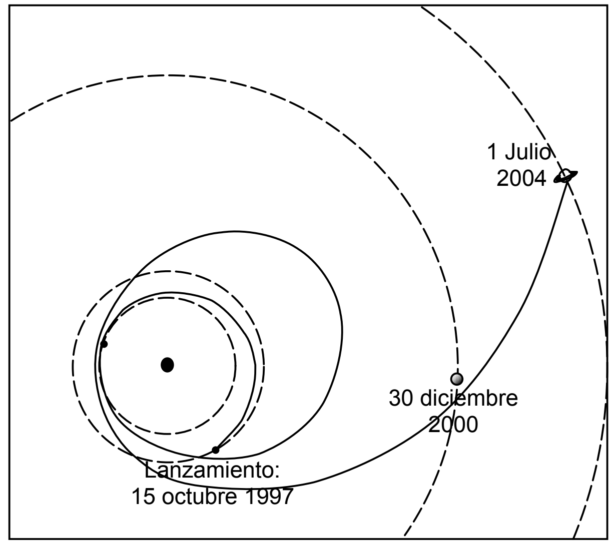
CAPÍTULO VI

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO



En octubre de 1997 la nave espacial Cassini-Huygens fue lanzada desde la Tierra en un viaje hacia Saturno que demoraría un total de 7 años. En su camino, la nave pasó dos veces cerca de Venus, se acercó de nuevo a la Tierra y pasó junto a Júpiter. En cada uno de estos acercamientos la nave adquirió nuevos impulsos, sin los cuales nunca habría podido llegar a su destino.

Los ingenieros de vuelo usaron las leyes de la Física para describir el movimiento de la nave. Es decir, fueron capaces de determinar la posición de la nave, su velocidad y aceleración en función del tiempo. En este capítulo estudiaremos las definiciones de los vectores posición, velocidad y aceleración, y las aplicaremos en particular a movimientos en una dimensión.

Observador y sistema de referencia

Considere una persona sentada tomando una taza de té: ¿está en reposo o está en movimiento? Una segunda persona, sentada a su lado, dirá que la primera persona está definitivamente en reposo: permanece sentada, y el té en su taza no delata ningún movimiento. En realidad, estas dos personas son pasajeros de un avión que vuela a unos 400[km/h]. Desde el punto de vista de una persona en el suelo, ambos pasajeros se están moviendo a la misma velocidad del avión. Observe que los pasajeros no tienen ninguna percepción directa del movimiento del avión: incluso si miran por la ventanilla y ven pasar el paisaje, podrían pensar que éste es sólo una maqueta que se desliza lentamente hacia atrás del avión.

El movimiento es siempre relativo: al decir que “un objeto se mueve”, siempre debe establecerse “con respecto a qué”. Por ejemplo, el primer pasajero está en reposo respecto del segundo, pero está en movimiento respecto a la persona en el suelo. Ambas descripciones son igualmente válidas.

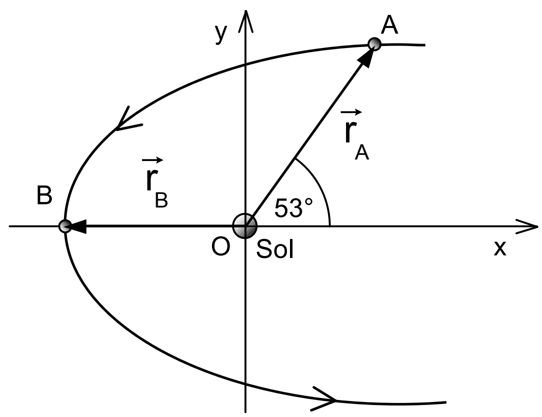
Por muchos siglos, los antiguos astrónomos intentaron describir el movimiento de los planetas con respecto a la Tierra. Nicolás Copérnico comprendió que dicha descripción resultaba mucho más simple si los movimientos se describían con respecto al Sol.

Llamaremos ***observador*** a una persona (real o hipotética) o a un instrumento que puede registrar la posición de un cuerpo en función del tiempo. Para poder describir el movimiento de un cuerpo, cada observador define un sistema de referencia, generalmente un sistema de coordenadas cartesianas y un instante inicial para el tiempo.

Posición

El vector posición $\vec{r}$ de un cuerpo es el trazo dirigido desde el origen del sistema de coordenadas, hasta la posición del cuerpo en un instante dado. Si el cuerpo está en movimiento respecto al observador, el vector posición cambia en dirección, en magnitud o en ambas.

Ejemplo: Un cometa recorre una órbita elíptica alrededor del Sol, con un perihelio (mínima distancia al Sol) de 0,8[UA]. Escribamos el vector posición del cometa cuando pasa por el punto A ubicado a 1[UA] de Sol, como se indica en la figura, y también cuando pasa por el perihelio B.



Como se conocen las distancias con respecto al Sol, escogemos a éste, como el origen de nuestro sistema de referencia:

$$\vec{r}_A = 1[UA]\cdot \cos 53°\ \hat{i} + 1[UA]\cdot \text{sen} 53°\ \hat{j} \approx (0,6\,\hat{i} + 0,8\,\hat{j})\,[UA]$$

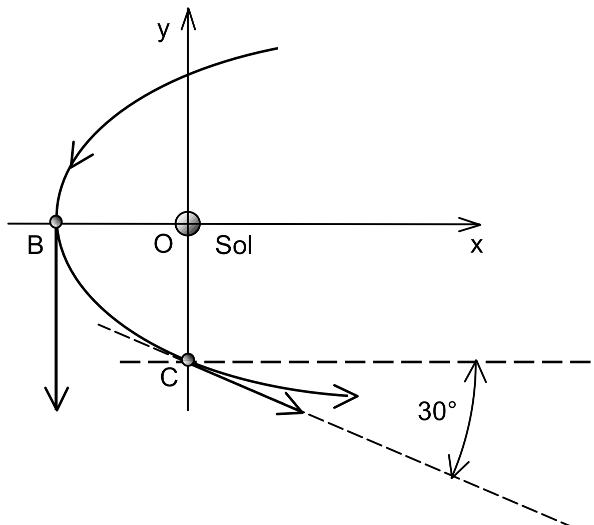
$$\vec{r}_B = -0,8[UA]\ \hat{i} + 0\ \hat{j} \approx -0,8\,\hat{i}\,[UA]\,.$$

La posición de un cuerpo en un instante queda determinada por su vector posición en ese instante.

Velocidad y aceleración

El vector velocidad de una partícula tiene magnitud igual a la rapidez instantánea de la partícula, y dirección tangencial a la trayectoria en el sentido del movimiento.

Ejemplo: El cometa del ejemplo anterior pasa por B con rapidez 8,0[UA/año]. Al pasar por el punto C su rapidez es de 5,0[UA/año] . En ese punto la recta tangencial a la trayectoria forma un ángulo de 30º con el eje X. El cometa demora 0,6[año] en viajar desde B hasta C. Determinar el vector aceleración media con que se mueve el cometa cuando va desde B hasta C.

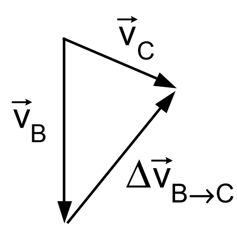


Determinemos primero el vector **velocidad** del cometa al pasar por B, y al pasar por C.

$$\vec{v}_B = -8{,}0\,\hat{j}\ [UA/año]$$

$$\vec{v}_C = 5\,[UA/año]\cdot\cos 30°\ \hat{i} - 5\,[UA/año]\cdot \text{sen}30°\ \hat{j} \approx (4{,}3\,\hat{i} - 2{,}5\,\hat{j})\,[UA/año]$$

Calculemos el vector ***cambio de velocidad*** $\Delta\vec{v}$ del cometa en el intervalo de tiempo de 0,6[año] que demora en viajar desde B hasta C.



$$\Delta\vec{v}_{B\to C} = \vec{v}_C - \vec{v}_B = (4{,}3\,\hat{i} - 2{,}5\,\hat{j})\,[UA/año] - (-8{,}0\,\hat{j}\ [UA/año])$$
$$= (4{,}3\,\hat{i} + 5{,}5\,\hat{j})\,[UA/año]$$

Finalmente, calculemos el ***vector aceleración media*** cuando el cometa se mueve desde B hasta C.

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{\Delta t}$$

Observe que el vector aceleración ***media*** se define en función de dos velocidades ***instantáneas***.

Reemplazando los valores de las velocidades y del intervalo de tiempo:

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{\Delta t} = \frac{(4{,}3\,\hat{i} + 5{,}5\,\hat{j})\,[UA / año]}{0{,}6[año]} \approx (7{,}2\,\hat{i} + 9{,}2\,\hat{j})\,[UA / año^2]$$

El vector aceleración media tiene la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{v}$ **.**

El vector aceleración media no está necesariamente dirigido en la dirección tangencial a la trayectoria, como puede observarse en este ejemplo.

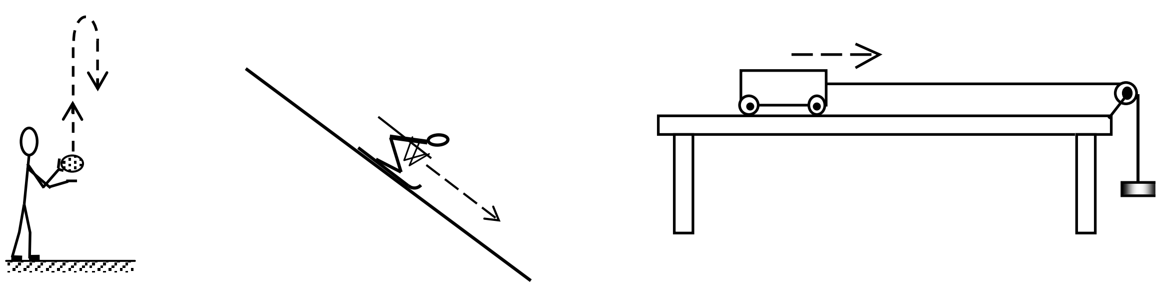
Es posible definir el ***vector aceleración instantánea*** como el vector aceleración media para un intervalo muy pequeño de tiempo:

$$\vec{a}_{instantánea} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\text{, para un } \Delta t \text{ muy pequeño}$$

Dejaremos para más adelante el cálculo del vector aceleración instantánea, en el caso más general de movimientos en trayectorias curvas. En el resto del capítulo nos limitaremos a movimientos rectilíneos y a casos en que el vector aceleración es constante.

Movimiento en una dimensión

Estudiaremos el movimiento de cuerpos que recorren trayectorias rectilíneas, como los ejemplos explicitados en las figuras que van a continuación.

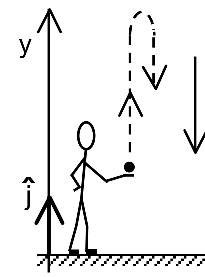


En todos los casos de tales movimientos, siempre es posible escoger un eje de referencia, de modo que los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula, se puedan expresar como

$$\vec{r} = r_X\,\hat{i}\,, \quad \vec{v} = v_x\,\hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_X\,\hat{i}\,, \text{ si el eje es nominado X.}$$

Las componentes escalares de estos vectores serán positivas o negativas, si las direcciones de dichos vectores coinciden con la dirección del eje de referencia o son contrarias a esta dirección.

Por ejemplo, considere un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba como se muestra en la figura. Si escogemos el ***eje y*** en dirección vertical hacia arriba, el vector posición queda expresado como: $\vec{r} = y\hat{j}$, siendo ***y*** la coordenada de la posición del cuerpo. El vector velocidad queda: $\vec{v} = v_y\hat{j}$ en donde v_y es la componente escalar del vector velocidad en la dirección del eje y. No debe confundirse v_y con la rapidez v del cuerpo, ya que está última es siempre positiva.



En cambio, v_y será positiva si el cuerpo se mueve en sentido positivo del eje y, pero será negativa cuando el cuerpo se mueve en sentido contrario. Finalmente, el vector aceleración queda expresado como: $\vec{a} = a_y\,\hat{j}$, en donde a_y es la componente escalar del vector aceleración en dirección del eje y.

En este lanzamiento, si se desprecia el roce del aire, el vector aceleración del cuerpo es constante en magnitud y dirección, tanto de subida como de bajada y corresponde a la aceleración de gravedad $\vec{g}$ de modo que:

$$\vec{g} = \left(9{,}8[\mathrm{m/s^2}]\,, \text{verticalmente hacia abajo}\right) = -9{,}8\,\hat{j}[\mathrm{m/s^2}]\ ,$$

es decir, $\vec{a} = \vec{g}$, siendo $a_y = -g$, en donde g representa la magnitud de la aceleración de gravedad, $g \approx 9{,}8\left[\mathrm{m/s^2}\right]$.

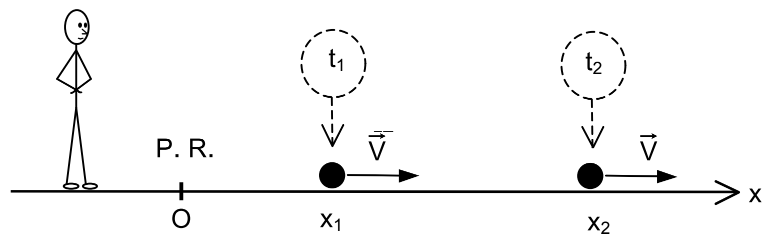
En las siguientes secciones estudiaremos movimientos en una dimensión. Como todos los vectores están a lo largo de una sola dirección basta referirse a sus componentes escalares. No debe olvidarse que éstas pueden tener signo negativo, cuando los correspondientes vectores tienen dirección opuesta a la del eje correspondiente.

En general, usamos el término rapidez para referirnos a cambios en el tiempo de una cantidad física escalar y el de ***velocidad*** cuando consideramos el carácter vectorial de una cantidad física que varía en función del tiempo. Sin embargo, en forma coloquial y cuando por el contexto del asunto que se examina no se produzcan ambigüedades, empleamos ocasionalmente velocidad y rapidez como sinónimos.

Movimiento rectilíneo con rapidez constante

Consideremos un movimiento de rapidez constante a lo largo de una trayectoria rectilínea. La posición instantánea del móvil la indicamos por su distancia a un punto de referencia elegido en la trayectoria.

Llamemos "eje x" a un eje de coordenadas que coincide con la trayectoria del móvil y que tiene su origen en el punto de referencia (P.R.) escogido.



La posición del móvil en el instante t la indicamos por la función $x = x(t)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x(t_1) \\ \\ x_2 = x(t_2) \end{array}\right\} \text{ es la posición del móvil en el instante } \left\{\begin{array}{l} t_1 \\ \\ t_2 \end{array}\right.$$

La rapidez media para el intervalo de tiempo está dada por:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En un movimiento de **rapidez constante**, la rapidez instantánea coincide con la rapidez media en cualquier instante del movimiento.

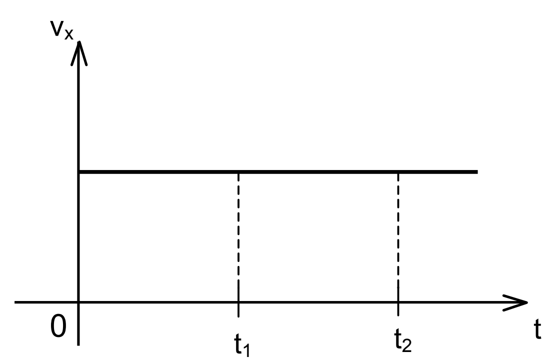
Luego: $\bar{v}_x = v_x$

donde v_x representa a la rapidez instantánea, constante.

Reemplazando y despejando tenemos que:

$$v_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

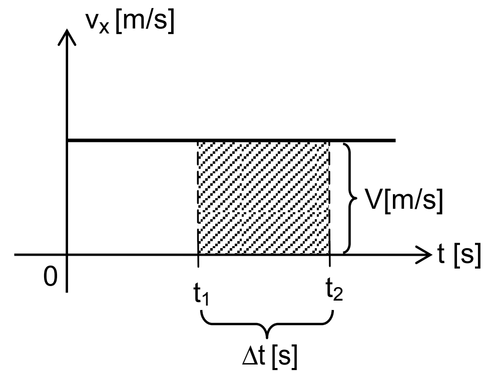
$$x_2 - x_1 = v_x \cdot \left(t_2 - t_1 \right)$$



La diferencia de posición $x_2 - x_1$ corresponde en este caso a la distancia recorrida por el móvil en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Si examinamos el gráfico, "v_x en función de t", vemos que el rectángulo que corresponde al intervalo $t_2 - t_1$ tiene como lados $v_x = V$ [m/s] y $t_2 - t_1 = \Delta t\,[s]$. El producto de los lados de ese rectángulo nos da el "área"

$$V\,[m/s] \cdot \Delta t\,[s] = \Delta x\,[m],$$



que es igual al valor de $x_2 - x_1$. Esto lo expresamos diciendo que el "área bajo la curva" en el gráfico v_x en función de t, para un intervalo Δt dado, es igual al cambio de posición Δx en ese intervalo. El nombre de "área" se usa por la analogía con el método de calcular el área geométrica, pero es en realidad un concepto diferente. Note que:

$$\begin{aligned} \dim\begin{pmatrix}\text{área bajo la}\\ \text{curva } v_x(t)\end{pmatrix} &= \dim(\text{ rapidez }) \cdot \dim(\text{ tiempo }) = \dim(\text{ distancia })\\ &= \left(\mathcal{L} \cdot \tau^{-1}\right) \cdot \tau = \mathcal{L}\end{aligned}$$

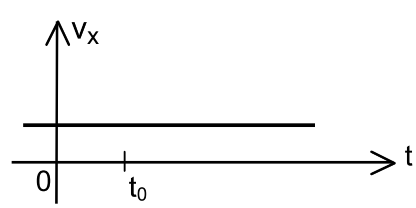
es decir, la dimensión de esta "área" es longitud.

La expresión $x_2 - x_1 = v_x \cdot (t_2 - t_1)$ relaciona dos posiciones del móvil correspondiente a dos instantes dados. Los instantes t_1 y t_2 son dos instantes cualesquiera mientras se mantiene la condición de movimiento rectilíneo con rapidez constante. Entonces, si llamamos:

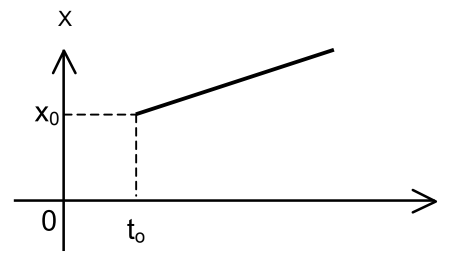
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(t_1 = t_0)\\ x(t) &= x(t_2 = t)\end{aligned}\right\} \text{ la posición del móvil en el instante } \left\{\begin{aligned} t_1 &= t_0\\ t_2 &= t\end{aligned}\right.$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= v_x\,(t - t_0)\\ x(t) &= x_0 + v_x\,(t - t_0)\end{aligned}$$

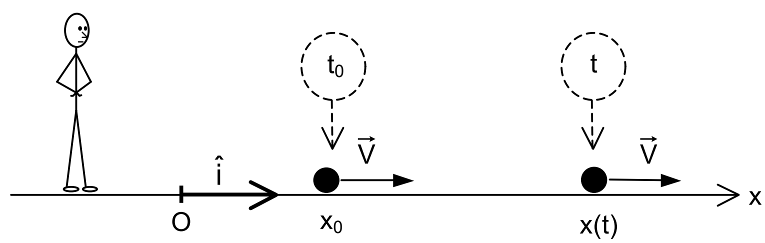


Esta última ecuación nos da la ***posición*** del móvil para cada instante t de este movimiento, siendo x_0 su posición inicial para el instante de referencia t_0 .



La función $x = x_0 + v_x \left(t - t_0\right)$ que describe la posición instantánea de un móvil en movimiento rectilíneo a lo largo del eje x con rapidez constante, es una “función lineal del tiempo”.

Observemos, también, que en un movimiento rectilíneo con rapidez constante el móvil tiene **velocidad constante**.



La velocidad constante $\vec{v}$ la expresamos en este caso por:

$$\vec{v} = v_x \hat{i}$$

siendo su magnitud:

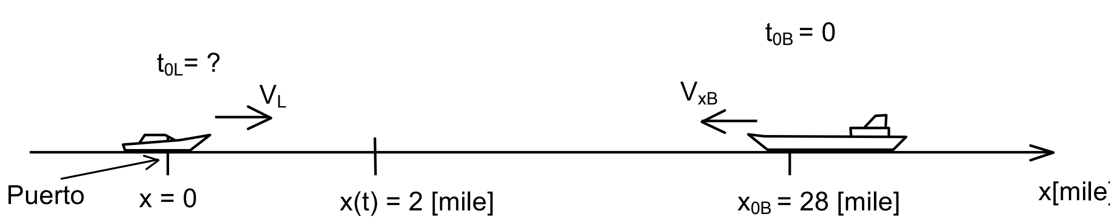
$$v = \left\| \vec{v} \right\| = \left| v_x \right|$$

que es constante para un movimiento con rapidez constante.

Resolvamos a continuación algunos ejemplos sobre esta materia.

- Suponga que un barco se acerca a un puerto siguiendo una trayectoria rectilínea con rapidez constante de 10[mile/h] . En cierto instante el barco está a 28[mile] del puerto. ¿Cuánto tiempo más tarde debe salir la lancha del práctico de bahía, para que viajando directamente hacia el barco con rapidez constante de 25[mile/h], lo encuentre a 2,0[mile] del puerto?

Llamemos “ eje X ” a la recta que coincide con las trayectorias del barco y de la lancha. Sea $t_{OB} = 0$ el instante en que el barco está a 28 [mile] del puerto y t_{OL}, el instante en que la lancha sale del puerto.



→ Ecuación del movimiento rectilíneo de $v_x = \text{cte.}$

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

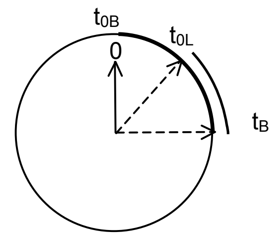
→ Datos del barco

Usamos un único cronómetro para los dos móviles

$x_{0B} = 28$ [mile]

$v_{xB} = -10$ [mile/hora]

$t_{0B} = 0$



$t_B = ?$, instante en que el barco pasa por $x = 2$[mile].

$x(t_B) = 2$ [mile]

→ Nota: se debe tener cuidado de expresar los datos del problema en unidades coherentes. Al reemplazar los datos en la ecuación del movimiento no escribiremos las unidades, pero es indispensable incluirlas en el resultado. Estas observaciones se seguirán en los problemas que vienen a continuación.

→ Reemplazo en la ecuación del movimiento de los datos del barco.

$$2 = 28 - 10(t_B - 0)$$

$$t_B = \frac{2 - 28}{-10} = 2{,}6\,[\text{h}]$$

→ Datos de la lancha

$x(t) = 2$[mile] $\qquad x_{0L} = 0$

$v_{xL} = 25$[mile/hora] $\qquad t_L = 2{,}6$[h]

$t_{0L} = ?$, instante en que debe partir la lancha para encontrar al barco a 2 [mile] del puerto.

→ Reemplazo en la ecuación del movimiento de los datos de la lancha

$$2 = 0 + 25(2{,}6 - t_{0L})$$

$$\frac{2}{25} = 2{,}6 - t_{0L}$$

$$t_{0L} = 2{,}6 - 0{,}80 = 2{,}52\,[\text{h}]$$

La lancha debe salir 2,52[h] después del instante en que el barco pasa por el punto de 28[mile] del puerto.

- Dos objetos A y B se mueven a lo largo de un mismo riel rectilíneo, que tiene 2,3[m] de largo, de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$x_A(t) = 3{,}1t \qquad\qquad x_B(t) = 40 + 7{,}8t$$

donde las "x" designan a las distancias medidas desde un extremo del riel y están dadas en [cm] , y los tiempos, con el mismo instante de referencia para ambos objetos, se miden en [s]. Calculemos la "rapidez media de alejamiento" entre estos objetos.

En el tiempo t la separación del objeto B respecto al A es:

$$s(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$s(t) = (40 + 7{,}8t) - 3{,}1t$$

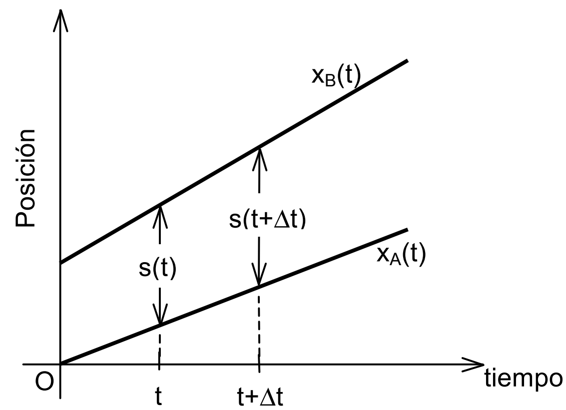
$$s(t) = 40 + 4{,}7t$$

Entonces, en el instante $t + \Delta t$ la separación es:

$$s(t + \Delta t) = 40 + 4{,}7 \cdot (t + \Delta t)$$

$$= (40 + 4{,}7t) + 4{,}7 \cdot \Delta t$$

$$= s(t) + 4{,}7 \cdot \Delta t$$



Con lo cual, el correspondiente "incremento de separación" resulta:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4{,}7 \cdot \Delta t$$

y por lo tanto, la "rapidez media de alejamiento" es:

$$\bar{v}_a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4{,}7 \cdot \Delta t}{\Delta t} = 4{,}7\,[\text{cm/s}]$$

Dado que la rapidez media $\bar{v}_a$ resulta independiente del incremento de tiempo Δt, el alejamiento de los objetos se efectúa con rapidez constante.

Note que la conclusión de que los cuerpos se alejan entre sí con rapidez constante podemos obtenerla directamente al examinar la expresión:

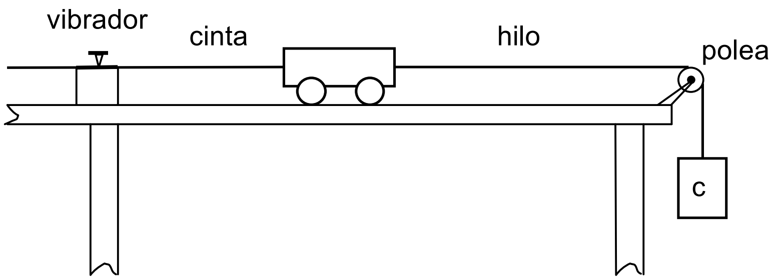
$$s(t) = (40 + 4{,}7t)\,[\text{cm}] \quad \text{con} \quad t \quad \text{en [s]}.$$

que nos dice que la separación inicial es $s_0 = s(0) = 40\,[\text{cm}]$ y que la rapidez de alejamiento es $v_a = 4{,}7\,[\text{cm/s}]$, constante.

Le advertimos que debe tener en cuenta que el procedimiento seguido, y por lo tanto, el resultado obtenido, son válidos sólo mientras ambos objetos se mueven sobre el riel. Dejamos a usted la tarea de calcular el instante a partir del cual las expresiones obtenidas dejan de tener significado físico.

Movimiento rectilíneo: experimento

A continuación le presentamos un experimento realizado con un carrito que puede moverse en un riel rectilíneo.



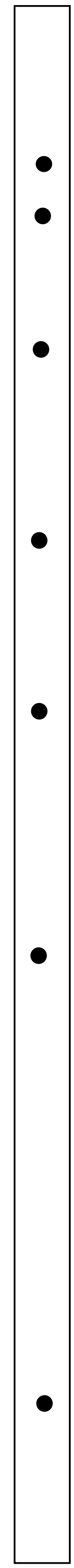
Para registrar las características del movimiento del carrito se une a él una cinta de papel que pasa por un "vibrador". A medida que el carrito se desplaza, el vibrador imprime marcas sobre la cinta a intervalos iguales de tiempo.

Para producir el movimiento soltamos el cuerpo C que está unido al carrito mediante un hilo como se muestra en la figura anterior.

Una de las cintas obtenidas al ejecutar este experimento se reproduce, al costado de la página. Los puntos consecutivos fueron marcados a iguales intervalos de tiempo, de 200[ms]. La distancia entre dos puntos consecutivos corresponde a la distancia recorrida por el carrito en 200[ms]. Con mediciones efectuadas en la cinta confeccionamos la siguiente tabla de valores.

t [s]	s [cm]	Δs [cm]	$\bar{v}$ [cm/s]
0	0		
		2,20	11,0
0,200	2,20		
		4,43	22,2
0,400	6,63		
		6,92	34,6
0,600	13,55		
		9,46	47,3
0,800	23,01		
		11,96	59,8
1,000	34,97		
		14,50	72,5
1,200	49,47		
		17,04	85,2
1,400	66,51		
		19,56	97,8
1,600	86,07		

Observación: Las distancias entre los puntos están en proporción a la tabla.



Donde:

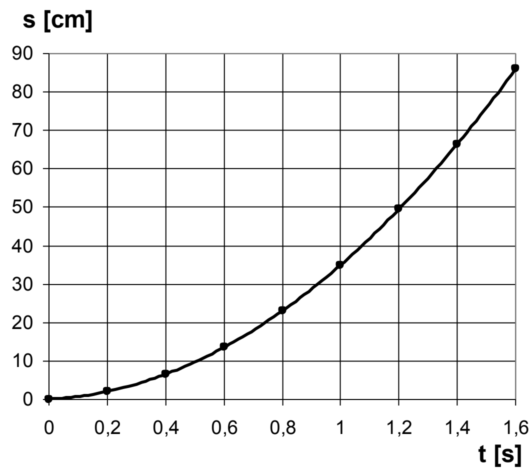
t es el tiempo transcurrido desde la iniciación del movimiento.

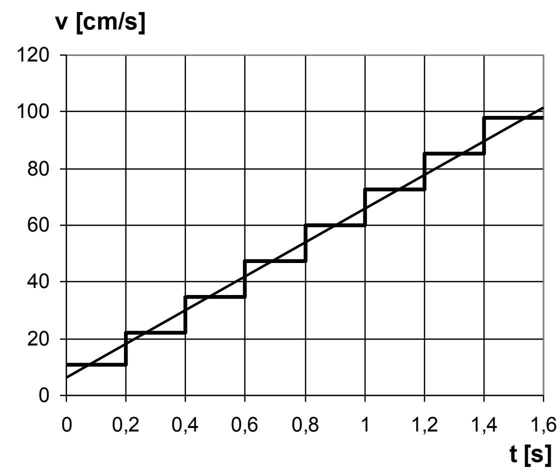
s es la distancia recorrida por el carrito durante el tiempo t.

Δs es la distancia recorrida en cada intervalo de 0,200[s].

$\overline{v} = \Delta s/\Delta t$ es la correspondiente rapidez media.

Mediante los datos de la tabla construimos gráficos que representan la distancia recorrida y la rapidez media en función del tiempo.

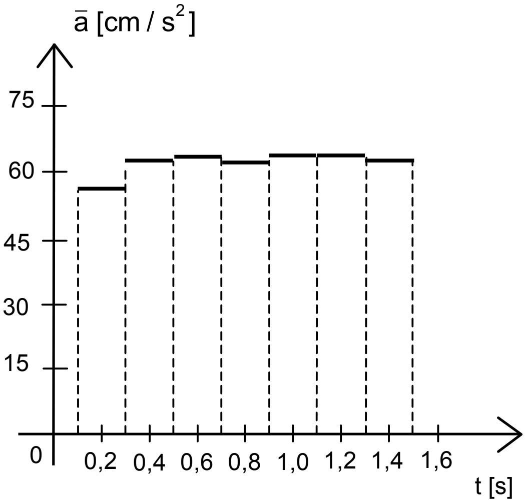




Observamos que para iguales intervalos de tiempo los incrementos de la distancia recorrida por el móvil son cada vez mayores y que la rapidez no es constante, lo que indica un movimiento acelerado.

Al hacer el gráfico rapidez media versus tiempo, obtenemos una curva escalonada. Por otra parte, como sabemos por la experiencia que la rapidez del móvil no va cambiando a saltos, representamos la rapidez instantánea por una curva continua, en este caso por una recta que une los puntos medios de los trazos que representan las rapideces medias. Con los valores de la rapidez instantánea correspondientes a esos puntos medios y sus respectivos instantes confeccionamos la siguiente tabla:

t [s]	v $\left[\frac{cm}{s}\right]$	Δv $\left[\frac{cm}{s}\right]$	$\bar{a}$ $\left[\frac{cm}{s^2}\right]$
0,10	11,0		
		11,2	56,0
0,30	22,2		
		12,4	62,0
0,50	34,6		
		12,7	63,5
0,70	47,3		
		12,5	62,5
0,90	59,8		
		12,7	63,5
1,10	72,5		
		12,7	63,5
1,30	85,2		
		12,6	63,0
1,50	97,8		



Los valores de esta tabla nos indican, dentro de los errores de medición, que la aceleración en este movimiento puede considerarse constante. La aceleración en el primer intervalo de tiempo es diferente debido a la influencia del modo como se inicia el movimiento del carrito.

Un movimiento rectilíneo con aceleración constante

Consideremos un objeto en movimiento tal que su trayectoria es rectilínea y su aceleración es constante.

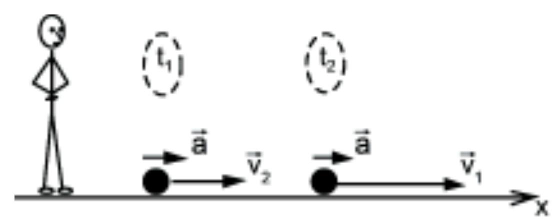
Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ las velocidades del móvil en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, con las direcciones indicadas en la figura adjunta.

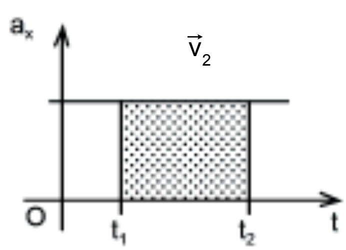
Dado que la aceleración es constante, la aceleración media tiene el mismo valor para cada instante, por tanto:

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

de donde:

$$\Delta v_x = v_2 - v_1 = a_x \cdot (t_2 - t_1)$$



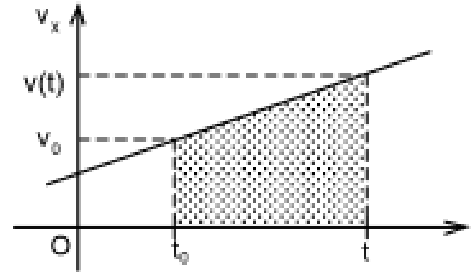


Notemos que la variación de rapidez en un intervalo de tiempo corresponde al "área bajo la curva de aceleración versus tiempo" en ese intervalo dado.

Si en un instante de referencia t_0 la rapidez es v_0, entonces, en un instante arbitrario t, la rapidez $v_x(t)$ puede escribirse, usando la fórmula anterior como:

$$v_x(t) = v_0 + a_x(t - t_0)$$

Consideremos a continuación el gráfico de la rapidez v_x en función del tiempo. Calculemos el área bajo la curva en el intervalo (t_0, t).



$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0)$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0) \cdot \frac{t - t_0}{t - t_0}$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t - t_0}(t - t_0)^2 \quad \text{donde} \quad a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \text{porque } a = \text{cte.}$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2,$$

El área bajo la curva representa el desplazamiento o cambio de posición de la partícula Δx .

Si la posición es x_0 en $t_0 = 0$ y $x(t)$ en el instante t , se cumple que:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 .$$

Esta es la ecuación de la posición de un móvil para un movimiento rectilíneo de aceleración constante.

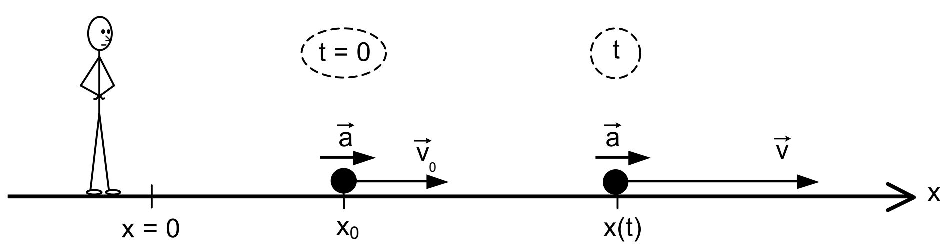
Resumiendo, en la descripción del movimiento de un objeto que sigue una trayectoria rectilínea y cuya aceleración es constante, podemos llamar:

“eje x” a un eje de coordenadas coincidente con la trayectoria rectilínea.

$t = t_0$ a un instante de referencia.

x_0 a la posición del móvil en t_0 .

v_0 a la rapidez del móvil en t_0 .



Con tal notación, las características del movimiento quedan determinadas por las ecuaciones:

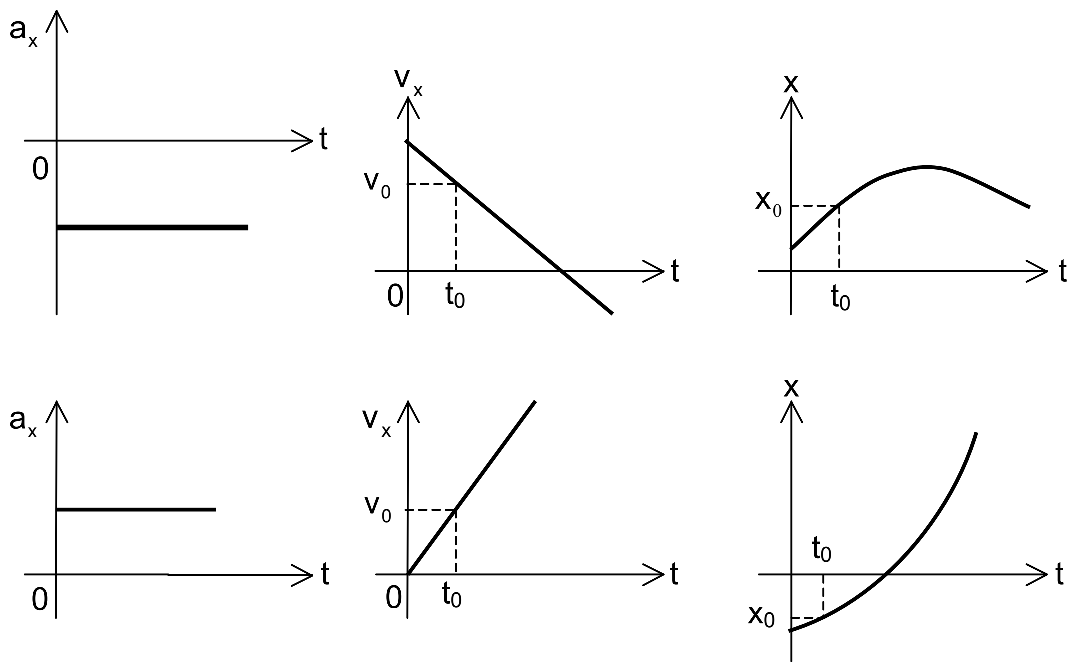
a_x ....aceleración constante.

$v_x(t) = v_{0X} + a_x \cdot (t - t_0)$ ....rapidez instantánea.

$x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x \cdot (t - t_0)^2$ ....posición instantánea.

que nos dicen que para un movimiento de aceleración constante, la rapidez es una función lineal del tiempo y la posición del móvil es una función cuadrática del tiempo.

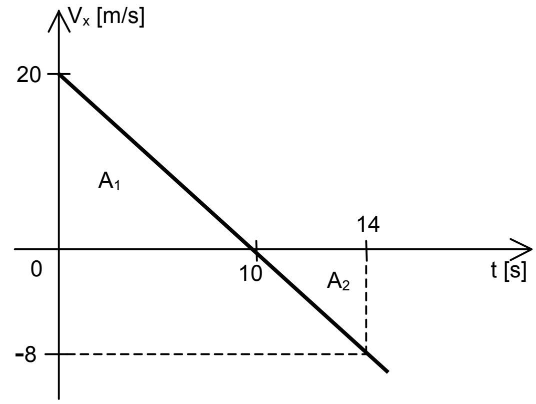
Estas ecuaciones quedan ilustradas para dos casos particulares, por los siguientes gráficos:



Ejemplos

- Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que la componente v_x de su velocidad varía con el tiempo según el gráfico adjunto.

Determine el cambio de posición y el camino recorrido por la partícula.



- Usando el concepto "área bajo la curva"

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 20[\text{m/s}] \cdot 10[\text{s}] = 100[\text{m}]$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot -8[\text{m/s}] \cdot 4[\text{s}] = -16[\text{m}]$$

Observe que el área A_2 resulta negativa. Esto significa que el móvil está moviéndose en dirección contraria al eje x.

Cambio de posición $= A_1 + A_2 = 100 - 16 = 84[\text{m}]$

En $t = 14[\text{s}]$ la partícula está a 84[m] a la derecha del punto en que estaba en $t = 0$.

Camino recorrido $= A_1 + |A_2| = 100 + 16 = 116\ [\text{m}]$

Observe además, que no hay datos en el enunciado que nos permitan saber dónde está la partícula en cualquier instante.

Suponga a continuación que la partícula pasó por el origen en $t = 0$, entonces:

- Aplicando la ecuación $\mathbf{x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x \cdot (t - t_0)^2}$:

$$v_0 = 20[\text{m/s}] \quad ; \quad t_0 = 0 \quad ; \quad t = 14[\text{s}] \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad a = -2[\text{m/s}^2]$$

⇒ Posición

$$x(14) = 0 + 20 \cdot 14 - \frac{1}{2}\,2 \cdot 14^2$$

$$x(14) = 280 - 196 = 84[\text{m}]$$

⇒ Camino recorrido de $t = 0$ a $t = 10$.

$$v_0 = 20[\text{m/s}] \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad a = -2[\text{m/s}]$$

$$x(10) = 20 \cdot 10 - \frac{1}{2}\,2 \cdot 10^2 = 100\ [\text{m}]$$

⇒ Camino recorrido de $t = 10[\text{s}]$ a $t = 14[\text{s}]$.

Entre los instantes 10[s] y 14[s] la partícula se mueve en dirección opuesta al eje x. El cambio de posición es:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(14) - x(10)\\ &= 84[m] - 100[m]\\ &= -16[m]\end{aligned}$$

El camino recorrido en este intervalo es igual al valor absoluto del cambio de posición.

$$d = \left|\Delta x\right| = 16[m]$$

Total del camino recorrido $= 100 + 16 = 116[m]$

- La ecuación $x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x \cdot (t - t_0)^2$ **es válida cualesquiera que sean los signos de v_{ox} y de a_x.**

Pero $(x(t) - x_0)$ no necesariamente es la distancia recorrida por la partícula.

- Supongamos que el despegue de un jet se efectuó en 40[s] con aceleración constante de 1,50[m/s^2]. Calculemos la distancia recorrida por el jet sobre la pista durante el tiempo transcurrido desde la partida hasta el despegue.

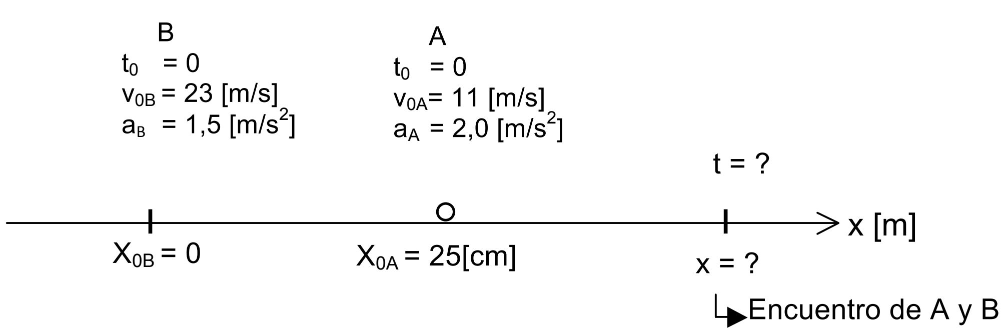
$$v_0 = 0 \quad ; \quad a = 1{,}50[m/s^2] \quad ; \quad t = 40[s]$$

$$x(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$x(40) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}50 \cdot 40^2 \quad , \qquad x(40) = \text{distancia recorrida}$$

Distancia recorrida para el despegue = 1200 [m].

- Dos cuerpos A y B se mueven rectilíneamente en el mismo sentido con aceleraciones constantes de 2,0[m/s^2] y 1,5[m/s^2] respectivamente. En cierto instante el cuerpo A se encuentre a 25[m] delante de B y las velocidades de A y B son 11[m/s] y 23[m/s] respectivamente. Calculemos cuándo y dónde B alcanza a A.



Ecuaciones del movimiento: $\mathbf{v_x(t) = v_0 + a_x\ (t - t_0)}$

$$\mathbf{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\, a_x\ (t - t_0)^2}$$

Ecuaciones para A:

$$v_A = 11 + 2{,}0\,t$$

$$x_A = 25 + 11t + \frac{1}{2}\,2{,}0\,t^2$$

Ecuaciones para B:

$$v_B = 23 + 1{,}5\,t$$

$$x_B = 23t + \frac{1}{2}1{,}5\,t^2$$

Cuando B alcanza a A, se cumple que $x_A = x_B$.

Luego.

$$25 + 11t + \frac{1}{2}\cdot 2{,}0\,t^2 = 23\,t + \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\,t^2$$

$$25 + 11t + t^2 = 23\,t + 0{,}75\,t^2$$

$$0{,}25\ t^2 - 12\,t + 25 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 0{,}25\cdot 25}}{0{,}5} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 45{,}8[s] \\ t_2 = 2{,}2[s] \end{array}$$

Se tiene dos valores para t. Significa que B alcanza a A en $t = 2{,}2[s]$. Pero como A tiene aceleración mayor que la de B, logra alcanzar a B a los 45,8[s].

Vamos a calcular la distancia recorrida por B hasta alcanzar a A.

$$x_B = 23\cdot 2{,}2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 2{,}2^2$$

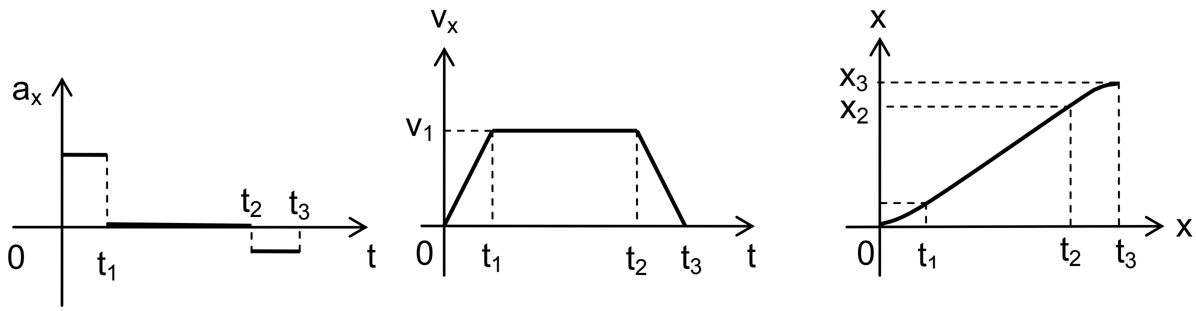
$x_B = 54{,}2[m]$ distancia recorrida por B hasta alcanzar a A.

Usted puede intentar calcular lo recorrido por A o por B desde $t_0 = 0$ hasta el instante 45,8 [s].

- Un cuerpo que sigue una trayectoria rectilínea sale del reposo con aceleración de 3,0[m/s^2], la que mantiene a lo largo de 600[m]. Después continúa con velocidad constante durante 8,0[min] y finalmente desacelera a razón de 0,90[m/s^2] hasta detenerse. Determinemos la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo en función del tiempo.

Elijamos como “eje x” la dirección del movimiento y $t_0 = 0$ el instante en que parte el cuerpo del origen $x_0 = 0$. Escribiremos las ecuaciones de movimiento usando las unidades 1[s] , 1[m] , 1[m/s] y 1[m/s^2] para tiempo, distancia, rapidez y aceleración respectivamente.

En este movimiento podemos considerar tres etapas, según los valores de la aceleración. Estas etapas las podemos visualizar en los siguientes gráficos cualitativos.



En la primera etapa el cuerpo recorre una distancia $x_1 = 600[m]$ con aceleración constante $a_1 = 3{,}0[m/s^2]$.

La rapidez en esta etapa del movimiento es:

$$v_x(t) = a_x\ t = 3{,}0\,t \quad \text{siendo} \quad v_0 = 0$$

y la posición instantánea está dada por:

$$x(t) = \frac{a_1}{2}\,t^2 = 1{,}5\,t^2$$

Luego, el instante t_1 en que el cuerpo está a 600[m] del origen está dado por:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 600[m]}{3{,}0[m/s^2]}} = 20[s]$$

y la rapidez en el instante $t_1 = 20[s]$ es $v_x(t_1) = v_1 = 60[m/s]$.

La segunda etapa del movimiento comienza en $t_1 = 20[s]$ a $x_1 = 600[m]$ de distancia del origen y con rapidez $v_1 = 60[m/s]$.

La aceleración es $a_2 = 0[m/s^2]$.

La rapidez es $v_2 = v_1 = 60[m/s]$, constante.

La posición está descrita por la ecuación: $x(t) = 600 + 60\cdot(t-20)$ que es válida hasta $t_2 = 500[s]$, que corresponde a los 8,0[min] de la segunda etapa más los 20[s] de la primera.

La posición alcanzada por el cuerpo al término de esta segunda etapa es:

$$x_2 = x(t_2) = 600 + 60\cdot 480 = 29{,}4\cdot 10^3[m]$$

El cuerpo comienza **su tercera etapa** en el instante $t_2 = 500[s]$, desde la posición $x_2 = 29{,}4\cdot 10^3[m]$ con una rapidez $v_2 = 60[m/s]$.

Como en esta etapa el cuerpo está sometido a una desaceleración constante de magnitud $a_3 = 0{,}90[m/s^2]$, las ecuaciones que rigen para la rapidez y la posición instantánea en esta parte del movimiento son:

$$v_x(t) = v_2 - a_3\cdot(t-500) = 60 - 0{,}90\cdot(t-500)$$

$$x_x(t) = x_2 + v_3\cdot(t-500) - \frac{1}{2}a_3\cdot(t-500)^2$$

$$x_t = 29{,}4\cdot 10^3 + 60\cdot(t-500) - 0{,}45\cdot(t-500)^2$$

Estas ecuaciones son válidas hasta el instante t_3 en que el cuerpo se detiene, instante que está determinado por la condición de que el cuerpo se detiene:

$$\text{Luego} \qquad v_x(t_3) = 60 - 0{,}90 \cdot (t_3 - 500) = 0$$

que da el valor $t_3 \simeq 567[s]$.

En resumen, la aceleración, la rapidez y la posición instantáneas del cuerpo están descritas por:

$$a_x(t) = \begin{cases} 3{,}0 & ; \; 0 \le t \le 20[s] \\ 0 & ; \; 20[s] < t \le 500[s] \\ -0{,}90 & ; \; 500[s] < t \le 567[s] \end{cases}$$

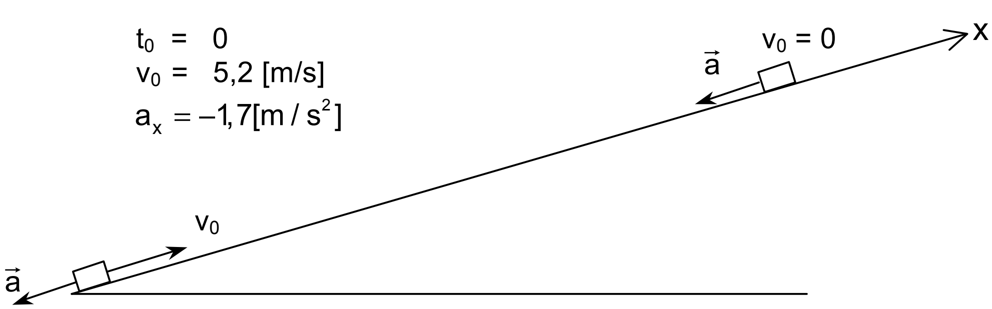
$$v_x(t) = \begin{cases} 3{,}0\,t & ; \; 0 \le t \le 20[s] \\ 60 & ; \; 20[s] \le t \le 500[s] \\ 60 - 0{,}90 \cdot (t - 500) & ; \; 500[s] \le t \le 567[s] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1{,}5\,t^2 & ; \; 0 \le t \le 20[s] \\ 600 + 60 \cdot (t - 20) & ; \; 20[s] \le t \le 500[s] \\ 29{,}4 \cdot 10^3 + 60 \cdot (t - 500) - 0{,}45 \cdot (t - 500)^2 & ; \; 500[s] \le t \le 567[s] \end{cases}$$

donde t está dado en [s], $x(t)$ en [m], $v_x(t)$ en [m/s] y $a_x(t)$ en [m/s^2].

Represente usted en gráficos a escala la aceleración, rapidez y posición instantánea en función del tiempo.

- Un pequeño disco es lanzado hacia arriba por un plano inclinado sin roce, con una rapidez inicial de 5,2[m/s]. Debido a la inclinación del plano, el móvil tiene una aceleración $a = -1{,}7[m/s^2]$. Determine el instante en que el disco alcanza el punto más alto. Calcule, además, la distancia recorrida por el móvil al cabo de 4,2 [s] de movimiento.



→ Hacemos coincidir el eje x con el plano inclinado.

→ Debido a la aceleración negativa el disco sube hasta un punto en que su velocidad se hace 0 y luego desciende.

→ Ecuaciones del movimiento: $v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)$;

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2$$

usando los valores: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 5{,}2[m/s]$, $a_x = -1{,}7[m/s^2]$

las ecuaciones de movimiento quedan:

$$v_x(t) = 5{,}2 - 1{,}7 \cdot t \quad ; \quad t \text{ en [s]}, \quad v_x \text{ en [m/s]}$$

$$x(t) = 0 + 5{,}2 \cdot t + \frac{1}{2}(-1{,}7) \cdot t^2 ; \quad t \text{ en [s]}, x \text{ en [m]}$$

→ En el instante en que el disco está en el punto más alto $v(t) = 0$.

Luego $0 = 5{,}2 - 1{,}7\,t \Rightarrow t = \dfrac{5{,}2}{1{,}7} = 3{,}1[s]$, instante de $v(t) = 0$.

→ Posición del móvil en el instante 3,1 [s].

$$x(3{,}1) = 5{,}2 \cdot 3{,}1 - \frac{1}{2}1{,}7 \cdot 3{,}1^2 \approx 8 \text{ [m]}$$

→ Posición del móvil en el instante 4,2 [s].

$$x(4{,}2) = 5{,}2 \cdot 4{,}2 - \frac{1}{2}1{,}7 \cdot 4{,}2^2 \approx 6{,}8 \text{ [m]}$$

Camino recorrido de subida: $8 - 0 = 8[m]$

Camino recorrido de bajada: $8 - 6{,}8 = 1{,}2[m]$

Total camino recorrido: $8 + 1{,}2 = 9{,}2[m]$

• Las ecuaciones que describen la posición de dos cuerpos A y B que se mueven sobre una misma recta son respectivamente:

$$x_A(t) = 3{,}2t^2 - 6{,}0t - 47 \quad ; \quad 0 \le t \le t_c$$

$$x_B(t) = 29 + 8{,}5t - 4{,}1t^2 \quad ; \quad 0 \le t \le t_c$$

con x expresado en metros, y t en segundos. Representemos la posición y la rapidez de cada cuerpo en función del tiempo. Calculemos el instante t_c y la coordenada x_c del choque y las correspondiente velocidades en ese instante.

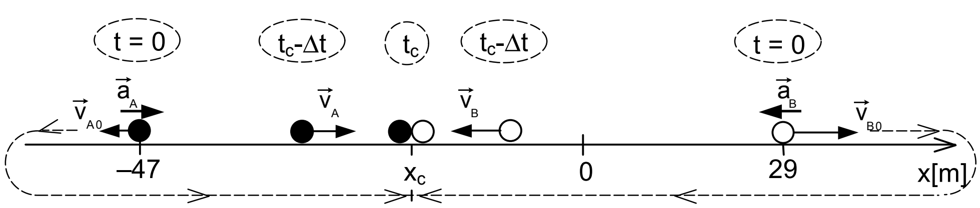
Por la estructura de las ecuaciones de posición nos damos cuenta que la aceleración de cada cuerpo es constante. Las "componentes x" de las aceleraciones son respectivamente:

$$a_A = 6{,}4[m/s^2] \quad y \quad a_B = -8{,}2[m/s^2]$$

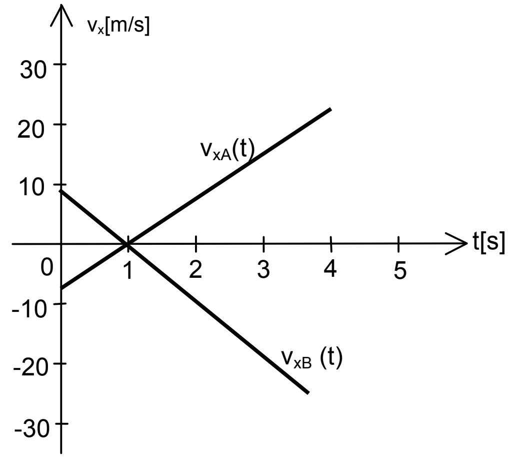
y las "componentes x" de las respectivas velocidades instantáneas están dadas por las ecuaciones:

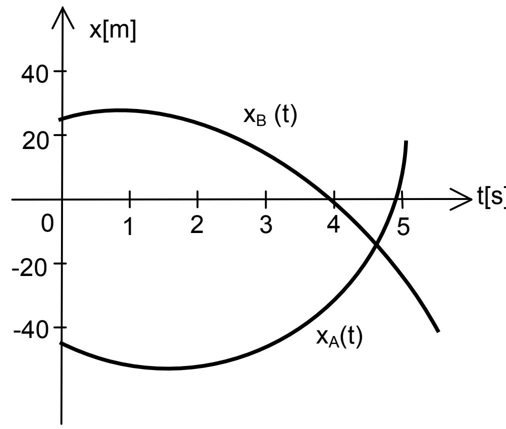
$$v_A = -6{,}0 + 6{,}4t \quad y \quad v_B = 8{,}5 - 8{,}2t \quad \text{, en [m/s]}$$

Un esquema de las situaciones para los instantes de referencia $t = 0$ y de choque t_c es el siguiente:



En los gráficos adjuntos vemos como cambian las posiciones y rapideces de cada cuerpo en el transcurso del tiempo.





Para que se produzca el choque debe cumplirse: $x_A(t_c) = x_B(t_c)$ esto es:

$$3{,}2\ t_c^2 - 6{,}0\,t_c - 47 = 29 + 8{,}5\,t_c - 4{,}1t_c^2$$

$$7{,}3\ t_c^2 - 14{,}5\,t_c - 76 = 0$$

dando como resultado: $t_c \simeq 4{,}37\,[\mathrm{s}]$.

El choque ocurre en el punto de coordenada $x_c \simeq -12\,[\mathrm{m}]$.

Como las velocidades instantáneas están dadas por:

$$\vec{v}_A(t) = v_A(t)\hat{i} = (6{,}4\,t - 6{,}0)\hat{i}\ [\mathrm{m/s}]$$

$$\vec{v}_B(t) = v_B(t)\hat{i} = (-8{,}2\,t + 8{,}5)\hat{i}\ [\mathrm{m/s}],$$

para el instante $t_c \simeq 4{,}37\,[\mathrm{s}]$ las velocidades de A y B son:

$$\vec{v}_A(t_c) \simeq 22\,\hat{i}\ [\mathrm{m/s}] \quad \text{y} \quad \vec{v}_B(t_c) \simeq -27\,\hat{i}\ [\mathrm{m/s}]$$

siendo sus magnitudes 22[m/s] y 27[m/s] respectivamente.

Ejercicios

6-1) Dos lanchas participan en una carrera rectilínea de 5000[m]. Uno de los corredores decide desplazarse con una rapidez constante de 108[km/h]. El otro decide recorrer un primer tramo de 1000[m] a 90[km/h], un segundo tramo de 2000[m] a 108[km/h] y el resto del camino a 120[km/h]. Pero al minuto de haberse iniciado la carrera, la meta (que está colocada sobre flotadores) corta amarras y es desplazada por el viento hacia el punto de partida a razón de 4[m/s]. ¿Cuál corredor llega primero a la meta?

6-2) La tabla adjunta muestra los valores de rapideces instantáneas de un automóvil que partió del reposo. Haga gráficos de rapidez instantánea y de aceleración media en función del tiempo.

¿Cuál es la rapidez para t = 2,5[s]?

¿Cuál es el máximo valor de la aceleración?

t [s]	v [m/s]
0,0	0,0
1,0	6,3
2,0	11,6
3,0	16,5
4,0	20,5
5,0	24,1
6,0	27,3
7,0	29,5
8,0	31,3
9,0	33,1
10,0	34,9

6-3) ¿Qué aceleración tiene un cuerpo que, partiendo del reposo, se mueve con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y durante el sexto segundo recorre 6,2[m]?

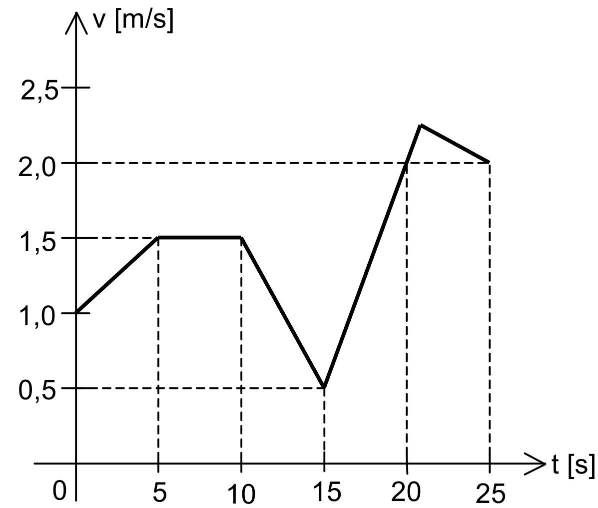
6-4) Dado el gráfico rapidez en función del tiempo, conteste:

¿Cuál es valor de la rapidez inicial?

¿En qué intervalo de tiempo la rapidez es constante?

¿En qué intervalo de tiempo la aceleración es mayor?

¿Cuál es la distancia recorrida por el móvil?



6-5) En cierto tipo de "tubo electrónico" los electrones experimentan una aceleración de $2{,}8 \cdot 10^{15}$[m/s^2]. Calcule la rapidez que alcanzaría un electrón 2,0[ns] después de que saliera del cátodo con rapidez despreciable.

6-6) Un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado viaja 12[m] en 2,0[s]. Durante los próximos 3,0[s] cubre 56[m]. Calcule la velocidad inicial del cuerpo y su aceleración. ¿Qué distancia recorrerá en los próximos 5,0[s]?

6-7) Si una nave espacial se dirigiera a la estrella Alfa Centauro, situada a 4,3[AL] de la Tierra, con aceleración constante de 12[m/s^2] ¿cuánto tiempo demoraría en llegar y con qué velocidad llegaría? Comente.

6-8) En cierto instante un avión vuela con rapidez 500[km/h] sujeto a una aceleración de 1,2[km/min^2]. Si la dirección de vuelo y la aceleración se mantuvieran constantes ¿cuál sería la rapidez 15[min] más tarde?

6-9) La distancia que hay entre dos estaciones de un "Metro" es de 1,5[km]. Considere que el tren recorre la primera mitad de esta distancia con movimiento uniformemente acelerado y la segunda con movimiento uniformemente retardado. La rapidez máxima del tren es 50[km/h]. Calcule el valor de la aceleración, suponiendo que su magnitud es igual a la de la desaceleración.

6-10) Un cuerpo acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración constante de 0,50[m/s^2] durante 8,0[s] y después continúa su movimiento con rapidez constante. Dibuje el gráfico rapidez en función del tiempo y determine el tiempo que demora en recorrer los 25[m] iniciales.

6-11) Un auto parte del reposo y se desplaza con una aceleración de 1,2[m/s^2] durante 8,0[s]. Luego se apaga el motor y el auto desacelera, debido a la fricción, durante 14[s] a un promedio de 8,5[cm/s^2]. Entonces se aplican los frenos y el auto se detiene al cabo de 6,0[s]. Calcule la distancia total recorrida por el auto. Represente gráficamente la aceleración, rapidez y posición del auto en función del tiempo.

6-12) Durante parte del trayecto un tren viajó con movimiento uniformemente acelerado con $a = 2,5\left[\frac{\text{km/h}}{\text{s}}\right]$; si 115[s] después de pasar por un poste su rapidez era de 50[km/h] ¿con qué rapidez pasó por el poste? Si después de alcanzar una rapidez de 90[km/h] frena durante 7,0[s] hasta disminuir a 40[km/h] ¿cuál fue la aceleración?

6-13) Un automovilista viaja con rapidez constante de 85[km/h] en una noche oscura. Al salir de una curva ve a 70[m] un camión que obstruye el camino. Suponga que el chofer aplica los frenos en el mismo instante que ve el peligro, logrando una desaceleración constante de 18[m/s^2]. ¿Alcanzará a detener el auto para evitar el choque con el camión?

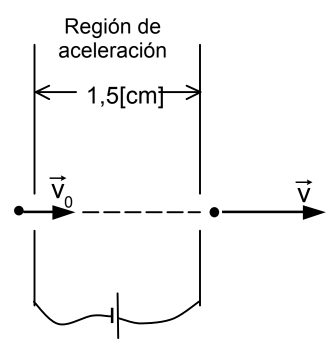
6-14) Un automovilista descuidado viaja por una carretera con rapidez de 115[km/h] cuando recuerda que la máxima permitida es de 90[km/h]; aplica los frenos y llega a los 90[km/h] en 15[s]. Determine el valor de la desaceleración media impresa al automóvil. Determine cuántos metros recorre antes de normalizar su rapidez, considerando que la aceleración ha sido constante.

6-15) El tiempo de reacción de un conductor de automóvil es de aproximadamente 0,7[s]. Consideremos como tiempo de reacción al intervalo que transcurre entre la percepción de un estímulo y la aplicación de los frenos. Si los frenos son capaces de producir una desaceleración de 4,8[m/s^2], calcule la distancia total recorrida desde la percepción de una señal hasta la detención del automóvil cuando viaja a 30[km/h] y a 60[km/h].

6-16) Determine una expresión que describa la posición en función del tiempo para el siguiente movimiento de un tren: pasa por un punto a 200[m] de una estación alejándose de ella con una velocidad de 72[km/h] de magnitud, en ese instante se aplican los frenos provocando una desaceleración de 4,0[m/s^2] constante, hasta detenerse.

6-17) Un electrón entra con una rapidez de $1,0 \cdot 10^4$ [m/s] a una región en donde es acelerado eléctricamente. Sale al otro lado con una rapidez de $4,0 \cdot 10^6$ [m/s].

¿Cuál fue la aceleración del electrón, supuesta constante? ¿Durante cuánto tiempo fue acelerado el electrón?



Esto es, en forma simplificada, lo que ocurre en el emisor de electrones de un tubo de rayos catódicos, como los que se usan en los receptores de televisión y en los osciloscopios.

6-18) La ecuación que describe la posición instantánea de una partícula es $x(t) = 3,0\,t^2 - 2,0\,t + 4,0$, con x expresada en metros y t en segundos. Calcule la posición, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 5,0[s]$. Represente gráficamente la posición, rapidez y aceleración en función del tiempo, para $0 \le t \le 15[s]$.

6-19) Un cuerpo en movimiento rectilíneo recorre una distancia D entre los lugares A y B en un tiempo T. Las características del movimiento son: Parte desde A con aceleración a_A constante durante un intervalo entre $t_0 = 0$ y un instante t_A, continúa con velocidad v_A, alcanzada en t_A, hasta un instante t_B y luego desacelera con a_B constante hasta detenerse justamente en B. Construya gráficos de la posición y de la rapidez en función del tiempo. Determine en términos de D, T, t_A y t_B los valores de v_A, a_A y a_B.

6-20) El movimiento de dos vehículos A y B que se desplazan por un camino rectilíneo (eje x) está descrito por las expresiones:

$$x_A(t) = -10t + 5t^2 \quad y \quad x_B(t) = 30 + 5t - 10t^2 \quad ,$$

donde las posiciones x_A y x_B, medidas de un punto marcado $x = 0$ en el camino, se dan en [m] y el tiempo t, que se comienza a contar desde el mismo instante para ambos vehículos, se da en [s]. Represente gráficamente la posición de cada vehículo en función del tiempo. Encuentre del gráfico el instante en que los vehículos se juntan. Resuelva el problema algebraicamente.

6-21) Un peatón corre con una rapidez constante de 6,0[m/s] para alcanzar un bus que está detenido ante un semáforo. Cuando está a 25[m] del bus, la luz cambia y el autobús acelera uniformemente a 0,11[m/s^2]. ¿Alcanza el peatón al bus? Si no es así, determine la distancia mínima que los separa. Resuelva el problema gráfica y algebraicamente.

6-22) Dos cuerpos **W** y **Z** se mueven a lo largo de un mismo camino recto. El cuerpo **W** lo hace con rapidez constante de 8,0[m/s] y el **Z** con aceleración constante. En cierto instante el cuerpo **W** pasa frente a una señal. El cuerpo **Z** lo hace 12[s] más tarde a 6,0[m/s], juntándose ambos cuerpos 30[s] después que **Z** pasó por la señal. Calcule la distancia entre la señal y el punto en que se juntaron. Calcule la aceleración de **Z**.

6-23) Imagine que se entretiene lanzando bolitas de cristal por un tubo de vidrio delgado, recto, de 1,2[m] de largo y colocado horizontalmente. Suponga que pone una bolita en el extremo del tubo y hace que ella se mueva con rapidez constante de 0,30[m/s] y que después de 1/5[s] pone en movimiento otra bolita para que pille a la primera. Calcule la aceleración de la segunda bolita, supuesta constante, para que alcance a la primera justo antes que salga por extremo opuesto del tubo.

6-24) Un auto está esperando que cambie la luz roja. Cuando la luz cambia a verde, el auto acelera uniformemente a 2,5[m/s^2] durante 6,0[s], continuando con rapidez constante. En el instante que el auto comienza a moverse, un camión que se mueve en la misma dirección con movimiento uniforme de 12[m/s] , lo pasa. ¿En qué tiempo, y a qué distancia se encontrarán nuevamente el auto y el camión ?

6-25) Dos autos A y B se mueven en la siguiente forma: en cierto instante el auto A parte del reposo y se mueve con aceleración $a_A = 2,5[m/s^2]$ constante; en ese mismo instante el auto B pasa por un punto situado a distancia D = 80[m] detrás de la largada de A con una rapidez v_0 y se mueve con aceleración $a_B = -0,70[m/s^2]$ constante. Calcule el valor mínimo de v_0 para que B pueda alcanzar a A. Para tal valor de v_0 calcule el tiempo empleado por B para alcanzar a A y las velocidades de A y B en el instante del encuentro.

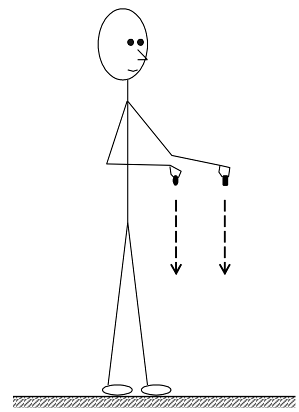
6-26) Demuestre que para una partícula en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se cumple que:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x \cdot (x - x_0)$$

donde el "eje x" coincide con la recta en que se mueve la partícula.

Caída libre y lanzamiento vertical

Si usted deja caer dos objetos, tales como una goma y una moneda, simultáneamente y desde una misma altura, observará que ambos cuerpos llegan al piso prácticamente en el mismo instante. Si usa un trozo de papel y una moneda, generalmente observará que la moneda llega primero al piso; pero, si hace una "pelotilla" con el papel, no observará una diferencia de tiempo apreciable en la caída de la pelotilla y la moneda, esto se explica porque ha disminuido el efecto de la acción del aire sobre el papel.



Este tipo de situaciones fue estudiado experimentalmente por Galileo, quien estableció que la caída libre de los cuerpos es un movimiento acelerado y con igual aceleración para todos los cuerpos.

En un estudio cinemático simplificado del movimiento vertical de los cuerpos en la cercanía de la superficie terrestre podemos considerar que la aceleración de gravedad es constante y que su magnitud tiene un valor aproximado de $9{,}8[m/s^2]$.

Se acostumbra designar a la magnitud de esta aceleración como g, y al vector aceleración como $\vec{g}$.

$$g \approx 9{,}8[m/s^2]$$

Si escogemos el eje y verticalmente hacia abajo, entonces:

$$\vec{g} = g\,\hat{j} \text{ (eje } y, \text{ hacia abajo)}$$

y las componentes escalares de la velocidad y la posición en función del tiempo son:

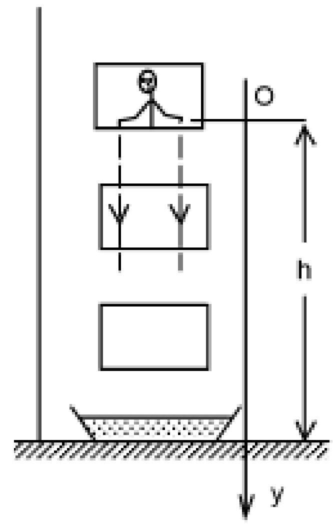
$$v_y(t) = v_0 + g(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Hablamos de caída libre cuando la velocidad inicial es $\vec{v}_0 = 0$ y hablamos de lanzamiento vertical hacia abajo (arriba) cuando $\vec{v}$ tiene igual (opuesta) dirección que la aceleración de gravedad $\vec{g}$.

- Usted puede verificar estas aseveraciones y encontrar un valor de la aceleración de caída de los cuerpos, llamada "aceleración de gravedad", haciendo el siguiente experimento:

Suelte desde las ventanas de un segundo, tercer y cuarto piso de un edificio una bolita de madera y otra de acero. Para visualizar el instante de llegada al suelo puede colocar un tiesto con agua; ambas bolitas salpicarán el agua al mismo tiempo si se han soltado simultáneamente.



$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

En el momento en que se suelta la bolita $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$.

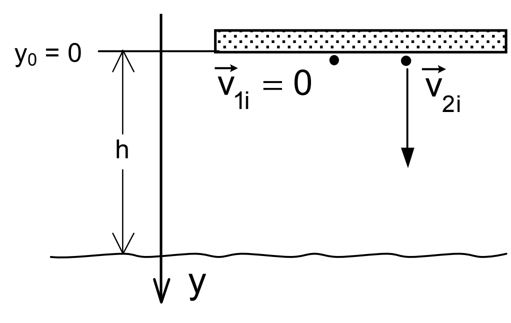
Para el instante t en que la bolita toca el agua $y(t) = h$.

Luego $h = \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{2gh}$

Mida los tiempos de caída y las alturas respectivas. Obtendrá, aproximadamente, que g tiene un valor de 9,8 [m/s^2].

Ejemplos

- Se suelta una piedra desde un puente que está a 44[m] sobre el nivel del agua. Después de 1,2[s] de soltar esta piedra se lanza otra desde el mismo lugar, verticalmente hacia abajo con rapidez inicial de 7,3[m/s]. Calculemos el intervalo de tiempo transcurrido entre las llegadas de las piedras al agua.



En este problema resulta más conveniente poner la dirección del eje y hacia abajo.

La aceleración queda como:

$$\vec{a} = \vec{g} = g\hat{j}.$$

$\rightarrow$ Ecuaciones del movimiento:

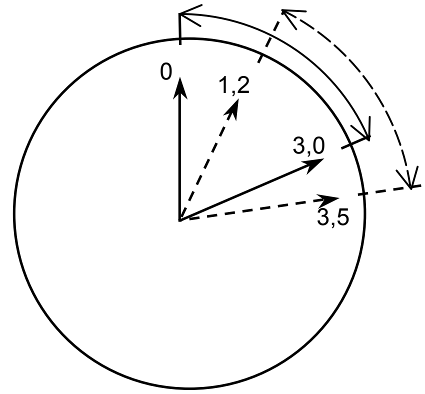
$$v(t) = v_0 + g(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

→ **Ecuaciones para la piedra 1**:

$v_{01} = 0$, $y_{01} = 0$, $t_{01} = 0$

Luego $v(t_1) = g t_1$ $\quad y(t_1) = \frac{1}{2} g t_1^2$



$y(t_1) = h = 44[\text{m}]$, para el instante t_1 en que la primera piedra llega al agua.

$$44 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\, t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 44}{9{,}8}} \approx 3{,}0[\text{s}]$$

→ **Ecuaciones para la piedra 2**: $v_{02} = 7{,}3[\text{m/s}]$, $y_{02} = 0$, $t_{02} = 1{,}2[\text{s}]$

Luego

$$v(t_2) = v_{02} + g(t_2 - t_{02})$$

$$y(t_2) = v_{02}(t_2 - t_{02}) + \frac{1}{2} g (t_2 - t_{02})^2$$

$y(t_2) = h = 44[\text{m}]$ cuando la piedra 2 toca el agua en el instante t_2

Luego $\quad 44 = 7{,}3\ (t_2 - 1{,}2) + \frac{1}{2} 9{,}8 (t_2 - 1{,}2)^2$

$$4{,}9\,(t_2 - 1{,}2)^2 + 7{,}3(t_2 - 1{,}2) - 44 = 0$$

$$t_2 - 1{,}2 = \frac{-7{,}3 \pm \sqrt{7{,}3^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 44}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$t_2 - 1{,}2 \approx 2{,}3$ El segundo valor de t_2 resulta ser negativo y no

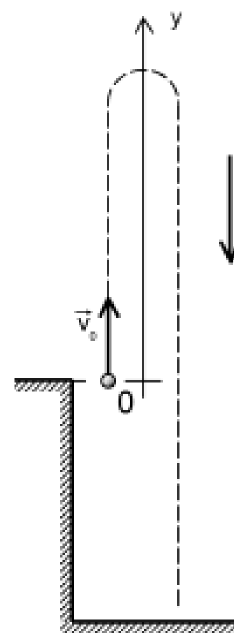
$t_2 \approx 3{,}5[\text{s}]$ es solución física del problema.

Intervalo de tiempo Δt entre las llegadas de las piedras

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3{,}5 - 3{,}0 = 0{,}5[\text{s}]$$

La segunda piedra llega 0,5[s] después que la primera.

- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez de $16[m/s]$ ¿En qué instante llegará a un nivel $25[m]$ más abajo que el nivel del punto de lanzamiento? ¿Cuál es la velocidad del cuerpo cuando pasa por el nivel de lanzamiento?



Las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje y son:

$$v_y(t) = v_0 + a_y \cdot (t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot (t - t_0)^2$$

Escogiendo el eje y verticalmente hacia arriba:

$$a_y = -g \approx -9{,}8[m/s^2]$$

Usando $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $v_0 = 16[m/s]$, las ecuaciones quedan:

$$v_y(t) = 16 - 9{,}8 \cdot t$$

$$y(t) = 16 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

en donde el tiempo está en [s], la posición en [m] y la rapidez en [m/s].

→ Sea t_d el instante en que el cuerpo llega a 25[m] debajo del punto de lanzamiento. Entonces:

$$-25 = 16 \cdot t_d - 4{,}9 \cdot t_d^2$$

$$4{,}9 \cdot t_d^2 - 16 \cdot t_d - 25 = 0$$

$$t_d = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-25)}}{2 \cdot 4{,}9} = 4{,}4[s]$$

en donde hemos descartado la solución negativa. El cuerpo pasa a los 4,4[s] bajo el nivel de lanzamiento.

→ Sea t_a el instante en que el cuerpo pasa hacia abajo por el nivel de lanzamiento. Entonces:

$$y(t_a) = 0$$

$$0 = 16 \cdot t_a - 4{,}9 \cdot t_a^2$$

$$0 = t_a \cdot (16 \cdot - 4{,}9 \cdot t_a)$$

Descartando la solución $t_a = 0$, que corresponde al instante del lanzamiento, obtenemos:

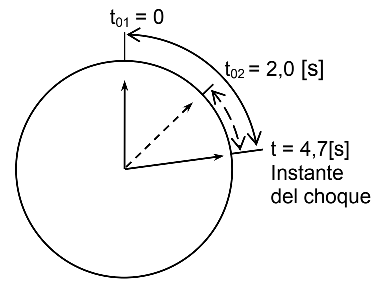
$$t_a = \frac{16}{4{,}9}[s]$$

Entonces, la rapidez en ese instante está dada por:

$$v_y(t_a) = 16 - 9{,}8 \cdot \frac{16}{4{,}9} = -16[m/s]$$

El vector velocidad en ese instante es $\vec{v}(t_a) = -16\,\hat{j}\,[m/s]$. Note que la magnitud de la velocidad es la misma del lanzamiento y su dirección es opuesta.

- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez inicial $v_{0,1} = 16[m/s]$. Después de 2,0[s] se lanza verticalmente un segundo cuerpo desde el mismo lugar con una velocidad inicial $\vec{v}_{0,2}$ tal que ambos cuerpos chocan 2,7[s] después de lanzar el segundo. ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_{0,2}$?



$\rightarrow$ Los cuerpos chocan en el instante $t_C = 2,0[s] + 2,7[s] = 4,7[s]$ después de lanzado el primer cuerpo.

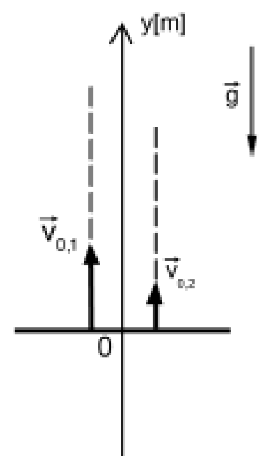
Las ecuaciones del movimiento a lo largo del eje y son:

$$v_y(t) = v_0 + a_y \cdot (t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot (t - t_0)^2$$

Escogiendo el eje y verticalmente hacia arriba:

$$a_y = -g \approx -9,8[m/s^2]$$



$\rightarrow$ Para el <u>primer cuerpo</u>:

$t_{0,1} = 0$, $y_{0,1} = 0$ y $v_{0,1} = 16[m/s]$,

Las ecuaciones para el primer cuerpo quedan:

$$v_{y,1}(t) = 16 - 9,8 \cdot t$$

$$y_1(t) = 16 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$$

$\rightarrow$ Para el <u>segundo cuerpo</u>:

$t_{0,2} = 2,0[s]$, $y_{0,2} = 0$ y $v_{0,2} = ?$,

Las ecuaciones para el segundo cuerpo quedan:

$$v_{y,2}(t) = v_{0,2} - 9,8 \cdot (t - 2)$$

$$y_2(t) = v_{0,2} \cdot (t - 2) - 4,9 \cdot (t - 2)^2$$

$\rightarrow$ En el instante del choque $t_C = 4,7[s]$ los dos cuerpos tienen la misma posición:

$$y_1(t_c) = y_2(t_c)$$

Por lo tanto:

$$16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 = v_{0,2} \cdot (4,7 - 2) - 4,9 \cdot (4,7 - 2)^2$$

$$16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 = v_{0,2} \cdot (2,7) - 4,9 \cdot (2,7)^2$$

$$v_{0,2} = \frac{16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 + 4,9 \cdot (2,7)^2}{2,7} \approx 0,99[m/s]$$

El vector velocidad inicial de la segunda piedra es $\vec{v}_{0,2} \approx 0,99\hat{j}[m/s]$.

Verifique que los cuerpos chocan en $y \approx -33[m]$.

Ejercicios

6-27) ¿Cuál sería la rapidez con que llegaría a la Tierra una gota de lluvia si cayera con aceleración constante de 9,8[m/s^2] desde una nube situada a 1[km] de altura? Comente con sus amigos la respuesta. Pregunte en clase.

6-28) Un cuerpo que se ha dejado caer recorre 72[m] en el último segundo de su movimiento. Calcule la altura desde la cual cayó el cuerpo y el tiempo que empleó en llegar al suelo.

6-29) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 19[m/s] ¿Cuándo tendrá una rapidez de 5,6[m/s] y en qué posición se encontrará en ese instante?

6-30) Un hombre parado en el techo de un edificio tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14[m/s]. El cuerpo llega al suelo 4,7[s] más tarde. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por el cuerpo?. ¿Qué altura tiene el edificio? ¿Con qué rapidez llegará el cuerpo al suelo?

6-31) Se deja caer una bolita desde 28[m] de altura y 2,5[s] después se deja caer una segunda bolita desde 17[m] de altura. Calcule el intervalo de tiempo transcurrido entre las llegadas de las bolitas al suelo.

6-32) Suponga que en cierto instante usted suelta una piedra desde el borde de un pozo y que después de un tiempo t_0 suelta otra piedra desde el mismo punto. Determine una expresión algebraica para la "rapidez media de cambio de separación entre ambas piedras". Si la profundidad del pozo es H determine el rango de tiempo para la validez de tal expresión.

6-33) En un mismo instante y desde un mismo punto un cuerpo se deja caer y otro se lanza hacia abajo con una rapidez inicial de 105[cm/s]. ¿Cuándo la distancia entre ellos será de 19[m]?

6-34) Se suelta una piedra desde un puente que está a 35[m] sobre el nivel del agua. Después de 1,7[s] se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra. Ambas llegan al mismo tiempo al agua. ¿Cuál es la rapidez inicial de la segunda piedra? Construya un gráfico de rapidez en función del tiempo para ambas piedras.

6-35) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia abajo con una rapidez inicial v_0 = 6,0[m/s]. ¿Cuánto tiempo más tarde habrá que lanzar otro cuerpo desde el mismo punto con una rapidez inicial v_0 = 10,6[m/s] para que alcance al primero a los 6,6[m] de recorrido?

6-36) Un ascensor de un edificio está bajando con aceleración constante de 1,1[m/s^2] de magnitud. En el instante en que la rapidez del ascensor es 2,5[m/s] cae un tornillo del techo del ascensor, que está a 3,5[m] de su piso. Calcule el tiempo que el tornillo tarda en llegar al piso y la distancia, respecto a un observador en el edificio, recorrida por el tornillo durante ese tiempo.

6-37) El sonido producido por una piedra al llegar al fondo de un pozo seco se escucha 4,0[s] después de que fue soltada. Si la rapidez de propagación del sonido es 320[m/s], calcule la profundidad del pozo.

6-38) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez inicial de 20[m/s] ¿Cuándo hay que lanzar otro cuerpo hacia arriba desde el mismo punto y con la misma rapidez para que ambos cuerpos se encuentren 1,8[s] después que se ha lanzado el segundo cuerpo?

6-39) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia abajo con rapidez de 5,9[m/s]. Después de 0,40[s] se lanza otro cuerpo verticalmente desde el mismo punto. Cuando el primer cuerpo ha recorrido 6,7[m] es alcanzado por el segundo. Calcule la velocidad con que fue lanzado el segundo cuerpo.

6-40) Una piedra se deja caer de una altura H_1 respecto al suelo. Otra piedra, situada a altura H_2, menor que H_1, se lanza simultáneamente hacia arriba con velocidad inicial $\vec{v}_o$. Determine expresiones algebraicas para el instante y la posición en que ambas piedras chocan.

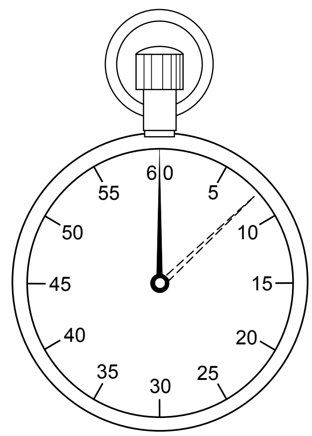
6-41) Demuestre que en un lanzamiento vertical en que $y(t)$ denota la posición instantánea del cuerpo y v_y su rapidez instantánea, la cantidad $v_y^2 + 2yg$ es independiente del tiempo.

6-42) Desde una altura de $30[m]$ respecto al suelo se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0 de tal manera que demora $10[s]$ en llegar al suelo. Escriba las ecuaciones para la posición y rapidez que describen el movimiento de este cuerpo. Calcule la velocidad con que llega al suelo. ¿En qué instante se encuentra el cuerpo a $20[m]$ del suelo?

Rapidez angular

Consideremos un cronómetro de "manecillas", por ejemplo el usado comunmente en el control de las carreras, que también suele emplearse en experimentos de Física.

En algunos cronómetros de este tipo están marcadas 300 rayitas en el borde de una superficie circular que indican "quintos de segundos". En la figura aparecen unas pocas rayitas.



Una "aguja" recta está montada sobre un eje que es perpendicular al círculo y que pasa por el centro de éste; ella debe dar una vuelta completa en 60[s].

Cuando el cronómetro está listo para ser usado la aguja apunta a la marca 60, la que también representa a la marca 0. Al poner "en marcha" el cronómetro en el instante que llamamos $0[s]$, la aguja comienza a girar y en cada instante forma cierto **ángulo** respecto a la posición inicial de la aguja. Este cronómetro está diseñado para que

$$\text{al transcurrir} \quad \left\{\begin{matrix} 15 \\ 30 \\ 45 \\ 60 \end{matrix}\right\} [s] \quad \text{el ángulo formado mida} \quad \left\{\begin{matrix} \pi/2 \\ \pi \\ 3\pi/2 \\ 2\pi \end{matrix}\right\} [rad]$$

Ya que estamos en presencia de un "ángulo que cambia con el tiempo" resulta natural introducir el concepto de "rapidez de cambio de ángulo" o **rapidez angular**.

A cada intervalo de tiempo Δt, transcurrido desde el instante inicial hasta un instante determinado, corresponde un cambio angular $\Delta\varphi$. Entonces el cuociente:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

define a la rapidez angular media $\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

- Si entre los instantes $t = 0$ y $t = 15[s]$, la aguja del cronómetro pasa del ángulo $\varphi = 0$ al ángulo $\varphi = \pi/2\,[\text{rad}]$, la rapidez angular media es:

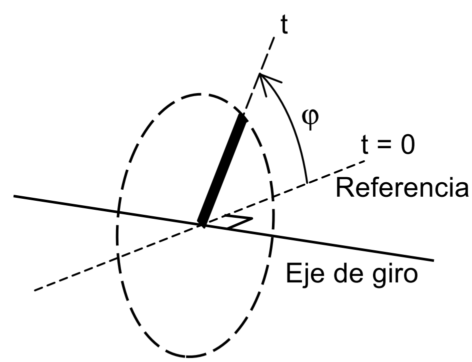
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\left(\pi/2 - 0\right)[\text{rad}]}{(15-0)[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad}/\text{s}]$$

- Y si entre los 15[s] y los 45[s] el cambio de ángulo es $\Delta\varphi = \pi[\text{rad}]$, la rapidez angular correspondiente es:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi[\text{rad}]}{30[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad}/\text{s}]$$

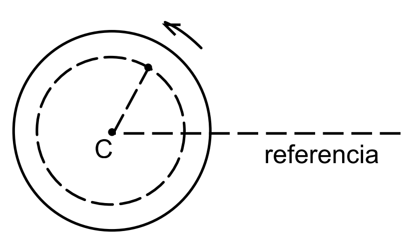
Note que el valor de la rapidez angular media es igual en estos dos casos. Una característica importante de un buen cronómetro es que la rapidez angular media del movimiento de la aguja sea la misma para cualquier intervalo de tiempo, esto es, que la rapidez angular sea constante.

El movimiento de una varilla que gira alrededor de un eje perpendicular a ella puede ser descrito por el **ángulo** que forma con una dirección de referencia convenientemente escogida. Como al moverse la varilla tal ángulo cambia con el tiempo, podemos asociar una **rapidez angular** a este tipo de movimiento. Tome, por ejemplo, el movimiento de cada una de las barras que soportan los pedales de una bicicleta.

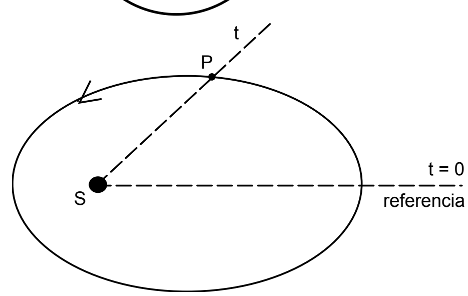


Marquemos un punto en un disco y pensemos en el **radio** que une este punto con el **centro**. Al girar el disco tal radio se desplaza con cierta rapidez angular. El movimiento de una marca en un neumático montado en un automóvil es también otro ejemplo ilustrativo de un movimiento angular.

DISCO GIRANDO

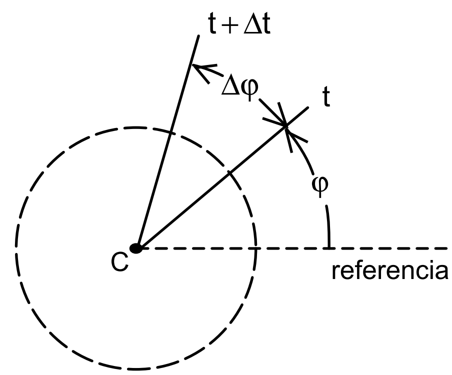


Análogamente, si una partícula (satélite, planetas) describe una órbita alrededor de cierto centro (planeta, sol), la línea recta que une a la partícula con tal centro describe un ángulo respecto a una dirección escogida. Podemos asociar a este movimiento traslacional una rapidez angular.



En general, cuando un objeto gira la *línea indicadora del giro* describe (o "barre") un ángulo $\Delta\varphi$ en un intervalo de tiempo Δt, entonces definimos su "rapidez angular media" por:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



En el Sistema Internacional las unidades fundamentales de medición del tiempo y del ángulo son 1[s] y 1[rad] respectivamente, resultando como unidad derivada de rapidez angular 1[rad/s]; esto es, expresamos:

$$\omega = a\left[\text{rad}/\text{s}\right]$$

,

siendo *a* el número de medición. Por supuesto podemos usar otras unidades de tiempo y de ángulo y establecer las equivalencias correspondientes de unidades.

Un método para determinar la rapidez angular media de un objeto que gira es contar el número de vueltas o de revoluciones que completa en cierta unidad de tiempo; de esto proviene el uso de la unidad: una "revolución por minuto" . . . 1 [r.p.m] $\hat{=}$ 1 [rev/min]

con la equivalencia:

$$1\left[\text{rev}/\text{min}\right] \hat{=} \frac{2\pi\left[\text{rad}\right]}{60\left[\text{s}\right]} \hat{=} \frac{\pi}{30}\left[\text{rad}/\text{s}\right]$$

Ya hemos dicho que un número "no tiene dimensión física" y hemos convenido en anotar *dim* (número) = 1; en particular *dim* (ángulo) = 1, por lo tanto

$$\text{dim}(\omega) = \frac{\dim(\text{ángulo})}{\dim(\text{tiempo})} = \frac{1}{\tau} = \tau^{-1}$$

Por tal razón, la rapidez angular se expresa a veces por:

$$\omega = a\left[\ \text{rad}/\text{s}\ \right] \hat{=}\ a\left[1/\text{s}\right] \hat{=}\ a\left[\text{s}^{-1}\right]$$

Manejemos estos conceptos en los siguientes ejemplos :

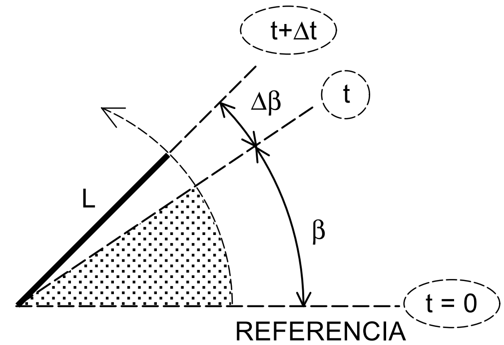
- Al escuchar un disco antiguo de "78[r.p.m.]" nos damos cuenta que está rayado. ¿Cuál es la rapidez angular de la raya?

Entendemos que un disco de " 78 [r.p.m.] " debe escucharse en un tocadiscos cuyo plato gire con rapidez angular igual a 78[rev/min]. La rapidez angular de la "raya" es:

$$\bar{\omega} = 78\left[\text{rev}/\text{min}\right] \hat{=} 78 \cdot \frac{2\pi\left[\text{rad}\right]}{60\left[\text{s}\right]} \hat{=} \frac{78 \cdot \pi}{30}\left[\text{rad}/\text{s}\right] \simeq 8{,}2\left[\text{rad}/\text{s}\right]$$

- Una varilla muy delgada de 40[cm] de largo está colocada sobre una mesa plana y se hace girar alrededor de un extremo con rapidez angular media $\overline{\omega}_L = 3{,}0\left[\text{grado}/\text{s}\right]$ Calculemos la "rapidez media del aumento del *área barrida* por la varilla".

Marquemos una línea de referencia para medir el desplazamiento angular de la varilla. Llamemos t = 0 a un instante en que la varilla pasa por esa línea.



En cierto instante t la varilla forma un ángulo $\beta\ [\text{rad}]$ con la línea de referencia. El área barrida por la varilla es el "sector circular" determinado por ese ángulo (área achurada de la figura):

$$A(\beta) = \pi L^2 \cdot \frac{\beta}{2\pi} = \frac{L^2}{2} \cdot \beta$$

Al transcurrir un intervalo de tiempo Δt, a partir de t, el ángulo incrementa en $\Delta\beta$ y el área barrida cambia al valor:

$$A(\beta+\Delta\beta) = \frac{L^2}{2}\cdot(\beta+\Delta\beta) = \frac{L^2}{2}\cdot\beta + \frac{L^2}{2}\cdot\Delta\beta = A(\beta) + \frac{L^2}{2}\cdot\Delta\beta$$

con lo cual el área barrida incrementa en:

$$\Delta A = A(\beta+\Delta\beta) - A(\beta) = \frac{L^2}{2}\cdot\Delta\beta$$

y la "rapidez de cambio del área barrida" es:

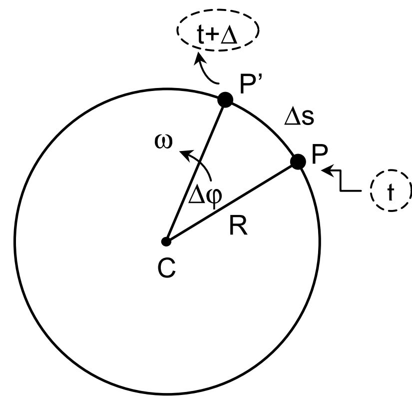
$$\overline{v}_A = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L^2}{2}\cdot\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{L^2}{2}\cdot\overline{\omega}_L$$

Al evaluar esta expresión con los datos L = 40[cm] y $\omega_L = 3{,}0\left[\text{grado}/\text{s}\right]$ obtenemos:

$$\overline{v}_A = \frac{\left(40[\text{cm}]\right)^2}{2}\cdot 3{,}0\left[\text{grado}/\text{s}\right]\cdot\frac{2\pi[\text{rad}]}{360[\text{grado}]} \simeq 42\left[\text{cm}^2/\text{s}\right]$$

Movimiento circular

Cuando una "partícula" describe una **trayectoria circunferencial** respecto a un centro fijo, y también cuando nos referimos al movimiento de un "punto" de un cuerpo rígido que gira respecto a un eje fijo, hablamos de un **movimiento circular**.



Sea **P** la posición de la partícula (o del punto) en el instante t y sea **P'** su posición en el instante $t + \Delta t$.

El "largo del camino recorrido" por la partícula o por el punto durante el intervalo de tiempo Δt es el largo del arco **PP'**:

$$\overset{\frown}{PP'} = \Delta s = R \cdot \Delta\varphi$$

donde R es el radio, constante, de la trayectoria y $\Delta\varphi$ está medido en radianes.

La rapidez media $\overline{v}$ para este movimiento de la partícula en la circunferencia es:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \overline{\omega} \qquad \overline{v} = \overline{\omega} \cdot R$$

donde $\overline{\omega}$ es la "rapidez angular media" correspondiente al rayo que une la partícula o el punto con el centro o eje de giro.

Usando, por ejemplo, $R = a[m]$ y $\omega = b\left[rad/s\right] \triangleq b\left[1/s\right]$ obtenemos:

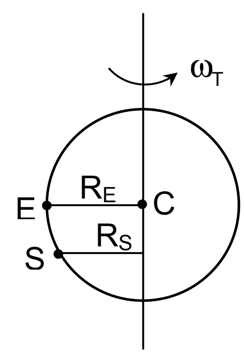
$$\overline{v} = \overline{\omega} \cdot R = b\left[1/s\right] \cdot a\left[m\right] \triangleq a \cdot b\left[m/s\right]$$

lo que muestra la consistencia de las unidades de medición empleadas.

- Consideremos el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje.

  Dado que la Tierra ejecuta una revolución cada 24[h], su rapidez angular es:

$$\overline{\omega}_T = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi\left[rad\right]}{24\left[h\right]} \triangleq \cdot \frac{\pi}{12}\left[rad/h\right]$$



El radio de la Tierra es aproximadamente 6400[km]. Entonces, una persona en un punto del "ecuador" se traslada, debido a la rotación, con rapidez:

$$\overline{v}_E = \overline{\omega}_T R_E = \frac{\pi}{12}\left[\text{rad/h}\right] \cdot 6400\left[\text{km}\right] \triangleq \frac{\pi \cdot 6400}{12}\left[\text{km/h}\right] \simeq 1700\left[\text{km/h}\right]$$

El "radio de giro" correspondiente a Santiago vale aproximadamente 5330[km]; entonces, un árbol en la Plaza de Armas describe en 5:15 horas un "arco de circunferencia" determinado por:

$$\Delta s = \overline{v}_S \cdot \Delta t = \left(\omega_T \cdot R_S\right) \cdot \Delta t$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[\text{rad/h}\right] \cdot 5330\left[\text{km}\right] \cdot 5{,}25\left[\text{h}\right]$$

$$\Delta s \simeq 7300\left[\text{km}\right]$$

Vocabulario: Período, Frecuencia

Si el movimiento circular se realiza con rapidez angular **constante** hablamos de "movimiento circular uniforme".

La partícula que describe este movimiento requiere un **mismo** tiempo T para completar una vuelta o revolución; llamamos **período** de revolución a este tiempo.

El significado de período implica que si la partícula se encuentra en cierto lugar en el instante t, se encontrará en el **mismo** lugar en el instante t + T y también en los instantes $t + nT$, siendo n un entero.

Denominamos "**frecuencia** de revolución" al "número de revoluciones efectuadas por *unidad de* tiempo":

Si se efectúan *n* revoluciones en un tiempo τ la frecuencia es n/τ.

De tales definiciones obtenemos la siguiente relación entre período T y la frecuencia f :

$$f = \frac{1}{T} \qquad\qquad T = \frac{1}{f}$$

La unidad de frecuencia 1[1/s] se denomina **un hertz** , simbolizada por 1[Hz] .

- Cuando un tocadiscos está ajustado para girar a 45[rev/min] , el período de rotación de un punto del disco es:

$$T = \frac{1}{45[1/\text{min}]} \triangleq \frac{1}{45}[\text{min}] \triangleq \frac{1 \cdot 60}{45}[\text{s}] \simeq 1{,}3[s]$$

Vemos que en este problema la rapidez angular ω del disco es de $45[\text{vueltas/min}]$. Igualmente la frecuencia f del movimiento circular del disco es de $45[\text{vueltas/min}]$. Por eso podemos afirmar que en el movimiento circular uniforme, la rapidez angular ω y la frecuencia f son equivalentes.

Esta afirmación no es extendible a cualquier situación. Cuando la rapidez angular ω se mide en $[\text{rad/s}]$ y la frecuencia en $[1/\text{s}]$, la relación entre ambas es:

$$\omega = 2\pi f$$

Ejercicios

6-43) Estime la rapidez angular media del brazo de un tocadiscos al escuchar totalmente un vinilo de "33 [r.p.m.] ".

6-44) Suponga que recorta un trozo de cartón de forma de triángulo equilátero, baja las perpendiculares de los vértices a los lados opuestos, hace un agujero en el punto de intersección de estas perpendiculares y lo coloca en un tocadiscos ajustado para girar a 16 [r.p.m.]. Determine la rapidez angular y la rapidez de traslación de los vértices del triángulo y de los pies de las perpendiculares.

6-45) Un joven ensaya saltos ornamentales en la piscina saltando de un tablón de 3,0[m] de altura y da dos vueltas y media antes de entrar al agua. Si emplea 1,3[s] en tocar agua ¿cuál es su rapidez angular media?

6-46) Al controlar un reloj con un "reloj patrón" observamos que atrasa en término medio "17 segundos por día". Exprese las rapideces angulares de las "agujas" de este reloj en término de las rapideces angulares de las correspondientes agujas del reloj patrón.

Relojes

El horario, el minutero y el segundero de un reloj tienen un movimiento circular uniforme y en consecuencia, podemos asignarles una rapidez angular a cada uno de ellos. Para relojes "perfectos" determinamos tales rapideces angulares en la siguiente forma:

El **horario** barre un ángulo de $2\pi[\text{rad}]$ en 12[h] , por lo tanto, su rapidez angular es:

$$\omega_H = \frac{2\pi[\text{rad}]}{12[\text{h}]} \triangleq \frac{\pi}{6}[\text{rad / h}] \triangleq \frac{\pi}{360}[\text{rad / min}]$$

el **minutero** describe $2\pi[\text{rad}]$ en 60[min], entonces:

$$\omega_M = \frac{2\pi[\text{rad}]}{60[\text{h}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad / min}] \triangleq \frac{\pi}{1800}[\text{rad / s}]$$

el **segundero** lo hace en 60[s], dando:

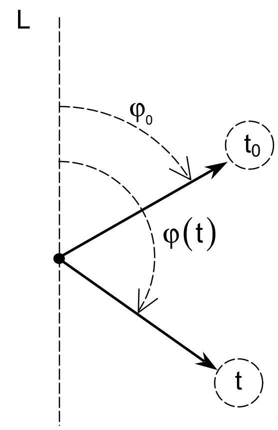
$$\omega_S = \frac{2\pi[\text{rad}]}{60[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad / s}] \triangleq 120\pi\,[\text{rad / h}] \triangleq 2\pi\left[\text{rad}/\text{min}\right]$$

Existe una serie de problemas típicos e interesantes sobre las posiciones (ángulos) que ocupan las agujas del reloj en determinado instante; para resolverlos usamos las relaciones de ángulos, tiempos y rapideces angulares y le advertimos que ¡un dibujo **cuidadoso** es una buena ayuda!

Sea L una recta de referencia fija y una manecilla que está girando con una rapidez angular constante ω

El ángulo $\varphi(t)$ descrito por la manecilla da la posición angular de la manecilla.

Esta posición de la manecilla está determinada por la ecuación $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$



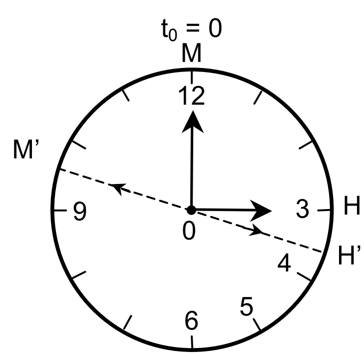
* ¿A qué hora entre las 3 y las 4 están opuestos el horario y el minutero?

En la figura adjunta usamos como instante referencia "las tres": $t_0 = 0$, a "las 3 hrs".

→ Ecuación del movimiento de rapidez angular $\omega = cte$.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

→ Ecuación para el horario



$$\omega_h = \frac{\pi}{360}[\mathrm{rad/min}] \quad ; \quad t_0 = 0$$

$$\varphi_{0h} = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MOH$$

$$\varphi_h(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{360}t$$

→ Ecuación para el minutero

$$\omega_m = \frac{\pi}{30}[\mathrm{rad/min}] \quad ; \quad \varphi_{0,m} = 0 \quad ; \quad t_0 = 0$$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi}{30}t$$

→ Condición del problema:

Para un cierto instante t debe cumplirse que:

$$\varphi_m(t) - \varphi_h(t) = \pi$$

$$\frac{\pi \cdot t}{30} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot t}{360} = \pi \quad \Big/ \cdot \frac{360}{\pi}$$

$$12 \cdot t - 180 - t = 360$$

$$11t = 540$$

$$t = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11}[\text{min}] \approx 49{,}1[\text{min}]$$

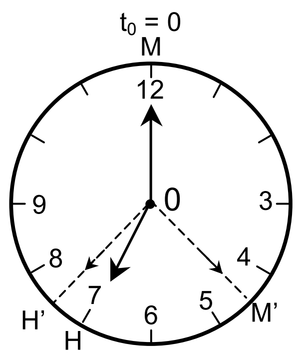
$$t = 49{,}1[\text{min}]$$

Luego la hora en que se cumple la condición del problema es:

3 horas 49,1 [min]

* * ¿A qué hora entre las 7 y las 8 el horario y el minutero forman un ángulo recto?

Entre las 7 y las 8, el horario y el minutero determinan un ángulo recto en dos ocasiones: antes y después que el minutero pase sobre el horario.



Consideremos la primera situación:

→ Ecuación del movimiento $\omega = \text{cte}$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega\ (t - t_0)$$

Instante de referencia $t_0 = 0$ a las 7 horas

→ Ecuaciones para el horario

$$\varphi_{0h} = \measuredangle \text{MOH(ángulo convexo)} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\varphi_h(t) = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{360}t$$

→ Ecuaciones para el minutero

$$\varphi_{0m} = 0$$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi t}{30}$$

→ Condición del problema: $\measuredangle H'OM' = \frac{\pi}{2}$

Luego:

$$\varphi_h(t) - \varphi_m(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi t}{360} - \frac{\pi t}{30} = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 21{,}8\ [\text{min}]$$

La condición se cumple en la primera ocasión a las 7[h] 21,8 [min].

Compruebe usted que se forma un segundo ángulo recto entre las manecillas a las 7 horas 54,5 minutos.

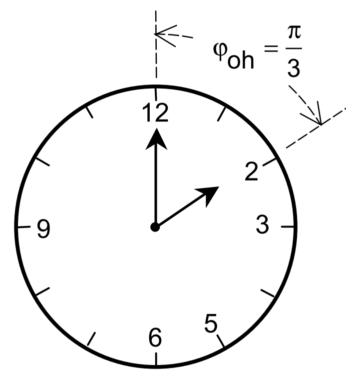
* * * La hora es entre las 2 y las 3. Dentro de 10[min] el minutero estará delante del horario como lo está ahora por detrás ¿qué hora es?

Condición del problema: $\alpha = \beta$

$\rightarrow$ Ecuación del movimiento

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

$t_0 = 0$



$\rightarrow$ Para el instante t (ahora):

Horario: $\varphi_{0h} = \frac{\pi}{3}$ $\qquad \omega_h = \frac{\pi}{360}$

$$\varphi_h(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi t}{360}$$

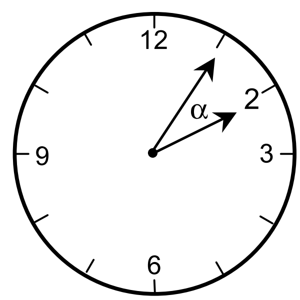
Minutero: $\varphi_{0m} = 0$ $\qquad \omega_m = \frac{\pi}{30}$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi t}{30}$$

$$\alpha = \varphi_h(t) - \varphi_m(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi t}{360} - \frac{\pi t}{30}$$

$$\alpha = \frac{120\pi - 11\pi t}{360}$$

t (ahora)



$\rightarrow$ 10 minutos después, el instante es $t + 10$

Horario: $\varphi_{0h} = \frac{\pi}{3}$

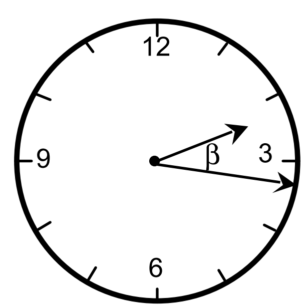
$$\varphi_h(t+10) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(t+10)}{360} = \frac{130\pi + \pi t}{360}$$

Minutero: $\varphi_{0m} = 0$

$$\varphi_m(t+10) = \frac{\pi(t+10)}{30} = \frac{\pi t + 10\pi}{30}$$

$$\beta = \varphi_m(t+10) - \varphi_h(t+10) = \frac{\pi t + 10\pi}{30} - \frac{130\pi + \pi t}{360}$$

Para el instante t + 10



$$\beta = \frac{11\pi t - 10\pi}{360}$$

Usando la condición del problema:

$\alpha = \beta$

$$\frac{120\pi - 11\pi t}{360} = \frac{11\pi t - 10\pi}{360}$$

$$t = \frac{130}{22} \approx 5{,}9\,[\text{min}]$$

La hora es 2 horas 5,9 minutos.

Ejercicios

6-47) A qué hora entre las 4 y las 5 coinciden el minutero y el horario?

6-48) Calcule el ángulo que forman el horario y el minutero a las 17[h] 40[min].

6-49) El borde de la "esfera" de un reloj está marcado con 60 divisiones. ¿A qué hora entre las 8 y las 9 el minutero dista exactamente 10 divisiones del horario?

6-50) ¿A qué hora entre las 3 y las 4 estará el minutero un minuto delante del horario?

6-51) ¿Cuándo estarán juntas las manecillas de un reloj entre las 6 y las 7?

6-52) Un individuo ha determinado que su hijo puede tolerar 37 vueltas en carrusel antes de marearse. Le ha permitido subirse a uno en que los "caballitos" avanzan a 6[mile/h] en una circunferencia de 7,8[m] de diámetro. El "viaje" duró 5 minutos, ¿alcanzó a marearse el niño ?

6-53) Una centrífuga de "alta velocidad" tiene un tambor de 30,0[cm] de diámetro que puede girar hasta seiscientas mil revoluciones por minuto. Determine la rapidez máxima de un punto en su borde, en [m/s] .

6-54) Al hacer cierto experimento se logra que un electrón describa una trayectoria circunferencial de 15,0[cm] de radio con rapidez media de $8{,}0 \cdot 10^5$[m/s]. Calcule el número de vueltas que daría el electrón en 2[min].

6-55) La luna gira alrededor de la Tierra completando una revolución en 27,3[d]. Suponga que describe una órbita circular de $2{,}9 \cdot 10^5$[mile] de radio. Calcule la "rapidez media de traslación" de la Luna, en [m/s].

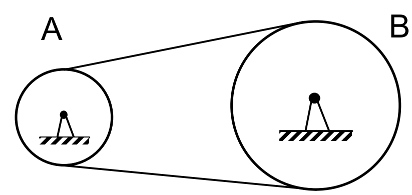
6-56) Determine la "rapidez de avance" de una bicicleta cuando sus ruedas, de 75[cm] de diámetro, giran con rapidez angular de 20[rad/s]. Exprese el resultado en [km/h].

6-57) Un método para medir la rapidez de un proyectil consiste en montar dos discos de cartón en un eje, hacer girar el eje y lanzar el proyectil paralelamente al eje. En cierto ensayo los discos se colocan a 90[cm] de distancia, se hacen girar a 1740[r.p.m.] y se mide que los agujeros dejados por el proyectil están desplazados en un ángulo de 20°. Determine la rapidez del proyectil; examine alternativas y comente.

6-58) La luz proveniente de un "flash" se hace pasar a través de una ranura de una rueda "dentada" que está girando. La rueda tiene 600 dientes; dientes y ranuras están uniformemente distribuidos en su borde. El flash es reflejado por un espejo colocado a 550[m] de distancia de la rueda y regresa justo a tiempo para pasar por la ranura siguiente. Determine la rapidez angular de la rueda para que esto haya sido posible.

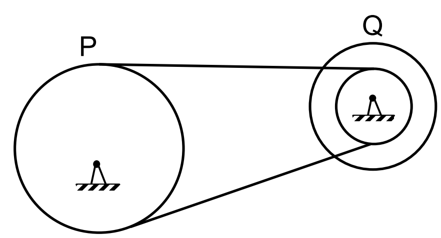
6-59) En un ensayo de frenado de una rueda se ha encontrado que su ángulo de giro cambia con el tiempo según la función $\varphi(t) = a + bt - ct^2$. Las constantes a, b y c son positivas y t es el tiempo transcurrido desde que se aplican los frenos. Determine algebraicamente la rapidez angular media de las ruedas al considerar "pequeños" intervalos de tiempo. Encuentre una relación que dé el instante en que se detiene la rueda. Determine la rapidez angular instantánea.

6-60) Dos ruedas **A** y **B** unidas por una correa que no desliza tienen radios R_A = 0,17[m] y R_B =0,32[m], respectivamente. La rueda **A** tiene una rapidez angular $\omega_A = 1{,}5$ [rad/s]. Calcule la rapidez angular de la rueda **B** y la rapidez de un punto de la correa.



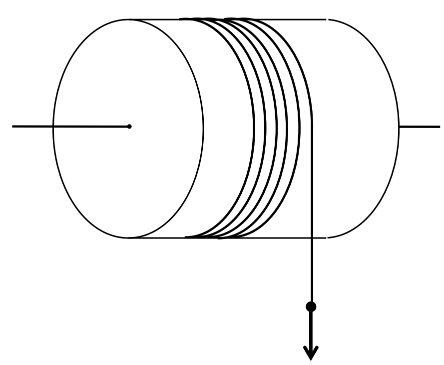
6-61) Un disco gira con rapidez angular constante alrededor de un eje perpendicular a él, que pasa por su centro. La rapidez lineal de un punto en el borde del disco es 2,8 veces mayor que la rapidez lineal de otro punto que se encuentra a 6,5[cm] más cerca del eje de giro. Calcule el radio del disco.

6-62) La rueda **P** está unida, mediante una correa que no desliza, al conjunto **Q** de dos ruedas que forman un solo cuerpo. El radio de la rueda **P** es de 32[cm] y los radios del conjunto **Q** son 7,0[cm] y 24[cm] respectivamente. La correa tiene una rapidez de 1,9[cm/s]. Calcular la rapidez angular y la rapidez de un punto situado en el borde de cada una de las tres ruedas.



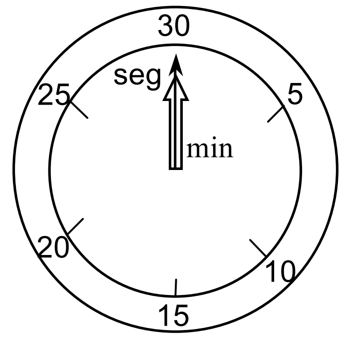
6-63) Suponga que al dar un paseo en bicicleta recorre una distancia de 31[km]. El diámetro de las ruedas es 50[cm]. Calcule el número de vueltas dado por cada rueda. Si pedalea durante 2,3[h] en el paseo, ¿cuál fue la rapidez angular media de las ruedas?

6-64) Una cuerda está enrollada sobre la superficie lateral de un tambor cilíndrico de 50[cm] de diámetro. Si la cuerda se desenrolla con rapidez constante de 0,20[m/s], ¿cuál es la rapidez angular del tambor? Calcule el largo del trozo de cuerda desenrollada en 5,0[s].



6-65) Ahora el reloj indica las 9:03 horas. ¿Cuál será el ángulo formado entre el minutero y el horario dentro de 17 minutos?

6-66) En un cronómetro la "esfera" está graduada hasta 30. El segundero da una vuelta en 30[s] y el minutero da una vuelta en 30[min]. Parten juntos señalando ambos 30. ¿Cuántos segundos después de la partida el minutero y el segundero forman un ángulo de 180º por primera vez?



6-67) Son las 16:46 horas. ¿Dentro de cuántos minutos el ángulo que forman el horario y el minutero será el doble del que forman ahora?

6-68) Tenemos un reloj en que la "esfera" está graduada del 1 al 6 en horas. Cuando un reloj normal indica las 00:00[h], este reloj tiene las manecillas en la posición que indica la figura. Calcule la posición del horario y del minutero (que da dos vueltas en cada hora) de este reloj cuando un reloj normal indique las 2:30[h].