

Pregunta 2 (40 puntos): Imagine una calculadora primitiva de dos operandos, x_1 y x_2 , para sumar y restar. Cada operando puede tomar tan solo dos valores: 0 y 1.

La operación a realizar se especifica mediante la variable x_3 de la siguiente forma:

sumar : $x_3 = 0$; restar : $x_3 = 1$

El resultado de la operación puede tener 4 valores posibles: 0, 1, 2 y E (error). El error (E) ocurre cuando el resultado de la operación es negativo. Cada uno de estos valores puede codificarse mediante y_1 e y_2 de la siguiente manera:

resultado operación	y_1	y_2
0	0	0
1	0	1
2	1	0
E	1	1

Table 1: Resultado de la operación suma o resta representado en y_1 e y_2 .

- (a) (10 puntos) Plantee una tabla x_1, x_2 versus x_3 indicando el resultado de la operación en cada caso (según la Tabla 1).
- (b) (10 puntos) Plantee dos tablas: una para x_1, x_2 y x_3 versus y_1 , y otra para x_1, x_2 y x_3 versus y_2 .
- (c) (20 puntos) Aplique Karnaugh a las tablas encontrada en (b), redúzcalas a su mínima expresión y encuentre los circuitos lógicos equivalentes para y_1 e y_2 .

(a)

			0	1	x_3
0	0		0	0	
0	1		1	E	
1	1		2	0	
1	0		1	1	
x_1	x_2				

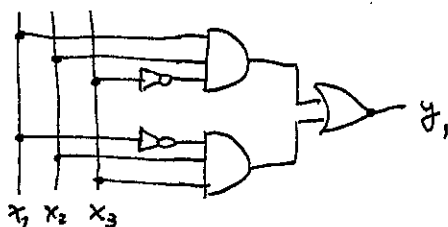
(b)

			0	1	x_3
0	0		0	0	
0	1		0	1	$\rightarrow \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
1	1		1	0	$\rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$
1	0		0	0	
x_1	x_2				y_1

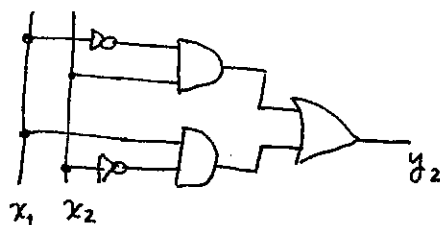
			0	1	x_3
0	0		0	0	
0	1		1	1	$\rightarrow \bar{x}_1 \wedge x_2$
1	1		0	0	
1	0		1	1	$\rightarrow x_1 \wedge \bar{x}_2$
x_1	x_2				y_2

2

- (c) Para y_1 se pueden hacer 2 grupos: $(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$, $(\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$
por lo que $y_1 = (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$



Para y_2 también hay dos grupos
 $y_2 = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$



Pregunta 3 (20 puntos): Considere los circuitos mostrados en la Figura 2.

- (a) (6 puntos) Complete la tabla para el circuito mostrado en la Figura 2 (a).
 (b) (6 puntos) Complete la tabla para el circuito mostrado en la Figura 2 (b).
 (c) (8 puntos) Para ambos circuitos de la Figura 2 indique la función lógica implementada.

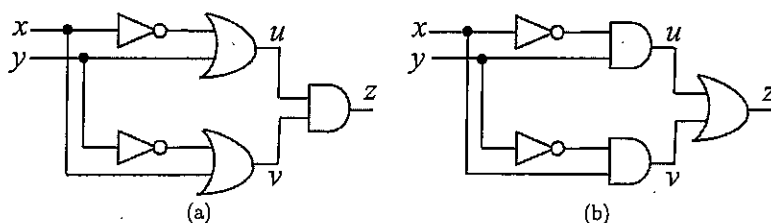


Figure 2: Circuitos pregunta 3.

(a)

x	y	u	v	z
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

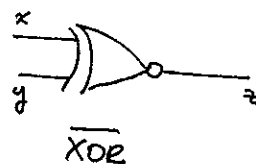
(b)

x	y	u	v	z
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

(a)

(a) z dependiendo de x e y

	0	1	y
0	1	0	
1	0	1	z
x			

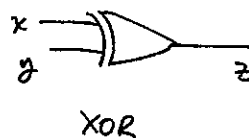


$$z = x \oplus y$$

3

(b) z dependiendo de x e y

	0	1	y
0	0	1	
1	1	0	z
x			



$$z = x \oplus y$$

PAUTA

Introducción a la Ingeniería
Prof. María José Escobar S. – Ayud. Salem Hidd
1er semestre del 2015

IWG-101 Certamen 1

Pregunta 1 (50 puntos): Los autómatas celulares son modelos discretos que consisten en una grilla de células donde el valor de cada una de ellas depende del estado de sus vecinas. Esta regla simple de evolución se encuentra presente en varios patrones en la naturaleza, como por ejemplo, en las marcas del caparazón de los caracoles de mar. Dependiendo de las combinaciones que se pueden hacer con las células vecinas, se establecen diferentes tipos de reglas, como por ejemplo, la **regla 30** que se detalla a continuación:

a	b	c	d	
0	0	0	0	2^0
0	0	1	1	2^1
0	1	0	1	2^2
0	1	1	1	2^3
1	0	0	1	2^4
1	0	1	0	2^5
1	1	0	0	2^6
1	1	1	0	2^7

$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

Utilizando mapas de Karnaugh:

- (20 puntos) Encuentre una expresión para que la evolución de la célula central d dependa de las células vecinas a , b y c .
- (10 puntos) Exprese la expresión recién encontrada utilizando diagramas de bloques (AND, OR y NOT).
- (20 puntos) En base a la lógica de creación de la regla 30 que se muestra en la figura, repita el punto (a) y (b) para que ahora realice la regla 110.

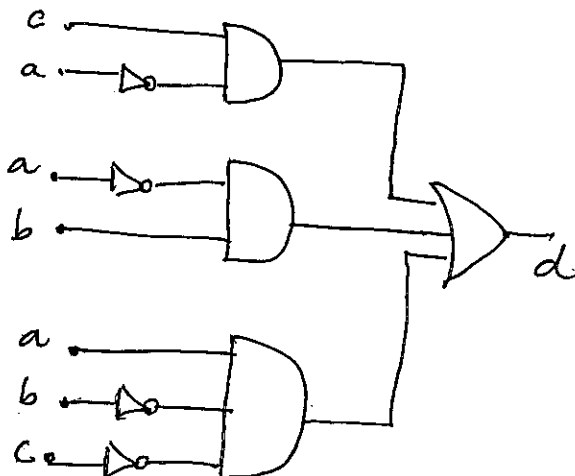
(a) Para la relación de la regla 30, el mapa de Karnaugh respectivo es:

	0	0	1	1	a
	0	1	1	0	b
0	0	1	0	1	
1	1	1	0	0	d
c					

Quedan 3 grupos que pueden escribirse como:

$$d = (c \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

(b) El diagrama de bloques respectivo es



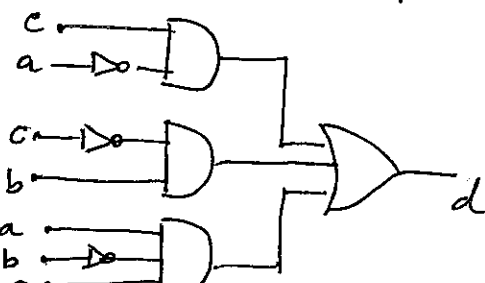
(c) la regla 110 en este caso sería

$$110 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$$

	0	0	1	1	a
	0	1	1	0	b
0	0	1	1	0	
1	1	1	0	1	d
c					

$$\Rightarrow d = (c \wedge \bar{a}) \vee (\bar{c} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)$$

Con el diagrama de bloque correspondiente:



PAUTA

Pregunta 2 (45 puntos): El display de 7 segmentos de la Figura 2 consta de 7 LEDs que se encienden de manera selectiva para crear dígitos del 0 al 9. El dígito desplegado en el display (D) es codificado por 4 números binarios (a, b, c y d) de la siguiente manera: $D_{10} = abcd_2$. En los casos en que el número $D > 9$ el display se apagará completamente.

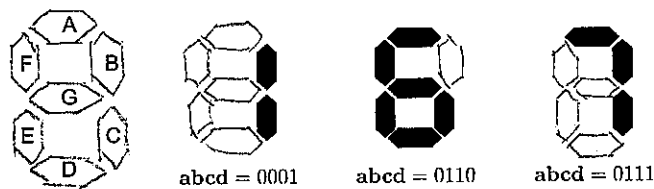
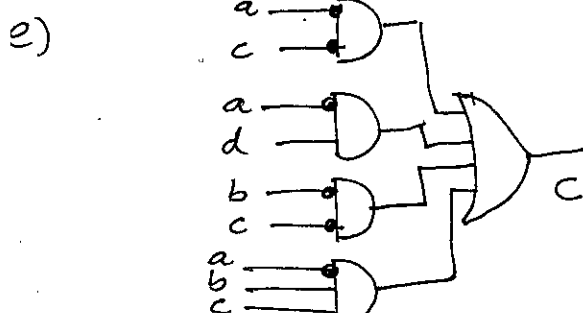
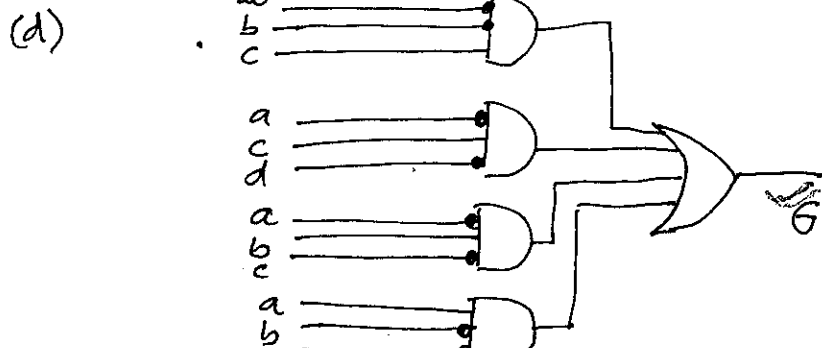
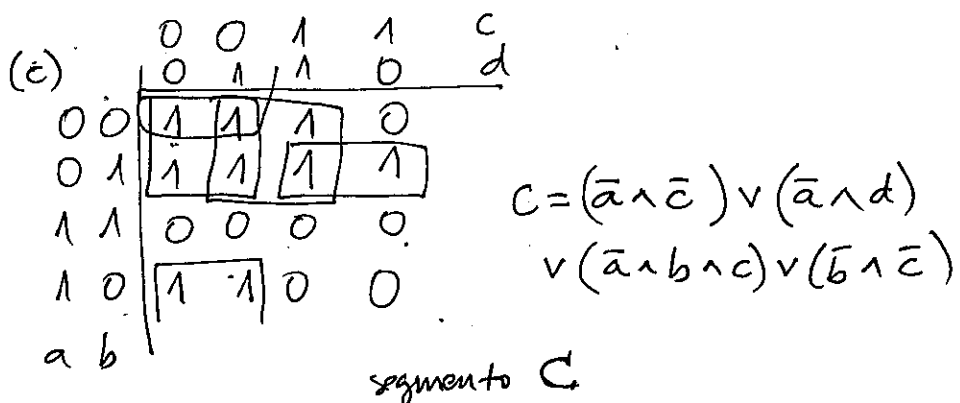
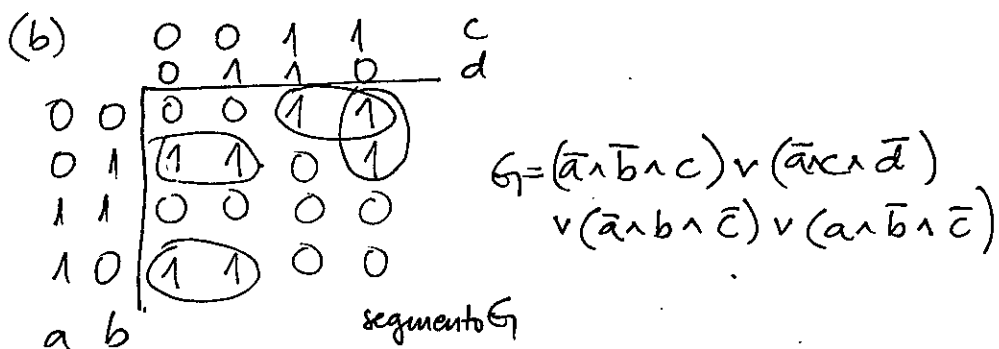


Figure 2: Display 7 segmentos pregunta 2.

- (5 puntos) Tabule para cada valor posible del cuarteto $abcd$ los segmentos activados en cada caso (tabla *lineal*).
- (15 puntos) Tabule para cada valor posible del cuarteto $abcd$ el estado del segmento G y encuentre una expresión reducida utilizando mapas de Karnaugh.
- (15 puntos) Tabule para cada valor posible del cuarteto $abcd$ el estado del segmento C y encuentre una expresión reducida utilizando mapas de Karnaugh.
- (5 puntos) Realice el diagrama de bloques para la expresión encontrada en (b).
- (5 puntos) Realice el diagrama de bloques para la expresión encontrada en (c).

(a)

	a	b	c	d	segmentos
0:	0	0	0	0	A B C D E F
1:	0	0	0	1	B C
2:	0	0	1	0	A B G E D
3:	0	0	1	1	A B G C D
4:	0	1	0	0	F G B C
5:	0	1	0	1	A F G C D
6:	0	1	1	0	A F G E C D
7:	0	1	1	1	A B C
8:	1	0	0	0	A B C D E F G
9:	1	0	0	1	A B C D F G
	1	0	1	0	_____
	1	0	1	1	_____
	1	1	0	0	_____
	1	1	0	1	_____
	1	1	1	0	_____
	1	1	1	1	_____



Pregunta 2 (35 puntos): Considere que las cuatro variables binarias a , b , c y d afectan el valor de una quinta variable e . La relación entre estas variables viene dada por:

- (i) Si $a = 1$ y el número formado por el tripleto bcd ($b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$) es impar, entonces, $e = 1$.
- (ii) Si $a = 0$, el valor de e será igual a 1 cuando el número formado por el tripleto bcd sea 0, 3 o 4.

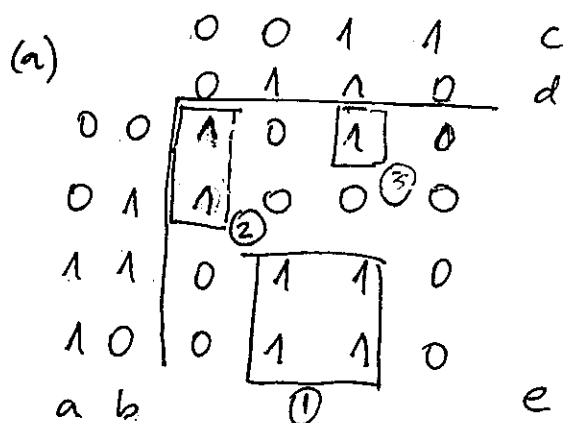
Considerando (i), y (ii):

- (a) (25 puntos) Utilizando mapas de Karnaugh lleve la relación entre las variables a , b , c , d y e a su mínima expresión.
- (b) (10 puntos) Utilice diagramas de bloques (AND, OR y NOT) para representar la relación encontrada en (a).

a	b	c	d	e
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$a=0$
 $e=1$ si
 bcd es 0, 3 o 4

$a=1$
 $e=1$ si
 bcd es impar

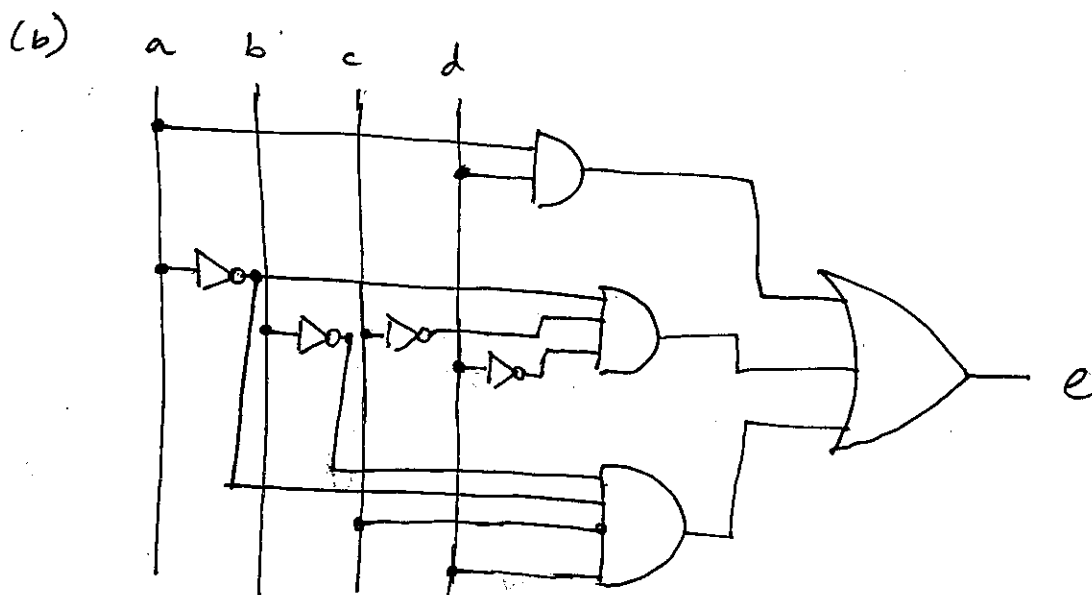


① $a \wedge d$

② $\bar{a} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d}$

③ $\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d$

$$\therefore e = (a \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d)$$



PAUTA

IWG-101 Certamen 2

Pregunta 1 (50 puntos): Considere la siguiente ecuación

$$2x = e^{-x} \quad (1)$$

Utilizando el método de iteración visto en clases:

- (10 puntos) Plantee los dos despejes posibles para la resolución de (1).
- (5 puntos) Grafique las curvas para poder elegir el punto inicial y el despeje adecuado.
- (20 puntos) Encuentre la raíz de la ecuación (1) iterando hasta obtener una precisión de 2 decimales. Utilice un valor de partida $x \in [0, 1]$.
- (15 puntos) Encuentre la raíz de la ecuación utilizando el método de Newton (precisión de 2 decimales). Utilice el mismo valor de partida del punto (c).

NOTA 1: Recuerde que $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$

NOTA 2: Recuerde que $\log(e^x) = x$

(a)

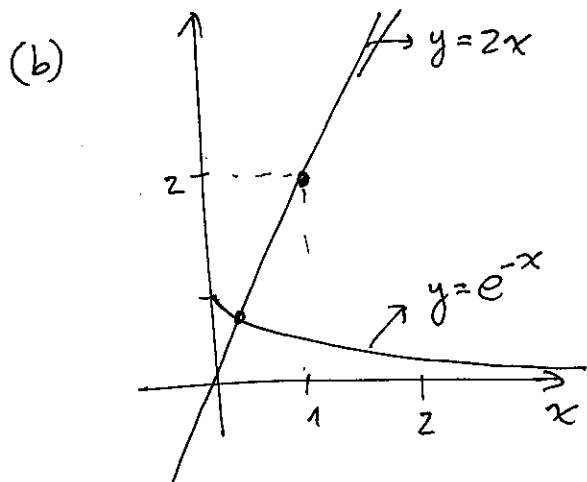
$$\underbrace{2x}_y = \underbrace{e^{-x}}_y \quad \begin{aligned} y &= 2x \\ y &= e^{-x} \end{aligned}$$

DESPEJE 1:

$$\begin{aligned} Y_k &= 2X_k \\ X_k &= -\log Y_k \end{aligned}$$

DESPEJE 2:

$$\begin{aligned} X_k &= Y_k / 2 \\ Y_k &= e^{-X_k} \end{aligned}$$



(c) Utilizando $x_0 = 0.5$

Hay que evaluar primero en la exponencial \Rightarrow utilizar DESPEJE 2

x	y
0.5	0.6065
0.3032	0.738
0.369	0.6914
0.345	0.708
0.354	0.7018
0.350	—

La raíz de (1) $x \approx 0.35$

(d) Por Newton se tiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

sea $f(x) = 2x - e^{-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 + e^{-x}$$

Resolviendo

x	f(x)	f'(x)
0.5	0.393	2.606
0.349	-0.007	2.705
0.352	0.0007	2.703
0.352	—	—

La raíz de (1) es $0.35 \approx x$

PAUTA

Pregunta 2 (25 puntos): Considere el diagrama de la figura 1

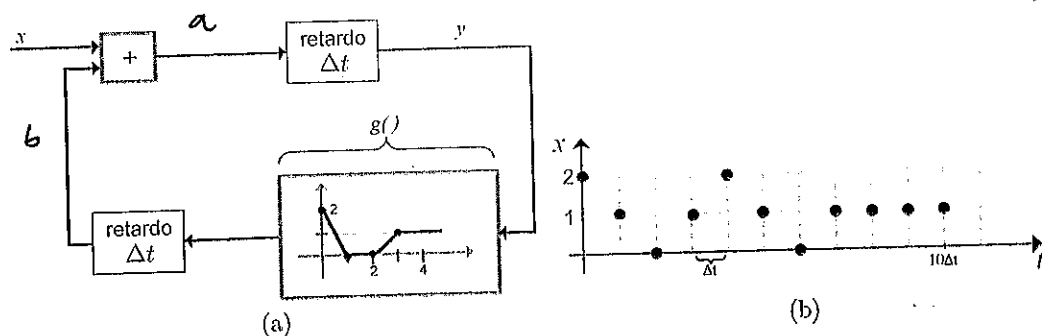


Figure 1: Diagrama pregunta 2.

- (a) (10 puntos) Plantee las ecuaciones tales, que muestren como y depende de x para un tiempo arbitrario k ($y(k\Delta t) = Y_k$).
- (b) (15 puntos) Resuelva el sistema para la entrada x mostrada en la Figura 1(b). Considere $y(0) = Y_0 = 0$, e, $y(1) = Y_1 = 0$. Realice el cálculo hasta $t = 10\Delta t$.

(a) Utilizando las variables auxiliares a y b , queda

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= A_{k-1} \\ A_k &= X_k + B_k \\ B_k &= g(Y_{k-1}) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} Y_k &= A_{k-1} \\ A_k &= X_k + g(Y_{k-1}) \end{aligned} \right\} \boxed{Y_k = X_{k-1} + g(Y_{k-2})}$$

(b)

t	x	y
0	2	0
Δt	1	0
$2\Delta t$	0	3
$3\Delta t$	1	2
$4\Delta t$	2	2
$5\Delta t$	1	2
$6\Delta t$	0	1
$7\Delta t$	1	0
$8\Delta t$	1	1
$9\Delta t$	1	3
$10\Delta t$	1	1

$$y_2 = x_1 + g(y_0)$$

PAUTA

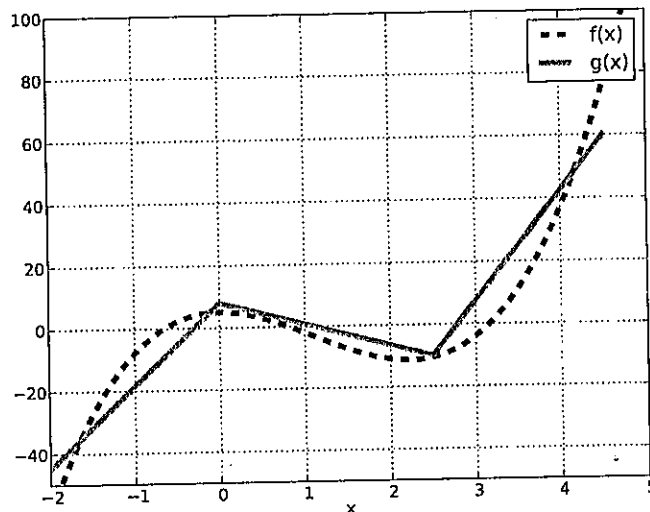
IWG-101 Certamen 2

Pregunta 1 (45 puntos): Consideremos el siguiente polinomio:

$$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 5,$$

el cual es burdamente aproximado por la función $g(x)$ definida en la siguiente tabla:

x	$g(x)$
-2	-45
0	8
2.5	-12
4.5	60



Para un valor de x dentro del intervalo $[2.5, 4]$:

- (a) (30 puntos) Utilizando el método de iteración visto en clases encuentre la raíz del polinomio $f(x)$.
- (b) (15 puntos) Para el mismo intervalo, ¿cuál es la raíz para la aproximación $g(x)$?

(a) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 5$

Las raíces del polinomio se darán cuando $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{3x^3}_y = \underbrace{10x^2 - 5}_y$$

$$y = 3x^3$$

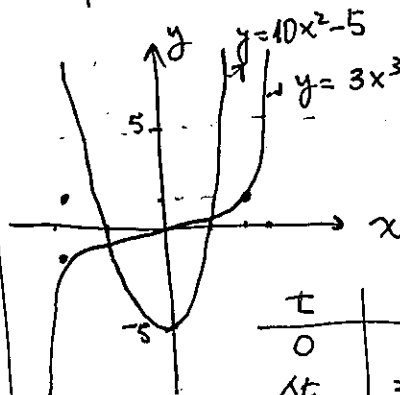
$$y = 10x^2 - 5$$

Con estas ecuaciones, los dos despejos posibles son:

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{y}{3}} \\ y &= 10x^2 - 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_{k+1} &= \sqrt[3]{\frac{Y_k}{3}} \\ Y_{k+1} &= 10X_k^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} y &= 3x^3 \\ x &= \sqrt{\frac{y+5}{10}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y_{k+1} &= 3X_k^3 \\ X_{k+1} &= \sqrt{\frac{Y_k+5}{10}} \end{aligned}$$

Se pide la raíz en el intervalo $[2.5, 4]$



Por inspección ocular conviene utilizar el despeje $\textcircled{1}$, evaluando primero en la parábola

Mirando $\textcircled{*}$ conviene ubicar $X_0 = 3$

t	X	Y
0	3	85
Δt	3,05	88,03
$2\Delta t$	3,08	89,86
$3\Delta t$	3,11	91,72
$4\Delta t$	3,13	92,97
$5\Delta t$	3,14	93,60
$6\Delta t$	3,15	94,23
$7\Delta t$	3,16	94,86
$8\Delta t$	3,16	94,98

La raíz del polinomio solicitada $\approx 3,16$

(b) La raíz de $g(x)$ vendrá dada por el cruce en cero de la recta en ese intervalo

x	$g(x)$
2,5	-12
4,5	60

Interpolando:

$$\frac{y-60}{x-4,5} = \frac{60+12}{4,5-2,5} \Rightarrow \frac{y-60}{x-4,5} = \frac{72}{2}$$

$$y = 36x - 4,5 \cdot 36 + 60 \Rightarrow \boxed{g(x) = y = 36x - 102 \quad x \in [2,5, 4,5]}$$

El cruce en cero viene dado por $g(x) = 0$

$$\Rightarrow 36x - 102 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2,83}$$

PAUTA

Pregunta 2 (40 puntos): La ley de enfriamiento de Newton plantea que la tasa de enfriamiento/calentamiento de un cuerpo depende de la diferencia entre la temperatura del cuerpo T y la temperatura ambiente T_a . Específicamente, la temperatura del cuerpo T evoluciona en el tiempo como se muestra a continuación:

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_a), \quad (1)$$

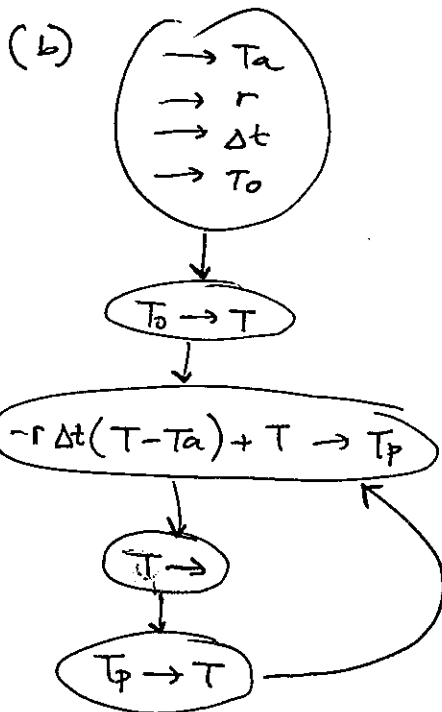
donde r es la constante de decaimiento, T_a la temperatura ambiente y T la temperatura del cuerpo.

Imagine que Ud. trabaja para la PDI y reciben una llamada telefónica informando que ha ocurrido un homicidio. Llegan al lugar de los hechos donde encuentran un cuerpo en el piso con un golpe en la cabeza. Intentando inferir a qué hora ocurrió el homicidio se da cuenta que la temperatura del cuerpo es de 25°C y que la temperatura ambiente es de 18°C .

- (5 puntos) Utilizando la aproximación de Euler reescriba la ecuación (1) como una ecuación recursiva $\left(\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}\right)$.
- (10 puntos) Plantee un método de computación para la resolución de la ecuación de la Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton. Asuma como entrada la información que estime necesaria para resolver la evolución de la temperatura T en el tiempo.
- (25 puntos) Si considera las constantes $r = 0.005$ y $\Delta t = 20\text{min}$, y son las 3:00am a qué hora ocurrió el homicidio? (Calcule todo en minutos)

(a) Utilizando la aproximación $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t}$, reemplazando

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t} = -r(T_k - T_a) \Rightarrow T_{k+1} = -r\Delta t(T_k - T_a) + T_k \quad (*)$$



(c) Para responder esta pregunta es necesario resolver la ecuación (*)

$$T_{k+1} = -0.005 \cdot 20(T_k - 18) + T_k$$

t	T_k	T_{k+1}
0	37	35,1
Δt	35,1	33,39
$2\Delta t$	33,39	31,85
$3\Delta t$	31,85	30,47
$4\Delta t$	30,47	29,22
$5\Delta t$	29,22	28,10
$6\Delta t$	28,10	27,09
$7\Delta t$	27,09	26,18
$8\Delta t$	26,18	25,362
$9\Delta t$	25,362	

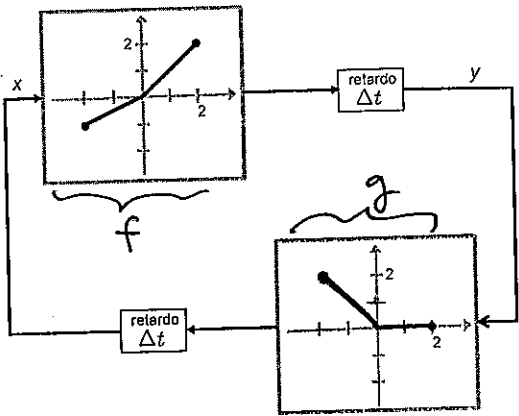
Para tener una temperatura de 25°C han pasado $9\Delta t$,

Si cada Δt son 20 min, donde que

hubo han pasado 180 min | HORA MUERTA = 00:00h

PAUTA

Pregunta 3 (15 puntos): Prediga las evoluciones de las variables en el diagrama de bloque mostrado en la Figura, y complete la tabla hasta que los valores de x e y se estabilicen. Considere las condiciones iniciales $X_0 = -2$ e $Y_0 = -1$ (agregue filas de ser necesario).



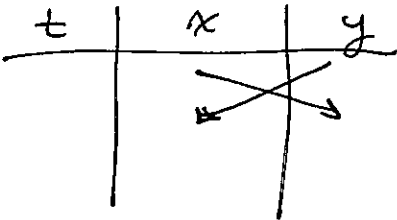
t	x	y
0		
Δt		
$2\Delta t$		
$3\Delta t$		
$4\Delta t$		
$5\Delta t$		

Según el diagrama:

$$Y_k = f(X_{k-1})$$

$$X_k = f(Y_{k-1})$$

Para completar entonces la tabla se hace siguiendo la secuencia



luego entonces completando

t	x	y
0	-2	-1
Δt	1	-1
$2\Delta t$	1	1
$3\Delta t$	0	1
$4\Delta t$	0	0
$5\Delta t$	0	0

Pregunta 1 (50 puntos): Considere el diagrama de bloques mostrado en la Figura 1.

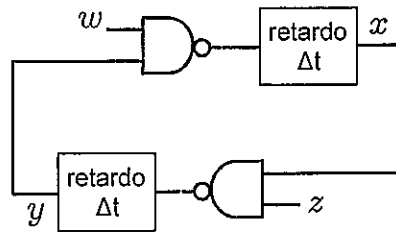


Figure 1: Diagrama de bloques Pregunta 1.

- (5 puntos) Realice el diagrama de dependencias entre las variables.
- (5 puntos) Sin considerar los retardos: Plantee fórmulas para x e y .
- (10 puntos) Considerando retardos: Plantee fórmulas para x e y .
- (20 puntos) Considerando retardos: Mediante una tabla prediga las evoluciones de x e y , entre 0 y $7\Delta t$, considerando los valores de w y z mostrados en la Figura 2.

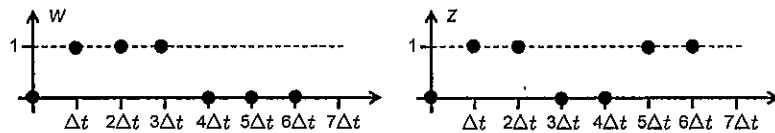
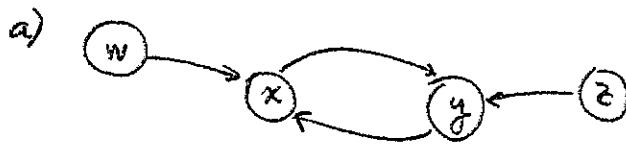


Figure 2: Evolución de w y z .

- (10 puntos) Estructure temporalmente un método para escribir en secuencia x e y dejando w , z y los valores iniciales de x e y a voluntad del usuario.



b) Sin retardos las relaciones quedan:

$$x = w \wedge y = (\overline{w \wedge y})$$

$$y = z \wedge x = (\overline{z \wedge x})$$

c) CON RETARDOS, las relaciones quedan:

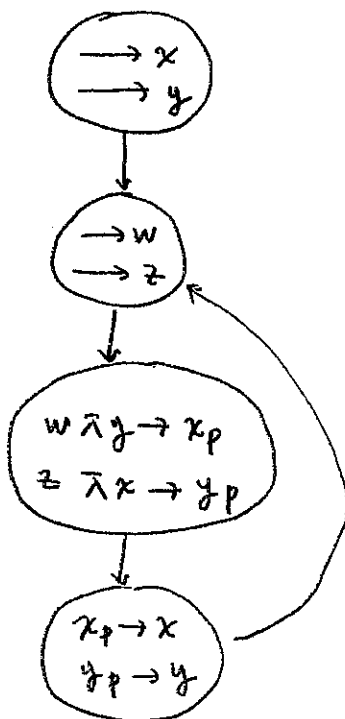
$$x_k = w_{k-1} \wedge y_{k-1}$$

$$y_k = z_{k-1} \wedge x_{k-1}$$

d)

t	w	z	x	y
0	0	0	0	0
Δt	1	1	1	1
$2\Delta t$	1	1	0	0
$3\Delta t$	1	0	0	1
$4\Delta t$	0	0	0	1
$5\Delta t$	0	1	0	1
$6\Delta t$	0	1	1	0
$7\Delta t$	—	—	1	0

(e)



Pregunta 2 (50 puntos): Un electricista debe escoger un cable para hacer la instalación de un circuito eléctrico dependiendo de la corriente que por él pase. El circuito de trabajo está formado por una fuente de tensión continua $V = 5[V]$, un resistor $R = 10[\Omega]$ y un elemento X , como se muestra en la Figura 3.

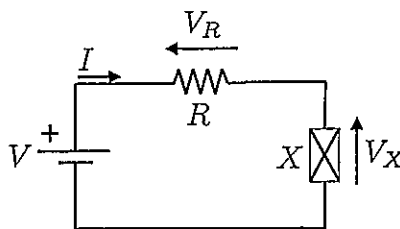


Figure 3: Diagrama de circuito Pregunta 2.

Siguiendo las leyes de Kirchhoff se cumple que:

$$V = V_R + V_X, \quad (1)$$

donde V_R es la tensión que cae en el resistor y V_X la que cae en el elemento X . Las relaciones entre V_R y V_X con la corriente del circuito I es la que se muestra a continuación:

$$V_R = I \cdot R, \quad V_X = \frac{-2}{I^2} + 10. \quad (2)$$

El objetivo es encontrar la corriente I mediante el método de iteración visto en clases, y así, ayudar al electricista a encontrar el cable adecuado. Por lo tanto:

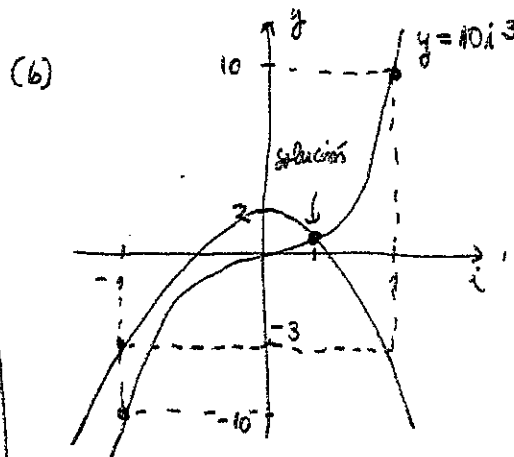
- (20 puntos) Plantee las ecuaciones y muestre los dos despejes posibles.
- (10 puntos) Haciendo un gráfico estimado identifique cualitativamente donde debiese estar el valor de la corriente I .
- (20 puntos) Itere el valor de I ocho veces, partiendo por la condición $I = 0.4[A]$.

$$\begin{aligned} (a) \quad V &= V_R + V_X \\ V &= iR + \left(-\frac{2}{i^2} + 10\right) \\ 5 &= iR - \frac{2}{i^2} + 10 \quad / i^2 \\ \Rightarrow 0 &= i^3 10 - 2 + 5i^2 \\ \boxed{10i^3 = 2 - 5i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Haciendo } y &= 10i^3 \\ y &= 2 - 5i^2 \end{aligned}$$

Los dos despejes posibles entonces serán:

$$\begin{cases} y_{k+1} = 10i_k^3 \\ i_{k+1} = \sqrt{\frac{2-y_k}{5}} \\ i_{k+1} = \sqrt[3]{y_k/10} \\ y_{k+1} = 2 - 5i_k^2 \end{cases}$$



(c) Evaluando

$$\begin{aligned} i_{k+1} &= \sqrt[3]{y_k/10} \\ y_{k+1} &= 2 - 5i_k^2 \end{aligned}$$

t	i	y
0	0.4	1.2
Δt	0.4932	0.7836
$2\Delta t$	0.4279	1.0844
$3\Delta t$	0.4769	0.8630
$4\Delta t$	0.4419	1.0236
$5\Delta t$	0.4678	0.9059
$6\Delta t$	0.4491	0.9915
$7\Delta t$	0.4628	0.9289
$8\Delta t$	<u>0.4529</u>	0.9745

$$i = \boxed{0.4529[A]}$$