición en que está expresada la cantidad Y, debe cumplirse:

$$\dim(Y) = \dim(\text{fuerza/área}) = F/L^2 = \mathcal{M}LT^{-2}/L^2 = \mathcal{M}L^{-1}T^{-2}$$

Como la dimensión de densidad es $\dim(\rho) = \mathcal{M}L^{-3}$, resulta:

$$\dim(U) = \dim(\sqrt{Y/\rho}) = \left(\frac{\dim(Y)}{\dim(\rho)} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mathcal{M}L^{-1}T^{-2}}{\mathcal{M}L^{-3}} \right)^{1/2} = LT^{-1}$$

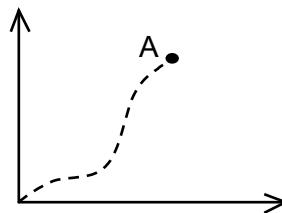
Esto es, U tiene la dimensión de rapidez.

El valor de U se obtiene por:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{Y/\rho} = \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{12} [\text{dina/cm}^2]}{8,1 [\text{kg/dm}^3]}} \triangleq \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-5} / 10^{-4} [\text{N/m}^2]}{8,1 / 10^{-3} [\text{kg/m}^3]}} \\ &\triangleq \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{11} [\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2 \cdot \text{m}^2]}{8,1 \cdot 10^3 [\text{kg/m}^3]}} \triangleq \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^8}{8,1}} [\text{m/s}] \approx 4,8 \cdot 10^3 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

Ejercicios

- 9-1)** Suponga que un cuerpo está describiendo una trayectoria y que en el punto A dejan de actuar todas las fuerzas sobre él. Describa cuál sería el movimiento subsiguiente del cuerpo. Justifique su respuesta.



- 9-2)** Determine la masa, en [kg], de un objeto que adquiere una aceleración de magnitud $a = 30,0 \text{ [km/h} \cdot \text{s}]$ cuando actúa sobre él una fuerza neta de magnitud $F = 1,8 \cdot 10^2 \text{ [N]}$.
- 9-3)** ¿Qué fuerza, en [N], se requiere para dar a una masa de $2,6 \text{ [kg]}$ una aceleración de $250 \text{ [cm/s}^2]$?
- 9-4)** ¿Qué cambio de rapidez producirá una fuerza neta constante de $5,7 \text{ [N]}$ cuando se aplica a un objeto de $4,8 \text{ [kg]}$ durante $8,1 \text{ [s]}$?
- 9-5)** ¿Durante cuánto tiempo deberá actuar una fuerza neta de 96 [N] sobre un cuerpo de $50,2 \text{ [kg]}$ para producir en él un cambio de rapidez de 108 [cm/s] a 550 [cm/s] si el cuerpo se mueve rectilíneamente?
- 9-6)** Una partícula de masa $7,2 \text{ [kg]}$ avanza en línea recta y recorre una distancia de $4,9 \text{ [m]}$. Parte con rapidez inicial cero y termina con una rapidez de 81 [cm/s] . Calcule la fuerza neta sobre la partícula si la aceleración se supone constante.
- 9-7)** Determine el tiempo que debe actuar una fuerza constante de $450,0 \text{ [N]}$ sobre un cuerpo de $907,0 \text{ [kg]}$ para que alcance una rapidez de $26,5 \text{ [m/s]}$, si éste parte del reposo.
- 9-8)** Un cuerpo de masa desconocida es acelerado de $21,2 \text{ [m/s]}$ a $31,5 \text{ [m/s]}$ en 13 [s] por una fuerza resultante de $5,4 \text{ [N]}$. Calcule la masa.
- 9-9)** Una fuerza de $15,0 \text{ [N]}$ produce al actuar sobre un objeto de masa M_1 una aceleración de $12,0 \text{ [m/s}^2]$ y sobre otro de masa M_2 una aceleración de $25,2 \text{ [m/s}^2]$. Determine la aceleración que produciría esa misma fuerza si los dos objetos estuvieran unidos.
- 9-10)** En un experimento se acelera un objeto con una fuerza constante de tal modo que la variación de rapidez durante un intervalo de tiempo de $1,5 \text{ [s]}$ es de $3,6 \text{ [m/s]}$. En una segunda medición, aplicando una fuerza de igual magnitud sobre otro objeto, resulta la variación de rapidez de $3,3 \text{ [m/s]}$ en $0,50 \text{ [s]}$. Calcule el cuociente entre las masas de esos objetos.
- 9-11)** La masa en reposo de un electrón es $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]}$. Calcule la fuerza necesaria para acelerar un electrón en $2,0 \cdot 10^{14} \text{ [m/s}^2]$, suponiendo que su masa no varía.
- 9-12)** Un objeto cuya masa es 50 [g] está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal muy lisa. Se le aplica una fuerza constante y se mide que el objeto tiene una rapidez de 40 [cm/s] cuando se encuentra a 25 [cm] de su posición en reposo. Determine la magnitud de dicha fuerza, en [N].

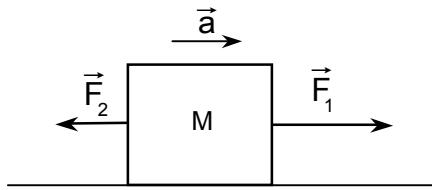
9-13) Un disco de hielo seco tiene una masa de 200[g] y se mueve sobre una lámina de metal con una rapidez constante de 50[cm/s]. Al salir de la superficie metálica entra en una superficie de concreto. La fuerza de fricción ejercida sobre el disco por esta superficie de concreto es de 15[dina]. ¿En cuántos segundos se detendrá el disco?

9-14) Cuando un tren de 150[ton] se desplazaba con una rapidez de 72,0[km/h] se aplicaron los frenos y el tren empleó 70[s] en detenerse. Calcule la fuerza, en [N], que ejercen los rieles sobre las ruedas del tren suponiendo que dicha fuerza hubiese sido constante. Determine la distancia recorrida por el tren desde que se aplicaron los frenos hasta que se detuvo.

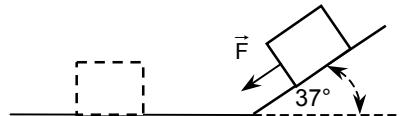
9-15) Un cuerpo de masa 0,60[kg] se encuentra en reposo en una esquina de una mesa cuadrada de 1,2[m] de lado. Aplicando una fuerza de dirección apropiada se hace mover al cuerpo a lo largo de la diagonal de la mesa. Si la magnitud de la fuerza es constante e igual a $4,0 \cdot 10^4$ [dina] y se desprecia el roce ¿cuánto tarda el cuerpo en caer de la mesa?

9-16) Sobre un cuerpo de masa 0,43[kg] actúan las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 de modo que adquiere una aceleración de 2,21[m/s²].

¿Cuál es la magnitud de \vec{F}_1 si la magnitud de \vec{F}_2 es 0,82[N]?



9-17) Un cuerpo, de masa 1,3[kg], que se desliza con rapidez constante de 5,3[m/s] sobre un plano horizontal, sube por un plano inclinado. Desde el momento en que el cuerpo entra al plano inclinado actúa sobre él una fuerza neta \vec{F} constante, de magnitud $F = 4,2$ [N] y dirección según la figura. Calcule la altura máxima a la cual llega el cuerpo.



9-18) Una cápsula Géminis fue acoplada a la etapa final de un cohete Agena que orbitaba alrededor de la Tierra. Los impulsores de la Géminis aplicaron al conjunto una fuerza media de 890[N] de magnitud durante 7,0[s]. El cambio de rapidez producido fue de 0,93[m/s]. La masa del Géminis era de 3360[kg]. Calcule la masa de esta etapa del Agena.

9-19) Una fuerza constante de magnitud $F = 19,6$ [N], hace que un cuerpo se mueva rectilíneamente de modo que la distancia recorrida por él está expresada por $s = A - Bt + Ct^2$, en función del tiempo. Hallar la masa del cuerpo si la constante C vale $3,1$ [m/s²].

9-20) Un cuerpo cuya masa es 0,50[kg] se mueve rectilíneamente de manera que la relación entre la posición s y el tiempo empleado t viene dado por la ecuación: $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, siendo $A = 18,0$ [m]; $B = 2,1$ [m/s]; $C = 4,5$ [m/s²] y $D = 0,49$ [m/s³]. Calcule la posición, la rapidez, la aceleración y la magnitud de la fuerza que actúa sobre el cuerpo en el instante $t = 1,3$ [s].

9-21) La rapidez v con que avanza el agua en cierto tipo de ríos puede ser calculada por la fórmula $v = \left(\frac{U \cdot J}{\alpha + \beta/U} \right)^{1/2}$, en que U tiene dimensión de longitud y J es un número puro. Determine $\text{dim}(\alpha)$ y $\text{dim}(\beta)$. Al usar el sistema métrico se ha encontrado que los "números de medición" de α y β son

$\alpha_m = 2,8 \cdot 10^{-4}$ y $\beta_m = 3,5 \cdot 10^{-4}$ respectivamente, y resulta $v = v_m [m/s]$. Calcule los valores de α y β en el “sistema inglés” para que resulte la rapidez en [ft/s].

9-22) Por un tubo de diámetro D fluye con rapidez v un líquido de densidad ρ . El líquido tiene la propiedad llamada “coeficiente de viscosidad” η que se expresa en las unidades $[N \cdot s/m^2]$. Se ha encontrado conveniente definir la cantidad $R = \rho D v / \eta$. Determine la dimensión de η y de R .

9-23) Sobre una gota de agua de radio R que cae con rapidez v , el aire opone una fuerza de magnitud B que puede expresarse por $B = k v^a v^b R^c$. Si $\dim(k) = 1$ y $\dim(v) = T^{-1} L^{-1} M$, determine los valores de los números a , b y c tales que la expresión para B sea dimensionalmente correcta.

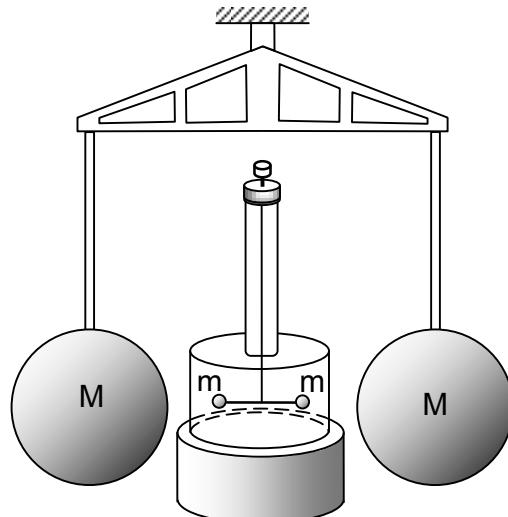
9-24) Una constante física h tiene el valor $6,63 \cdot 10^{-34} [N \cdot m \cdot s]$. Resulta conveniente en ciertas situaciones asociar a una partícula de masa m la cantidad física $\lambda = h / (mc)$, donde c es la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Determine la dimensión de λ . Calcule el valor de “ λ para un protón”, exprese el resultado en notación científica, eligiendo la unidad del sistema métrico decimal con el prefijo más adecuado.

9-25) Una constante física tiene el valor $k = 1,38 \cdot 10^{-23} [N \cdot m/K]$. Calcule el valor de la cantidad física $U = kT$ cuando la temperatura es $-20^\circ C$; exprese el resultado en [dina·cm].

Interacción gravitacional

La descripción del movimiento de los astros y su posible explicación es una de las inquietudes que aparece desde épocas muy antiguas.

Las observaciones “a ojo desnudo” de los movimientos de los planetas llevaron a formular modelos del sistema planetario, como el geocéntrico de Tolomeo, el heliocéntrico de Copérnico y un modelo de Ticho Brahe, en que los planetas giraban alrededor del Sol y éste lo hacía alrededor de la Tierra, considerada fija. Observaciones con empleo de instrumentos, como el telescopio y el sextante, permitieron a Kepler enunciar leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol.



Esos diversos modelos y leyes trataban sólo de los aspectos cinemáticos del movimiento de los planetas. Newton construye su teoría sobre la atracción de los cuerpos, dándole un carácter universal; la que permite, en particular, explicar dinámicamente el movimiento de los planetas, pudiéndose deducir las leyes cinemáticas correspondientes.

Las manifestaciones de la atracción gravitacional más directas para nosotros se presentan en la caída y en el peso de los objetos. Al tratar el tema sobre caída libre y lanzamiento vertical de cuerpos, le sugerimos que realizara un experimento que le permitiera familiarizarse con el concepto de aceleración de gravedad y sus posibles valores.

Se encuentra experimentalmente que la aceleración de gravedad tiene valores levemente distintos en diferentes lugares de la Tierra, debido a su forma no esférica y a su rotación. También influye la altura respecto al nivel del mar del lugar en que se efectúan las mediciones. Algunos valores se presentan en la siguiente tabla:

nivel de mar		latitud de 45°	
latitud	$g [m/s^2]$	altitud [km]	$g [m/s^2]$
0°	9,78031	0	9,807
10°	9,78195	1	9,803
20°	9,78641	4	9,794
30°	9,79329	8	9,782
40°	9,80171	16	9,757
50°	9,81071	32	9,71
60°	9,81918	100	9,60
70°	9,82608	500	8,53
80°	9,83059	1000	7,41
90°	9,83217		

Por acuerdo internacional se adopta como *aceleración de gravedad normal* el valor $g_n = 9,80665 [m/s^2]$.

Peso

Un cuerpo cae a la Tierra debido a la fuerza que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Por el mismo motivo, usted debe ejercer una fuerza para levantar y para sostener un cuerpo.

El **peso** de un cuerpo en la Tierra es la fuerza con la cual es atraído hacia el centro de la Tierra.

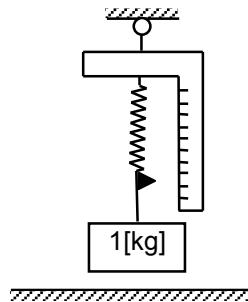
Como la aceleración que experimenta un cuerpo al caer a la Tierra tiene un valor \bar{g} que es **independiente de la masa** del cuerpo, la fuerza “peso de un cuerpo” debe ser, de acuerdo con el segundo principio de Newton, $\vec{F} = m \vec{a}$, proporcional a la masa del cuerpo. Resulta para el peso de un cuerpo:



Aunque la masa de un cuerpo no varíe, su peso cambia según el lugar en que se encuentre.

Podemos medir el peso de un cuerpo mediante una "balanza de Newton" previamente calibrada. Esta balanza la usamos en la forma indicada en la figura.

Si de la balanza pende un cuerpo cuya masa es 1[kg], ésta indicará un peso de:



$$\left. \begin{array}{l} 9,8 \text{ [N]} \\ 8,5 \text{ [N]} \end{array} \right\} \text{en un lugar en que } g = \left\{ \begin{array}{l} 9,8 \text{ [m/s}^2\text{]} \\ 8,5 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{array} \right.$$

Para que usted tenga un valor de comparación directo de la magnitud de una fuerza, piense que cuando sostiene un cuerpo de 1[kg] de masa usted ejerce una fuerza aproximada de 10[N] sobre él.

El peso de un objeto en la Tierra es un caso particular de la **interacción gravitacional** entre dos cuerpos.

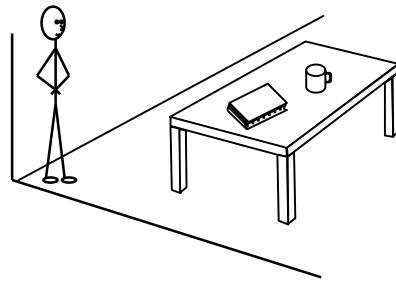
Equilibrio de fuerzas

Consideremos una situación tan común como la de un libro y otros objetos *en reposo* sobre una mesa horizontal. Decimos que esos cuerpos están en equilibrio. La fuerza neta que actúa sobre cada uno de ellos es cero.

En la figura se representan las fuerzas que se ejercen **sobre** el libro. Una es el peso: $\vec{P}_{\text{Tierra} \rightarrow \text{Libro}}$, y la otra es la fuerza de contacto ejercida por la superficie de la mesa sobre el libro $\vec{N}_{\text{Mesa} \rightarrow \text{Libro}}$. La superposición (suma vectorial) de estas dos fuerzas:

$$\vec{P}_{\text{Tierra} \rightarrow \text{Libro}} + \vec{N}_{\text{Mesa} \rightarrow \text{Libro}}$$

da una fuerza neta cero, condición que debe cumplirse para que el libro esté en equilibrio.



$$\vec{P}_{\text{Tierra} \rightarrow \text{Libro}} + \vec{N}_{\text{Mesa} \rightarrow \text{Libro}} = 0 ; \quad \text{condición de equilibrio.}$$

Observe que al dibujar las fuerzas hemos representado al libro como un simple punto, es decir, hemos usado un modelo simplificado de él. Llamaremos “diagrama de cuerpo libre” a esta representación esquemática del cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él.

En situaciones más generales es posible que la superposición de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sea cero y que el cuerpo esté rotando y no esté en equilibrio. Por ahora, nos ocuparemos solamente de algunos casos en que el equilibrio de un cuerpo está asegurado por la condición que la fuerza neta sobre él sea cero.

Experimento

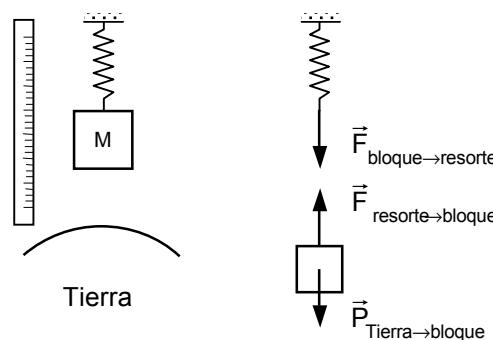
Sobre un cuerpo que está colgado de un resorte actúan dos fuerzas: el peso del cuerpo debido a la gravedad, y la fuerza ejercida por el resorte. Cuando el cuerpo está en equilibrio la suma de ambas fuerzas es cero y por tanto son iguales en magnitud.

$\vec{P}_{\text{Tierra} \rightarrow \text{cuerpo}}$: peso del cuerpo

$\vec{F}_{\text{Resorte} \rightarrow \text{cuerpo}}$: fuerza del resorte sobre el cuerpo

Condición de equilibrio: $\vec{P}_{T \rightarrow c} + \vec{F}_{R \rightarrow c} = 0$

Magnitudes de las fuerzas: $P = F$



Tensión en una cuerda

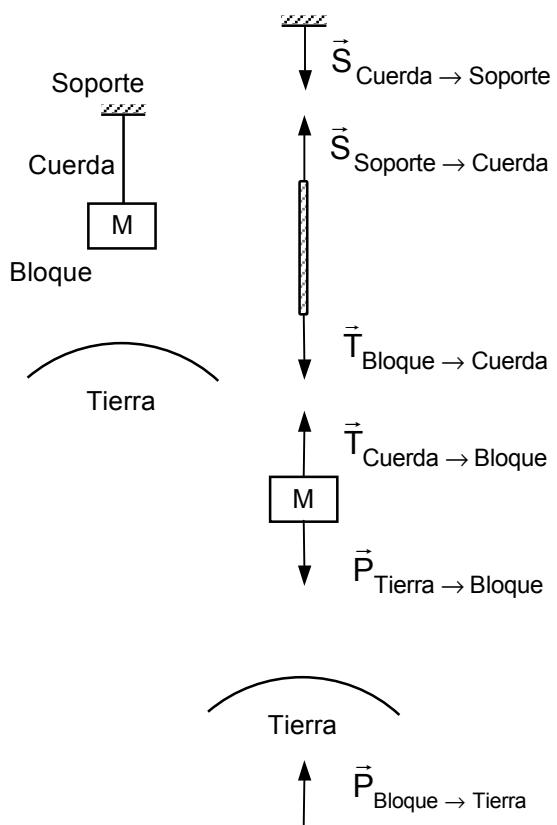
Consideremos un bloque suspendido de un soporte mediante una cuerda. Examinemos las fuerzas ejercidas sobre el bloque, la cuerda y el soporte.

En forma abreviada, escribamos:

$\vec{P}_{T \rightarrow B}$ el peso del cuerpo.

$\vec{T}_{C \rightarrow B}$ la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque.

$\vec{S}_{S \rightarrow C}$ la fuerza que el soporte ejerce sobre la cuerda y así sucesivamente.



Por equilibrio del cuerpo:

$$\vec{P}_{T \rightarrow B} + \vec{T}_{C \rightarrow B} = 0$$

Suponiendo que la masa de la cuerda es despreciable en comparación con la masa del bloque, por equilibrio de la cuerda:

$$\vec{S}_{S \rightarrow C} + \vec{T}_{B \rightarrow C} = 0$$

Como $\vec{T}_{C \rightarrow B}$ y $\vec{T}_{B \rightarrow C}$ forman un par acción-reacción:

$$\vec{T}_{C \rightarrow B} = -\vec{T}_{B \rightarrow C}$$

Entonces:

$$\vec{P}_{T \rightarrow B} = \vec{T}_{B \rightarrow C} = \vec{S}_{C \rightarrow S}$$

por lo cual, para sus magnitudes se cumple:

$$S = T = P$$

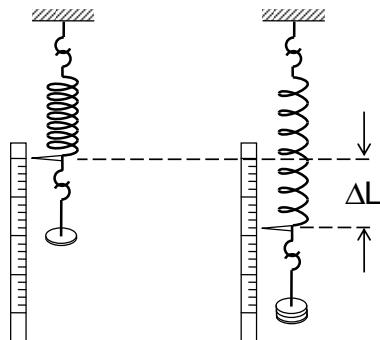
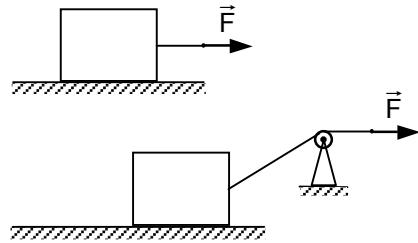
En esta situación la cuerda se pone tensa o tirante. Si cortáramos la cuerda y colocáramos un dinamómetro entre los extremos producidos por el corte, éste mediría la **tensión** en la cuerda. El valor de la tensión es igual a la magnitud de la fuerza transmitida por la cuerda.

Examine que ocurriría si la masa de la cuerda fuera comparable a la del bloque.

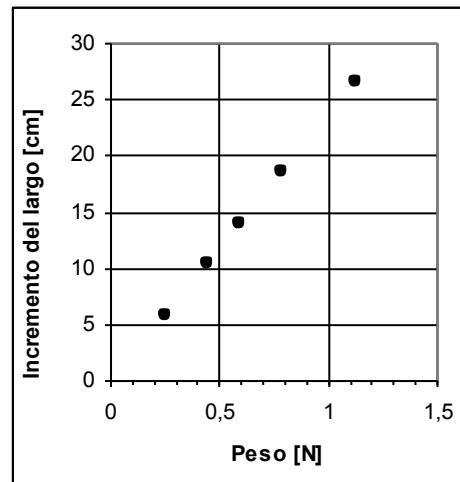
Aplicando una fuerza a uno de los extremos de una cuerda, podemos ejercer una fuerza sobre un objeto unido al otro extremo de la cuerda. Si la cuerda pasa sobre una polea, ambas de masa despreciable, la dirección de la cuerda sobre el cuerpo puede ser diferente a la dirección de la fuerza aplicada en extremo libre de la cuerda. La dirección de la fuerza aplicada por una cuerda en un punto de un cuerpo coincide con la del trozo de cuerda próximo al cuerpo.

Si el roce es despreciable, entonces la magnitud de la fuerza transmitida por la cuerda es igual a la magnitud de la fuerza aplicada en el extremo libre de la cuerda.

Al colgar cuerpos de diferente masa en un resorte dado observamos que el largo del resorte varía. Elegimos cuerpos de determinados valores de masa. Medimos el largo que adquiere el resorte cuando cada uno de estos cuerpos pende de él en equilibrio. Las mediciones hechas las agrupamos en la siguiente tabla de valores:



M_i [g]	L_i [cm]	P_i [N]	ΔL_i [cm]	$P_i/\Delta L_i$ [N/m]
0	23,3			
25	29,1	0,245	5,8	4,22
45	33,8	0,441	10,5	4,20
60	37,3	0,588	14,0	4,20
80	42,0	0,784	18,7	4,19
115	50,0	1,127	26,7	4,22



donde:

$P_i = M_i g$ es el peso del cuerpo de masa M_i

L_i es el largo del resorte con el cuerpo de masa M_i

L_0 es el largo del resorte sin un cuerpo colgado de él

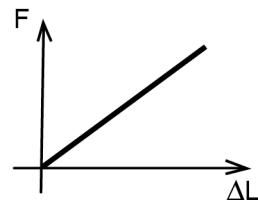
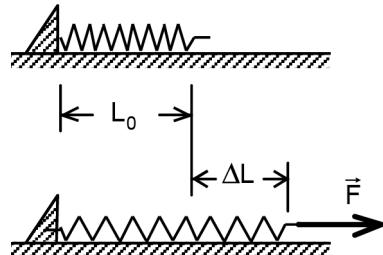
$\Delta L_i = L_i - L_0$ es el incremento del largo del resorte respecto al largo L_0

Observamos que, dentro de los errores experimentales, el incremento ΔL del largo del resorte es proporcional al peso del cuerpo que pende de él, ya que el cuociente $P_i/\Delta L_i$ resultó aproximadamente constante.

Experimentos de este tipo permiten establecer que el alargamiento de un resorte es proporcional a la magnitud de la fuerza que actúa sobre él. Esto lo escribimos como:

$$F = k \cdot \Delta L \quad (\text{Ley de Hooke})$$

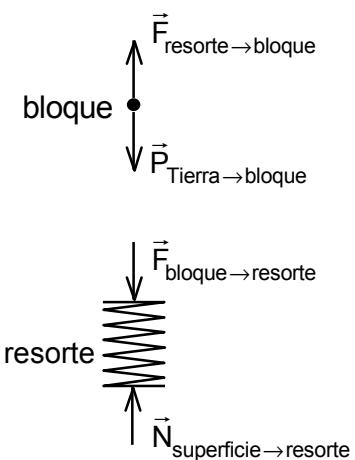
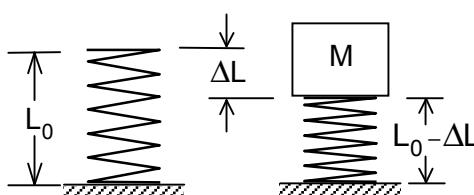
y nos referimos a k como "el coeficiente de elasticidad" o "la constante de rigidez" del resorte.



Tenemos que recalcar que la proporcionalidad entre la elongación y la fuerza aplicada a un resorte tiene validez dentro de cierto rango de su alargamiento, rango que es característico de cada resorte.

La propiedad de que el alargamiento de un resorte depende de la fuerza que se ejerce sobre él, permite construir un instrumento para medir magnitudes de fuerzas, llamado dinamómetro o balanza de Newton.

Si colocamos un cuerpo sobre un resorte, éste quedará comprimido. El cuerpo permanece en equilibrio cuando la fuerza \vec{F} que el resorte ejerce sobre el cuerpo sea de igual magnitud que la magnitud del peso \vec{P} del cuerpo.



Si llamamos ΔL al acortamiento del resorte, ocurrirá que:

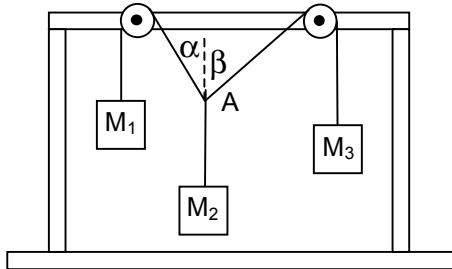
$$F = k \cdot \Delta L$$

siendo k el coeficiente de elasticidad del resorte. Observe que al construir el diagrama de cuerpo libre hemos omitido la plataforma o "plato" de la balanza, cuyo peso consideramos despreciable, al igual que al peso del resorte. Bajo estas condiciones las magnitudes F y P son iguales.

$$P = F = k \Delta L$$

Experimento

Sobre una base arme un marco de madera. En el travesaño superior ubique dos poleas. Elija tres cuerpos y mida sus masas. Mediante hilos cuelgue los tres cuerpos en la forma que indica la figura. Cuando vea que el sistema formado por los tres cuerpos está en equilibrio mida, mediante un transportador, los ángulos α y β . Usted puede comprobar que la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el nudo A es cero. Insistimos que usted realice esta experiencia.



A continuación le entregamos un cuadro de valores obtenidos al realizar el experimento con varios tríos de cuerpos.

M_1 [kg]	M_2 [kg]	M_3 [kg]	α	β
0,10	0,15	0,12	53°	42°
0,10	0,10	0,12	72°	55°
0,14	0,15	0,14	60°	60°
0,10	0,20	0,14	40°	30°

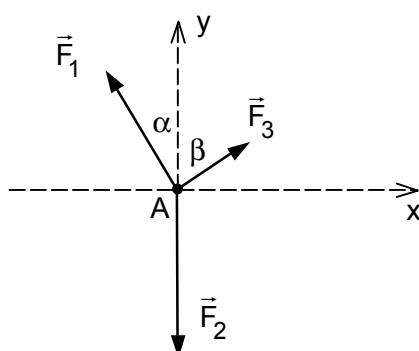
Analicemos la situación de equilibrio del sistema:

Sean \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 las fuerzas que actúan sobre el nudo A debido a los pesos P_1 , P_2 y P_3 de los cuerpos. Suponiendo roce despreciable en las poleas, las magnitudes de las fuerzas transmitidas hasta A por los hilos son iguales a las respectivas magnitudes de los pesos:

$$F_1 = P_1 = M_1 \cdot g$$

$$F_2 = P_2 = M_2 \cdot g$$

$$F_3 = P_3 = M_3 \cdot g$$



El equilibrio del sistema queda expresado por la ecuación vectorial:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Dado que estas tres fuerzas son coplanares, para realizar esta suma vectorial nos conviene elegir un sistema de referencia con su origen en el punto A y cuyos ejes coincidan con las líneas vertical y horizontal.

La ecuación vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ implica dos ecuaciones para las componentes de las fuerzas en los ejes escogidos:

$$\text{Componentes horizontales: } -F_1 \cdot \sin\alpha + 0 + F_3 \cdot \sin\beta = 0$$

$$\text{Componentes verticales: } F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 + F_3 \cdot \cos\beta = 0$$

Dividiendo por la aceleración de gravedad g , resulta para la condición de equilibrio del sistema estudiado:

$$-M_1 \cdot \sin\alpha + M_3 \cdot \sin\beta = 0$$

$$M_1 \cdot \cos\alpha - M_2 + M_3 \cdot \cos\beta = 0$$

Comprobemos si el primer conjunto de datos obtenidos en nuestras mediciones satisface estas igualdades

$$-0,10 \cdot \sin 53^\circ + 0,12 \cdot \sin 42^\circ \approx -0,0799 + 0,0803 = 0,0004$$

$$0,10 \cdot \cos 53^\circ - 0,15 + 0,12 \cdot \cos 42^\circ \approx -0,0602 - 0,15 + 0,0892 = 0,0006$$

Observemos que dentro de los errores de medición, efectivamente se cumplen las ecuaciones para el equilibrio.

Dejamos a usted la tarea de trabajar con los otros conjuntos de datos.

Ejemplos

- Se aplica una fuerza mediante un resorte a un cuerpo de masa $m_1 = 3,2 \text{ [kg]}$ produciéndole una aceleración $a_1 = 1,4 \text{ [m/s}^2]$. Al aplicar otra fuerza mediante el mismo resorte a otro cuerpo de masa $m_2 = 5,1 \text{ [kg]}$ el resorte se estira 3,6[cm] más que la primera vez y se obtiene una aceleración $a_2 = 2,9 \text{ [m/s}^2]$. Calculemos la constante elástica K del resorte, suponiendo que los cuerpos se mueven sobre una superficie horizontal lisa.

Usando el segundo principio de Newton resulta para las magnitudes de las fuerzas netas en cada caso.

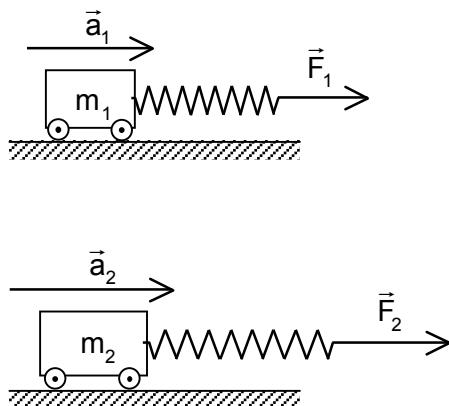
$$F_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$F_2 = m_2 \cdot a_2$$

Como los cuerpos se mueven sobre una superficie horizontal lisa, la fuerza neta es igual a la ejercida por el resorte. Entonces, según la ley de Hooke:

$$F_1 = K \cdot x_1$$

$$F_2 = K \cdot x_2$$



siendo x_1 y $x_2 = x_1 + 3,6[\text{cm}]$ los respectivos alargamientos del resorte. Dividiendo cada par de ecuaciones se obtiene:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 \cdot a_1}{m_2 \cdot a_2} \quad \text{y} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

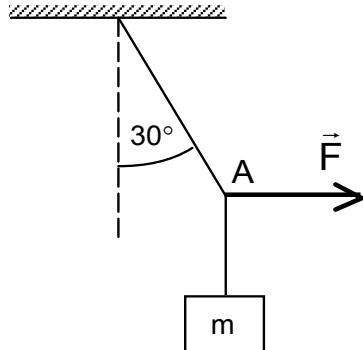
luego:

$$\frac{m_1 \cdot a_1}{m_2 \cdot a_2} = \frac{x_1}{x_1 + 3,6} \text{ , con } x_1 \text{ en } [\text{cm}]$$

de donde $x_1 \approx 1,6[\text{cm}]$.

$$\text{De } F_1 = K x_1 \text{ resulta } K = \frac{m_1 \cdot a_1}{x_1} = \frac{3,2 \cdot 1,4}{0,016} [\text{N/m}] \approx 280 [\text{N/m}]$$

- Calculemos la fuerza que hay que aplicar horizontalmente en el punto A para que la cuerda que suspende a un cuerpo de masa 3,1[kg] forme un ángulo de 30° con la vertical.



Las fuerzas que actúan en el punto A son:

\vec{F} : la fuerza que calcularemos

\vec{P} : el peso del cuerpo de masa m

\vec{T} : la tensión de la cuerda

Elegimos un sistema de referencia con "eje x" horizontal y "eje y" vertical.

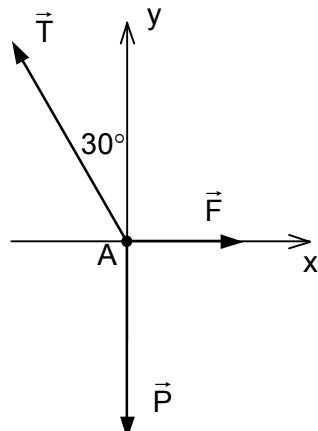
La ecuación de equilibrio

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

da lugar a las dos ecuaciones escalares:

$$F = T \cdot \sin 30^\circ$$

$$T \cdot \cos 30^\circ = mg$$



De la segunda ecuación se tiene:

$$T = \frac{mg}{\cos 30^\circ}$$

que reemplazada en la primera resulta:

$$\begin{aligned} F &= mg \cdot \tan 30^\circ \\ &\approx 3,1 \cdot 9,8 \cdot 0,58 \approx 18[N] \end{aligned}$$

Podemos calcular además la tensión en la cuerda:

$$T = \frac{mg}{\cos 30^\circ} = \frac{3,1 \cdot 9,8}{\cos 30^\circ} \approx 35[N]$$

Ejercicios

9-26) Una fuerza de 12[N] se aplica sobre un resorte de coeficiente elástico $K = 200 [N/m]$. ¿Qué alargamiento del resorte se produce?

9-27) Se ha medido que un resorte experimenta un alargamiento igual a $\Delta L = 12,3 [\text{cm}]$ cuando se aplica sobre él una fuerza de magnitud $F = 85,4 [\text{N}]$. Determine el coeficiente de rigidez del resorte, exprese el resultado en $[\text{N/m}]$ y en $[\text{pdl/ft}]$.

9-28) Los coeficientes de elasticidad de dos resortes tienen los valores $K_1 = 17,6 [\text{N/cm}]$ y $K_2 = a [\text{pdl/in}]$, respectivamente. Al aplicar cierta fuerza sobre el primer resorte se produce un alargamiento de $27[\text{mm}]$; la misma fuerza produce en el segundo resorte un alargamiento de $32[\text{mm}]$. Determine el “número de medición” a .

9-29) En un lugar en que la aceleración de gravedad vale $9,87[\text{m/s}^2]$ un cuerpo cuyo peso es $48,0[\text{kp}]$ produce un alargamiento de $12[\text{mm}]$ en cierto resorte. Calcule la constante de rigidez del resorte en $[\text{N/m}]$.

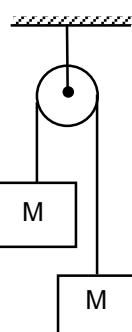
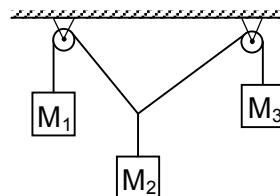
9-30) Usando una “caja de masas” se ha calibrado un dinamómetro en un lugar en que la aceleración de gravedad vale $9,78[m/s^2]$. En otro lugar, con aceleración de gravedad de $9,84[m/s^2]$, se ha medido con este dinamómetro que el peso de un objeto es $50,0[lbf]$. Exprese la masa de este objeto en [kg].

9-31) Con un resorte cuyo coeficiente de rigidez vale $K = 3,7 \cdot 10^3 [N/m]$ se tira un objeto haciendo que se mueva sobre una superficie *horizontal* lisa. Cuando la aceleración del objeto tuvo un valor $a = 1,6 [m/s^2]$, el alargamiento del resorte fue $\Delta L = 6,5 [cm]$. Calcule la masa del objeto.

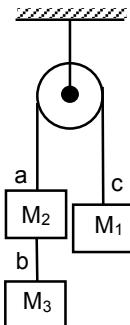
9-32) Sobre un cuerpo situado en una superficie horizontal lisa actúa una fuerza por medio de un resorte extendido hasta una largo tal que, la aceleración del cuerpo es de $15[cm/s^2]$. ¿Cuál sería la aceleración del cuerpo sometido a la acción de dos resortes, cada uno idéntico al primero, colocados paralelamente y extendidos ambos hasta un largo igual al doble del largo en el primer caso?

9-33) Tres cuerpos de masas $M_1 = 80 [g]$, $M_2 = 110 [g]$ y $M_3 = 60 [g]$ que penden de sendos hilos como se muestra en la figura, están en equilibrio. Calcule el ángulo entre cada par de hilos y los ángulos que los hilos forman con la vertical.

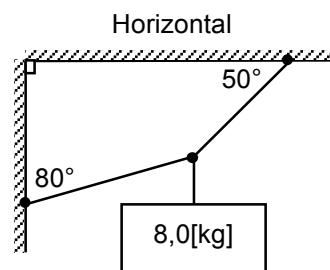
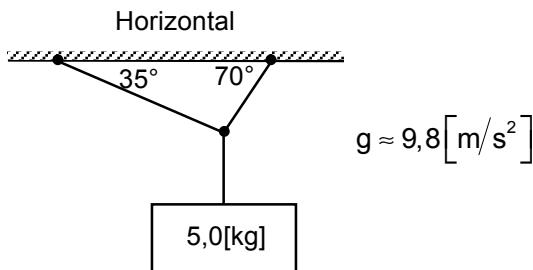
9-34) Dos cuerpos de igual masa $M = 0,80 [kg]$ están suspendidos en los extremos de un hilo que pasa por una polea. La polea se considera de masa despreciable y también se desprecia el roce entre la polea y el hilo y el roce entre la polea y su eje. Calcule la tensión en el hilo y la tensión en la cuerda de la que cuelga la polea.



9-35) Tres cuerpos, de masas M_1 , M_2 y M_3 , amarrados a dos hilos como se indica en la figura, están en equilibrio. Si $M_1 = 2,1[kg]$ y $M_3 = 1,3[kg]$. ¿Cuál es el valor de M_2 ? Calcule la tensión en los extremos a, b y c de los hilos.



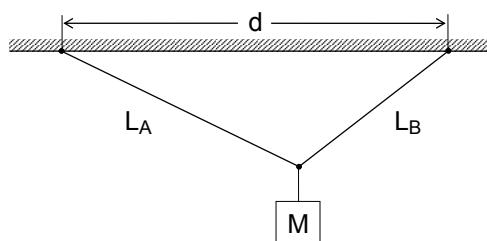
9-36) Calcule las tensiones en las cuedas para cada una de las situaciones de equilibrio mostradas en las figuras siguientes:



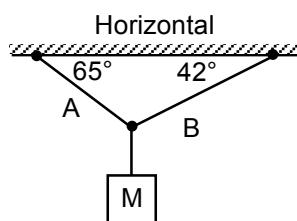
9-37) Para este sistema en equilibrio se tiene:

$$L_A = 60 \text{ [cm]}, L_B = 43 \text{ [cm]}, \text{ y } d = 87 \text{ [cm]}.$$

Calcule las tensiones en las cuedas si el cuerpo tiene una masa de 6,0 [kg].



9-38) Calcular la tensión T_B en la cuerda B y la masa M del cuerpo que pende, si la tensión en la cuerda A es $T_A = 9,2 \text{ [kp]}$ cuando el sistema está en equilibrio.

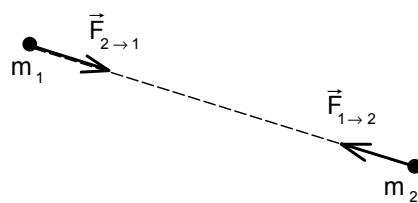


Ley de gravitación universal de Newton

La interacción gravitacional que se ejerce entre cuerpos materiales es un fenómeno que se presenta en todo el universo, produciendo siempre **atracción** entre los cuerpos.

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre *dos partículas* de masas m_1 y m_2 , situadas a una distancia d una de la otra está dada por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = F$$

Esta expresión supone que los cuerpos son idealmente puntuales, es decir, que sus dimensiones geométricas son muy pequeñas en comparación con la distancia que los separa. Podemos aplicar esta expresión a cuerpos esféricos considerando como distancia la separación entre los centros de las esferas, obteniendo en general valores con buena aproximación.

El valor de la “constante de gravitación universal” G , determinado experimentalmente, es de:

$$G = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \left[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \right]$$

Este valor de G indica lo “débil” que es la interacción gravitacional.

La Tierra atrae gravitacionalmente a un cuerpo de 1[kg] de masa con una fuerza del orden de 10[N]. En comparación, la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos con masas de 1[kg] a 1[m] de distancia tiene el orden de magnitud de 10^{-10} [N], esto es, del orden del diezbillonésimo de la fuerza necesaria para levantar a una persona.

Que la fuerza gravitacional es “débil” se aprecia en la vida diaria: se pasa cerca de edificios o de personas y no se siente la atracción gravitacional. Sin embargo, la atracción producida por la Tierra, debido a su “enorme” masa, hace que nosotros vivamos pegados a ella y que la atmósfera no escape de la Tierra.

Por otra parte, la existencia de los sistemas Tierra-Luna y Sol-Planetas y de las diferentes agrupaciones de estrellas, son manifestaciones de la atracción gravitacional haciendo sentir sus efectos a “enormes” distancias.

La ley de gravitación universal de Newton, representada por la fórmula

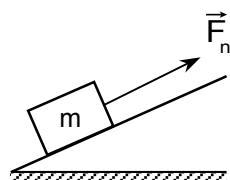
$$F = G m_1 m_2 / d^2 ,$$

no es una ley de movimiento, sino una expresión particular de un tipo de fuerza. Notemos que el hecho de tener las masas el mismo exponente hace que la expresión tenga una simetría que permite intercambiar los índices de las masas; esto significa que no hay una masa que atrae y otra que es atraída, sino que ambas se atraen con fuerzas de igual magnitud de acuerdo con el **principio de acción y reacción**.

Las teorías sobre la interacción gravitacional enunciadas en el presente siglo tienen estructuras conceptualmente muy diferentes a la de Newton, pero contienen a su ley de gravitación universal como una primera aproximación.

Ejemplos

- Un cuerpo pesa 520[N] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale $9,78[\text{m/s}^2]$. Calcule la aceleración que adquiere este cuerpo al estar sometido a una fuerza neta \vec{F}_n de magnitud igual a 146[N].



La magnitud de la aceleración del cuerpo la obtenemos de:

$$F_n = m \cdot a$$

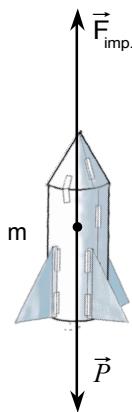
La masa está determinada por $P = m \cdot g$, por tanto:

$$m = \frac{P}{g} \quad \text{y} \quad a = \frac{F_n}{m} = \frac{F_n}{P} \cdot g = \frac{146 \text{ [N]}}{520 \text{ [N]}} \cdot 9,78 \text{ [m/s}^2\text{]} \approx 2,75 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

- Un cohete de 50 toneladas de masa se alcanzó a elevar 20[m] en 5,0[s] antes de explotar. Si suponemos que la aceleración, la masa y la fuerza impulsora fueron constantes, ¿qué magnitud tenía la fuerza impulsora?

Considerando que el cohete parte del reposo, su aceleración queda determinada por:

$$h = a \cdot t^2/2$$



dando:

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 20 \text{ [m]}}{(5,0 \text{ [s]})^2} = 1,6 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Esta aceleración es producida por la fuerza neta, cuya magnitud es igual a la magnitud de la fuerza impulsora menos la magnitud del peso:

$$F_{\text{neta}} = F_{\text{imp.}} - P = m \cdot a$$

por tanto:

$$\begin{aligned} F_{\text{imp.}} &= m \cdot a + P = m \cdot a + m \cdot g = m \cdot (a + g) \\ &= 50 \text{ [t]} \cdot 10^3 \text{ [kg/t]} \cdot (1,6 + 9,8) \text{ [m/s}^2\text{]} \\ &\triangleq 50 \cdot 10^3 \cdot 11,4 \text{ [N]} \approx 5,7 \cdot 10^5 \text{ [N]} \end{aligned}$$

- Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional con que el Sol atrae a Saturno. Use los datos: masa del Sol $1,99 \cdot 10^{30} \text{ [kg]}$, masa de Saturno $5,6 \cdot 10^{26} \text{ [kg]}$ y distancia media de Saturno al Sol de 9,5[UA].

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional queda determinada por:

$$F_{\text{St} \rightarrow \text{S}} = G \frac{M_{\text{S}} \cdot M_{\text{St}}}{(d_{\text{S,St}})^2}, \text{ con } G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2\text{]}$$

Recordando la equivalencia $1 \text{ [UA]} \triangleq 1,496 \cdot 10^{11} \text{ [m]}$, obtenemos:

$$F_{\text{St} \rightarrow \text{S}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,99 \cdot 10^{30} \cdot 5,6 \cdot 10^{26}}{(9,5 \cdot 1,496 \cdot 10^{11})^2} \text{ [N]} \approx 3,7 \cdot 10^{22} \text{ [N]}$$

- * Calcule aproximadamente el valor de la constante de gravitación universal G usando como datos: el valor de la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra $g \approx 9,8 \text{ [m/s}^2]$,

el radio de la Tierra $R \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ [m]}$ y

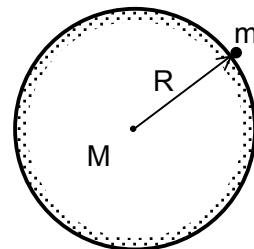
la masa de la Tierra $M \approx 6,0 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}$.

Consideremos un cuerpo de masa m en la superficie de la Tierra. Su peso es la atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él:

$$P = mg = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} G &= \frac{g \cdot R^2}{M} \approx \frac{9,8 \text{ [m/s}^2] \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{6,0 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}} = \frac{9,8 \cdot (6,4)^2 \cdot 10^{12}}{6,0 \cdot 10^{24}} \left[\frac{\text{m} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}} \right] \\ &\approx 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2] \end{aligned}$$

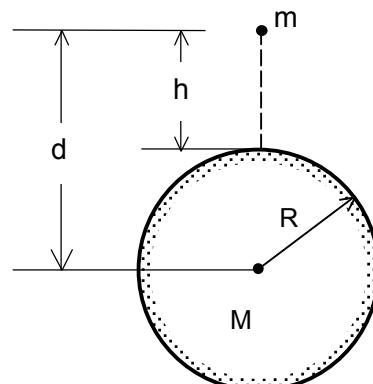


- Determine una expresión aproximada que nos indique las variaciones de la aceleración de gravedad en función de la altitud (altura sobre la superficie de la Tierra).

De la ley de gravitación universal de Newton obtenemos:

$$g = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

$$= \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{G \cdot M}{R^2 \cdot (1+h/R)^2}$$



Hagamos $\varepsilon = h/R$. Como el radio de la Tierra R es del orden de magnitud de 10^7 [m] , aún para altitudes del orden de 10^5 [m] resulta $\varepsilon \sim 10^{-2}$, por tanto en:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} = 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \dots$$

podemos “despreciar” los términos que contienen ε^2 , ε^3 y potencias superiores de ε , dando como resultado aproximado:

$$g(h) \approx g_0 \cdot (1 - 2h/R)$$

donde hemos puesto $g_0 = G M / R^2$, para indicar la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra.

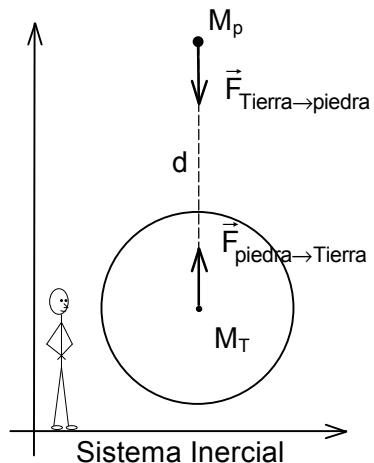
Para apreciar el cambio de los valores de la aceleración de gravedad con la altitud, calculamos el valor de g para un satélite artificial a 300[km] de altitud:

$$\begin{aligned} g &\approx 9,8 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 300}{6400}\right) [\text{m/s}^2] \approx 9,8 \cdot \frac{58}{64} [\text{m/s}^2] \\ &\approx 8,9 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

lo que representa una disminución de sólo un 9%.

- Calculemos la aceleración con que un observador en un *sistema inercial* vería moverse la Tierra hacia una piedra. La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre la Tierra y la piedra está dada por:

$$\begin{aligned} F_{p \rightarrow T} &= F_{T \rightarrow p} = G \frac{M_p \cdot M_T}{d^2} \\ F_{p \rightarrow T} &= F_{T \rightarrow p} \end{aligned}$$



La aceleración de la piedra resulta:

$$a_p = \frac{F_{T \rightarrow p}}{M_p} = \frac{G \cdot M_T}{d^2}$$

La aceleración de la Tierra es:

$$a_T = \frac{F_{p \rightarrow T}}{M_T} = \frac{G \cdot M_p}{d^2}$$

El cuociente entre las respectivas aceleraciones es:

$$\frac{a_T}{a_p} = \frac{M_p}{M_T}$$

La masa de la Tierra es $5,97 \cdot 10^{24}$ [kg] y si la masa de la piedra fuera 3,24[kg], resultaría:

$$\frac{a_T}{a_p} = \frac{3,24}{5,97 \cdot 10^{24}} \approx 5,43 \cdot 10^{-25}$$

Si el observador determinara que a_p es del orden de $10[m/s^2]$, entonces, para él sería:

$$a_T \approx 5,43 \cdot 10^{-24} [m/s^2]$$

Por tanto, el observador inercial prácticamente no ve moverse a la Tierra. Esto justifica que un observador que se encuentre situado en la Tierra, al medir la aceleración de caída de una piedra coincida aproximadamente con lo medido por el observador inercial.

- Suponga que en cierto lugar del Universo hay dos cuerpos celestes esféricos y homogéneos. Sus densidades están en razón de 4:7 y las aceleraciones de gravedad en sus superficies están en la razón de 8:3. Calculemos la razón entre los radios de estos cuerpos.

Las aceleraciones de gravedad en las superficies de los planetas serían:

$$\begin{aligned} g_1 &= G \frac{m_1}{(R_1)^2}, & \text{siendo} & m_1 = \frac{4}{3} \pi (R_1)^3 \cdot \rho_1 \\ g_2 &= G \frac{m_2}{(R_2)^2}, & \text{siendo} & m_2 = \frac{4}{3} \pi (R_2)^3 \cdot \rho_2 \end{aligned}$$

Reemplazando m_1 y m_2 por sus valores y haciendo el cuociente, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

De los datos obtenemos que:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{8}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{4}{7}$$

y por tanto:

$$\frac{8}{3} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{4}{7}$$

Entonces, los radios de los planetas están en la razón $R_1 : R_2 = 14 : 3$.

Ejercicios

9-39) Infórmese de la latitud de los siguientes lugares: Arica, Copiapó, Valparaíso, Valdivia, Punta Arenas y Puerto Williams e indique valores aproximados de la aceleración de gravedad en cada uno de ellos. Use la tabla de aceleración de gravedad para diferentes latitudes (pág. 321) Estime el efecto de la altitud en cada caso.

9-40) Un estudiante del planeta Tral, en otro sistema solar, deja caer un objeto con el fin de determinar la aceleración debida a la gravedad. En un experimento obtiene los siguientes valores:

tiempo [ces] :	0,0	1,0	1,5	2,0	2,6	3,0
distancia [hic] :	0,00	2,15	4,84	8,60	14,54	19,33

Determine el valor de la aceleración de gravedad en $[\text{hic}/\text{ces}^2]$.

Un visitante terrestre encuentra que $1[\text{hic}] \triangleq 6,3[\text{cm}]$ y que $1[\text{ces}] \triangleq 0,17[\text{s}]$. Exprese tal aceleración de gravedad en $[\text{cm/s}^2]$.

¿Pesa un objeto más en la Tierra que en Tral?

9-41) Un cuerpo pesa $8,32 \cdot 10^3[\text{dina}]$ en un lugar en que la aceleración de gravedad vale $978[\text{cm/s}^2]$. Calcule la aceleración que adquiere tal cuerpo al estar sometido a una fuerza neta de $6,49 \cdot 10^3[\text{dina}]$.

9-42) Compare las atracciones gravitacionales Sol-Tierra y Luna-Tierra. Las masas de la Luna, del Sol y de la Tierra son: $7,18 \cdot 10^{22}[\text{kg}]$, $1,99 \cdot 10^{30}[\text{kg}]$ y $5,96 \cdot 10^{24}[\text{kg}]$ respectivamente. La distancia media Sol-Tierra es $1,495 \cdot 10^8[\text{km}]$ y la de Luna-Tierra es $3,84 \cdot 10^5[\text{km}]$.

9-43) Determine, aproximadamente, un punto entre la Tierra y la Luna para que un cuerpo colocado en ese punto no experimente aceleraciones debido a las fuerzas gravitacionales conjuntas de la Tierra y de la Luna.

9-44) Calcule aproximadamente la constante de gravitación universal usando como datos el radio y la densidad media de la Tierra y la aceleración de gravedad en la superficie terrestre.

9-45) Exprese el valor de la “constante de gravitación universal” G en $[\text{dina} \cdot \text{cm}^2 / \text{g}^2]$.

9-46) Considere dos esferas idénticas cuyos centros están a $1,0[\text{m}]$ de distancia. Determine la masa que debería tener cada una de ellas para que la fuerza gravitacional entre ellas tuviera una magnitud de $1,0[\text{N}]$. Comente.

9-47) Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos núcleos de carbono 12 separados $1,2 \cdot 10^{-13}[\text{cm}]$.

9-48) En un cristal de NaCl la distancia entre átomos Na y Cl es aproximadamente $3 \cdot 10^{-10} [\text{m}]$. La masa de un átomo de Na es $4 \cdot 10^{-26} [\text{kg}]$ y la masa del átomo de Cl es $6 \cdot 10^{-26} [\text{kg}]$. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos átomos vecinos de Na y Cl.

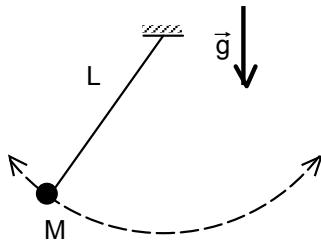
9-49) Aproximadamente los radios de la Tierra y de la Luna están en la razón de 26:7,1 y sus masas en la razón 89:1,1. Calcule la aceleración de gravedad en la superficie de la Luna.

9-50) Antes de partir de la Tierra un astronauta mide que la masa de un instrumento es $0,20 [\text{kg}]$. Cuando camina sobre la superficie de la Luna con tal instrumento en la mano, ¿qué fuerza debe ejercer el astronauta para sostenerlo?

9-51) ¿Cuánto pesaría en la Luna un objeto que pesa $35,4 [\text{N}]$ en la Tierra en un lugar con aceleración de gravedad normal?

9-52) Remítase a la tabla de valores de la aceleración de gravedad g para diferentes altitudes h y a 45° de latitud. Controle si tales valores están de acuerdo con la aproximación $g(h) \approx g_s \cdot (1 - 2h/R_T)$, donde g_s es el valor en la superficie de la Tierra y R_T es el radio de la Tierra. Si encuentra discrepancias ¿a qué las atribuiría?

9-53) Considere que el período de oscilación T de un péndulo formado por un cuerpo de masa M colgado en el extremo de un hilo de largo L dependiera de L , M y g ; siendo g la aceleración de gravedad del lugar. Escriba entonces $T = k M^\alpha L^\beta g^\gamma$, siendo k una constante numérica adimensional. Verifique, por análisis de las dimensiones de las cantidades físicas involucradas, que $T = k \sqrt{L/g}$.



9-54) El período de oscilación del péndulo de un *reloj de pedestal* se puede escribir como $T = \beta \sqrt{g}$, donde g es la aceleración de gravedad y β es una constante. El reloj marca la hora "exacta" en la superficie de la Tierra. Calcule aproximadamente cuánto se atrasa o se adelanta por día al llevar el péndulo a $300 [\text{km}]$ sobre la superficie de la Tierra (considere que la temperatura se mantiene constante).

9-55) Si la Tierra mantuviera su radio actual, pero su masa se redujera en $1/18$, ¿en qué tanto por ciento variaría la aceleración de gravedad en un punto de su superficie?

9-56) Sea g_s el valor de la aceleración de gravedad en la superficie de cierta estrella. Si el volumen de tal estrella se duplicara y su masa se mantuviera, ¿cuál sería entonces la aceleración de gravedad sobre su superficie?

9-57) Suponga que existe un planeta de forma aproximadamente esférica cuya densidad media fuese igual a la de la Tierra y cuyo radio fuese la mitad del de la Tierra. Calcule cuál sería la aceleración de gravedad en la superficie de ese planeta.

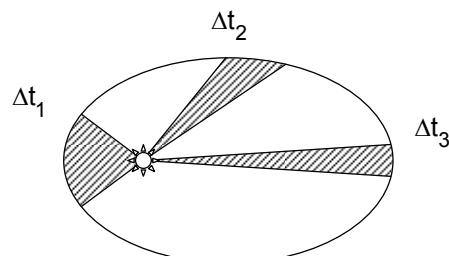
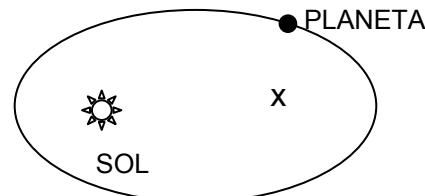
Movimiento de Planetas y Satélites

Analizando las cuidadosas observaciones de la posición de los planetas hechas por Ticho Brahe, Johannes Kepler enunció en la segunda década del siglo XVII, tres leyes empíricas sobre el movimiento de los planetas en torno al Sol:

La órbita de cada planeta es una elipse, uno de cuyos focos está ocupado por el Sol.

Una recta trazada desde un planeta hasta el Sol barre áreas iguales en iguales intervalos de tiempo.

Los cuadrados de los períodos de revolución de dos planetas cualesquiera alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.



$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

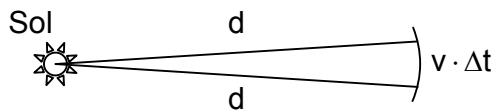
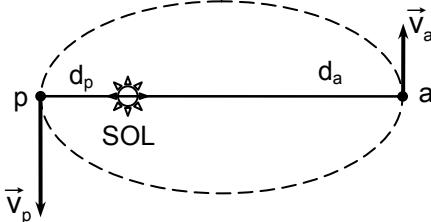
Estudiemos algunas ilustraciones de estas leyes:

- Cuando un planeta describe su órbita elíptica alrededor del Sol pasa por el punto más cercano al Sol, el perihelio, y por el más lejano, el afelio, con distinta velocidad.

Las rapideces v_a y v_p en afelio y perihelio, están relacionadas a las distancias d_a y d_p del planeta al Sol en tales puntos.

Consideremos un “pequeño” intervalo de tiempo Δt que incluya el instante en que pasa por uno de esos puntos. Aproximadamente el arco recorrido con rapidez v es $v\Delta t$ y el área del sector correspondiente es:

$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot v \Delta t$$



De acuerdo a la segunda ley de Kepler, cuando los intervalos de tiempo son iguales, la recta del Sol al planeta *barre áreas* iguales y por tanto para afelio y perihelio resulta:

$$\frac{1}{2} d_a \cdot v_a \cdot \Delta t = \frac{1}{2} d_p \cdot v_p \cdot \Delta t$$

esto es:

$$d_a \cdot v_a = d_p \cdot v_p \quad \text{o bien} \quad v_a / v_p = d_p / d_a$$

lo que muestra que las rapideces en el afelio y el perihelio son inversamente proporcionales a las distancias de esos puntos al Sol.

- Para Mercurio, las distancias al Sol en afelio y en perihelio son $6,986 \cdot 10^7$ [km] y $4,604 \cdot 10^7$ [km] respectivamente. Su rapidez al pasar el perihelio es 58,92[km/s] , y al pasar por el afelio lo hace con una rapidez de:

$$v_a = \frac{d_p}{d_a} v_p \approx \frac{4,604 \cdot 10^7 \text{ [km]}}{6,986 \cdot 10^7 \text{ [km]}} \cdot 58,92 \text{ [km / s]}$$

$$\approx 38,83 \text{ [km / s]}$$

Al describir su órbita un planeta lo hace con rapidez variable, siendo la mínima en afelio y la máxima en perihelio.

- La ley de Kepler para los períodos de los planetas la podemos expresar algebraicamente en la forma:

$$T^2 = k \cdot d^3$$

siendo T el período de revolución, d la distancia media del planeta al Sol y k una constante.

Podemos controlar esta ley usando los siguientes datos, aproximados a 4 cifras significativas, para la Tierra y Plutón:

	Período	Afelio	Perihelio
Tierra	$3,156 \cdot 10^7$ [s]	$1,521 \cdot 10^{11}$ [m]	$1,471 \cdot 10^{11}$ [m]
Plutón	$7,837 \cdot 10^9$ [s]	$7,375 \cdot 10^{12}$ [m]	$4,443 \cdot 10^{12}$ [m]

La distancia media al Sol es el *promedio* de las distancias en afelio y perihelio, esto corresponde al *semieje mayor* de la órbita elíptica, por tanto:

$$\text{Tierra: } d = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ [m]}$$

$$\text{Plutón: } d = 5,909 \cdot 10^{12} \text{ [m]}$$

Entonces:

$$\text{Tierra: } \frac{T^2}{d^3} = \frac{(3,156 \cdot 10^7)^2}{(1,496 \cdot 10^{11})^3} [\text{s}^2/\text{m}^3] \approx 2,975 \cdot 10^{-19} [\text{s}^2/\text{m}^3]$$

$$\text{Plutón: } \frac{T^2}{d^3} = \frac{(7,837 \cdot 10^9)^2}{(5,909 \cdot 10^{12})^3} [\text{s}^2/\text{m}^3] \approx 2,977 \cdot 10^{-19} [\text{s}^2/\text{m}^3]$$

lo que muestra efectivamente que T^2/d^3 es una constante.

Algunos datos, aproximados a 3 cifras, sobre el Sistema Solar se presentan en la siguiente tabla

Planeta	d_s [m]	T [s]	M [kg]	R_e [m]	g_0 [m / s ²]
Mercurio	$5,80 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$	$3,30 \cdot 10^{23}$	$2,44 \cdot 10^6$	3,58
Venus	$1,09 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$	$4,87 \cdot 10^{24}$	$6,05 \cdot 10^6$	8,87
Tierra	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$	$5,97 \cdot 10^{24}$	$6,38 \cdot 10^6$	9,80
Marte	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,94 \cdot 10^7$	$6,42 \cdot 10^{23}$	$3,40 \cdot 10^6$	3,74
Júpiter	$7,78 \cdot 10^{11}$	$3,74 \cdot 10^8$	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,15 \cdot 10^7$	26,50
Saturno	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,30 \cdot 10^8$	$5,69 \cdot 10^{26}$	$6,05 \cdot 10^7$	11,17
Urano	$2,87 \cdot 10^{12}$	$2,65 \cdot 10^9$	$8,68 \cdot 10^{25}$	$2,56 \cdot 10^7$	10,49
Neptuno	$4,50 \cdot 10^{12}$	$5,20 \cdot 10^9$	$1,02 \cdot 10^{26}$	$2,49 \cdot 10^7$	13,25

d_s : distancia media al Sol

T : período de revolución

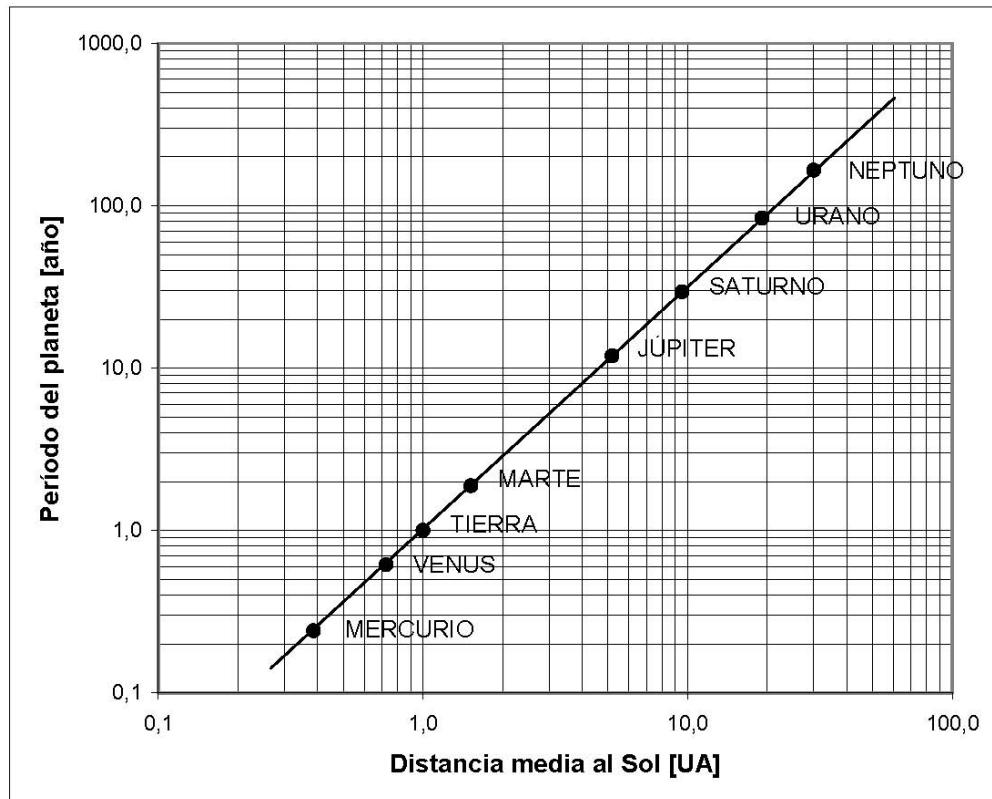
M : masa del planeta

R_e : radio ecuatorial del planeta.

g_0 : valor medio de la aceleración de gravedad en la superficie del planeta

M_S : $1,99 \cdot 10^{30}$ [kg] masa del Sol.

En el gráfico siguiente se representa el período de revolución en función de la distancia media al Sol usando “escalas de potencia de 10” (escala log-log). Observe que en tal representación los valores correspondientes a los diferentes planetas están sobre una misma recta:



Ley de Kepler de los períodos

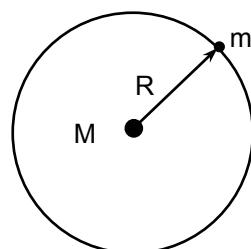
Kepler obtuvo sus tres leyes empíricamente. Newton mediante las leyes generales del movimiento más la ley de gravitación fue capaz de deducirlas teóricamente, confirmando así la validez de su ley de gravitación.

Apliquemos la ley gravitacional de Newton a un movimiento circunferencial y deduzcamos, en este caso particular, la ley de Kepler de los períodos:

Consideremos un cuerpo de masa m que describe una trayectoria circunferencial de radio R debido a la atracción gravitacional de otro cuerpo de masa M , mucho mayor que m , que se encuentra en el centro de la circunferencia.

Si pensamos que en cierto instante dejará de actuar la atracción gravitacional sobre el cuerpo m , durante un pequeño intervalo de tiempo Δt el cuerpo se desplazaría una distancia:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

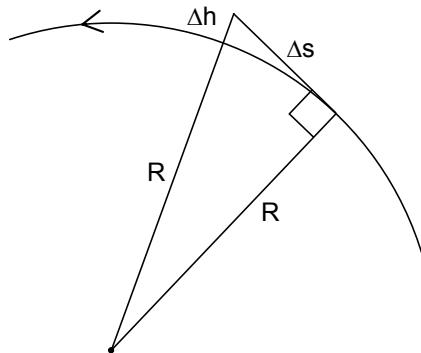


en línea recta tangencial a la circunferencia, siendo v la rapidez de m .

Pero, para mantener la trayectoria circunferencial la atracción debida a M haría "caer" el cuerpo m con una aceleración de magnitud a_c en:

$$\Delta h = \frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2$$

durante ese mismo intervalo Δt



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura anterior obtenemos:

$$R^2 + (\Delta s)^2 = (R + \Delta h)^2 = R^2 + 2R \cdot \Delta h + (\Delta h)^2$$

$$(\Delta s)^2 = 2R \cdot \Delta h + (\Delta h)^2$$

y usando en esta expresión $\Delta s = v \cdot \Delta t$ y $\Delta h = \frac{1}{2} a_c (\Delta t)^2$ resulta:

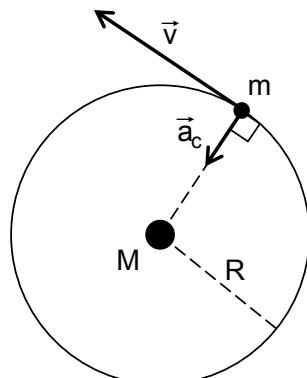
$$(v \cdot \Delta t)^2 = 2R \cdot \frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{4} \cdot a_c^2 \cdot (\Delta t)^4$$

$$v^2 = a_c R + \frac{a_c^2}{4} \cdot (\Delta t)^2$$

Si el intervalo de tiempo Δt es muy pequeño, al hacerlo "tender a cero" obtenemos que:

la magnitud de la aceleración producida por la fuerza de gravedad para mantener un cuerpo de masa m describiendo una órbita circunferencial de radio R con rapidez constante v es:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$



El valor de esta aceleración está determinado por:

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m \cdot M}{R^2} = m a_c$$

dando:

$$a_c = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Al combinar ambas expresiones para a_c obtenemos:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

esto es, para el radio y la rapidez con que el cuerpo describe una órbita circunferencial se cumple la relación:

$$R \cdot v^2 = G \cdot M$$

El período de revolución T para un cuerpo en una órbita circunferencial está determinado por:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

por lo cual:

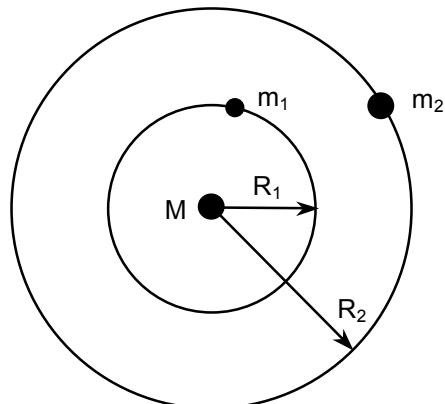
$$T^2 = \frac{(2\pi \cdot R)^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 \cdot R^2}{v^2} \cdot \frac{R}{R} = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot R^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

Si consideramos dos objetos describiendo distintas órbitas circunferenciales alrededor de un mismo cuerpo, las relaciones para los respectivos períodos y radios de las órbitas son:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_1^3$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_2^3$$



De lo cual se deduce la ley de Kepler de los períodos:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

relación que es independiente de la masa de los cuerpos.

Ejemplos

- Sabiendo que el período de revolución de la Luna alrededor de la Tierra es $2,36 \cdot 10^6$ [s] y que el radio orbital de la Luna es de $3,84 \cdot 10^5$ [km], calcule la masa de la Tierra.

Se ha deducido que:

$$T_L^2 = \frac{4\pi^2 R_L^3}{G \cdot M_T}$$

por tanto:

$$M_T = \frac{4\pi^2 R_L^3}{G \cdot T_L^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (2,36 \cdot 10^6)^2} \approx 6 \cdot 10^{24} [\text{kg}]$$

valor aceptable si se toma en cuenta las aproximaciones efectuadas. Se da como masa de la Tierra el valor $5,97 \cdot 10^{24}$ [kg].

- Calcule la altura sobre la línea ecuatorial a que debe ser colocado un satélite de comunicaciones para que permanezca fijo en su posición respecto a la Tierra.

La condición del problema implica que el período del satélite debe ser de “un día”:

$$T_S = 1 [\text{d}]$$

La ley de Kepler de los períodos nos permite relacionar los valores del período y del radio de revolución del satélite artificial con los valores correspondientes al satélite natural de la Tierra, la Luna.

Usemos como datos aproximados: período lunar $T_L \approx 27$ [día] y radio de la órbita lunar $R_L \approx 60R_T$, siendo $R_T \approx 6,4 \cdot 10^3$ [km] el radio de la Tierra.

Entonces el radio de la órbita del satélite R_S queda determinado por:

$$\left(\frac{T_S}{T_L} \right)^2 = \left(\frac{R_S}{R_L} \right)^3$$

$$R_S = \left(\frac{T_S}{T_L} \right)^{2/3} \cdot R_L ; \quad \left(\frac{1[\text{día}]}{27[\text{día}]} \right)^{2/3} \cdot 60R_T = \frac{60}{9}R_T$$

y la altura h_S del satélite sobre la línea ecuatorial es:

$$\begin{aligned} h_S &= R_S - R_T \approx \left(\frac{60}{9} - 1 \right) \cdot R_T \approx \frac{51}{9} \cdot 6400 [\text{km}] \\ &\approx 3,6 \cdot 10^4 [\text{km}] \end{aligned}$$

El primer satélite de este tipo, el Syncor 2, fue colocado con éxito en 1963 y tuvo como altura media 35.710 [km], en una órbita prácticamente circular.

Ejercicios

9-58) Los valores mínimo y máximo de la rapidez de la Tierra en su órbita son $2,94 \cdot 10^6$ [cm/s] y $3,06 \cdot 10^6$ [cm/s], respectivamente. Calcule la razón entre la distancia máxima y mínima de la Tierra al Sol.

9-59) Un satélite artificial terrestre describe una órbita cuyo perigeo y apogeo están, respectivamente, a 100[km] y a 500[km] sobre la superficie de la Tierra. Calcule la razón entre las rapideces del satélite en tales puntos.

9-60) Las distancias extremas de Marte al Sol son $2,49 \cdot 10^8$ [km] y $2,07 \cdot 10^8$ [km]. Calcular su rapidez máxima, sabiendo que su rapidez mínima es 21,96[km/s].

9-61) Considere dos satélites artificiales en órbita a la Tierra. El satélite S_1 describe una órbita perfectamente circular a 500[km] de altura sobre la Tierra y el S_2 describe una órbita elíptica tal que, su altura mínima sobre la Tierra es 400[km], mientras que su altura máxima sobre la Tierra es 600[km]. ¿En qué razón están los períodos de revolución de estos satélites?

9-62) Los períodos de los satélites Mimas y Titán de Saturno son $8,18 \cdot 10^4$ [s] y $1,38 \cdot 10^6$ [s], respectivamente. Si sus distancias medias a Saturno son respectivamente $1,82 \cdot 10^5$ km] y $1,23 \cdot 10^6$ [km] compruebe la ley de Kepler de los períodos.

9-63) Europa, satélite de Júpiter, tiene una distancia media a ese planeta de $6,71 \cdot 10^5$ [km] y un período de revolución de $3,07 \cdot 10^5$ [s]. Poseidón, también satélite de Júpiter, tiene un período de $6,38 \cdot 10^7$ [s]. Calcular la distancia media de Poseidón a Júpiter.

9-64) El semieje mayor de la órbita del primer satélite artificial de la Tierra, el Sputnik I, era $400[\text{km}]$ menor que el semieje mayor de la del Sputnik II. El período de rotación del Sputnik I alrededor de la Tierra, recién puesto en órbita era de $96,2[\text{min}]$. Hallar la magnitud del eje mayor de la órbita del Sputnik II y su período de revolución alrededor de la Tierra.

9-65) Comparar la aceleración del Sol hacia la Tierra debido a la atracción terrestre, con la aceleración de la Tierra hacia el Sol debido a la atracción gravitacional solar.

9-66) Calcule la rapidez que debe tener un satélite terrestre para que describa una órbita circular en torno a la Tierra a $400[\text{km}]$ de altitud. Calcule el período de rotación y la rapidez angular de ese satélite.

9-67) ¿Puede un satélite cuya rapidez es $100[\text{km/h}]$ estar en órbita circunferencial en torno a la Tierra?

9-68) Si la Luna tuviera dos veces su masa actual, pero se moviera en la misma órbita que lo hace ahora, ¿cuál sería su período de revolución?

9-69) Si la rapidez orbital de la Luna fuera duplicada, manteniéndose ella en una órbita circular, ¿cuál debería ser el radio de esta nueva órbita? ¿Cuál sería el nuevo período de revolución?

9-70) Calixto, satélite de Júpiter, tiene un período de revolución de $1,442 \cdot 10^6 [\text{s}]$ y su distancia media al planeta es $1,87 \cdot 10^6 [\text{km}]$. Usando sólo estos datos y la constante gravitacional, calcule la masa de Júpiter.

9-71) Dos satélites giran alrededor de diferentes planetas a la misma distancia media R . Uno de los satélites tiene un período igual a tres veces el del otro. Calcular la razón entre las masas de los planetas.

9-72) Si el radio de la órbita de un planeta A fuera el doble que el de un planeta B, calcule las razones de sus períodos, de sus rapideces orbitales y de sus aceleraciones hacia el Sol.

9-73) Se ha encontrado que nuestra galaxia está rodeada por varias galaxias enanas. Por variadas razones se supone que están ligadas gravitacionalmente a nuestra galaxia. Consideremos una de ellas llamada Sculptor. Su distancia al centro de nuestra galaxia es de $2 \cdot 10^{23} [\text{cm}]$. La masa de dicha galaxia es de $3 \cdot 10^6$ veces la del Sol. La masa de nuestra galaxia es aproximadamente $4 \cdot 10^6$ veces la del Sol. Suponga que la galaxia Sculptor orbita circularmente en torno a la nuestra. Calcule el período de revolución y la velocidad orbital de Sculptor.

9-74) Considere los siguientes datos de algunos de los primeros satélites artificiales de la Tierra:

Satélite	Año	Masa [kg]	Periodo [min]	Altitud [km]	
				Perigeo	Apogeo
Sputnik 1	1957	83	96,2	229	946
Explorer 7	1958	14	114,8	360	2531
Vostok 1	1961	4725	89,3	175	303
Midas 3	1961	1588	161,5	3426	3465
Alouette 1	1962	145	105,4	998	1030
Luna 4	1963	1422	42000,0	90123	700064
Syncom 2	1963	39	1430,4	35707	35715

Use estos datos para controlar si en el movimiento de los satélites artificiales se cumple la ley de Kepler de los períodos. Construya un gráfico del período de revolución en función de la distancia media al centro de la Tierra, análogo al construido para los planetas.

Interacción electrostática

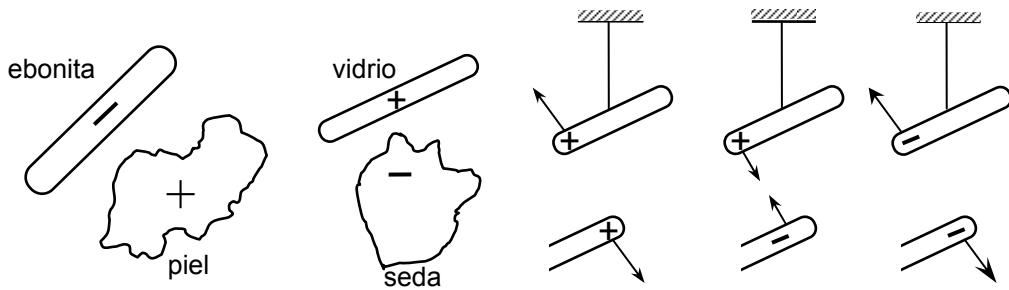
Hemos mencionado que las fuerzas entre átomos y moléculas son esencialmente manifestaciones de la interacción electromagnética. Numerosos fenómenos, como los luminosos, la transmisión de radio, televisión y radar, el análisis por rayos X y otros, dependen de la interacción electromagnética. Trataremos a continuación sólo de interacciones entre partículas eléctricamente cargadas que están en reposo respecto a un observador que mide estas interacciones.



Seguramente usted ha realizado en múltiples ocasiones el siguiente experimento: ha frotado un lápiz de plástico y al acercarlo a pequeños pedacitos de papel observó que fueron atraídos por el lápiz. También usted debe haber observado chispas que saltan al sacarse prendas de vestir de fibras sintéticas. En ambos casos se ha encontrado con efectos de la interacción eléctrica. Ya en el siglo VII A.C., en Grecia, se había detectado que el ámbar frotado atraía trozos de paja colocados en su vecindad.

Para describir la interacción eléctrica se introdujo en Física el concepto de **carga eléctrica**.

Diversas experiencias con cuerpos que han sido frotados, realizadas ya en el siglo XVII muestran que, dependiendo de los materiales empleados, los cuerpos se atraen o se repelen. Este doble efecto entre los cuerpos así electrizados se explica diciendo que al frotar un cuerpo éste adquiere una u otra de dos clases de cargas eléctricas, llamadas positiva y negativa. Las mismas experiencias permiten concluir que cuerpos electrizados con cargas del mismo signo se repelen y de distinto signo se atraen.



La carga eléctrica es una de las propiedades características de las partículas fundamentales. Se ha determinado experimentalmente que las partículas detectadas a la fecha tienen carga eléctrica, positiva o negativa, de igual valor absoluto que la del electrón o que son eléctricamente neutras (carga cero).

$$\text{carga del electrón} = -e$$

$$\text{carga del protón} = e$$

$$\text{carga del neutrón} = 0$$

donde e representa la **carga elemental** cuyo valor es

$$e = (1,602176487 \pm 0,000000040) \cdot 10^{-19} [\text{C}] \approx 1,6 \cdot 10^{-19} [\text{C}]$$

Hemos usado la unidad de carga eléctrica:

$$\text{Un Coulomb} \dots \dots 1 [\text{C}],$$

que es la unidad incorporada en el Sistema Internacional de Unidades de Medición.

El hecho de cargar un cuerpo se explica como una transferencia de partículas con carga eléctrica. Por ejemplo, si una barra de ebonita se frota con un trozo de piel, se transfieren electrones desde la piel a la ebonita, quedando ésta con un exceso de carga negativa y la piel con un defecto de carga negativa, es decir, la carga neta en la ebonita es negativa y en la piel es positiva. Cargar un cuerpo no es crear cargas eléctricas. Es un principio en Física que la carga eléctrica se conserva; la suposición que la carga del Universo es constante e igual a cero está de acuerdo con las observaciones y teorías cosmológicas actuales.

Ley de Coulomb

Mediante cuidadosos experimentos, Coulomb logró obtener una *ley de fuerzas* para la interacción entre dos pequeñas esferas metálicas cargadas. En sus experimentos controló la magnitud de las cargas de las esferas poniéndolas en sucesivos contactos con otras esferas iguales y descargadas, suponiendo que así obtenía reducciones de las cargas iniciales a la mitad, cuarta parte, etc. Para medir la magnitud de la fuerza de interacción electrostática usó una balanza de torsión. La ley de interacción electrostática formulada por Coulomb es:

$$F = k_c \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

siendo:

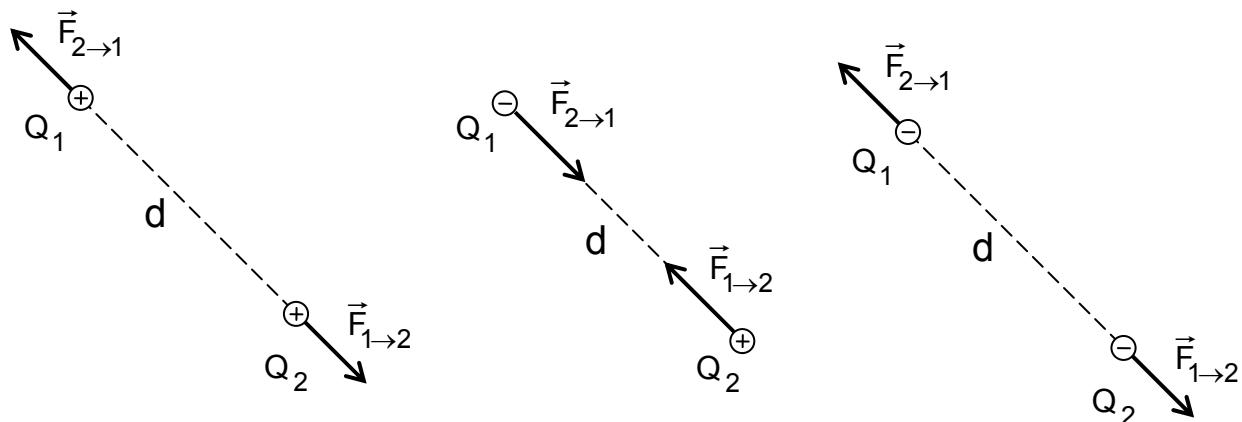
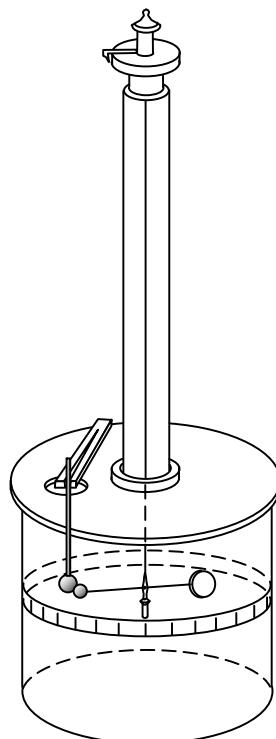
F : la magnitud de la fuerza de interacción

$|Q_1|$ y $|Q_2|$: los valores absolutos de las cargas

de las pequeñas esferas.

d : la distancia entre los centros de las esferas.

k_c : una constante; su valor depende del sistema de unidades usado.



En cada una de las situaciones ilustradas se cumple:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\| = \|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\|$$

Note que la ley de Coulomb, presentada por él a la Academia de Ciencias de Francia en 1785, tiene similar estructura matemática que la ley de gravitación universal de Newton. Estrictamente, la ley de Coulomb rige para *cargas puntuales* o *partículas cargadas* en reposo relativo. Su validez se mantiene aún en situaciones atómicas y subatómicas.

Usando las unidades del Sistema Internacional de Medidas, 1[m] para distancia, 1[N] para fuerza y 1[C] para carga eléctrica, la constante k_c en la ley de Coulomb queda definida en función de la velocidad de propagación de la luz en el vacío como:

$$k_c = 10^{-7} \left[\frac{Ns^2}{C^2} \right] \cdot c^2 = 8.987.551.787,4 \dots \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right]$$

Para cálculos es suficiente usar el valor aproximado:

$$k_c \approx 9,0 \cdot 10^9 \left[N \cdot m^2/C^2 \right]$$

Considerando que, $\text{dim(tiempo)} = T$, $\text{dim(longitud)} = L$, $\text{dim(masa)} = M$ y $\text{dim(carga)} = C$;

de la ley $F = k_c \cdot |Q_1 \cdot Q_2| / d^2$

obtenemos que $\text{dim}(k_c) = T^{-2} L^3 M C^{-2}$

Hacemos notar que se ha comprobado experimentalmente que al interactuar más de dos cargas en reposo, la fuerza coulombiana neta sobre una de ellas es la **superposición** de las fuerzas ejercidas separadamente por cada una de las otras cargas sobre esa carga considerada.

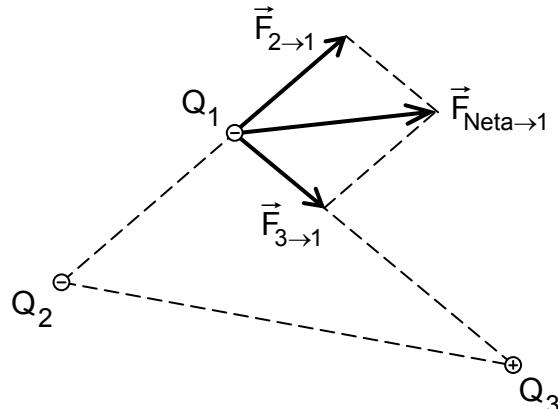
Por ejemplo, si tenemos tres objetos cargados en reposo que interactúan entre sí, la fuerza eléctrica neta que actúa sobre Q_1 es la superposición o suma vectorial:

$$\vec{F}_{\text{neta} \rightarrow 1} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}$$

donde:

$\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ es la fuerza coulombiana que la carga Q_2 ejerce sobre Q_1

$\vec{F}_{3 \rightarrow 1}$ es la fuerza coulombiana que la carga Q_3 ejerce sobre Q_1

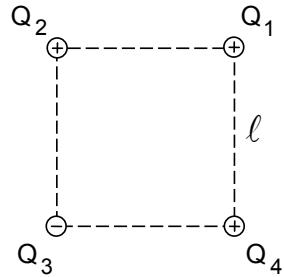


La solución para casos de más de tres cargas es análoga.

Ejemplos

- En cada vértice de un cuadrado de 2,0[cm] de lado están colocados pequeños cuerpos con cargas:

$$Q_1 = 3,6 \cdot 10^{-7} [C], \quad Q_2 = Q_4 = 4,1 \cdot 10^{-7} [C] \text{ y} \\ Q_3 = -3,2 \cdot 10^{-7} [C].$$



Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica resultante sobre la carga Q_1 .

Sean $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, $\vec{F}_{3 \rightarrow 1}$ y $\vec{F}_{4 \rightarrow 1}$ las fuerzas que actúan sobre Q_1 debido a Q_2 , Q_3 y Q_4 respectivamente.

Aplicando la ley de Coulomb:

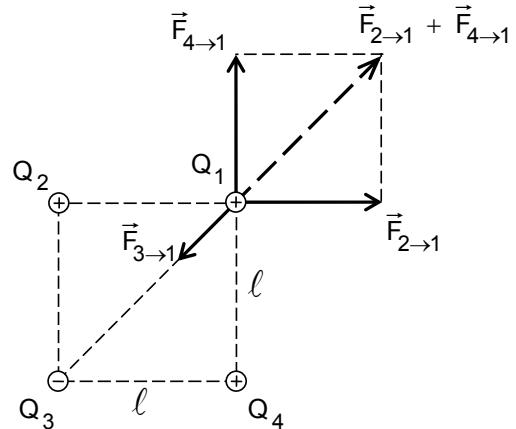
$$F = k_c \frac{|Q_a| \cdot |Q_b|}{(d_{a,b})^2}$$

para las magnitudes de cada una de esas interacciones resulta:

$$F_{2 \rightarrow 1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(3,6 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,1 \cdot 10^{-7})}{(2,0 \cdot 10^{-2})^2} \approx 3,3 [N]$$

$$F_{3 \rightarrow 1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(3,6 \cdot 10^{-7}) \cdot (3,2 \cdot 10^{-7})}{(\sqrt{2} \cdot 2,0 \cdot 10^{-2})^2} \approx 1,3 [N]$$

$$F_{4 \rightarrow 1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(3,6 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,1 \cdot 10^{-7})}{(2,0 \cdot 10^{-2})^2} \approx 3,3 [N]$$



La fuerza electrostática neta que actúa sobre Q_1 es igual a:

$$\vec{F}_{\text{neta} \rightarrow 1} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1} + \vec{F}_{4 \rightarrow 1}$$

Dado que $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ y $\vec{F}_{4 \rightarrow 1}$ tienen igual magnitud y son perpendiculares, resulta que $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{4 \rightarrow 1}$ tiene dirección opuesta que $\vec{F}_{3 \rightarrow 1}$ y por tanto:

$$\begin{aligned} F_{\text{neta} \rightarrow 1} &= \left\| \vec{F}_{\text{neta} \rightarrow 1} \right\| = \left| \left\| \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{4 \rightarrow 1} \right\| - \left\| \vec{F}_{3 \rightarrow 1} \right\| \right| \\ &= \left| \sqrt{\left(F_{2 \rightarrow 1} \right)^2 + \left(F_{4 \rightarrow 1} \right)^2} - F_{3 \rightarrow 1} \right| = \left| \sqrt{2 F_{2 \rightarrow 1}^2} - F_{3 \rightarrow 1} \right| \\ &= \left(\sqrt{2 \cdot 3,3^2} - 1,3 \right) [\text{N}] \approx 3,4 [\text{N}] \end{aligned}$$

La dirección de $\vec{F}_{\text{neta} \rightarrow 1}$ forma un ángulo de 135° con el trazo determinado por las partículas con cargas Q_1 y Q_4 .

- Dos pequeños cuerpos fijos y separados $16[\text{cm}]$, tienen cargas $Q_1 = 9,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$ y $Q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$. Calcule a qué distancia de Q_2 hay que colocar un tercer cuerpo con carga Q_3 , de modo que quede en equilibrio.

Sobre la carga Q_3 actúan dos fuerzas $\vec{F}_{1 \rightarrow 3}$ y $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$, debido a sus interacciones con las cargas Q_1 y Q_2 respectivamente. Para que la carga Q_3 quede en reposo, la suma de estas fuerzas debe ser nula; esto es:

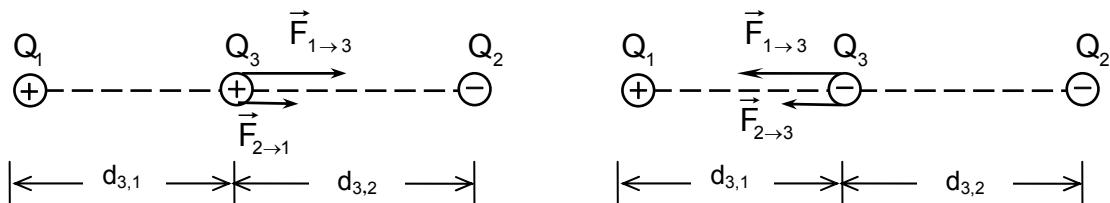
$$\vec{F}_{\text{neta} \rightarrow 3} = \vec{F}_{1 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Las direcciones de tales fuerzas dependen del signo de las cargas; sus magnitudes, según la ley de Coulomb, dependen de los valores absolutos de las cargas y de las distancias que las separan:

$$F_{1 \rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3| \cdot |Q_1|}{(d_{3,1})^2} \quad \text{y} \quad F_{2 \rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3| \cdot |Q_2|}{(d_{3,2})^2}$$

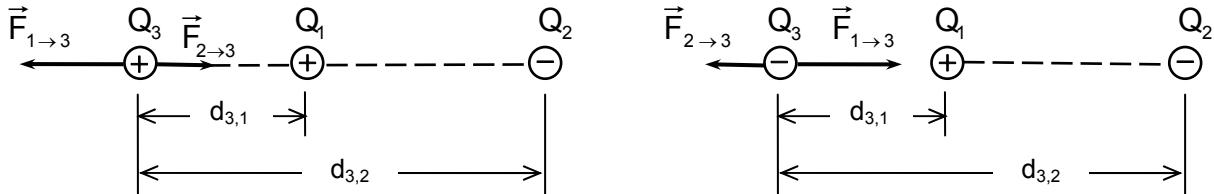
Debemos por tanto hacer un estudio previo para determinar la posibilidad física de que Q_3 pueda estar en equilibrio en el trazo que une las cargas Q_1 y Q_2 , o en la prolongación de ese trazo.

Veamos qué ocurre si intentamos colocar Q_3 entre las dos cargas:



Si Q_3 es positiva, resulta repelida por Q_1 y atraída por Q_2 . Si Q_3 es negativa, ella es atraída por Q_1 y repelida por Q_2 . Luego, como para cada caso las respectivas fuerzas tienen igual dirección, no es posible encontrar un punto entre las cargas Q_1 y Q_2 de modo que ellas mantengan en equilibrio a Q_3 .

Si intentamos colocar Q_3 a la izquierda de Q_1 :



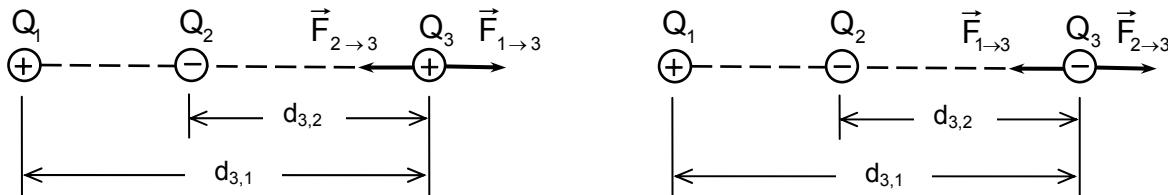
$$|Q_1| > |Q_2|$$

resulta que la magnitud de la fuerza de repulsión o atracción producida por Q_1 es siempre mayor que la magnitud de la fuerza de atracción o repulsión producida por Q_2 ya que:

$$|Q_1| > |Q_2| \quad \text{y} \quad d_{3,1} < d_{3,2} \rightarrow F_{1 \rightarrow 3} > F_{2 \rightarrow 3} \text{ según la ley de Coulomb.}$$

Por tanto no se logra el equilibrio al colocarla en dicha posición.

Finalmente, estudiemos la situación en que Q_3 esté a la derecha de Q_2 :



$$|Q_1| > |Q_2|$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones para las magnitudes de las fuerzas

$$F_{1 \rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3| \cdot |Q_1|}{(d_{3,1})^2} \quad \text{y} \quad F_{2 \rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3| \cdot |Q_2|}{(d_{3,2})^2}$$

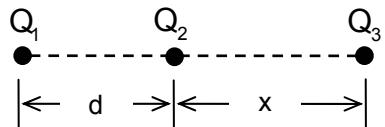
obtenemos:

$$\frac{F_{1 \rightarrow 3}}{F_{2 \rightarrow 3}} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|} \cdot \left(\frac{d_{3,2}}{d_{3,1}} \right)^2$$

En este caso, para que sea $\vec{F}_{1 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = 0$ es necesario que se cumpla que

$F_{1 \rightarrow 3} = F_{2 \rightarrow 3}$, implicando:

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| \cdot \left(\frac{d_{3,2}}{d_{3,1}} \right)^2 = 1$$



Hagamos:

$$d_{3,2} = x \quad y \quad d_{3,1} = d + x, \quad \text{con } x > 0$$

y llamemos γ^2 al valor absoluto de la razón entre las cargas:

$$\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| = \gamma^2, \quad \text{con } 0 < \gamma < 1 \quad \text{si } |Q_1| > |Q_2|$$

entonces:

$$\frac{1}{\gamma^2} \cdot \left(\frac{x}{d+x} \right)^2 = 1$$

$$x = \frac{\gamma}{1-\gamma} d$$

lo que nos indica que es posible encontrar una posición de equilibrio al colocar Q_3 a la derecha de Q_2 y que tal posición es independiente del signo de la carga Q_3 .

Usando los datos numéricos $Q_1 = 9,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$, $Q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$ y $d = 16 [\text{cm}] \triangleq 0,16 [\text{m}]$:

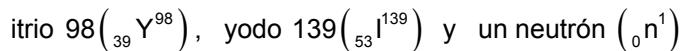
$$\gamma = \sqrt{\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|} = \sqrt{\left| \frac{-4,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]}{9,0 \cdot 10^{-6} [\text{C}]} \right|} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

de donde se puede obtener la distancia x :

$$x = \frac{2/3}{1/3} d = 2d = 0,32 [\text{m}]$$

esto es, la carga Q_3 permanece en equilibrio al ser colocada a 32[cm] a la derecha de Q_2 en la prolongación del trazo que une a Q_1 y Q_2 .

- En ciertos núcleos masivos (número másico A>200) se presenta el fenómeno de fisión espontánea, esto es, el núcleo se divide espontáneamente en varios fragmentos. Por ejemplo, el uranio $^{238}_{92}\text{U}$ se puede fisionar espontáneamente en

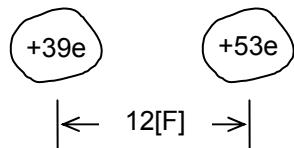


esto se puede escribir como:



Suponiendo que "justo" después de la fisión los núcleos $^{98}_{39}\text{Y}$ y $^{139}_{53}\text{I}$ tienen sus centros a una distancia de $12[\text{F}]$, estime la magnitud de la fuerza de repulsión eléctrica entre ellos.

Dado que la carga de un núcleo de número atómico Z es Ze , positiva, la magnitud de la fuerza eléctrica entre los núcleos $^{98}_{39}\text{Y}$ y $^{139}_{53}\text{I}$ está dada, aproximadamente, por:



$$\begin{aligned} F_{\text{Y} \rightarrow \text{I}} &\approx k_c \frac{|Q_Y| \cdot |Q_I|}{d^2} = k_c \frac{(39e) \cdot (53e)}{d^2} \\ &\approx 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{39 \cdot 53 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(12 \cdot 10^{-15})^2} \left[N \frac{m^2}{C^2} \cdot \frac{C \cdot C}{m^2} \right] \\ &\approx 3,3 \cdot 10^3 [N] \end{aligned}$$

Con el objeto de adquirir cierto sentido físico de lo que puede significar una fuerza de esa magnitud actuando sobre núcleos, estimemos la rapidez que alcanzarían tales núcleos en unos $10^{-22} [\text{s}]$, tiempo que emplea la luz en recorrer una distancia de $30[\text{F}]$. Supongamos, para tal estimación, que la interacción nuclear hubiese dejado de actuar, que la fuerza coulombiana se mantuviese constante en ese tiempo y que los fragmentos tuvieran rapidez despreciable al separarse, entonces;

$$v_Y \approx a_y \Delta t = \frac{F_{\text{I} \rightarrow \text{Y}}}{m_Y} \Delta t \quad \text{y} \quad v_I \approx \frac{F_{\text{Y} \rightarrow \text{I}}}{m_I} \Delta t$$

y usando como valores aproximados de las masas

$$m_Y \approx 98 [\text{u}] \quad \text{y} \quad m_I \approx 139 [\text{u}]$$

Resulta:

$$v_Y = \frac{3,3 \cdot 10^3 \text{ [N]}}{98 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ [kg]}} \cdot 10^{-22} \text{ [s]} \approx 1,98 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$

$$v_I = \frac{3,3 \cdot 10^3 \text{ [N]}}{139 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ [kg]}} \cdot 10^{-22} \text{ [s]} \approx 1,40 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$

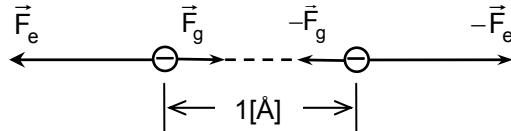
de donde notamos que el orden de magnitud de estas rapideces corresponde a unos milésimos de la rapidez de propagación de la luz en el vacío.

- Suponga que dos electrones estuviesen en reposo a una distancia de $1[\text{\AA}]$. Compare la interacción *gravitacional* y la interacción *electrostática* entre ellos.

La masa y la carga del electrón son:
respectivamente:

$$m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]}$$

$$q_e \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ [C]}$$



La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre los electrones es:

$$F_g = G \frac{m_e \cdot m_e}{d^2} \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{(9,1 \cdot 10^{-31})^2}{(10^{-10})^2} \text{ [N]} \approx 6 \cdot 10^{-51} \text{ [N]}$$

La magnitud de la fuerza de repulsión electrostática entre los electrones es:

$$F_e = k_C \frac{|q_e| \cdot |q_e|}{d^2} \approx 9,0 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-10})^2} \text{ [N]} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ [N]}$$

El cuociente entre las magnitudes de la fuerza gravitacional y la electrostática es:

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{6 \cdot 10^{-51} \text{ [N]}}{2 \cdot 10^{-8} \text{ [N]}} \sim 10^{-43}$$

Este resultado pone de manifiesto lo extremadamente “débil” que es la interacción gravitacional comparada con la interacción electrostática. Por tal razón la interacción gravitacional no influye en situaciones atómicas y nucleares.

Uno de los **modelos** más simplificados del átomo de hidrógeno es el ideado por Bohr. Supone que el electrón gira alrededor del núcleo, pudiendo describir sólo ciertas órbitas de radios determinados. Bohr postuló que para los radios R_n de tales órbitas debe cumplirse que $2\pi \cdot R_n \cdot m_e \cdot v_n = nh$ siendo m_e la masa del electrón, v_n la rapidez del electrón en la órbita de radio R_n , h la constante de Planck y n un entero positivo. Postuló además que para el electrón en cada una de esas órbitas rige la interacción coulombiana con el protón. Determine los valores posibles del radio de la órbita y la rapidez del electrón.

La fuerza de atracción eléctrica $\vec{F}_{p \rightarrow e}$ que el protón ejerce sobre el electrón produce la aceleración centrípeta \vec{a}_c del electrón en órbita alrededor del protón, al que consideramos inmóvil. Entonces, usando la ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ obtenemos:

$$F_{p \rightarrow e} = m_e \cdot a_c$$

$$k_c \frac{|-e| \cdot e}{R_n^2} = m_e \cdot \frac{v_n^2}{R_n}$$

$$R_n \cdot v_n^2 = \frac{k_c \cdot e^2}{m_e}$$

Del postulado $2\pi R_n m_e v_n = nh$ escribimos:

$$R_n \cdot v_n = \frac{nh}{2\pi m_e}$$

Haciendo el cuociente de las ecuaciones para $R_n \cdot v_n^2$ y $R_n \cdot v_n$ resulta:

$$v_n = \frac{2\pi k_c \cdot e^2}{h} \cdot \frac{1}{n}$$

con lo cual:

$$R_n = \frac{h^2}{4\pi^2 \cdot k_c \cdot e^2 \cdot m_e} n^2$$

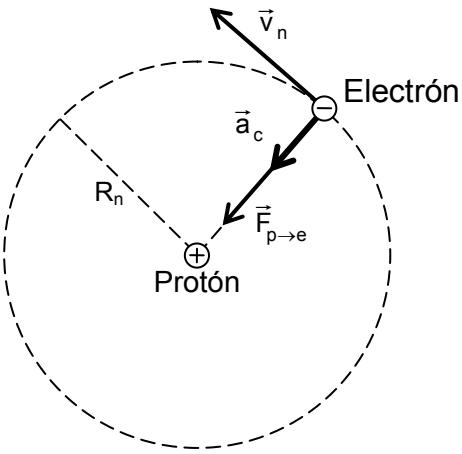
Usando los valores experimentales, aproximados:

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} [C], \quad \text{carga elemental}$$

$$m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} [kg], \quad \text{masa del electrón}$$

$$k_c \approx 9,0 \cdot 10^9 \left[N \cdot m^2 / C^2 \right], \quad \text{constante de interacción coulombiana}$$

$$h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} [N \cdot m \cdot s], \quad \text{constante de Planck}$$



podemos calcular el menor radio ($n = 1$) de las órbitas del electrón en el modelo de Bohr:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{h^2}{4\pi^2 \cdot k_c \cdot e^2 \cdot m_e} \\
 &\approx \frac{(6,6 \cdot 10^{-34} [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}])^2}{4\pi^2 \cdot 9,0 \cdot 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2] \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} [\text{C}])^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]} \\
 &\approx \frac{(6,6)^2 \cdot 10^{-68-9+38+31}}{4\pi \cdot 9,0 \cdot (1,6)^2 \cdot 9,1} \left[\frac{\text{N}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{C}^{+2} \cdot \text{kg}} \right] \\
 &\approx \left(\frac{6,6}{2\pi \cdot 1,6} \right)^2 \cdot \frac{10^{-8}}{9,0 \cdot 9,1} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} \right] \\
 &\approx 5,3 \cdot 10^{-11} [\text{m}] \approx 0,53 [\text{\AA}]
 \end{aligned}$$

este valor $R_1 \approx 0,53 [\text{\AA}]$ nos informa del tamaño de un átomo de hidrógeno en su "estado fundamental".

Las expresiones obtenidas para los valores posibles del radio de la órbita y las correspondientes rapideces del electrón, permiten calcular las energías de los "estados permitidos" del átomo de hidrógeno y predecir el espectro de la luz emitida por él, que fue un objetivo de Bohr al construir su modelo atómico.

Ejercicios

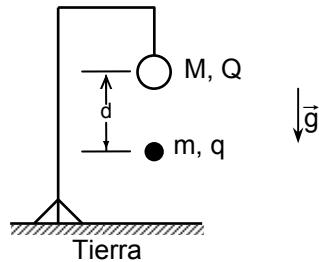
9-75) ¿Cuánto debería ser la separación entre los centros de dos esferas cargadas para que la magnitud de la fuerza coulombiana sea $1[\text{N}]$ si la carga neta en cada una de ellas fuera $1[\text{C}]$?

9-76) Determine el número de electrones en exceso que deben estar en la superficie de cada una de dos pequeñas esferas, cuya distancia es de $3[\text{cm}]$, para que la magnitud de la fuerza de repulsión eléctrica entre ellas sea de $5 \cdot 10^{-11} [\text{N}]$.

9-77) Cada una de dos pequeñas esferas está cargada positivamente. La suma de las cargas de ambas esferas totaliza $2,6 \cdot 10^{-8} [\text{C}]$. ¿Cuál es la carga de cada esfera si ellas se repelen con una fuerza de $3,0[\text{dina}]$ cuando la distancia entre sus centros es de $4,0[\text{cm}]$?

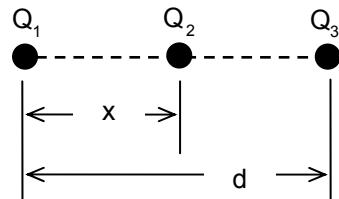
9-78) Un pequeño objeto con carga de $-16 [\text{nC}]$ se coloca a $12[\text{cm}]$ de otro objeto con carga de $30[\text{nC}]$. Calcule la magnitud, en dinas, de la fuerza coulombiana entre ellos.

- 9-79)** Un cuerpo suspendido como se muestra en la figura adjunta tiene una carga Q negativa. Determine el valor y signo de la carga q de un cuerpo de masa m situado verticalmente debajo de Q a la distancia d para que no suba ni baje.



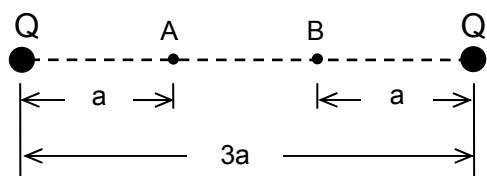
- 9-80)** ¿Cómo y en cuánto debe alterarse la separación de dos objetos cargados para mantener la magnitud de la fuerza electrostática entre ellos constante, si la carga de uno de ellos se triplica y la carga del otro se reduce a la mitad?

- 9-81)** Suponga que tres partículas eléctricamente cargadas están colocadas como se indica en la figura. La distancia d es constante. Las cargas de las partículas están relacionadas por $Q_2 = -Q_1$ y $Q_3 = 2Q_1$. Determine la posición de la partícula con carga Q_2 para que la fuerza electrostática resultante sobre ella sea nula.



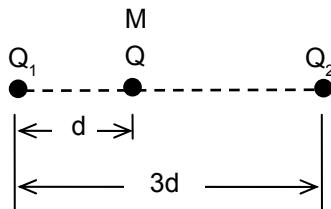
- 9-82)** Dos esferas metálicas de $0,20[\text{kg}]$ de masa cada una, y con igual carga neta se hallan a cierta distancia entre sí. Calcule la carga de las esferas si a esa distancia la magnitud de la fuerza electrostática es un millón de veces mayor que la de la fuerza gravitacional entre ellas.

- 9-83)** Dos cuerpos cuyas cargas Q son positivas e iguales están fijos a una distancia $3a$. Un cuerpo con carga q experimenta una fuerza \vec{F}_A al estar colocado en el punto A y una fuerza \vec{F}_B en B . Exprese \vec{F}_B en términos de \vec{F}_A cuando q es positiva y cuando es negativa.



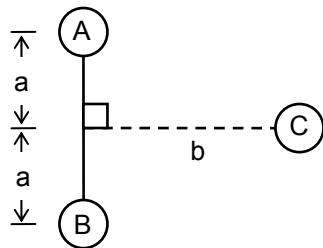
- 9-84)** Considere dos partículas con cargas Q_1 y Q_2 situadas a una distancia dada. Discuta los signos que pueden tener Q_1 , Q_2 y una tercera carga Q_3 para que esta última tenga la posibilidad de quedar en equilibrio entre Q_1 y Q_2 .

9-85) Dos partículas fijas a distancia $3d$ tienen cargas eléctricas $Q_1 = Ne$ y $Q_2 = 2Ne$, siendo N un entero positivo. Entre ellas se coloca otra partícula de masa M y carga eléctrica $Q = 3Ne$. Determine la aceleración (magnitud y dirección) de la partícula con carga Q en la posición indicada. ¿Cuál será la aceleración de esa partícula cuando esté a una distancia $2d$ de Q_1 ? ¿Dónde su aceleración será 0?



9-86) Se tienen dos pequeñas esferas con cargas positivas $4Q$ y Q respectivamente, separadas por una distancia a . ¿Dónde debería ponerse una tercera esferita y cuál debe ser el signo y el valor de su carga para que el sistema formado por las tres esferitas esté en equilibrio debido sólo a las fuerzas eléctricas?

9-87) Las tres esferitas A, B y C están fijas en las posiciones mostradas en la figura. La esfera C está positivamente cargada y las esferas A y B tienen cargas de igual valor absoluto. Determine la dirección de la fuerza eléctrica neta que actúa en la esfera C, cuando las cargas en A y B son ambas negativas, cuando son ambas positivas y cuando una es positiva y la otra es negativa.



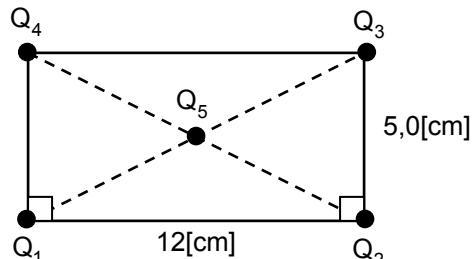
9-88) En la base de un triángulo equilátero de $2,0[\text{cm}]$ de lado hay tres partículas con cargas iguales a $1,6 \cdot 10^{-7} [\text{C}]$ cada una, situadas una en cada vértice y la tercera en el punto medio de la base. Determine la dirección y magnitud de la fuerza neta que actúa sobre una cuarta partícula con una carga de $3,2 \cdot 10^{-7} [\text{C}]$ y colocada en el tercer vértice, debida a la interacción eléctrica con las tres primeras partículas cargadas.

9-89) Las cargas indicadas en la figura adjunta tienen valores:

$$Q_1 = Q_2 = -3,9 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$$

$$Q_3 = Q_4 = 1,7 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$$

$$Q_5 = -3,2 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$$



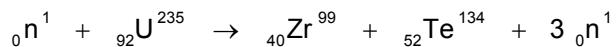
Calcule la magnitud y dirección de la fuerza neta que actúa sobre Q_5 debida a la interacción con las otras cuatro partículas cargadas.

9-90) Suponga que un electrón y un protón estuviesen en reposo a una distancia de $1[\text{\AA}]$. Compare la interacción gravitacional y la interacción electrostática entre ellos.

9-91) Calcule la fuerza de repulsión coulombiana entre los dos protones de una molécula de hidrógeno considerando que su separación es $0,74 \cdot 10^{-10} [\text{m}]$. Compárela, por cuociente, con la atracción gravitacional entre ellos.

9-92) El radium ($_{88}\text{Ra}^{226}$) decae radiactivamente en radón ($_{86}\text{Rn}^{222}$) emitiendo una partícula α ($_{2}\text{He}^4$). Calcule la fuerza de repulsión eléctrica entre el núcleo de Rn y la partícula α cuando están a $5 \cdot 10^{-11} [\text{cm}]$ de distancia y la correspondiente aceleración de la partícula α .

9-93) Una de las fisiones del uranio 235 inducida por neutrones es:



Calcule aproximadamente la magnitud de la repulsión eléctrica entre los núcleos del circonio y del telurio inmediatamente después de la fisión.

9-94) La constante de Planck es $h = 6,626176(36) \cdot 10^{-34} [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}]$. Exprese la dimensión de h en términos de las dimensiones de tiempo, longitud, masa y carga eléctrica.

9-95) Compruebe que según el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón en la primera órbita ($n = 1$) es aproximadamente $c/137$, siendo c la rapidez de propagación de la luz en vacío.

9-96) Calcule según los resultados del modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno el número de revoluciones por segundo que ejecutaría el electrón en torno al protón en la órbita más interna.

9-97) En el estudio del átomo de hidrógeno se obtienen las cantidades físicas

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot k_c \cdot e^2}{c \cdot h}, \quad E = \frac{-2\pi^2 \cdot k_c^2 \cdot m_e \cdot e^4}{h^2} \quad \text{y} \quad R = \frac{2\pi^2 \cdot k_c^2 \cdot m_e \cdot e^4}{c \cdot h^2}$$

donde m_e es la masa del electrón, e es el valor absoluto de la carga del electrón, k_c es la constante de interacción electrostática, h es la constante de Planck y c es la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Determine las dimensiones de α , E y R . Calcule los valores de α , E y R usando el Sistema Internacional de Unidades.

Unidades de fuerza y de masa

A través del estudio realizado hemos ido introduciendo diversas cantidades físicas. A cada cantidad física le asociamos una correspondiente dimensión física como un símbolo que representa a la cantidad física independientemente de sus valores en casos particulares. Así, por ejemplo, la cantidad física tiempo tiene una dimensión única, bien determinada, la que simbolizamos por T , la aceleración tiene una dimensión característica que anotamos $\text{dim}(\text{aceleración}) = \mathcal{A}$. Se ha encontrado que es muy conveniente expresar las dimensiones de algunas cantidades físicas como combinación de las dimensiones de otras cantidades físicas, de este modo, decimos que $\text{dim}(\text{rapidez}) = L \cdot T^{-1}$. Esto nos lleva a agrupar las dimensiones en básicas y derivadas. La elección de las dimensiones básicas, en sí arbitraria, queda en parte condicionada por las características de algunas cantidades físicas que se presentan como naturalmente más simples o directas.

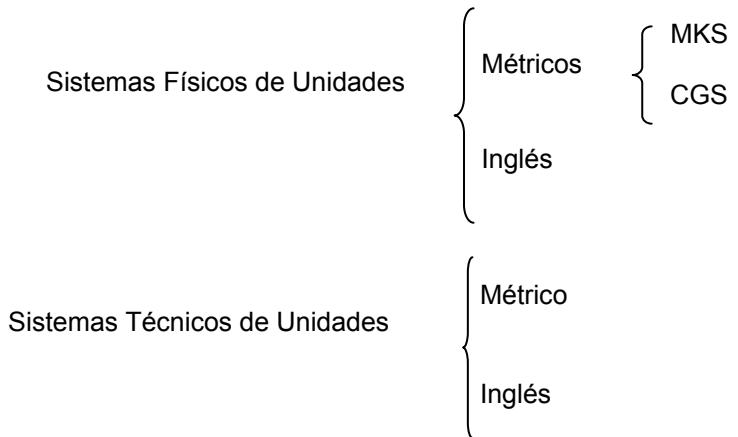
En Física se acostumbra a elegir como dimensiones básicas, entre otras, a las de tiempo, longitud y masa. En ingeniería, se usa a veces un sistema alternativo de unidades en el cual se escogen como fundamentales las dimensiones de tiempo, longitud y fuerza, pasando la masa a ser una dimensión derivada. Este sistema es llamado "Sistema Técnico de Unidades".

Los dos sistemas se comparan en el siguiente diagrama.

	Sistema Físico		Sistema Técnico	
	Cantidad física	Dimensión física	Cantidad física	Dimensión física
BÁSICAS	tiempo	T	tiempo	T
	longitud	L	longitud	L
	masa	M	fuerza	F
DERIVADAS	fuerza	$M L T^{-2}$	masa	$F L^{-1} T^2$
	velocidad	$L T^{-1}$	velocidad	$L T^{-1}$
	aceleración	$L T^{-2}$	aceleración	$L T^{-2}$
	densidad	$M L^{-3}$	densidad	$F L^{-4} T^2$

Este cuadro, que es evidentemente incompleto, será ampliado cuando hablaremos de manera especial de análisis de dimensiones de cantidades físicas.

Al usar conjuntos de unidades de medición en los que las unidades correspondientes a las cantidades físicas de tiempo, longitud y masa, se consideran independientes hablamos de *Sistemas Físicos de Unidades*. Análogamente, si las unidades que, en particular, se consideran independientes son las de tiempo, longitud y fuerza hablamos de *Sistemas Técnicos de Unidades*.



Esta agrupación simplificada de conjuntos de unidades de medición es suficiente para nuestros propósitos actuales de trabajar con diversas unidades de medición de masa y fuerza.

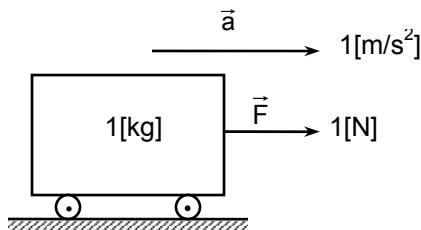
sistemas físicos métricos de unidades

Usando las unidades $1[m]$, $1[kg]$ y $1[s]$ para expresar las mediciones de longitud, masa y tiempo, se configura el sistema llamado MKS, que forma parte del Sistema Internacional de Unidades (SI). En este sistema la unidad de fuerza es $1[N]$, de modo que si un cuerpo de $1[kg]$ de masa se mueve con una aceleración de $1[m/s^2]$ la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él es de $1[N]$:

$$F = m \cdot a$$

por tanto: $= 1[kg] \cdot 1[m/s^2] = 1[N]$

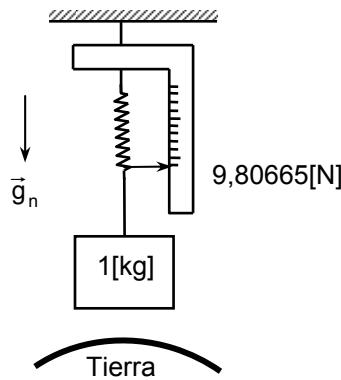
$$= 1[N] \triangleq 1[kg \cdot m/s^2]$$



El peso de un cuerpo de 1[kg] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor "normal" $g_n = 9,80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$, valor fijado por acuerdo internacional en 1901, es:

$$P_n = M \cdot g_n = 1[\text{kg}] \cdot 9,80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$P_n = 9,80665 \text{ [N]}$$

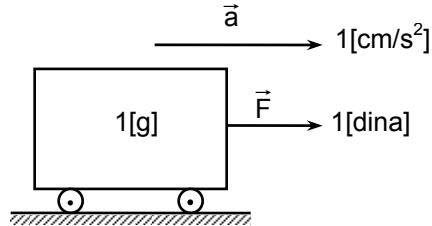


Si se eligen las unidades 1[cm], 1[g] y 1[s] para expresar las unidades de longitud, masa y tiempo respectivamente, resulta el sistema CGS. En este sistema la unidad de fuerza es 1[dina].

Tenemos las equivalencias:

$$1[\text{dina}] \triangleq 1[\text{g} \cdot \text{cm/s}^2]$$

$$1[\text{dina}] \triangleq 10^{-5} \text{ [N]}$$



Sistema físico de unidades inglesas

Toma como base las unidades de tiempo, longitud y masa:

$$1[\text{s}] , 1[\text{ft}] \text{ y } 1[\text{lb}]$$

Usa como unidad de fuerza:

$$\text{Un poundal} \dots \dots 1[\text{pdl}]$$

definida, de acuerdo a la ley $F = m \cdot a$, por:

$$\begin{aligned} 1[\text{pdl}] &= 1[\text{lb}] \cdot 1[\text{ft/s}^2] \\ &\triangleq 1[\text{lb} \cdot \text{ft/s}^2] \end{aligned}$$

Para obtener la equivalencia entre esta unidad inglesa de fuerza y la unidad 1[N] del sistema métrico, recordamos las equivalencias:

$$1[\text{ft}] \triangleq 0,3048[\text{m}] \quad \text{y} \quad 1[\text{lb}] \triangleq 0,45359237[\text{kg}]$$

y con las cuales resulta:

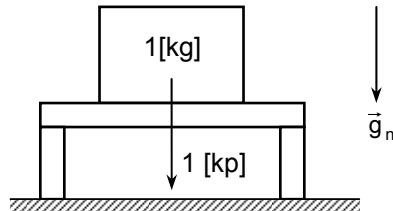
$$\begin{aligned}
 1[\text{pdl}] &\triangleq 1[\text{lb} \cdot \text{ft}/\text{s}^2] \cdot \frac{0,4536[\text{kg}]}{1[\text{lb}]} \cdot \frac{0,3048[\text{m}]}{1[\text{ft}]} \\
 &\triangleq 0,4536 \cdot 0,3048 [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2] \\
 1[\text{pdl}] &\triangleq 0,1383[\text{N}]
 \end{aligned}$$

Sistema técnico métrico de unidades

En este sistema se escogen como unidades básicas 1[s], 1[m] y 1[kp] correspondiente a las cantidades físicas tiempo, longitud y fuerza, respectivamente.

Un kilopond 1[kp]

El kilopond se define como la fuerza que ejerce el "kilogramo patrón" sobre su apoyo en un lugar de "aceleración de gravedad normal".



Para esta unidad de fuerza se han usado también los nombres y símbolos siguientes:

Un kilogramo fuerza 1[kg-f]

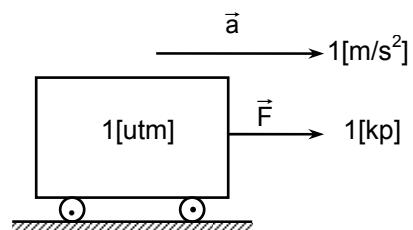
Un kilogramo peso 1[kg-p]

El kilogramo fuerza o kilogramo peso en algunos libros se simboliza 1[$\overrightarrow{\text{kg}}$].

La correspondiente unidad de masa llamada:

unidad técnica de masa 1[utm]

se introduce de modo tal que al aplicar una fuerza neta de 1[kp] a un cuerpo de 1[utm] de masa resulte una aceleración de 1[m/s²], esto es:



$$1[\text{kp}] \triangleq 1[\text{utm}] \cdot 1[\text{m/s}^2]$$

$$1[\text{utm}] \triangleq 1[\text{kp}/(\text{m/s}^2)]$$

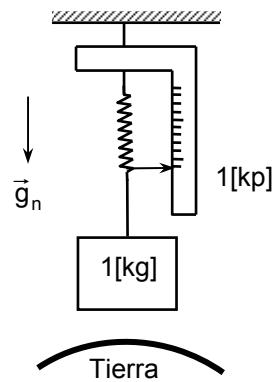
Para la unidad 1[utm] se ha propuesto el nombre 1[hyl], de la palabra griega ὕλη (hile) para materia.

La unidad de fuerza 1[kp] corresponde, por definición, al peso de un cuerpo de 1[kg] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal. Esto nos permite establecer su equivalencia con la unidad 1[N]:

$$\begin{aligned} 1[\text{kp}] &\triangleq 1[\text{kg}] \cdot 9,80665 [\text{m/s}^2] \\ &\triangleq 9,80665 [\text{N}] \\ &\triangleq 9,81 [\text{N}] \end{aligned}$$

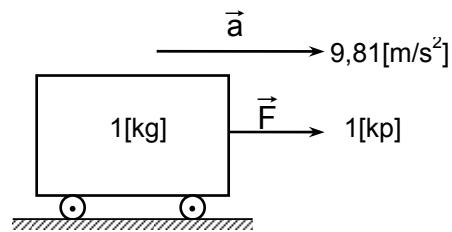
y, por tanto:

$$\begin{aligned} 1[\text{utm}] &\triangleq \frac{1[\text{kp}]}{1[\text{m/s}^2]} \triangleq \frac{9,80665 [\text{N}]}{1[\text{m/s}^2]} \\ &\triangleq 9,80665 [\text{kg}] \\ &\triangleq 9,81 [\text{kg}] \end{aligned}$$



Establecemos, también, que al aplicar una fuerza neta de 1[kp] de magnitud a un cuerpo cuya masa mide 1[kg], éste adquiere una aceleración de magnitud:

$$\begin{aligned} a = \frac{F}{m} &= \frac{1[\text{kp}]}{1[\text{kg}]} \triangleq \frac{9,80665 [\text{N}]}{1[\text{kg}]} \\ &\triangleq 9,80665 [\text{m/s}^2] \\ &\triangleq 9,81 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$



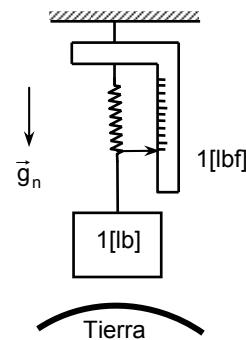
Sistema técnico de unidades inglesas

Como sistema técnico de unidades de medición tiene entre sus dimensiones básicas las de tiempo, longitud y fuerza. Las correspondientes unidades son: 1[s], 1[ft] y 1[lbf].

La unidad de fuerza:

Una libra fuerza 1[lbf]

se define como el **peso** de un cuerpo de 1[lb] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal g_n .

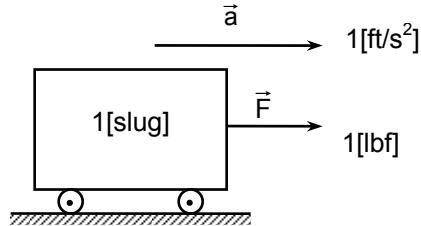


El valor normal g_n de la aceleración de gravedad expresada en $[ft/s^2]$ es:

$$\begin{aligned} g_n &= 9,80665 [m/s^2] \\ &\triangleq 9,80665 [m/s^2] \cdot \frac{1[ft]}{0,3048[m]} \\ &\triangleq 32,17405 [ft/s^2] \end{aligned}$$

La unidad de masa en este sistema, llamada $1[\text{slug}]$, se elige de modo que al aplicar una fuerza neta de $1[\text{lbf}]$ a un cuerpo de masa $1[\text{slug}]$ éste adquiera la aceleración de $1[ft/s^2]$:

$$\begin{aligned} 1[\text{lbf}] &\triangleq 1[\text{slug}] \cdot 1[ft/s^2] \\ 1[\text{slug}] &\triangleq 1[\text{lbf}/(ft/s^2)] \end{aligned}$$

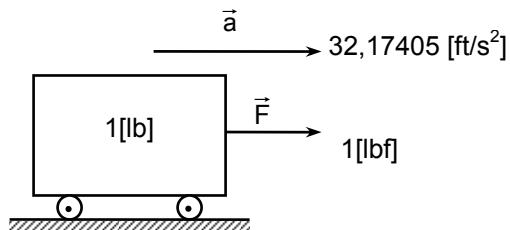


Algunas equivalencias entre las unidades $1[\text{lbf}]$ y $1[\text{slug}]$ con las correspondientes unidades en otros sistemas son:

$$\begin{aligned} 1[\text{lbf}] &\triangleq 1[\text{lb}] \cdot 32,17405 [ft/s^2] \triangleq 32,17405 [\text{pdl}] \\ &\triangleq 0,4536 [\text{kg}] \cdot 9,80665 [m/s^2] \triangleq 4,448 [\text{N}] \\ &\triangleq 4,448 [\text{N}] \cdot \frac{1[\text{kp}]}{9,80665 [\text{N}]} \triangleq 0,4536 [\text{kp}] \\ 1[\text{slug}] &\triangleq \frac{1[\text{lbf}]}{1[ft/s^2]} \triangleq \frac{32,17405 [\text{pdl}]}{1[ft/s^2]} \triangleq 32,17405 [\text{lb}] \\ &\triangleq \frac{4,448 [\text{N}]}{0,3048 [m/s^2]} \triangleq 14,59 [\text{kg}] \end{aligned}$$

Para la aceleración producida por la fuerza de $1[\text{lbf}]$ actuando sobre un cuerpo de $1[\text{lb}]$ de masa tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} = \frac{1[\text{lbf}]}{1[\text{lb}]} \\ &\triangleq \frac{32,17405 [\text{pdl}]}{1[\text{lb}]} \\ &\triangleq 32,17405 [ft/s^2] \end{aligned}$$



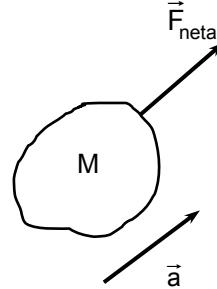
Ejemplos

- Un cuerpo pesa 32,7[kp] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 983[cm/s²]. Calcule la aceleración que adquiere el cuerpo, en [m/s²], cuando se aplica sobre él una fuerza neta de 23,8[N].

$$P = 32,7 \text{ [kp]} \doteq 32,7 \text{ [kp]} \cdot \frac{9,81 \text{ [N]}}{1 \text{ [kp]}} = 320,787 \text{ [N]}$$

$$M = \frac{P}{g} = \frac{320,787 \text{ [N]}}{9,83 \text{ [m/s}^2\text{]}} \doteq 32,6 \text{ [kg]}$$

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{M} = \frac{23,8 \text{ [N]}}{32,6 \text{ [kg]}} \doteq 0,729 \text{ [m/s}^2\text{]}$$



- La masa M de un cuerpo se puede expresar por:

$$M = M_T \text{ [utm]} \doteq M_F \text{ [kg]}$$

Determinemos la relación entre los números de medición M_T y M_F .

Usando la equivalencia $1 \text{ [utm]} \doteq 9,81 \text{ [kg]}$ resulta:

$$M = M_T \text{ [utm]} \doteq M_T \cdot 1 \text{ [utm]} \doteq M_T \cdot 9,81 \text{ [kg]} \doteq M_F \text{ [kg]}$$

y por tanto:

$$M_F = 9,81 M_T$$

es la relación entre los respectivos números de medición para la masa en los sistemas métricos físico y técnico.

- Se define **peso específico** como el cuociente entre el peso y el volumen de un objeto:

$$\gamma = P/V .$$

La densidad de un objeto es $8,75 \text{ [kg/dm}^3\text{]}$. Calcule su peso específico, en $[\text{N/dm}^3]$ y en $[\text{kp/dm}^3]$, en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{P}{V} = \frac{M \cdot g}{V} = \rho \cdot g = 8,75 \left[\text{kg/dm}^3 \right] \cdot 9,81 \left[\text{m/s}^2 \right] \\ &\doteq 8,75 \cdot 9,81 \left[\text{N/dm}^3 \right] \doteq 85,8 \left[\text{N/dm}^3 \right] \\ &\doteq 8,75 \cdot 9,81 \left[\text{N/dm}^3 \right] \cdot \frac{1 \text{ [kp]}}{9,81 \text{ [N]}} \doteq 8,75 \left[\text{kp/dm}^3 \right] \end{aligned}$$

Observamos que el número de medición para el peso específico γ en $[kp/dm^3]$ es igual al número de medición de la densidad ρ en $[kg/dm^3]$ en un lugar cuya aceleración de gravedad tiene valor normal.

- La masa de un cuerpo es de 2,6[lb]. Calculemos su peso, en [pdl] y en [lbf], en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 853[cm/s²].

Expresando la masa en [lb] y la aceleración en [ft/s²], resulta la fuerza en [pdl].

Por tanto:

$$\begin{aligned} P &= m g \\ &= 2,6[\text{lb}] \cdot 853[\text{cm/s}^2] \cdot \frac{1[\text{ft}]}{30,48[\text{cm}]} \\ &\approx 73[\text{pdl}] \end{aligned}$$

Recordando la equivalencia 1[lbf] \approx 32,17[pdl], resulta:

$$P = 73[\text{pdl}] \approx 73[\text{pdl}] \cdot \frac{1[\text{lbf}]}{32,17[\text{pdl}]} \approx 2,3[\text{lbf}]$$

- El valor de cierta cantidad física es $P = 1,7 \cdot 10^5 [\text{N/m}^2]$. Expresemos este valor en "pound per square inch" ([psi]).

Encontremos primero la equivalencia entre las unidades:

$$1[\text{N/m}^2] \quad \text{y} \quad 1[\text{psi}] \triangleq 1[\text{lbf/in}^2]$$

esto es:

$$\begin{aligned} 1[\text{N/m}^2] &\triangleq \frac{1[\text{N}]}{1[\text{m}^2]} \cdot \frac{1[\text{lbf}]}{4,448[\text{N}]} \cdot \left(\frac{1[\text{m}]}{10^2[\text{cm}]} \right)^2 \cdot \left(\frac{1[\text{cm}]}{2,54[\text{in}]} \right)^2 \\ &\triangleq \frac{1}{4,448 \cdot 10^4 \cdot (2,54)^2} [\text{lbf/in}^2] \\ &\approx 3,485 \cdot 10^{-6} [\text{lbf/in}^2] \end{aligned}$$

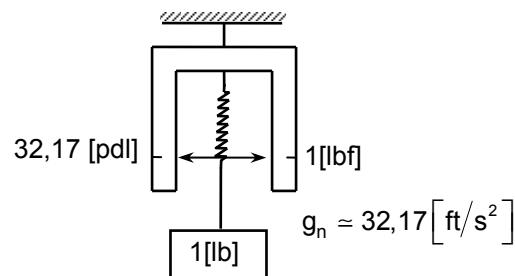
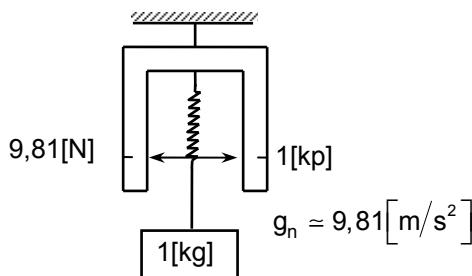
Entonces:

$$\begin{aligned} P &= 1,7 \cdot 10^5 [\text{N/m}^2] \triangleq 1,7 \cdot 10^5 \cdot 3,485 \cdot 10^{-6} [\text{lbf/in}^2] \\ &\triangleq 0,59[\text{psi}] \end{aligned}$$

Resumen de unidades de fuerza, masa y aceleración

El cuadro resumen de los sistemas de unidades que se presenta a continuación permite tener una visión de conjunto de las unidades de tiempo, longitud, masa y fuerza, explicadas hasta el momento.

	Sistemas Métricos		Sistemas Ingleses	
	Físico	Técnico	Físico	Técnico
Tiempo	1 [s]	1 [s]	1 [s]	1 [s]
Longitud	1 [m]	1 [m]	1 [ft]	1 [ft]
Masa	1 [kg]	1 [utm]	1 [lb]	1 [slug]
Fuerza	1 [N]	1 [kp]	1 [pdl]	1 [lbf]

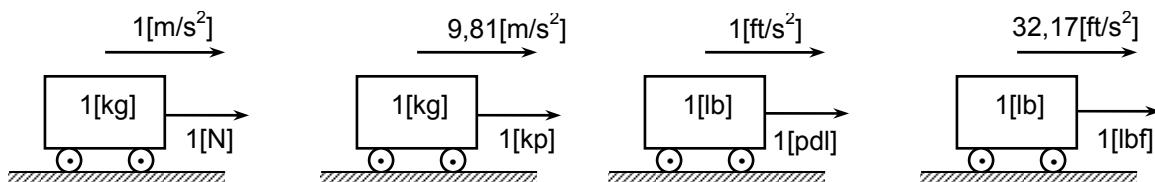


$$1[N] \triangleq 1[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$$

$$1[utm] \triangleq 1[kp/(m/s^2)]$$

$$1[pdl] \triangleq 1[\text{lb} \cdot \text{ft/s}^2]$$

$$1[slug] \triangleq 1[\text{lbf}/(\text{ft/s}^2)]$$



$$\begin{array}{ll}
 g_n \approx 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] & g_n \approx 32,17 \left[\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \right] \\
 1[\text{kp}] \approx 9,81[\text{N}] & 1[\text{lbf}] \approx 32,17[\text{pdl}] \\
 1[\text{utm}] \approx 9,81[\text{kg}] & 1[\text{slug}] \approx 32,17[\text{lb}]
 \end{array}$$

Ejercicios

9-98) Complete las equivalencias propuestas:

1,4 [kp]	\triangleq	[N]	4,3 [kp]	\triangleq	[pdl]
3,8 [N]	\triangleq	[pdl]	12,5 [lbf]	\triangleq	[kp]
23,9 [pdl]	\triangleq	[lbf]	16,9 [N]	\triangleq	[lbf]
97,4 [slug]	\triangleq	[kg]	725 [lb]	\triangleq	[utm]
3,6 [utm]	\triangleq	[kg]	0,42 [kg]	\triangleq	[slug]

9-99) Un cuerpo se encuentra en un plano horizontal liso (roce despreciable) en un lugar de aceleración de gravedad normal; entonces si

su masa es:	y la fuerza aplicada es:	, la aceleración es:
20 [kg]	16 [kp]	[m/s ²]
3,8 [utm]	$4,5 \cdot 10^7$ [dina]	[m/s ²]
8,5 [utm]	1,6 [kp]	[m/s ²]
12 [lb]	2,3 [lbf]	[ft/s ²]
4,6 [slug]	57 [pdl]	[ft/s ²]

su peso es:	y la fuerza aplicada es:	, la aceleración es:
40 [kp]	12 [kp]	[m/s ²]
1,8 [kp]	17 [N]	[m/s ²]
7,2 [lbf]	89 [lbf]	[ft/s ²]

9-100) Un objeto tiene una masa de 14,7[g]. Calcular su peso, en [kp], para un lugar en que la aceleración de gravedad es 9,73[m/s²].

9-101) Una cantidad física vale 600[kp/cm²]. Calcule su valor en [lbf/in²].

9-102) Exprese la constante de gravitación universal

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right] \text{ en } \left[\frac{\text{lbf} \cdot \text{ft}^2}{\text{slug}^2} \right]$$

9-103) La aceleración de gravedad en cierto lugar vale 9,72[m/s²]. Exprese este valor en [N/kg] y en [kp/kg].

9-104) ¿Cuál es la masa, en [slug], de un objeto que pesa 175[lbf] al nivel del mar y a 30° de latitud?

9-105) Calcule la fuerza, en [lbf], necesaria para acelerar una masa de 8,60[kg] en 714[yd/min²] .

9-106) Un cuerpo pesa 500[N] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 32,0[ft/s²]. Calcule la aceleración que adquiere tal cuerpo, en [in/min²], al aplicarle una fuerza neta de 40,0[kp].

9-107) Un objeto sobre el que actúa una fuerza neta de 220[dina] adquiere una aceleración 15,0[in/s²]. ¿Cuál es el peso de ese objeto, en [kp] , en un lugar con $g = 32,1 \left[\text{ft/s}^2 \right]$?

9-108) Una cantidad física tiene el valor $17 \left[\text{dina} \cdot \text{s/cm}^2 \right]$. ¿Cuál es el valor correspondiente en la unidad $\left[\text{pdl} \cdot \text{min/ft}^2 \right]$?

9-109) El cuociente entre la fuerza de resistencia D en [lbf] y la rapidez v en [mile/h], para cierto tipo de aviones a reacción se calcula según la fórmula:

$$\frac{D}{v} = 0,0667 \frac{C}{B} \cdot (A^3 \cdot P^2)^{1/4}$$

donde B es la envergadura de las alas en [ft], C es un coeficiente adimensional, P es el peso del avión en [lbf] y A es un “área equivalente” en [ft²] ,obteniéndose el resultado en [lbf/(mile/h)] . Hay que adaptar esta fórmula al sistema técnico de medición de tal manera que, introduciendo B en [m], A en [m²] y P en [kp], resulte D/v en [kp/(km/h)] .

9-110) Una constante física tiene el valor $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\text{N}/\left(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4\right) \right]$. Calcule el valor de la cantidad física $I = \sigma \cdot T^4$ cuando la temperatura vale 1350[°F]; exprese el resultado en $\left[\text{dina}/\left(\text{cm} \cdot \text{s}\right) \right]$.

9-111) En ciertas situaciones una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo se expresa por $F = b \cdot v^3$ siendo v su rapidez. Exprese la dimensión de b en términos de las dimensiones de tiempo, longitud y masa.

9-112) En determinadas condiciones la “fuerza por unidad de área” en una burbuja de radio R está dada por la ecuación $P = 4\beta R^{-1}$. Determine la dimensión de la constante β .

9-113) La fuerza de roce sobre un líquido que fluye por un tubo está determinada, en ciertos casos, por la fórmula: $f = \alpha \pi \ell dv^r$ en que α es una constante, d el diámetro, ℓ la longitud del tubo, v la rapidez del líquido y r un número adimensional. ¿Qué dimensión tiene α ?

9-114) Suponga que la fuerza de resistencia R sobre un disco que se mueve en el aire depende de un coeficiente adimensional ξ , del área A y de la rapidez v del disco, y de la densidad ρ del aire, según la ecuación $R = \xi A^r v^s \rho^t$. Determine los valores de los exponentes r, s, t.

Créditos de imágenes

- 1.- Portada: diseño por Luis Bastias.
- 2.- Pág xiii: Busto Federico Santa María, fotografiado por Nicolás Porras.
- 3.- Pág xv: Edificio Casa Central USM, foto institucional.
- 4.- Pág xix: a) foto superior, alumnas en el laboratorio, fotografía por Vladimir Ibáñez.
b) foro inferior, Galileo, grabado por Samuel Sartain, según H. Wyatt.
<http://ihm.nlm.nih.gov/images/B12569>
- 5.- Pág xx Copérnico, autor desconocido. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Copernicus.jpg#file>
- 6.- Pág xxi, Registro de Galileo de las lunas de Júpiter, gentileza de Mr. Thomas Pile.
<http://viking.coe.uh.edu/~tpile/portfolio/CUIN%207316/astronomy/jupiter.html>
- 7.- Pág xxiii a) izquierda. Isaac Newton, grabado en madera, a partir de un retrato del siglo XVII por Kneller.
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Newton_woodcut,_frontispiece_to_Mach.jpg
b) Derecha Einstein en Berna, por Lucien Chavan.
NASA's "Astronomy Picture fo the Day". <http://apod.nasa.gov/apod/ap951219.html>
- 8.- xxiv Alumnos en sala de estudio, gentileza de Celín Mora.
- 9.- Pág 1 "Centro comercial", fotografía por Luis Bastías.
- 10.- Pág 87 "Renacuajos" , dibujo autor desconocido.
http://es.wikipedia.org/wiki/Metamorfosis_%28biolog%C3%ADa%29
- 11.- Pág 114 "Manos" fotografía por Gonzalo Fuster.
- 12.- Pág 215 "Bananas" fotografía por Luis Bastías.
- 13.- Pág 221 "Pesas" fotografía por Luis Bastías.
- 14.- Pág 263 "Niña con termómetro" fotografía por Luis Bastías.
- 15.- Pág 303 "Levantador de pesas" fotografía por Luis Bastías.