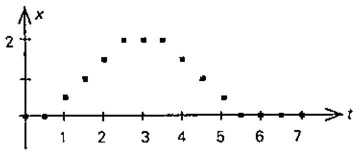
$$Y_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta t}$$

___ **32.1** Plantee un diagrama de bloques correspondiente.

___ **32.2** Si Δt=0,5 y si x evoluciona según el gráfico al lado,

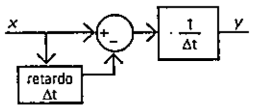


prediga la evolución de y completando la tabla al lado.

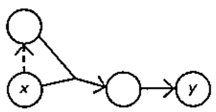
t	x	y
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
5·Δt		
6·Δt		
7·Δt		
8·Δt		
9·Δt		
10·Δt		
11·Δt		
12·Δt		
...		

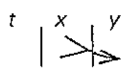
Solución:

___ **32.1** Por ejemplo:



___ **32.2**





t	x	y
0	0	
Δt	0	0
2·Δt	0,5	1
3·Δt	1	1
4·Δt	1,5	1
5·Δt	2	1
6·Δt	2	0
7·Δt	2	0
8·Δt	1,5	-1
9·Δt	1	-1
10·Δt	0,5	-1
11·Δt	0	-1
12·Δt	0	0
...		

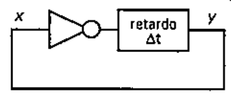
24.33

Prediga las evoluciones de las variables en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas en cada caso, completando tablas como la puesta al lado,

t	x	y
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
...		

hasta que las evoluciones (excluyendo las de t) empiecen a repetirse.

___ **33.1** Y_0=0

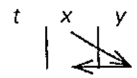


___ **33.2** Y_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 33.1.

Solución:

___ **33.1**

$Y_k = \overline{X_{k-1}}$ y $X_k = Y_k$



(Revise el ejercicio 21.1)

t	x	y
0	0	0
Δt	1	1
2·Δt	0	0
...		

(La secuencia de estados de x e y entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt)

___ **33.2**

t	x	y
0	1	1
Δt	0	0
2·Δt	1	1
...		

(La secuencia de estados de x e y entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

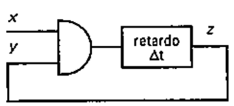
24.34

Prediga las evoluciones de las variables en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado,

t	x	y	z
0			
Δt			
2·Δt			
3·Δt			
4·Δt			
...			

hasta que las evoluciones (excluyendo las de t) empiecen a repetirse.

___ **34.1** X_k=0 si 0≤k, Z_0=0 y el diagrama de bloques al lado.

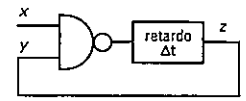


___ **34.2** X_k=0 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en **34.1**.

___ **34.3** X_k=1 si 0≤k, Z_0=0 y el mismo diagrama de bloques que en **34.1**.

___ **34.4** X_k=1 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.1.

___ **34.5** X_k=0 si 0≤k, Z_0=0 y el diagrama de bloques al lado.

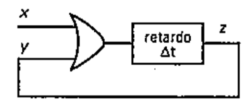


___ **34.6** X_k=0 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.5.

___ **34.7** X_k=1 si 0≤k, Z_0=0 y el mismo diagrama de bloques que en 34.5.

___ **34.8** X_k=1 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.5.

___ **34.9** X_k=0 si 0≤k, Z_0=0 y el diagrama de bloques al lado.

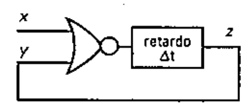


___ **34.10** X_k=0 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.9.

___ **34.11** X_k=1 si 0≤k, Z_0=0 y el mismo diagrama de bloques que en 34.9.

___ **34.12** X_k=1 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.9.

___ **34.13** X_k=0 si 0≤k, Z_0=0 y el diagrama de bloques al lado.

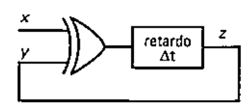


___ **34.14** X_k=0 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.13.

___ **34.15** X_k=1 si 0≤k, Z_0=0 y el mismo diagrama de bloques que en 34.13.

___ **34.16** X_k=1 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.13.

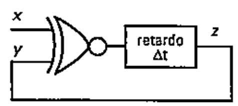
___ **34.17** X_k=0 si 0≤k, Z_0=0 y el diagrama de bloques al lado.



___ **34.18** X_k=0 si 0≤k, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 34.17.

___ **34.19** X_k=1 si 0≤k, Z_0=0 y el mismo diagrama de bloques que en 34.17.

— **34.20** $X_k=1$ si $0\leq k$, $Z_0=1$ y el mismo diagrama de bloques que en 34.17.



— **34.21** $X_k=0$ si $0\leq k$, $Z_0=0$ y el diagrama de bloques al lado.

— **34.22** $X_k=0$ si $0\leq k$, $Z_0=1$ y el mismo diagrama de bloques que en 34.21.

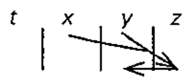
— **34.23** $X_k=1$ si $0\leq k$, $Z_0=0$ y el mismo diagrama de bloques que en 34.21.

— **34.24** $X_k=1$ si $0\leq k$; $Z_0=1$ y el mismo diagrama de bloques que en 34.21.

Solución:

— **34.1**

$Z_k = X_{k-1} \wedge Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.2: si se anulara el retardo, x=0, y=0 y z=0; x=1, y=0 y z=0; o x=1, y=1 y z=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

— **34.2**

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	0	0
2·Δt	0	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=Δt empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

— **34.3**

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0, empieza a repetirse cuando t=Δt).

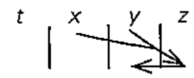
— **34.4**

t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0, empieza a repetirse cuando t=Δt).

— **34.5**

$Z_k = X_{k-1} \overline{\wedge} Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio **21.3**: si se anulara el retardo, x=0, y=1 y z=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	0	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=Δt empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

— **34.6**

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

— **34.7**

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	1	1
2·Δt	1	0	0
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt)

34.8

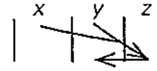
t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	1	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).

34.9

$Z_k = X_{k-1} \vee Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$

t *x* *y* *z*



(Revise el ejercicio 21.4: si se anulara el retardo, *x*=0, *y*=0 y *z*=0; *x*=0, *y*=1 y *z*=1; o *x*=1, *y*=1 y *z*=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

34.10

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	1	1
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

34.11

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	1	1
2·Δt	1	1	1
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=Δt empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).

34.12

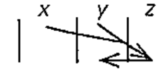
t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	1	1
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

34.13

$Z_k = X_{k-1} \vee Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$

t *x* *y* *z*



(Revise el ejercicio **21.5**: si se anulara el retardo, *x*=1, *y*=0 y *z*=0).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	0	0	0
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt.)

34.14

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	0	0
2·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt.)

34.15

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt.)

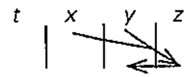
34.16

t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	1	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=Δt empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).

34.17

$Z_k = X_{k-1} \veebar Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.6: si se anulara el retardo, x=0, y=0 y z=0; o x=0, y=1 y z=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt.)

34.18

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt.)

34.19

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	1	1
2·Δt	1	0	0
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt.)

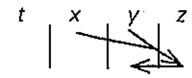
34.20

t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	1	1	1
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

34.21

$Z_k = X_{k-1} \Leftrightarrow Y_{k-1}$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.7: si se anulara el retardo, x=1, y=0 y z=0; o x=1, y=1 y z=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	0	0	0
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

34.22

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	0	0	0
2·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

34.23

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	0	0
...			

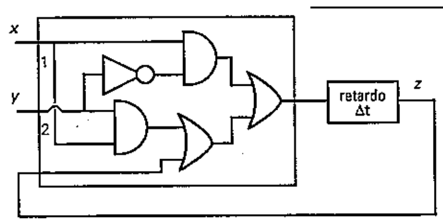
(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

34.24

t	x	y	z
0	1	1	1
Δt	1	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

24.35



___ **35.1** Plantee una fórmula que resuma la parte enmarcada en gris, como un solo bloque.

___ **35.2** Rediseñe ese bloque usando el método de Karnaugh.

___ **35.3** Formule cómo quedaría dependiendo *z* de *x* e *y* si se anulara el retardo; y plantee una tabla que resuelva la fórmula.

___ **35.4** Prediga la evolución de *z* completando la tabla puesta al lado,

t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	1	
2·Δt	1	0	
3·Δt	0	1	
4·Δt	0	0	
5·Δt	0	1	
...			

hasta que dicha evolución empiece a repetirse.

Solución:

___ **35.1** $$Z_{k+1} = (X_k \wedge \overline{Y_k}) \vee ((X_k \wedge Y_k) \wedge Z_k)$$

___ **35.2**

X_k	Y_k	Z_k	$\overline{Y_k}$	$X_k \wedge Y_k$	$X_k \wedge Y_k$	$(X_k \wedge Y_k) \vee Z_k$	Z_{k+1}
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

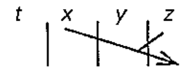
	0	0	1	1	X_k
	0	1	1	0	Y_k
0	0	0	1	1	
1	1	1	1	1	
Z_k					Z_{k+1}

$$Z_{k+1} = X_k \vee Z_k$$

___ **35.3** Si se anulara el retardo: $z = x \vee z$
(z no quedaría dependiendo de y)

x	z
0	0
0	1
1	1

___ **35.4**

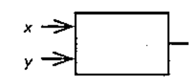


t	x	y	z
0	1	0	0
Δt	1	1	1
2·Δt	1	0	1
3·Δt	0	1	1
4·Δt	0	0	1
5·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y z entre *t*=3·Δt y *t*=4·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=5·Δt si *x*=0 para 3·Δt≤*t*).

24.36

Imaginemos que queremos una "memoria" electrónica simple, con variables binarias, con este diagrama de bloques externo:



y con el comportamiento siguiente:
- cuando *x*=0 e *y*=1, o *x*=1 *e y*=0, que *z* permanezca como está ("recordando" el 0 o el 1 que "recuerda");
- cuando *x*=0 e *y*=0 durante un tiempo suficiente, que *z* varíe a 0 (si no lo ha hecho) y permanezca así ("recordando" el 0 reforzado);
- cuando *x*=1 e *y*=1 durante un tiempo suficiente, que *z* varíe a 1 (si no lo ha hecho) y permanezca así ("recordando" el 1 reforzado).

___ **36.1** Diseñe la memoria internamente, usando el método de Karnaugh.

___ **36.2** Formule cómo quedaría dependiendo *z* de *x* e *y* si se anulara el retardo; y plantee una tabla que resuelva la fórmula.

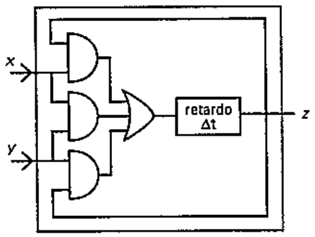
Solución:

36.1

	X_k: 0	0	1	1
Z_k \ Y_k	0	1	1	0
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Z_k $\qquad$ Z_{k+1}

$$Z_{k+1} = (Z_k \wedge X_k) \vee (X_k \wedge Y_k) \vee (Y_k \wedge Z_k)$$

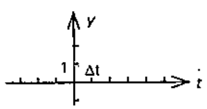


36.2 Si se anulara el retardo:
$z = (z \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$

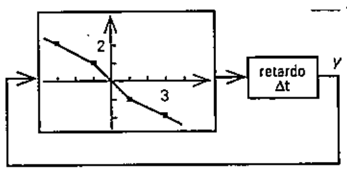
x	y	z
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

24.37

Prediga las evoluciones de *y* en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas, completando un gráfico como el puesto al lado.



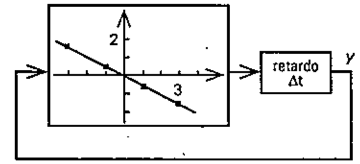
37.1 $Y_0=3$ y el diagrama de bloques al lado.



37.2 $Y_0=1$ y el mismo diagrama que en 37.1.

37.3 $Y_0=0{,}5$ y el mismo diagrama que en 37.1.

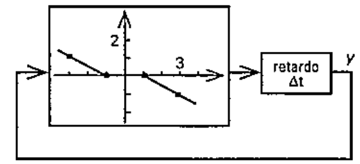
37.4 $Y_0=3$ y el diagrama de bloques al lado.



37.5 $Y_0=1$ y el mismo diagrama que en 37.4.

37.6 $Y_0=0{,}5$ y el mismo diagrama que en 37.4.

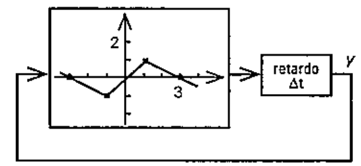
37.7 $Y_0=3$ y el diagrama de bloques al lado.



37.8 $Y_0=1$ y el mismo diagrama que en 37.7.

37.9 $Y_0=0{,}5$ y el mismo diagrama que en 37.7.

37.10 $Y_0=3$ y el diagrama de bloques al lado.



37.11 $Y_0=1$ y el mismo diagrama que en 37.10.

37.12 $Y_0=0{,}5$ y el mismo diagrama que en 37.10.

Solución:

37.1

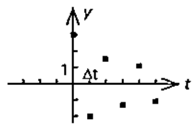
$$Y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } Y_{k-1} \le -1 \\ -Y_{k-1} & \text{si } -1 \le Y_{k-1} \le 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } 1 \le Y_{k-1} \end{cases}$$

t | *y* ↓

(Si se anulara el retardo, *y*=0).

t	y
0	3
Δt	-2
2·Δt	1,5
3·Δt	-1,25
4·Δt	1,125
5·Δt	-1,0625
...	

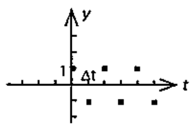
(y no tiende a 0)



37.2

t	y
0	1
Δt	-1
2·Δt	1
...	

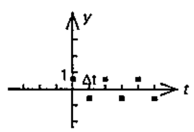
(y no tiende a 0; la secuencia de estados de y entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).



37.3

t	y
0	0,5
Δt	-0,5
2·Δt	0,5
...	

(y no tiende a 0; la secuencia de estados de y entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).



37.4

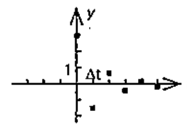
$$Y_k = \frac{1}{2} \cdot Y_{k-1}$$

t	y
	↓

(Si se anulara el retardo, y=0).

t	y
0	3
Δt	-1,5
2·Δt	0,75
3·Δt	-0,375
4·Δt	0,1875
5·Δt	-0,09375
...	

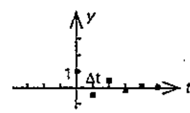
(y tiende a 0).



37.5

t	y
0	1
Δt	-0,5
2·Δt	0,25
3·Δt	-0,125
4·Δt	0,0625
5·Δt	-0,03125
...	

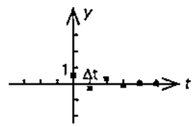
(y tiende a 0)



37.6

t	y
0	0,5
Δt	-0,25
2·Δt	0,125
3·Δt	-0,0625
4·Δt	0,003125
5·Δt	-0,0015625
...	

(*y* tiende a 0)



37.7

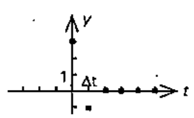
$$Y_k = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } Y_{k-1} \le -1 \\ 0 & \text{si } -1 \le Y_{k-1} \le 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } 1 \le Y_{k-1} \end{cases}$$

t	y
	↓

(Si se anulara el retardo, *y*=0).

t	y
0	3
Δt	-1
2·Δt	0
3·Δt	0
...	

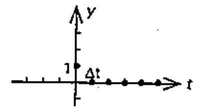
(El estado de *y* cuando *t*=2·Δt empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt).



37.8

t	y
0	1
Δt	0
2·Δt	0
...	

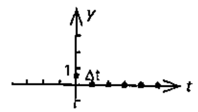
(El estado de *y* cuando *t*=Δt empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).



37.9

t	y
0	0,5
Δt	0
2·Δt	0
...	

(El estado de *y* cuando *t*=Δt empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).



37.10

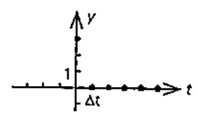
$$Y_k = \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } Y_{k-1} \le -1 \\ Y_{k-1} & \text{si } -1 \le Y_{k-1} \le 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } 1 \le Y_{k-1} \end{cases}$$

t	y
	↓

(Si se anulara el retardo, -1≤y≤1).

t	y
0	3
Δt	0
2·Δt	0
...	

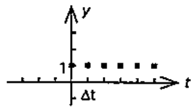
(El estado de *y* cuando *t*=Δt empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt).



37.11

t	y
0	1
Δt	1
...	

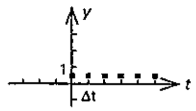
(El estado de y cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).



___ **37.12**

t	y
0	0,5
Δt	0,5
...	

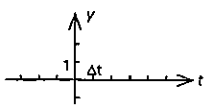
(El estado de y cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).



24.38

$$Y_k = \begin{cases} 0{,}5 \cdot Y_{k-1} & \text{si } Y_{k-1} \leq 0 \\ 2 \cdot Y_{k-1} & \text{si } 0 \leq Y_{k-1} \leq 1 \\ -Y_{k-1} + 3 & \text{si } 1 \leq Y_{k-1} \end{cases}$$

Prediga las evoluciones de y, con las condiciones indicadas, completando un gráfico como el puesto al lado.



___ **38.1** Y_0= -2

___ **38.2** Y_0=2

Solución:

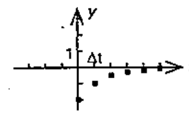
___ **38.1**

t	y
	↓

(Si se anulara el retardo, y=0 o y=1,5).

t	y
0	-2
Δt	-1
2·Δt	-0,5
3·Δt	-0,25
4·Δt	-0,125
5·Δt	-0,0625
...	

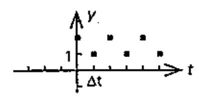
(y tiende a 0)



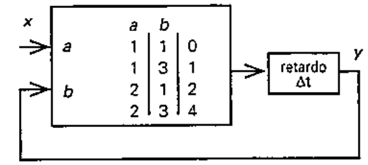
___ **38.2**

t	y
0	2
Δt	1
2·Δt	2
...	

(La secuencia de estados de y entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).



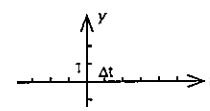
24.39



___ **39.1** Plantee una fórmula para interpolar la tabla cuando 1≤x≤2, 1≤y≤3

___ **39.2** Formule cómo quedaría dependiendo y de x si se anulara el retardo; y descubra las exigencias implícitas para que x e y varíen dentro de lo supuesto.

___ **39.3** Prediga la evolución de y, cuando X_k=1,5 si 0≤k·Δt e Y_0=2, completando el gráfico al lado.



Solución:

___ **39.1**

	1	2 (X_k)
1	0	2
3	1	4
Y_k	Y_{k+1}	

$$Y_{k+1} = \frac{2-X_k}{2-1}\cdot\frac{3-Y_k}{3-1}\cdot 0 + \frac{X_k-1}{2-1}\cdot\frac{3-Y_k}{3-1}\cdot 2$$

$$+\frac{2-X_k}{2-1}\cdot\frac{Y_k-1}{3-1}\cdot 1 + \frac{X_k-1}{2-1}\cdot\frac{Y_k-1}{3-1}\cdot 4$$

$$=\frac{-4+3\cdot X_k+X_k\cdot Y_k}{2}$$

___ **39.2** Si se anulara el retardo:

$$y = \frac{-4+3\cdot x+x\cdot y}{2}$$

luego $\quad y = \dfrac{-4+3\cdot x}{2-x}$

$1 \le x \le 2 \quad$ y $\quad 1 \le y \le 3$

luego $\quad 1 \le x \le 2 \quad$ y $\quad 1 \le \dfrac{-4+3\cdot x}{2-x} \le 3$

luego $\quad 1 \le x \le 2,\ 2-x \le -4+3\cdot x \quad$ y $\quad -4+3\cdot x \le 6-3\cdot x$

luego $\quad 1 \le x \le 2,\ \dfrac{3}{2} \le x \quad$ y $\quad x \le \dfrac{5}{3}$

luego $\quad \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{3}$

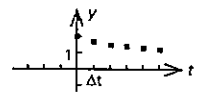
___ **39.3**

$Y_{k+1} = 0{,}25+0{,}75\cdot Y_k$

(Si se anulara el retardo, y=1).

t	y
0	2
Δt	1,75
2·Δt	1,5625
3·Δt	1,421875
4·Δt	1,31640625
5·Δt	1,2373046875
...	

(y tiende a 1)



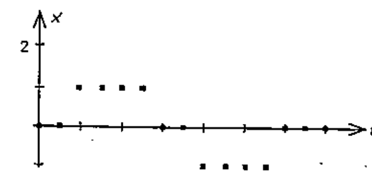
24.40

La fórmula siguiente se refiere a dos variables graduales, x e y, de las cuales la dependiente, y, es la aproximación de Euler de la integral de la dominante, x.

$Y_{k+1} = Y_k + X_k \cdot \Delta t$

___ **40.1** Plantee un diagrama de bloques correspondiente.

___ **40.2** Si Δt=0,5, si Y_0=0 y si x evoluciona como el gráfico al lado,

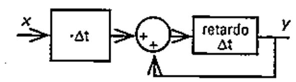


prediga la evolución de y, completando la tabla bajo el gráfico.

t	x	y
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
5·Δt		
6·Δt		
7·Δt		
8·Δt		
9·Δt		
10·Δt		
11·Δt		
12·Δt		
...		

Solución:

___ **40.1** Por ejemplo:

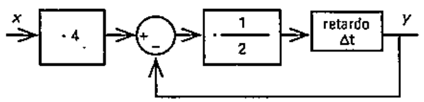


___ **40.2**

$t \quad x \quad y$

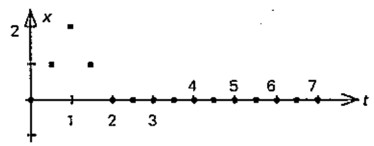
t	x	y
0	0	0
Δt	0	0
2·Δt	1	0
3·Δt	1	0,5
4·Δt	1	1
5·Δt	1	1,5
6·Δt	0	2
7·Δt	0	2
8·Δt	-1	2
9·Δt	-1	1,5
10·Δt	-1	1
11·Δt	-1	0,5
12·Δt	0	0
...		

24.41



___ **41.1** Formule cómo quedaría dependiendo *y* de *x* si se anulara el retardo.

___ **41.2** Si Δt=0,5, si Y_0=1 y si *x* evoluciona según el gráfico al lado,



prediga la evolución de *y*, completando la tabla al lado.

t	x	y
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
5·Δt		
...		

Solución:

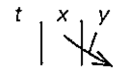
___ **41.1** Si se anulara el retardo:

$$y = \frac{1}{2}\cdot(4\cdot x - y)$$

luego $\quad y = \frac{4}{3}\cdot x$

___ **41.2**

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}\cdot(4\cdot X_k - Y_k)$$



(Si se anulara el retardo, *y*=0 si *x*=0).

t	x	y
0	0	1
Δt	1	-0,5
2·Δt	2	2,25
3·Δt	1	2,875
4·Δt	0	0,5625
5·Δt	0	-0,28125
...		

(y tendería a 0 si *x*=0 para 4·Δt ≤*t*).

24.42

$$Y_{k+1} = -\frac{Y_k^2 + X_k}{3}$$

___ **42.1** Plantee un diagrama de bloques.

___ **42.2** Formule cómo quedaría dependiendo *y* de *x* si se anulara el retardo.

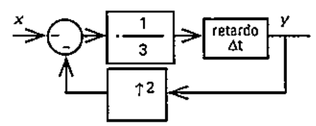
___ **42.3** Prediga las evoluciones de *y* completando tablas como la puesta al lado,

t	x	y
0	2	
Δt	2	
2·Δt	2	
3·Δt	2	
4·Δt	2	
5·Δt	2	
...		

donde Y_0 coincide con un estado de *y* si se anulara el retardo, con el 90% de ese estado o con el 110% de ese estado.

Solución:

___ **42.1** Por ejemplo:



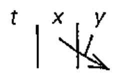
42.2 Si se anulara el retardo:

$$y = -\frac{y^2 + x}{3}$$

luego $\qquad y^2 + 3 \cdot y + x = 0$

luego $\qquad y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot x}}{2}$

42.3



(Si se anulara el retardo, y=-2 o y=-1).

t	x	y
0	2	-2,2
Δt	2	-2,28
2·Δt	2	-2,399466666666...
3·Δt	2	-2,585813428148...
4·Δt	2	-2,895477028397...
5·Δt	2	-3,461262407325...
...		

(y tiende a $-\infty$).

t	x	y
0	2	-2
Δt	2	-2
...		

(y se mantiene en -2: su estado cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

t	x	y
0	2	-1,8
Δt	2	-1,746666666666....
2·Δt	2	-1,683614814814...
3·Δt	2	-1,611519614887...
4·Δt	2	-1,532331823056...
5·Δt	2	-1,449346938650...
...		

(y tiende a -1).

t	x	y
0	2	-1,1
Δt	2	-1,07
2·Δt	2	-1,0483
3·Δt	2	-1,03297763
4·Δt	2	-1,022347594693...
5·Δt	2	-1,015064868125...
...		

(y tiende a 1).

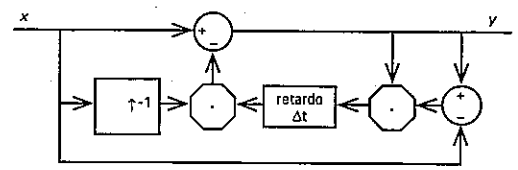
t	x	y
0	2	-1
Δt	2	-1
...		

(y se mantiene en 1: su estado cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

t	x	y
0	2	-0,9
Δt	2	-0,936666666666...
2·Δt	2	-0,959114814814...
3·Δt	2	-0,973300409332...
4·Δt	2	-0,982437895602...
5·Δt	2	-0,988394739571...
...		

(y tiende a -1).

24.43



Prediga las evoluciones de y, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado.

t	x	y
0	3	
Δt	3	
2·Δt	3	
3·Δt	3	
4·Δt	3	
...		

___ **43.1** Y_0=4.

___ **43.2** Y_0=3.

___ **43.3** Y_0=2.

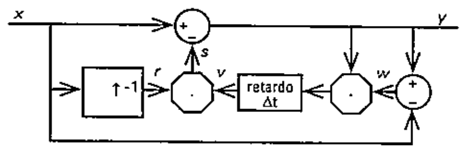
___ **43.4** Y_0=-2.

___ **43.5** Y_0=-3.

___ **43.6** Y_0=-4.

Solución:

___ **43.1**



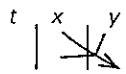
$$Y_k = X_k - S_k, \quad S_k = R_k \cdot V_k, \quad R_k = X_k^{-1},$$

$$V_k = Y_{k-1} \cdot W_{k-1} \quad \text{y} \quad W_k = Y_k - X_k$$

luego $Y_k = X_k - S_k = X_k - R_k \cdot V_k = X_k - X_k^{-1} \cdot Y_{k-1} \cdot W_{k-1}$

$$= X_k - X_k^{-1} \cdot Y_{k-1} \cdot (Y_{k-1} - X_{k-1})$$

luego $Y_k = X_k - X_k^{-1} \cdot Y_{k-1}^{\,2} + X_k^{-1} \cdot X_{k-1} \cdot Y_{k-1}$



(En particular, si x=3 para 0<k·Δt, $Y_k=3+Y_{k-1}-Y_{k-1}^{2/3}$. Revise el ejercicio 29.3: si se anulara el retardo, y=-3 o y=3)

t	*x*	*y*
0	3	4
Δt	3	1,666666666666...
2·Δt	3	3,740740740740...
3·Δt	3	2,076360310928...
4·Δt	3	3,639269597328...
...		

(y tiende a 3).

___ **43.2**

t	*x*	*y*
0	3	3
Δt	3	3
...		

(*y* se mantiene en 3: su estado cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

___ **43.3**

t	*x*	*y*
0	3	2
Δt	3	3,666666666666...
2·Δt	3	2,185185185185...
3·Δt	3	3,593507087334...
4·Δt	3	2,289076025093...
...		

(*y* tiende a 3).

___ **43.4**

t	*x*	*y*
0	3	-2
Δt	3	-0,333333333333...
2·Δt	3	2,629629629629...
3·Δt	3	3,324645633287...
4·Δt	3	2,640222770974...
...		

(*y* tiende a 3).

___ **43.5**

t	*x*	*y*
0	3	-3
Δt	3	-3
...		

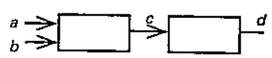
(*y* se mantiene en -3: su estado cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

— **43.6**

t	x	y
0	3	-4
Δt	3	-6,333333333333...
2·Δt	3	-16,703703703703...
3Δt	3	-106,708276177411...
4Δt	3	-3899,260344429021...
...		

(y tiende a $-\infty$).

24.44



Imaginemos que una variable, d, depende de otra, c, y ésta a su vez depende de otras dos, a y b, según el diagrama al lado,

y según las tablas bajo el diagrama.

a \ b	0	1	2
0	1	3	4
2	2	3	5

c

c	d
1	0
2	1
3	2
4	1
5	0

— **44.1** Plantee una fórmula para interpolar la tabla de c y d cuando $1 \leq c \leq 3$, y otra para interpolarla cuando $3 \leq c \leq 5$.

— **44.2** Complete la tabla puesta al lado usando la fórmula para interpolar establecida en 44.1, cuando $3 \leq c \leq 5$:

c	d
1	
2	
3	
4	
5	

— **44.3** Plantee una fórmula para interpolar la tabla de a, b y c cuando $0 \leq a \leq 2$ y $0 \leq b \leq 1$, y otra para interpolarla cuando $0 \leq a \leq 2$ y $1 \leq b \leq 2$.

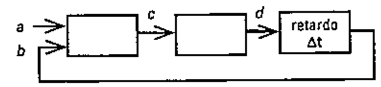
— **44.4** Complete la tabla puesta al lado usando la fórmula para interpolar establecida en 44.3, cuando $0 \leq a \leq 2$ y $1 \leq b \leq 2$:

a \ b	0	1	2
0			
2			

c

— **44.5** Formule cómo queda dependiendo d de a y b, si las fórmulas para interpolar planteadas en 44.1 y 44.3 son válidas, y si $0 \leq a \leq 2$ y $1 \leq b \leq 2$.

— **44.6** Formule cómo queda dependiendo d de d y a si lo formulado en 44.5 es válido y se estructura el diagrama al lado.



— **44.7** Formule cómo quedaría dependiendo d de a si se anulara el retardo en el diagrama de bloques de 44.6.

— **44.8** Prediga la evolución de d completando la tabla al lado.

t	a	d
0	2	1,5
Δt	2	
2·Δt	2	
3·Δt	2	
4·Δt	2	
5·Δt	2	
...		

— **44.9** Prediga la evolución de d completando la tabla al lado.

t	a	d
0	0	1,333333333333...
Δt	0	
2·Δt	0	
3·Δt	0	
4·Δt	0	
5·Δt	0	
...		

Solución:

— **44.1**

$$d = \begin{cases} \frac{3-c}{3-1} \cdot 0 + \frac{c-1}{3-1} \cdot 2 & \text{si } 1 \leq c \leq 3 \\ \frac{5-c}{5-3} \cdot 2 + \frac{c-3}{5-3} \cdot 0 & \text{si } 3 \leq c \leq 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c-1 & \text{si } 1 \leq c \leq 3 \\ 5-c & \text{si } 3 \leq c \leq 5 \end{cases}$$

— **44.2**

c	d
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

(Revise c: hay dos renglones equivocados por haber sido rellenados fuera de lo supuesto)

___ **44.3**

$$c=\begin{cases}\dfrac{2-a}{2-0}\cdot\dfrac{1-b}{1-0}\cdot 1+\dfrac{2-a}{2-0}\cdot\dfrac{b-0}{1-0}\cdot 3 \\ +\dfrac{a-0}{2-0}\cdot\dfrac{1-b}{1-0}\cdot 2+\dfrac{a-0}{2-0}\cdot\dfrac{b-0}{1-0}\cdot 3 & \text{si } 0\le a\le 2 \text{ y } 0\le b\le 1 \\ \dfrac{2-a}{2-0}\cdot\dfrac{2-b}{2-1}\cdot 3+\dfrac{2-a}{2-0}\cdot\dfrac{b-1}{2-1}\cdot 4 \\ +\dfrac{a-0}{2-0}\cdot\dfrac{2-b}{2-1}\cdot 3+\dfrac{a-0}{2-0}\cdot\dfrac{b-1}{2-1}\cdot 5 & \text{si } 0\le a\le 2 \text{ y } 1\le b\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2+a+4\cdot b-a\cdot b}{2} & \text{si } 0\le a\le 2 \text{ y } 0\le b\le 1 \\ \dfrac{4-a+2\cdot b+a\cdot b}{2} & \text{si } 0\le a\le 2 \text{ y } 1\le b\le 2\end{cases}$$

___ **44.4**

	0	1	2	*b*
0	2	3	4	
2	1	3	5	
a			*c*	

(Revise *b*: hay una columna equivocada por haber sido rellenada fuera de lo supuesto)

___ **44.5**

$0\le a\le 2$ y $1\le b\le 2$

luego $3\le c\le 5$

luego $c=\dfrac{4-a+2\cdot b+a\cdot b}{2}$ y $d=5-c$

luego $d=\dfrac{6+a-2\cdot b-a\cdot b}{2}$

___ **44.6**

$D_k=\dfrac{6+A_k-2\cdot B_k-A_k\cdot B_k}{2}$ y $B_k=D_{k-1}$

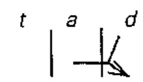
luego $D_k=\dfrac{6+A_k-2\cdot D_{k-1}-A_k\cdot D_{k-1}}{2}$

___ **44.7** Si se anulara el retardo:

$d=\dfrac{6+a-2\cdot b-a\cdot b}{2}$ y $b=d$

luego $d=\dfrac{6+a}{4+a}$

___ **44.8**



t	*a*	*d*
0	2	1,5
Δt	2	1
2·Δt	2	2
3·Δt	2	0
4·Δt	2	4
5·Δt	2	-4
...		

(Revise 44.6: la fórmula es $D_k=4-2\cdot D_{k-1}$, y se complementa con $C_k=1+2\cdot D_{k-1}$ y con $B_k=D_{k-1}$. Revise 44.7: si se anulara el retardo, *d*=1,333333333333... Revise C_k: hay dos renglones equivocados por haber sido rellenados fuera de lo supuesto).

___ **44.9**

t	*a*	*d*
0	0	1,333333333333...
Δt	0	1,666666666666...
2·Δt	0	1,333333333333...
3·Δt	0	1,666666666666...
4·Δt	0	1,333333333333...
5·Δt	0	1,666666666666...
...		

(Revise 44.6: la fórmula es $D_k=3-D_{k-1}$, y se complementa con $C_k=2+D_{k-1}$ y $B_k=D_{k-1}$. Revise 44.7: si se anulara el retardo, *d*=1,5)

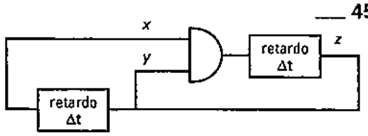
42.45

Prediga las evoluciones de las variables en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado.

t	x	y	z
0			
Δt			
2·Δt			
3·Δt			
4·Δt			
...			

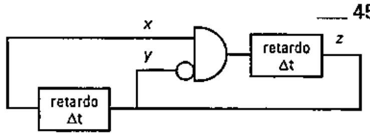
hasta que las evoluciones (excluyendo las de *t*) empiecen a repetirse.

___ **45.1** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



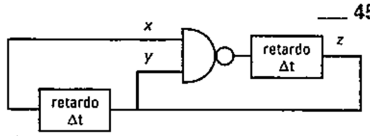
___ **45.2** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.1.

___ **45.3** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



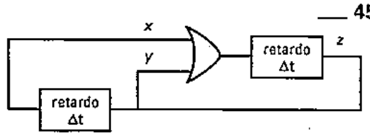
___ **45.4** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.3.

___ **45.5** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



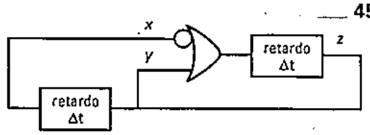
___ **45.6** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.5.

___ **45.7** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



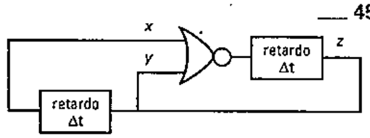
___ **45.8** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.7.

___ **45.9** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



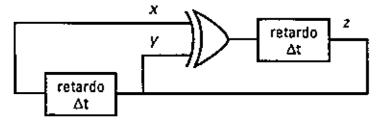
___ **45.10** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.9.

___ **45.11** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



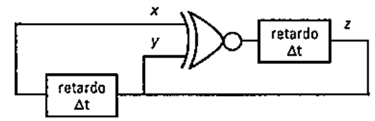
___ **45.12** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.11.

___ **45.13** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.



___ **45.14** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.13.

___ **45.15** X_0=0, Z_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.

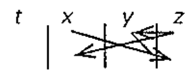


___ **45.16** X_0=0, Z_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 45.15.

Solución:

___ **45.1**

$Z_{k+1} = X_k \wedge Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.8: si se anularan los retardos, *x*=0, *y*=0 y *z*=0; o *x*=1, *y*=1 y *z*=1)

t	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

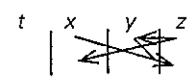
___ **45.2**

t	*x*	*y*	*z*
0	0	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	0	0	0
3·Δt	0	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=2·Δt empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt).

___ **45.3**

$Z_{k+1} = X_k \Rrightarrow Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.9: si se anularan los retardos, x=0, y=0 y z=0).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

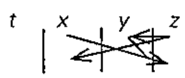
___ 45.4

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=0 y t=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

___ 45.5

$Z_{k+1} = X_k \bar{\wedge} Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.10).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	1	1	1
3·Δt	1	0	0
4·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=Δt y t=3·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=4·Δt.)

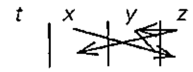
___ 45.6

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	1	1	1
2·Δt	1	0	0
3·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de x, y y z entre t=Δt y t=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando t=3·Δt).

___ 45.7

$Z_{k+1} = X_k \vee Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.11: si se anularan los retardos, x=0, y=0 y z=0; o x=1, y=1 y z=1)

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de x, y y z cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=Δt).

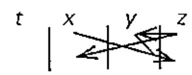
___ 45.8

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	1	1	1
2·Δt	1	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=Δt empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

___ 45.9

$Z_{k+1} = X_k \Rightarrow Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.12: si se anularan los retardos, x=1, y=1 y z=1).

t	x	y	z
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	1	1	1
3·Δt	1	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=2·Δt empieza a repetirse cuando t=3·Δt)

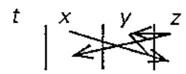
___ 45.10

t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	1	1	1
2·Δt	1	1	1
...			

(El estado de x, y y z cuando t=Δt empieza a repetirse cuando t=2·Δt).

45.11

$Z_{k+1} = X_k \overline{\vee} Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.13).

t	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	1	0	0
3·Δt	0	0	0
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt.)

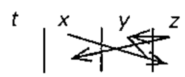
45.12

t	*x*	*y*	*z*
0	0	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	0	0	0
3·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt)

45.13

$Z_{k+1} = X_k \underline{\vee} Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.14: si se anularan los retardos, *x*=0, *y*=0 y *z*=0).

t	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0
Δt	0	0	0
...			

(El estado de *x*, *y* y *z* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt).

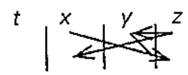
45.14

t	*x*	*y*	*z*
0	0	1	1
Δt	1	1	1
2·Δt	1	0	0
3·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt).

45.15

$Z_{k+1} = X_k \Leftrightarrow Y_k$, $X_{k+1} = Z_k$ e $Y_k = Z_k$



(Revise el ejercicio 21.15: si se anularan los retardos, *x*=1, *y*=1 y *z*=1).

t	*x*	*y*	*z*
0	0	0	0
Δt	0	1	1
2·Δt	1	0	0
3·Δt	0	0	0
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt).

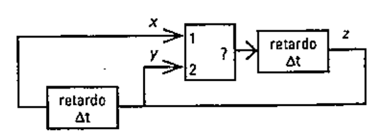
45.16

t	*x*	*y*	*z*
0	0	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	0	0	0
3·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=2·Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=3·Δt).

24.46

Consideremos el diagrama de bloques puesto al lado,



	0	1	X_k
0	0	1	
1	0	0	
Y_k			$X_k?Y_k$

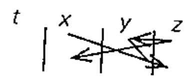
donde la tabla correspondiente al bloque con la contraseña simbólica "?" es como se indica.

t	x	y	z
0	0		1
Δt			
2·Δt			
...			

Prediga las evoluciones de las variables, con las condiciones indicadas, completando la tabla al lado,

hasta que las evoluciones (excluyendo las de *t*) empiecen a repetirse.

Solución:



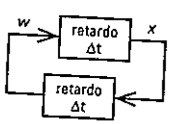
t	x	y	z
0	0	1	1
Δt	1	0	0
2·Δt	0	1	1
...			

(La secuencia de estados de *x*, *y* y *z* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt)

24.47

Prediga las evoluciones de las variables en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado,

t	w	x
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
...		



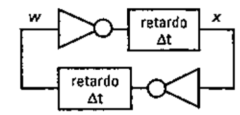
hasta que las evoluciones (excluyendo las de *t*) empiecen a repetirse.

— **47.1** W_0=0, X_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.

— **47.2** W_0=0, X_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 47.1.

— **47.3** W_0=1, X_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 47.1.

— **47.4** W_0=0, X_0=0 y el diagrama de bloques puesto al lado.

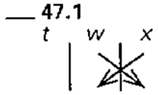


— **47.5** W_0=0, X_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 47.4.

— **47.6** W_0=1, X_0=1 y el mismo diagrama de bloques que en 47.4.

Solución:

— **47.1**



t	w	x
0	0	0
Δt	0	0
...		

(El estado de *w* y *x* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt)

— **47.2**

t	w	x
0	0	1
Δt	1	0
2·Δt	0	1
...		

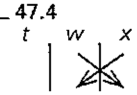
(La secuencia de estados de *w* y *x* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt)

— **47.3**

t	w	x
0	1	1
Δt	1	1
...		

(El estado de *w* y *x* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt)

— **47.4**



(Revise el ejercicio 21.16: si se anulara el retardo, *w*=0 y *x*=1; o *w*=1 y *x*=0)

t	w	x
0	0	0
Δt	1	1
2·Δt	0	0
...		

(La secuencia de estados de *w* y *x* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt)

___ **47.5**

t	w	x
0	0	1
Δt	0	1
...		

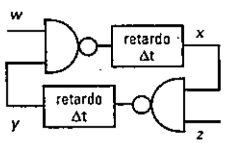
(El estado de *w* y *x* cuando *t*=0 empieza a repetirse cuando *t*=Δt)

___ **47.6**

t	w	x
0	1	1
Δt	0	0
2·Δt	1	1
...		

(La secuencia de estados de *w* y *x* entre *t*=0 y *t*=Δt, inclusive, empieza a repetirse cuando *t*=2·Δt)

24.48



t	w	x	y	z
0				
Δt				
2·Δt				
3·Δt				
...				

Prediga las evoluciones de las variables, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado

hasta que las evoluciones (excluyendo las de *t*) empiecen a repetirse.

___ **48.1** *w*=0 si 0≤*t*, X_0=0, Y_0=0 y *z*=0 si 0≤*t*

___ **48.2** *w*=0 si 0≤*t*, X_0=0, Y_0=1 y *z*=0 si 0≤*t*

___ **48.3** *w*=0 si 0≤*t*, X_0=1, Y_0=0 y *z*=0 si 0≤*t*.

___ **48.4** *w*=0 si 0≤*t*, X_0=1, Y_0=1 y *z*=0 si 0≤*t*.

___ **48.5** *w*=1 si 0≤*t*, X_0=0, Y_0=0 y *z*=0 si 0≤*t*.

___ **48.6** *w*=1 si 0≤*t*, X_0=0, Y_0=1 y *z*=0 si 0≤*t*.

___ **48.7** *w*=1 si 0≤*t*, X_0=1, Y_0=0 y *z*=0 si 0≤*t*.

___ **48.8** *w*=1 si 0≤*t*, X_0=1, Y_0=1 y *z*=0 si 0≤*t*.

Solución:

___ **48.1**

(Si se anularan los retardos, *w*=0, *x*=1, *y*=0 y *z*=1; *w*=0, *x*=1, *y*=1 y *z*=0; *w*=1, *x*=0, *y*=1 y *z*=0; *w*=1, *x*=0, *y*=1 y *z*=1; o *w*=1, *x*=1, *y*=0 y *z*=1)

t	w	x	y	z
0	0	0	0	0
Δt	0	1	1	0
2·Δt	0	1	1	0
...				

___ **48.2**

t	w	x	y	z
0	0	0	1	0
Δt	0	1	1	0
2·Δt	0	1	1	0
...				

___ **48.3**

t	w	x	y	z
0	0	1	0	0
Δt	0	1	1	0
2·Δt	0	1	1	0
...				

___ **48.4**

t	w	x	y	z
0	0	1	1	0
Δt	0	1	1	0
...				

— 48.5

t	w	x	y	z
0	1	0	0	0
Δt	1	1	1	0
2·Δt	1	0	1	0
3·Δt	1	0	1	0
...				

— 48.6

t	w	x	y	z
0	1	0	1	0
Δt	1	0	1	0
...				

— 48.7

t	w	x	y	z
0	1	1	0	0
Δt	1	1	1	0
2·Δt	1	0	1	0
3·Δt	1	0	1	0
...				

— 48.8

t	w	x	y	z
0	1	1	1	0
Δt	1	0	1	0
2·Δt	1	0	1	0
...				

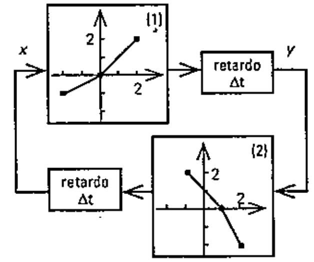
24.49

Prediga las evoluciones de las variables en los diagramas de bloques que siguen, con las condiciones indicadas, completando tablas como la puesta al lado

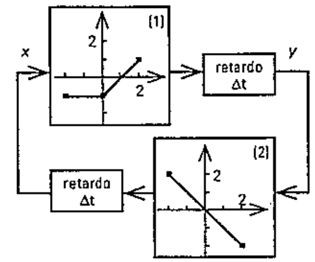
t	x	y
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
...		

y graficando dichas evoluciones en un plano con *x* como eje horizontal e *y* como eje vertical (lo que desdibuja la causalidad pero perfila la temporalidad).

— **49.1** $X_0=-2$, $Y_0=-1$ (según (1)) y el diagrama de bloques al lado.

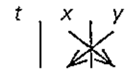


— **49.2** $X_0=-2$, $Y_0=-1$ (según (1)) y el diagrama de bloques al lado.

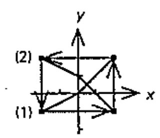


Solución:

— **49.1**

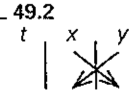


t	x	y
0	-2	-1
Δt	2	-1
2·Δt	2	2
3·Δt	-2	2
4·Δt	-2	-1
...		

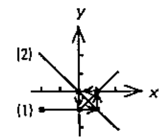


(Aquí, las flechas grises insinúan transiciones)

— **49.2**



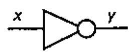
t	x	y
0	-2	-1
Δt	1	-1
2·Δt	1	0
3·Δt	0	0
4·Δt	0	-1
5·Δt	1	-1
...		



(Aquí, las flechas grises insinúan transiciones)

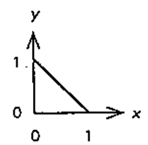
24.50

Ignoremos que el bloque representado al lado,

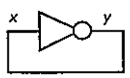


presupone que las variables son binarias, y supongamos que son graduales.

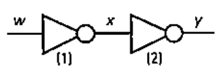
___ **50.1** Considere que la fórmula de interpolación puesta hacia el final del capítulo 14 sugiere el gráfico puesto al lado



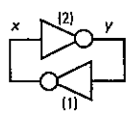
y, plantee una tabla que resuelva el diagrama de bloques bajo el gráfico, según ese gráfico.



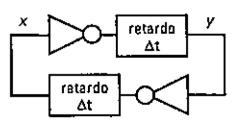
___ **50.2** Grafique cómo queda dependiendo *y* de *w* en el diagrama de bloques puesto al lado, según el gráfico puesto en 50.1.



___ **50.3** Plantee una tabla que resuelva el diagrama de bloques puesto al lado, según el gráfico en 50.1.



___ **50.4** Prediga las evoluciones de las variables en el diagrama de bloques puesto al lado, según el gráfico en 50.1,

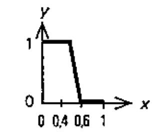


completando la tabla bajo el diagrama

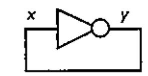
t	x	y
0	0,45	0,55
Δt		
$2 \cdot \Delta t$		
$3 \cdot \Delta t$		
$4 \cdot \Delta t$		
...		

y graficando dichas evoluciones en un plano con *x* como eje horizontal e *y* como eje vertical.

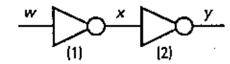
___ **50.5** Considere que el comportamiento del bloque original cuando es construido electrónicamente, por ejemplo, se ciñe más al gráfico puesto al lado



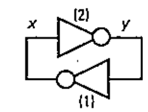
y plantee una tabla que resuelva el diagrama de bloques bajo el gráfico, según este gráfico en vez del puesto en 50.1.



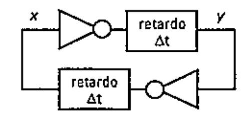
___ **50.6** Grafique cómo queda dependiendo *y* de *w* en el diagrama de bloques puesto al lado, según el gráfico en 50.5. .



___ **50.7** Plantee una tabla que resuelva el diagrama de bloques puesto al lado, según el gráfico en 50.5.



___ **50.8** Prediga las evoluciones de las variables en el diagrama de bloques al lado, según el gráfico en 50.5,



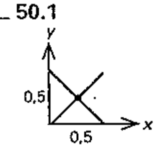
completando la tabla bajo el diagrama

t	x	y
0	0,49	0,55
Δt		
$2 \cdot \Delta t$		
$3 \cdot \Delta t$		
$4 \cdot \Delta t$		
...		

y graficando dichas evoluciones en un plano con *x* como eje horizontal e *y* como eje vertical.

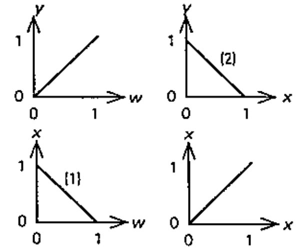
Solución:

___ **50.1**

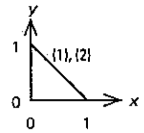


x	y
0,5	0,5

50.2

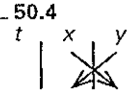


50.3

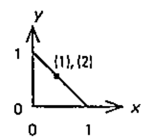


No se puede tabular por completo: 0≤x≤1, 0≤y≤1 e *y*=1-*x*.

50.4

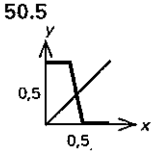


t	*x*	*y*
0	0,45	0,55
Δt	0,45	0,55
...		



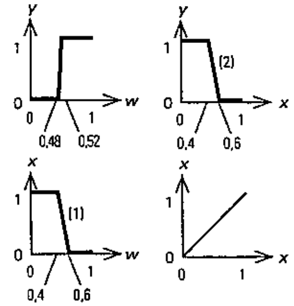
(*x* e *y* se mantienen)

50.5

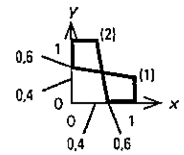


x	y
0,5	0,5

50.6

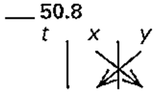


50.7

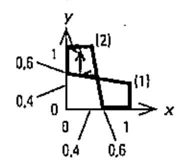


x	*y*
0	1
0,5	0,5
1	0

50.8



t	*w*	*x*
0	0,49	0,55
Δt	0,25	0,55
2·Δt	0,25	1
3·Δt	0	1
4·Δt	0	1
...		



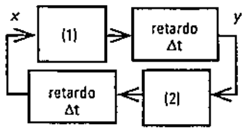
(*x* e *y* tienden a 0 y 1, respectivamente).

24.51

Consideremos:

$Y_{k+1} = 1 - X_k$ y $X_{k+1} = K \cdot Y_k$

cuyo diagrama de bloques, suponiendo que K es constante en cada caso, puede ser como el colocado al lado,



donde (1) y (2) serían las fórmulas originales si se anularan los retardos:

$y = 1 - x$ (1)

$x = K \cdot y$ (2)

En cada uno de los casos puestos a continuación, con las condiciones indicadas, grafique (1) y (2) en un plano con eje horizontal *x* y eje vertical *y*, y prediga las evoluciones de las variables completando tablas como la puesta al lado.

t	*x*	*y*
0		
Δt		
2·Δt		
3·Δt		
4·Δt		
5·Δt		
...		

___ **51.1** K=0,5 y X_0=0,4

___ **51.2** K=0,5 e Y_0=0,4

___ **51.3** K=1 e X_0=0,4

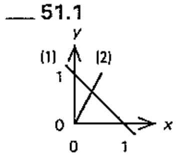
___ **51.4** K=1 e Y_0=0,4

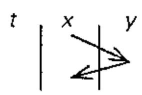
___ **51.5** K=2, X_0=0,4

___ **51.6** K=2 e Y_0=0,4

Solución:

___ **51.1**



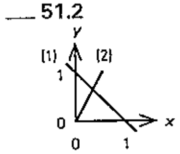


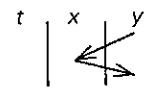
(Si se anulara el retardo, *x*=0,333333333333... e *y*=0,666666666666...)

t	*x*	*y*
0	0,4	
Δt		0,6
2·Δt	0,3	
3·Δt		0,7
4·Δt	0,35	
5·Δt		0,65
...		

(*x* e *y* tienden 0,333333333333... y 0,666666666666..., respectivamente).

___ **51.2**

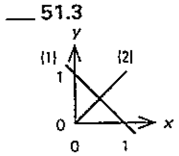


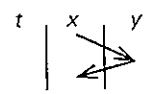


t	*x*	*y*
0		0,4
Δt	0,2	
2·Δt		0,8
3·Δt	0,4	
4·Δt		0,6
5·Δt	0,3	
...		

(*x* e *y* tienden 0,333333333333... y 0,666666666666..., respectivamente).

___ **51.3**



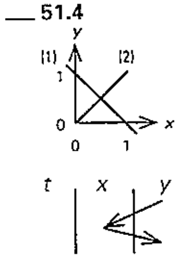


(Si se anulara el retardo, *x*=0,5 e *y*=0,5)

t	x	y
0	0,4	
Δt		0,6
2·Δt	0,6	
3·Δt		0,4
4·Δt	0,4	
5·Δt		0,6
...		

(x e y oscilan sin tender a 0,5).

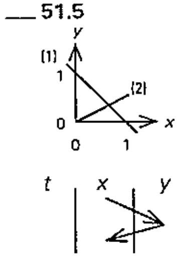
51.4



t	x	y
0		0,4
Δt	0,4	
2·Δt		0,6
3·Δt	0,6	
4·Δt		0,4
5·Δt	0,4	
...		

(x e y oscilan sin tender a 0,5).

51.5

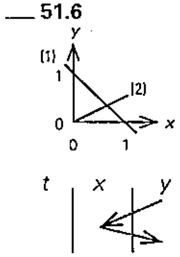


(Si se anulara el retardo, x=0,666666666666... e y=0,333333333333...)

t	x	y
0	0,4	
Δt		0,6
2·Δt	1,2	
3·Δt		-0,2
4·Δt	-0,4	
5·Δt		1,4
...		

(x e y tienden a ±∞).

51.6



t	x	y
0		0,4
Δt	0,8	
2·Δt		0,2
3·Δt	0,4	
4·Δt		0,6
5·Δt	1,2	
...		

(x e y tienden a ±∞).

24.52

Según el capítulo 11, en 1494 Pacioli pedía: "Trovame. 1. nº che giōto al suo q̄drat° facia. 12"; es decir, "$x+x^2=12$". En ese tiempo, tal petición se dejaba resolver algebraicamente con alguna dificultad. En el nuestro, se deja con facilidad. Al final: $x=-4$ o $x=3$.

Según el mismo capítulo, en 1525 Rudolff pedía: "Sit 1ȝ aequatus 12ℛ-36"; es decir, "$1\cdot x^2=12\cdot x-36$". En ese tiempo, tal petición también se dejaba resolver algebraicamente con alguna dificultad. En el nuestro, se deja con facilidad. Al final: $x=6$.

Y, en 1546 Tartaglia pedía: "Trovame uno numero che azontoli la sua radice cuba venghi sei. cioè. 6"; es decir, "$x+\sqrt[3]{x}=6$". En ese tiempo, tal petición apenas se dejaba resolver algebraicamente. En el nuestro, se deja con algunas molestias.

Según lo puesto en el capítulo 20 de este libro, podemos resolver cada una de las tres peticiones con este método:

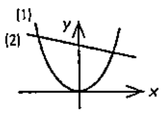
1. reformule algebraicamente la petición en dos, mediante igualaciones con otra variable (lo cual era inaccesible antes de Vieta):

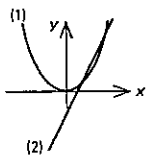
$y = x^2$ (1)
$y = 12 - x$ (2)

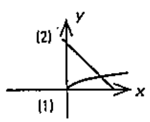
$y = x^2$ (1)
$y = -36 + 12 \cdot x$ (2)

$y = \sqrt[3]{x}$ (1)
$y = 6 - x$ (2)

2. grafique sueltamente las fórmulas resultantes de la etapa 1 (lo cual era inaccesible antes de Descartes):







3. y estructure las fórmulas en un diagrama de bloques como el de la figura 220, despejándolas según convenga para las tendencias y transiciones deseadas en los gráficos de la etapa 2 (lo cual era inaccesible antes de los ingenieros del siglo 20).

___ **52.1** Resuelva así la petición de Pacioli.

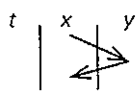
___ **52.2** Resuelva también la de Rudolff.

___ **52.3** Y resuelva la de Tartaglia.

Solución:

___ **52.1**

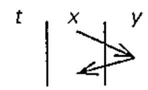
$X_{k+1} = -\sqrt{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 12 - X_k$



t	*x*	*y*
0	-5	
Δt		17
2·Δt	-4,123105625617...	
3·Δt		16,123105625617...
4·Δt	-4,015358716928...	
5·Δt		16,015358716928...
6·Δt	-4,001919379114...	
...		

x tiende a -4.

$X_{k+1} = \sqrt{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 12 - X_k$



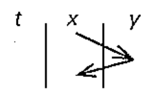
t	*x*	*y*
0	0	
Δt		12
2·Δt	3,464101615137...	
3·Δt		8,535898384862...
4·Δt	2,921625983055...	
5·Δt		9,078374016944...
6·Δt	3,013034021869...	
...		

x tiende a 3.

Luego, *x*=-4 o *x*=3.

___ **52.2**

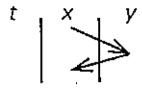
$Y_{k+1} = X_k^{\,2}$ y $X_{k+1} = 3 + \frac{Y_k}{12}$



t	*x*	*y*
0	0	
Δt		0
2·Δt	3	
3·Δt		9
4·Δt	3,75	
5·Δt		14,0625
6·Δt	4,171875	
...		

x tiende a 6.

$X_{k+1} = \sqrt{Y_k}$ e $Y_{k+1} = -36 + 12 \cdot X_k$



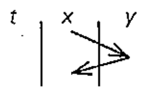
t	x	y
0	10	
Δt		84
2·Δt	9,165151389911...	
3·Δt		73,981816678940...
4·Δt	8,601268318041...	
5·Δt		67,215219816495...
6·Δt	8,198488873962...	
...		

x tiende a 6

Luego, x=6.

__ **52.3**

$Y_{k+1} = \sqrt[3]{X_k}$ y $X_{k+1} = 6 - Y_k$



t	x	y
0	0	
Δt		0
2·Δt	6	
3·Δt		1,817120592832...
4·Δt	4,182879407167...	
5·Δt		1,611233370354...
6·Δt	4,388766629645...	
...		

x tiende a 4,365634706986...

Luego, x=4,365634706986...

24.53

Resuelva cada una de las fórmulas siguientes.

__ **53.1** $x^3=6+7\cdot x$ (que se deja resolver algebraicamente, aunque con algunas molestias: x=-2, x=-1 o x=3).

__ **53.2** $x^3=10^{-x}$ (que se resiste a dejarse resolver algebraicamente).

__ **53.3** $\log_{10}(x)=10^{-x}$ (que también se resiste a dejarse resolver algebraicamente)

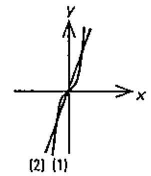
__ **53.4** $\log_{10}(x)=x^3$ (que también se resiste a dejarse resolver algebraicamente)

Solución:

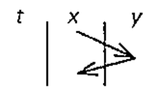
__ **53.1**

$y = x^3$ (1)

$y = 6 + 7 \cdot x$ (2)



$X_{k+1} = \sqrt[3]{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 7 \cdot X_k + 6$



t	x	y
0	-10	
Δt		-64
2·Δt	-4	
3·Δt		-22
4·Δt	-2,802039330655...	
5·Δt		-13,614275314587...
6·Δt	-2,387801255932...	
...		

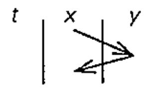
x tiende a −2

$Y_{k+1} = X_k^{\ 3}$ y $X_{k+1} = \dfrac{Y_k - 6}{7}$

t	x	y
0	-1	
Δt		-1
2·Δt	-1	
...		

Por fortuna, el estado de x cuando t=0 empieza a repetirse cuando t=2·Δt: x se mantiene en 1.

$X_{k+1} = \sqrt[3]{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 7 \cdot X_k + 6$



t	x	y
0	0	
Δt		6
2·Δt	1,817120592832...	
3·Δt		18,719844149824...
4·Δt	2,655221419951...	
5·Δt		24,586549939658...
6·Δt	2,907808915764...	
...		

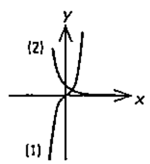
x tiende a 3

Luego, $x=-2$, $x=-1$ o $x=3$

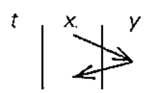
53.2

$y = x^3$ (1)

$y = 10^{-x}$ (2)



$X_{k+1} = \sqrt[3]{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 10^{-X_k}$



t	x	y
0	0	
Δt		1
2·Δt	1	
3·Δt		0,1
4·Δt	0,464158883361...	
5·Δt		0,343432282803...
6·Δt	0,700293946482...	
...		

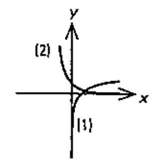
x tiende a 0,620911302903...

Luego, x=0,620911302903...

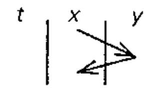
53.3

$y = \log_{10}(x)$ (1)

$y = 10^{-x}$ (2)



$X_{k+1} = 10^{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 10^{-X_k}$



t	x	y
0	0	
Δt		1
2·Δt	10	
3·Δt		0,0000000001
4·Δt	1,000000000230...	
5·Δt		0,099999999946...
6·Δt	1,258925411640...	
...		

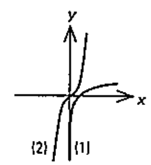
x tiende a 1,168904543515...

Luego, x=1,168904543515...

53.4

$y = \log_{10}(x)$ (1)

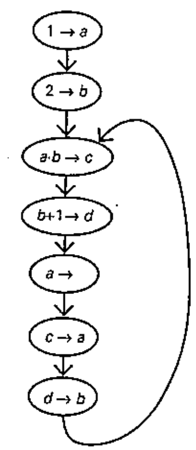
$y = x^3$ (2)



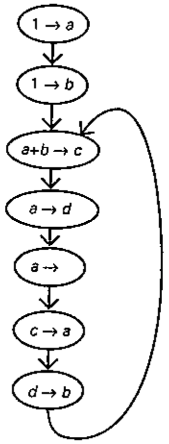
Por lo tanto, la disyuntiva que resolvería la fórmula es huera.

24.54

Liste los seis primeros números que los métodos de computación puestos al lado piden escribir en secuencia.



54.1



— 54.2

Solución:

— 54.1

1

2

6

24

120

720

...

(El método pide escribir los números factoriales, secuencialmente).

— 54.2

1

2

3

5

8

13

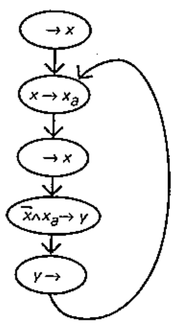
...

(El método pide escribir los números de una secuencia inventada por Leonardo Pisano Bigollo ("Fibonacci"; ¿1170?-1250)).

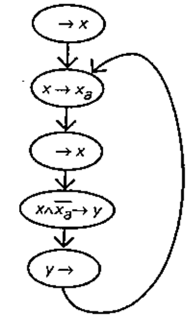
24.55

Formule lo que los métodos puestos al lado piden escribir, entendiendo que y, x y x_a ("a" por "anterior") son variables para tener presentes los estados Y_k, X_k y X_{k-1}, respectivamente.

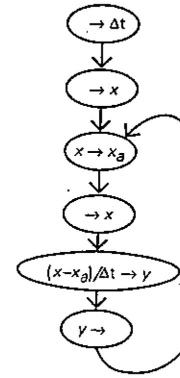
— 55.1



— 55.2



— 55.3



Solución:

— 55.1

$Y_k = \overline{X_k} \wedge X_{k-1}$

(Es la fórmula del ejercicio 30, donde la variable binaria dependiente delata las bajadas de la binaria dominante. Compare el método con el diagrama de bloques de ese ejercicio)

— 55.2

$Y_k = X_k \wedge \overline{X_{k-1}}$

(Es la fórmula del ejercicio 31, donde la variable binaria dependiente delata las subidas de la binaria dominante. Compare el método con el diagrama de bloques de ese ejercicio)

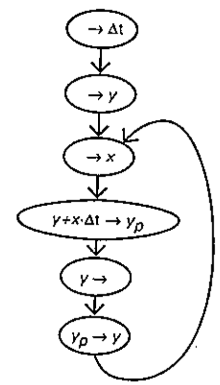
— 55.3

$$Y_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta t}$$

(Es la fórmula del ejercicio 32, donde la variable gradual dependiente es una aproximación de la derivada de la gradual dominante. Compare el método con el diagrama de bloques de aquel ejercicio. Se trata de un método importante)

24.56

Formule lo que el método siguiente pide escribir, entendiendo que x, y e y_p ("p" por "posterior") son variables para tener presentes los estados X_k, Y_k e Y_{k+1}, respectivamente.



Solución:

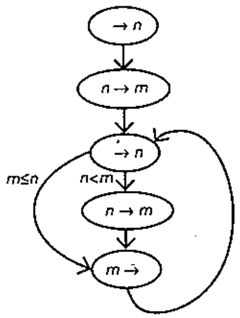
$Y_{k+1} = Y_k + X_k \cdot \Delta t$

(Es la fórmula del ejercicio 40, donde la variable gradual dependiente es la aproximación de Euler de la integral de la gradual dominante. Compare el método con el diagrama de bloques de aquel ejercicio y con el método del ejercicio 55.3. Se trata de dos métodos importantes).

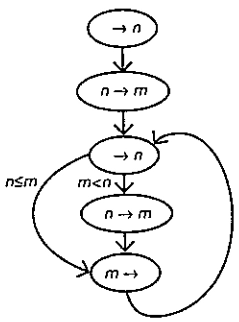
24.57

Exprese lo que los métodos puestos al lado piden escribir.

___ **57.1**



___ **57.2**



Solución:

___ **57.1** El método pide escribir los números que van siendo los mínimos entre los leídos, secuencialmente. (Revise el ejercicio 3: allí sería útil para averiguar el viaje más corto; es decir, el de longitud total mínima).

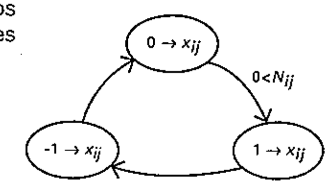
___ **57.2** El método pide escribir los números que van siendo los máximos entre los leídos, secuencialmente. (Revise el ejercicio 3: allí sería útil para averiguar el camino más largo; es decir, el de longitud total máxima).

24.58 [43]

En 1947, Norbert Wiener (1894-1964) introdujo un juego que supone un reticulado espacial ("tejido muscular") formado por rectángulos planos ("células") según la figura al lado, y una variable ternaria x_{ij} cuyos estados son números iguales que -1 ("agotada"), 0 ("lista") o 1 ("activa") en cada uno de los rectángulos (i según la posición vertical y j según la posición horizontal):

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}
x_{31}	x_{32}	x_{33}

Cada variable x_{ij} evoluciona de acuerdo con la estructura temporal sugerida parcialmente al lado, donde $N_{i,j}$ es el número de rectángulos vecinos, vertical u horizontalmente (en diagonal, no), cuyas variables están en 1.



Prediga las evoluciones de las variables en el reticulado completo, con las condiciones indicadas, suponiendo que todas las transiciones ocurren con el mismo retardo Δt y completando una tabla como la puesta debajo de la estructura

t	$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{matrix}$
0	
Δt	
2·Δt	
3·Δt	
4·Δt	
...	

hasta que las evoluciones (excluyendo las de t) empiecen a repetirse.

___ **58.1**

$$\begin{bmatrix} X_{11,0} & X_{12,0} & X_{13,0} \\ X_{21,0} & X_{22,0} & X_{23,0} \\ X_{31,0} & X_{32,0} & X_{33,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

___ **58.2**

$$\begin{bmatrix} X_{11,0} & X_{12,0} & X_{13,0} \\ X_{21,0} & X_{22,0} & X_{23,0} \\ X_{31,0} & X_{32,0} & X_{33,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[43] Ejercicio sugerido por Daniel Erraz L.

Solución:

58.1

t			
t	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}
	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	0	0	0
	0	0	0
	0	0	1
Δt	0	0	0
	0	0	1
	0	1	-1
2·Δt	0	0	1
	0	1	-1
	1	-1	0
3·Δt	0	1	-1
	1	-1	0
	-1	0	0
4·Δt	1	-1	0
	-1	0	0
	0	0	0
5·Δt	-1	0	0
	0	0	0
	0	0	0
6·Δt	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
7·Δt	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
...			

El estado de las variables cuando t=6·Δt empieza a repetirse cuando t=7·Δt.

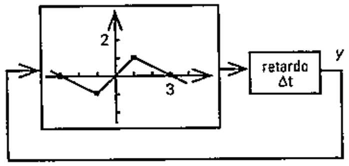
58.2

t	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}
	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	1	0	0
	0	-1	0
	0	1	0
Δt	-1	1	0
	1	0	0
	1	-1	1
2·Δt	0	-1	1
	-1	1	1
	-1	0	-1
3·Δt	0	0	-1
	0	-1	-1
	0	1	0
4·Δt	0	0	0
	0	0	0
	1	-1	1
5·Δt	0	0	0
	1	0	1
	-1	0	-1
6·Δt	1	0	1
	-1	1	-1
	0	0	0
7·Δt	-1	1	-1
	0	-1	0
	0	1	0
8·Δt	0	-1	0
	0	0	0
	1	-1	1
9·Δt	0	0	0
	1	0	1
	-1	0	-1
...			

La secuencia de estados de las variables entre $t=5\cdot\Delta t$ y $t=8\cdot\Delta t$, inclusive, empieza a repetirse cuando $t=9\cdot\Delta t$.

24.59

Estructure temporalmente un método para escribir en secuencia *y* del ejercicio 37.10, dejando *y* inicial a la voluntad del usuario.

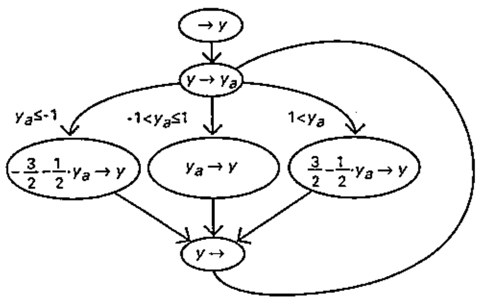


Solución:

$$Y_k = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } Y_{k-1} \le -1 \\ Y_{k-1} & \text{si } -1 \le Y_{k-1} \le 1 \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot Y_{k-1} & \text{si } 1 \le Y_{k-1} \end{cases}$$

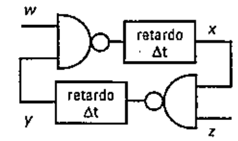
Estructura causal:

Notando que algunos cómputos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos, podemos estructurar temporalmente un método; por ejemplo:



24.60

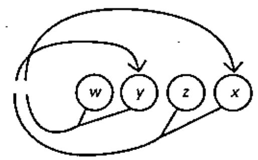
Estructure temporalmente un método para escribir en secuencia *x* e *y* del ejercicio 48 dejando *x* inicial, *y* inicial, *w* y *z* a la voluntad del usuario.



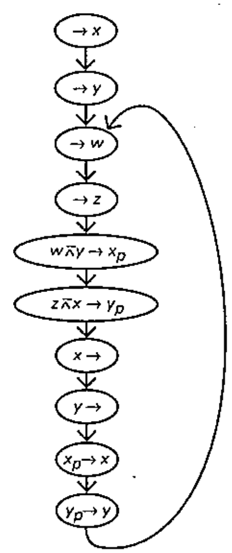
Solución:

$X_{k+1} = W_k \,\overline{\wedge}\, Y_k$ e $Y_{k+1} = Z_k \,\overline{\wedge}\, X_k$

Estructura causal:



Notando que algunos cómputos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos, podemos estructurar temporalmente un método; por ejemplo:



24.61

Estructure temporalmente un método para resolver la petición de Tartaglia, del ejercicio 52.3, reemplazando:

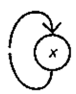
$$Y_{k+1} = \sqrt[3]{X_k} \quad y \quad X_{k+1} = 6 - Y_k$$

por:

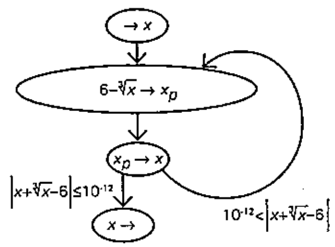
$$X_{k+2} = 6 - \sqrt[3]{X_k}$$

Solución:

Estructura causal:



Notando que algunos cómputos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos, podemos estructurar temporalmente un método; por ejemplo:



(Aquí, x_p es una variable para tener presente a X_{k+2} con la excusa de que X_{k+1} carece de importancia)

24.62

Estructure temporalmente un método para resolver la petición del ejercicio 53.3:

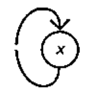
$\log_{10}(x) = 10^{-x}$

Solución:

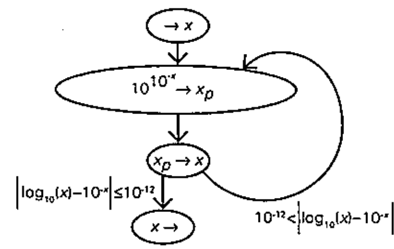
$X_{k+1} = 10^{Y_k}$ e $Y_{k+1} = 10^{-X_k}$

luego, $X_{k+2} = 10^{-X_k}$

Estructura causal:



Notando que algunos cómputos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos, podemos estructurar temporalmente un método; por ejemplo:



(Aquí, x_p es una variable para tener presente a X_{k+2} con la excusa de que X_{k+1} carece de importancia)

24.63

Los bancos suelen pagar intereses mensuales a los dueños de capitales en cuentas. No resulta difícil deducir que, en una de esas cuentas y suponiendo que $\Delta t=1$, en [mes]:

$$C_{k+1} = (D_k - R_k + C_k) \cdot (1 + I)$$

donde *c* es el capital en la cuenta, en [$]; *d* es lo depositado, en [$]; *r* es lo retirado, en [$]; e I es el interés pagado mensualmente por el banco, en tanto por uno del capital en la cuenta.

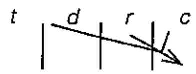
___ **63.1** Si I=0,005, prediga la evolución del capital *c* completando la tabla puesta al lado.

t	*d*	*r*	*c*
0	0	0	1.000.000
Δt	0	10.000	
2·Δt	0	10.000	
3·Δt	10.000	0	
4·Δt	10.000	0	
5·Δt	0	0	
6·Δt	0	0	
...			

___ **63.2** Estructure temporalmente un método de computación para predecir la evolución de *c*, dejando *c* inicial, *d* y *r* a la voluntad del usuario.

Solución:

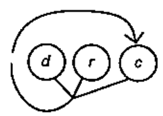
63.1



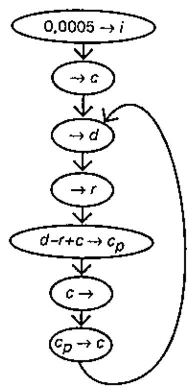
t	d	r	c
0	0	0	1.000.000
Δt	0	10.000	1.005.000
$2{\cdot}\Delta t$	0	10.000	999.975
$3{\cdot}\Delta t$	10.000	0	994.925
$4{\cdot}\Delta t$	10.000	0	1.009.949
$5{\cdot}\Delta t$	0	0	1.025.049
$6{\cdot}\Delta t$	0	0	1.030.174
...			

63.2

Estructura causal:



Notando que algunos cómputos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos, podemos estructurar temporalmente un método; por ejemplo:



24.64

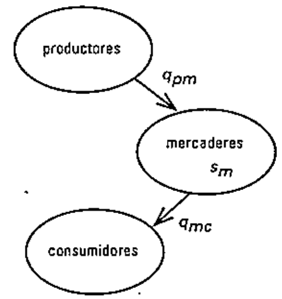
Imaginemos un mercado de una mercadería aportada por sus productores, negociada por sus mercaderes y retirada por sus consumidores.

Imaginemos que los mercaderes aumentan el precio de la mercadería al disminuir la existencia de ella, que los productores aumentan sus aportes al aumentar el precio, que los consumidores disminuyen sus retiros al aumentar el precio y, con bastante ingenuidad, que todos actúan así libre e ingenuamente.

Prediga la evolución del precio de la mercadería, con las condiciones y formalidades que estime convenientes.

Solución:

Estructura espacial:



t es el tiempo, en [s].

$p(t)$ es el precio unitario de la mercadería, en [\$ unidad^{-1}]:

$$p(t) = \begin{cases} P - K_p \cdot s_m(t) & \text{si } \; 0 < P - K_p \cdot s_m(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (1)$$

P es un coeficiente, en [\$ unidad^{-1}]; K_p es otro coeficiente, en [\$ unidad^{-2}]; $s_m(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]:

$$P = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

$$K_p = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$$s_m(t) = s_m(0) + \int_0^t \left(q_{pm}(\tau) - q_{mc}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (4)$$

$s_m(0)$ es la existencia inicialmente, en [unidad]; $q_{pm}(t)$ es el flujo de mercadería que viaja de los lugares de producción al mercado, en [unidad s^{-1}]; $q_{mc}(t)$ es el flujo de mercadería que viaja del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$s_m(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (5)$$

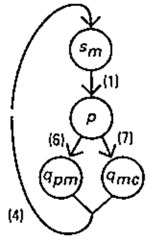
$$q_{pm}(t) = \begin{cases} -Q_{pm} + K_{pm} \cdot p(t) & \text{si } \; 0 < -Q_{pm} + K_{pm} \cdot p(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (6)$$

$$q_{mc}(t) = \begin{cases} Q_{mc} - K_{mc} \cdot p(t) & \text{si } \; 0 < s_m(t) \;\text{ y }\; 0 < Q_{mc} - K_{mc} \cdot p(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (7)$$

Q_{pm} es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_{pm} es otro, en [unidad^2 s^{-1} \$$^{-1}$]; Q_{mc} es otro, en [unidad s^{-1}]; K_{mc} es otro, en [unidad^2 s^{-1} \$$^{-1}$]:

$Q_{pm} = 150$ (por ejemplo) (8)
$K_{pm} = 3$ (por ejemplo) (9)
$Q_{mc} = 600$ (por ejemplo) (10)
$K_{mc} = 2$ (por ejemplo) (11)

Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho):



La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (3), (5), (8), (9), (10) y (11) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (6) y (7) contienen 2 cada una; (4) contiene 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 4 fórmulas donde aparecen, podríamos plantear $2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(11).

Pero no es cuerdo plantear que un flujo de mercadería a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la existencia de mercadería en el recinto, sino que la existencia depende por integración de todos los flujos.

(4) tiene la existencia de la mercadería despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en (4) se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(11), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(11)

Si nos interesa la evolución de p; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo Δt para la integral en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar s_m inicial, P, K_p, Q_{pm}, K_{pm}, Q_{mc}, K_{mc}, Δt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(11) como:

$P = \ldots$ (2')
$K_p = \ldots$ (3')
$Q_{pm} = \ldots$ (8')
$K_{pm} = \ldots$ (9')

$Q_{mc} = \ldots$ (10')
$K_{mc} = \ldots$ (11')
$s_{m,0} = \ldots$ (5')

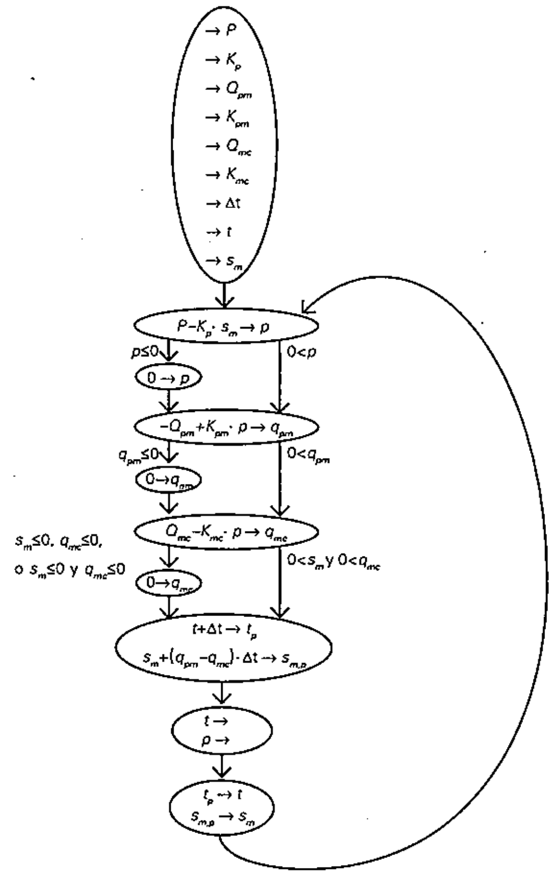
$$p_k = \begin{cases} P - K_p \cdot s_{m,k} & \text{si } 0 < P - K_p \cdot s_{m,k} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (1')$$

$$q_{pm,k} = \begin{cases} -Q_{pm} + K_{pm} \cdot p_k & \text{si } 0 < -Q_{pm} + K_{pm} \cdot p_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (6')$$

$$q_{mc,k} = \begin{cases} Q_{mc} - K_{mc} \cdot p_k & \text{si } 0 < s_{m,k} \text{ y } 0 < Q_{mc} - K_{mc} \cdot p_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (7')$$

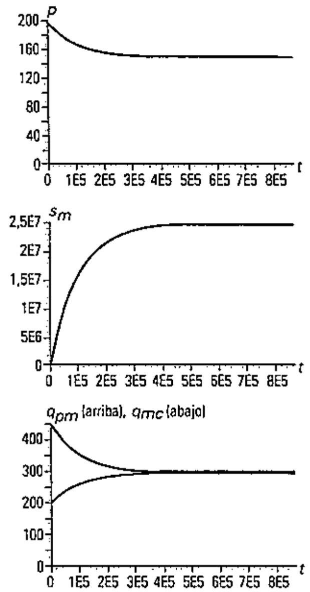
$$s_{m,k+1} = s_{m,k} + (q_{pm,k} - q_{mc,k}) \cdot \Delta t \quad (4')$$

Estructura temporal (de método de computación):



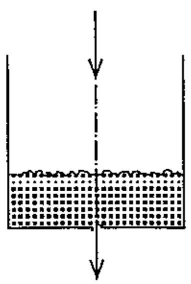
Un método parecido (con los datos originales, Δt =60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura que sigue, según la cual, al cabo de 850000 segundos, equivalentes a unos 10 días, se estarían vendiendo y comprando 300 unidades cada segundo, equivalentes a unos 26 millones de unidades cada día, con 25 millones de unidades en existencia y a \$150 cada unidad).

Predicciones:



24.65

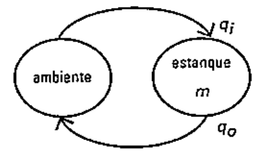
Imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo, a través de un orificio.



Prediga la evolución de la altura del agua que reposa, con las condiciones y formalidades que estime convenientes, suponiendo que esa altura nunca desborda al estanque.

Solución:

Estructura espacial:



t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]:

$$h(t) = \frac{V(t)}{\pi \cdot R^2} \qquad (1)$$

$V(t)$ es el volumen del agua, en [m³]; R es el radio del estanque, en [m]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \qquad (2)$$

$$R = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (4)$$

$$\rho = 1000 \qquad (5)$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 3140 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (6)$$

$$q_i(t) = \begin{cases} 0{,}500 & \text{si } 0 \le t < 1800 \\ 0{,}733 & \text{si } 1800 \le t < 19800 \\ 0{,}600 & \text{si } 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (7)$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \qquad (8)$$

K es un coeficiente de salida del agua, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0{,}505 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (9)$$

Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho):