Domande Analisi II

D'Agosta Nicola

Gennaio 2023

Risposte all'elenco di domande del file "Analisi - Theory Exam questions-1", dovrebbero mancare solamente i disegni e le dimostrazioni non fatte a lezione. Le risposte sono principalmente frutto di appunti, lavagne dell'Abenda e del libro "Lezioni di analisi matematica due" di Fusco-Marcellini-Sbordone, Zanichelli Editore. Per qualsiasi domanda/errore non esitare a contattarmi, spero questo file possa essere utile.

Nel caso vogliate offrire un caffè paypal.me/TrinitySlifer

Contents

1 Topologia degli spazi metrici

Definition 1.1 (Spazio metrico)**.** Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ che ad ogni coppia (x, y) di punti di un insieme X associa un numero reale $d(x, y) \geq 0$. Si dice che d é una distanza o metrica su X se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &d(x,y) = 0 &&\Leftrightarrow x = y, \quad &&\forall x, y \in X; \\ &d(x,y) = d(y,x) && &&\forall x, y \in X; \\ &d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) && &&\forall x, y, z \in X; \end{aligned} \tag{1.1}$$

Allora se d è una distanza sull'insieme X, si dice che (X,d) è uno spazio metrico. Esempi di s.m. possono essere lo spazio euclideo con la distanza d_2, lo spazio delle funzioni continue e di quelle limitate con la distanza d_∞, un insieme qualsiasi con la metrica delta.

Definition 1.2 (Intorno circolare aperto)**.** Per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$, si chiama intorno circolare aperto (o palla aperta) di centro x_0 e raggio r, l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}. \tag{1.2}$$

Definition 1.3 (Insieme aperto in uno s.m.)**.** Un insieme $A \subseteq X$ si dice aperto se ogni suo punto é centro di un intorno circolare contenuto in A, in altre parole $\forall x_0 \in X \quad \exists B(x_0, r) \subseteq A$.

Definition 1.4 (Proprietà degli aperti)**.** Sia (X, d) uno s.m.:

1. $X, \emptyset$ sono aperti.
2. Unione arbitraria di aperti è un aperto.
3. Intersezione finita di aperti è un aperto.

Definition 1.5 (Insieme chiuso)**.** Un insieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se il suo complementare $X \setminus C$ è aperto.

Definition 1.6 (Proprietà dei chiusi)**.** Sia (X, d) uno s.m.:

1. $X, \emptyset$ sono chiusi.
2. Intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso.
3. Unione finita di chiusi è un chiuso.

Definition 1.7 (Punto interno)**.** Un punto x_0 si dice interno all'insieme $I \subseteq X$ se esiste un intorno circolare aperto di x_0 totalmente contenuto in I, in altre parole x_0 é detto interno a I se $\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq I$.

Definition 1.8 (Punto di aderenza)**.** Un punto x_0 si dice aderente all'insieme $I \subseteq X$ se ogni suo intorno ha una intersezione non nulla con l'insieme, in altre parole x_0 si dice aderente a I se $\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap I \neq \emptyset$.

Definition 1.9 (Punto di frontiera)**.** Un punto x_0 si dice di frontiera per l'insieme $I \subseteq X$ se ogni suo punto ha intersezione non nulla con I e il suo complementare, in altre parole x_0 punto di frontiera per I se $\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap I \neq \emptyset, B(x_0, r) \cap X \setminus I \neq \emptyset$.

Definition 1.10 (Punto di accumulazione)**.** Un punto x_0 si dice di accumulazione per l'insieme $I \subseteq X$ se ogni intorno di x_0 con x_0 escluso ha intersezione non nulla con l'insieme, in altre parole x_0 si dice di accumulazione per I se $\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap (I - x) \neq \emptyset$.

Definition 1.11 (Interno)**.** L'insieme dei punti interni a $I \subseteq X$ si chiama interno di I e si indica con int(I). L'interno di un insieme può anche essere visto come l'unione di tutti gli aperti contenuti nell'insieme.

Definition 1.12 (Frontiera)**.** L'insieme dei punti di frontiera di $I \subseteq X$ è detto frontiera di I e si indica con ∂I.

Definition 1.13 (Chiusura)**.** L'unione di un insieme $I \subseteq X$ con la sua frontiera è detta chiusura dello stesso e si indica con cl(I). (cl(I) $= I \cup \partial I$)

2 Spazi metrici completi

Definition 2.1 (Spazio metrico)**.** Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ che ad ogni coppia (x, y) di punti di un insieme X associa un numero reale $d(x, y) \geq 0$. Si dice che d é una distanza o metrica su X se sono verificate le seguenti condizioni:

$$
\begin{aligned}
&d(x,y) = 0 &&\Leftrightarrow x = y, \qquad \forall x, y \in X;\\
&d(x,y) = d(y,x) &&\qquad\qquad \forall x, y \in X;\\
&d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) &&\qquad\qquad \forall x, y, z \in X;
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Allora se d è una distanza sull'insieme X, si dice che (X,d) è uno spazio metrico.

Definition 2.2 (Successione)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico una funzione $f : \mathbb{N} \to X$ è detta successione di punti su X.

Definition 2.3 (Successione convergente)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in X, si dice che x_k converge verso x_0 se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$d(x_k, x_0) < \varepsilon \qquad \forall k \geq \nu. \tag{2.2}$$

Definition 2.4 (Successione di Cauchy)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in X, si dice che x_k è di Cauchy se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad \forall m, n \geq \nu. \tag{2.3}$$

Definition 2.5 (Spazio metrico completo)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, è detto completo se ogni successione di Cauchy è convergente in un punto $x_0 \in X$.

Theorem 2.1 (Principio di Cantor)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico è completo iff per ogni successione di insiemi chiusi non vuoti tali che $F_k \in X$, $F_{k+1} \subseteq F_k$ si ha che $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$.

Theorem 2.2 (Completamento di uno s.m.)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, un completamento di X è una coppia (Y, ϕ) tale che Y è uno spazio metrico completo, ϕ una isometria tra X tale che $\phi(X)$ è denso in Y.

3 Funzione continue tra spazi metrici

Definition 3.1 (Spazio metrico)**.** Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ che ad ogni coppia (x, y) di punti di un insieme X associa un numero reale $d(x, y) \geq 0$. Si dice che d é una distanza o metrica su X se sono verificate le seguenti condizioni:

$$
\begin{aligned}
&d(x,y) = 0 &&\Leftrightarrow x = y, \qquad \forall x, y \in X;\\
&d(x,y) = d(y,x) &&\qquad\qquad \forall x, y \in X;\\
&d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) &&\qquad\qquad \forall x, y, z \in X;
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Allora se d è una distanza sull'insieme X, si dice che (X,d) è uno spazio metrico.

Definition 3.2 (Spazio metrico completo)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, è detto completo se ogni successione di Cauchy è convergente in un punto $x_0 \in X$.

Definition 3.3 (Funzioni continue)**.** Siano (X, τ_1) e (Y, τ_2) spazi topologici, sia $f : X \to Y$ una applicazione allora f è detta continua se:

1. $\forall A$ aperto in Y $f^{-1}(A)$ è aperto in X.
2. $\forall C$ chiuso in Y $f^{-1}(C)$ è chiuso in X. (equivalente a quella sopra per definizione di chiuso)
3. $\forall x_0 \in X$, $\forall V$ intorno di $f(x_0)$, $\exists U$ intorno di $x_0 :\ f(U) \subseteq V$.

Inoltre se X, Y sono dotati di metriche rispettivamente d_X, d_y allora f è detta continua se:

1. $\forall x_0 \in A \subseteq X, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che se $d_X(x_0, x) < \delta$ allora $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. sia E dominio di f, $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : f(E \cap B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$

Definition 3.4 (Funzione uniformemente continua)**.** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione, f è detta uniformemente continua se : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $d_X(x_0, x) < \delta$ allora $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Definition 3.5 (Lipschitzianitá)**.** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione, f è detta di lipschitz se: $\exists L$ tale che $\forall x, y \in X, \quad d_Y(f(x), f(y) < L d_X(x, y)$.

Definition 3.6 (Isometria)**.** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione, f è detta una isometria se $\forall x, y \in X, \quad d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Definition 3.7 (Distanza di un punto da un insieme)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $A \subseteq X$ sottoinsieme non vuoto e $x_0 \in X$ un punto la distanza tra x_0 e A è definita: $d(x_0, A) = inf_{p \in A} d(x_0, p)$

Definition 3.8 (Contrazione)**.** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione, allora f è detta contrazione se è lipschitz con contante $L < 1$.

4 Calcolo differenziale a più variabili

Definition 4.1 (Derivata parziale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, $x \in A$ si definisce derivata parziale di $f(x)$ rispetto alla variabile x_j il limite, se esiste finito:

$$f_{x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\hat{e_j}) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}. \tag{4.1}$$

Definition 4.2 (Derivata direzionale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\hat{\nu} \in \mathbb{R}, \|\hat{\nu}\| = 1$ è detta derivata direzionale in $x \in A$ rispetto a $\hat{\nu}$ se esiste finito il limite:

$$f_{\hat{\nu}}(x) = \frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\hat{\nu}) - f(x)}{h}. \tag{4.2}$$

Definition 4.3 (Gradiente)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, il gradiente di f in $x \in A$ è il vettore le cui componenti, se esistono, sono le derivate parziali di $f(x)$:

$$\nabla f(x) = grad\ f(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(x) \\ f_{x_2}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Definition 4.4 (Differenziale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, f è detta differenziabile in in $x \in A$ se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x + h) = f(x) + \langle m, h \rangle + o(|h|) \qquad h \to 0 \tag{4.4}$$

in tal caso m è detto differenziale di f in x.

Theorem 4.1 (Teoremi sulle relazioni fra derivate parziali, differenziabilità, continuità e derivate direzionali)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, $x \in A$.

Proprietà delle funzioni differenziabili: Sia f differenziabile in x allora :

1. f è continua in x.

2. $m = \nabla f(x)$, cioè esistono le derivate di f e $m_i = f_{x_j}(x)$. La differenziabilità implica quindi la derivabilità in un punto, non è vero invece il contrario.

3. $\forall \hat{\nu} \in \mathbb{R}^3, \|\hat{\nu}\| \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x)$.

Differenziale totale: Se esistono $f_{x_i}(x)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ in un intorno di x e sono continue in x allora f è differenziabile in x.
Derivate direzionali nel caso delle funzioni differenziabili:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x)\right| = |\langle \nabla f(x), \hat{\nu}\rangle| \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|\hat{\nu}\| = \|\nabla f(x)\|. \tag{4.5}$$

Questa formula implica che la direzione del gradiente è quella di massima variazione di f.

Definition 4.5 (Piano tangente al grafico di una funzione)**.** Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A differenziabile, $x_0 \in A$ definisco come segue la funzione g:

$$g(x) = f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle. \tag{4.6}$$

I grafici di queste due funzioni sono definiti:

$$\begin{aligned} &\text{Grafico di } f\ \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ &\text{Grafico di } g\ \Gamma_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

dove Γ_g è un iperpiano n-dimensionale tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. g approssima la funzione $f(x)$ nel punto $x = x_0$ a meno di infinitesimi di ordine superiore alla distanza $\|x - x_0\|$.

Definition 4.6 (Derivata parziale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funzione a valori vettoriali definita su un aperto A, $x \in A$ si definisce derivata parziale di $f(x)$ rispetto alla variabile x_j il limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x + t\hat{e_j}) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t}. \tag{4.8}$$

Definition 4.7 (Jacobiano)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funzione a valori vettoriali definita su un aperto A, sia derivabile rispetto a tutte le variabili in $x \in A$ è detto Jacobiano di f in x la matrice $m \times n$:

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \tag{4.9}$$

Theorem 4.2 (Jacobiano della funzione composta)**.** Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B, g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ funzioni a valori vettoriali definita sugli aperti A, B tali che siano differenziabili rispettivamente in $x_0 \in A, y_0 = f(x_0) \in B$. Allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}^l$ è differenziabile in x_0 e:

$$J_{g\circ f}(x_0) = \left[\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x_0)\right] = J_g(f(x_0))J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \langle \nabla g_1(f(x_0)), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\rangle & \ldots & \langle \nabla g_1(f(x_0)), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nabla g_l(f(x_0)), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\rangle & \ldots & \langle \nabla g_l(f(x_0)), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\rangle \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Theorem 4.3 (Jacobiano della funzione inversa)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ con A, B aperti, di classe C^1 allora:

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}(f^-1(y)) \quad \forall y \in B. \tag{4.11}$$

Proof. $(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall x \in B$ per la teorema del Jacobiano della funzione composta si ha:

$$I = J_{(f\circ f^{-1})}(y) = J_{f^{-1}}(y)J_f(f^-1(y)) \tag{4.12}$$

da cui la tesi. □

5 Calcolo differenziale a più variabili II

Definition 5.1 (Derivata parziale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, $x \in A$ si definisce derivata parziale di $f(x)$ rispetto alla variabile x_j il limite, se esiste finito:

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\hat{e_j}) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t}. \tag{5.1}$$

Definition 5.2 (Derivata direzionale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\hat{\nu} \in \mathbb{R}, \|\hat{\nu}\| = 1$ è detta derivata direzionale in $x \in A$ rispetto a $\hat{\nu}$ se esiste finito il limite:

$$f_{\hat{\nu}}(x) = \frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\hat{\nu}) - f(x)}{h}. \tag{5.2}$$

Definition 5.3 (Gradiente)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, il gradiente di f in $x \in A$ è il vettore le cui componenti, se esistono, sono le derivate parziali di $f(x)$:

$$\nabla f(x) = grad\ f(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(x) \\ f_{x_2}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Definition 5.4 (Differenziale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, f è detta differenziabile in in $x \in A$ se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x + h) = f(x) + \langle m, h\rangle + o(|h|) \qquad h \to 0 \tag{5.4}$$

in tal caso m è detto differenziale di f in x.

Theorem 5.1 (Teoremi sulle relazioni fra derivate parziali, differenziabilità, continuità e derivate direzionali)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, $x \in A$.

Proprietà delle funzioni differenziabili: Sia f differenziabile in x allora :

1. f è continua in x.
2. $m = \nabla f(x)$, cioè esistono le derivate di f e $m_i = f_{x_j}(x)$. La differenziabilità implica quindi la derivabilità in un punto, non è vero invece il contrario.
3. $\forall \hat{\nu} \in \mathbb{R}^3, \|\hat{\nu}\| \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x)$.

Differenziale totale: Se esistono $f_{x_i}(x)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ in un intorno di x e sono continue in x allora f è differenziabile in x.

Derivate direzionali nel caso delle funzioni differenziabili:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(x)\right| = |\langle \nabla f(x), \hat{\nu}\rangle| \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|\hat{\nu}\| = \|\nabla f(x)\|. \tag{5.5}$$

Questa formula implica che la direzione del gradiente è quella di massima variazione di f.

Definition 5.5 (Piano tangente al grafico di una funzione)**.** Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A differenziabile, $x_0 \in A$ definisco come segue la funzione g:

$$g(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle. \tag{5.6}$$

I grafici di queste due funzioni sono definiti:

$$\begin{aligned} &\text{Grafico di } f\ \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ &\text{Grafico di } g\ \Gamma_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

dove Γ_g è un iperpiano n-dimensionale tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. g approssima la funzione $f(x)$ nel punto $x = x_0$ a meno di infinitesimi di ordine superiore alla distanza $\|x - x_0\|$.

Definition 5.6 (Derivate di ordine superiore)**.** Supponendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A derivabile in $x \in A$ rispetto a tutte le variabili, definisco la derivata parziale rispetto a x_i, x_j se esiste finito il limite :

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x + t\hat{e_i}) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{t} \tag{5.8}$$

Definition 5.7 (Matrice Hessiana)**.** Supponendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A derivabile due volte in x rispetto a tutte le variabili, è detta matrice Hessiana o matrice delle derivate seconde la matrice $n \times n$:

$$H_f(x) = \left[f_{x_i x_j}(x)\right] = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \dots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \dots & f_{x_nx_n}(x) \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Theorem 5.2 (Lemma di Schwartz v.1)**.** Supponendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A derivabile due volte in $x \in A$ rispetto a tutte le variabili con tutte le derivate seconde continue allora $H_f(x)$ è simmetrica.

Definition 5.8 (Funzione differenziabile due volte)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, $x \in A$ allora f è detta differenziabile due volte se f è differenziabile in un intorno aperto di x e $f_{x_j}(x)$ sono funzioni differenziabili in x.

Theorem 5.3 (Lemma di Schwartz v.2)**.** Supponendo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A differenziabile due volte in x allora $H_f(x)$ è simmetrica.

Theorem 5.4 (Formula di Taylor al secondo ordine)**.** Sia $f \in C^2(A, \mathbb{R})$ con $A \in \mathbb{R}^n$ aperto connesso allora $\forall\, x_0 \in A$:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(\|x - x_0\|^2) \tag{5.10}$$

6 Massimi e minimi locali

Definition 6.1 (Massimo locale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, il punto $x_0 \in A$ è detto di massimo locale se $\exists B(x_0, r) : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in B(x_0, r)$.

Definition 6.2 (Minimo locale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, il punto $x_0 \in A$ è detto di minimo locale se $\exists B(x_0, r) : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x_0, r)$.

Theorem 6.1 (Teorema di Fermat)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, se il punto $x_0 \in A$ è un estremante relativo e f è derivabile allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Proof. Essendo x_0 punto di massimo locale in A la funzione ad una variabile $F(t) = f(x_0 + e_i t)$ definita in $]t - \delta, t + \delta[$ e derivabile nel dominio ha massimo relativo per $t = 0$ da cui si ha $F'(0) = f_{x_i}(x_0) = 0$. Il procedimento è uguale nel caso x_0 minimo locale. □

Definition 6.3 (Forma quadratica)**.** Ad ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è associata una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita:

$$F(\lambda) = \langle A \cdot \lambda, \lambda\rangle = a_{ij}\lambda_i\lambda_j \qquad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

$F(\lambda)$ è quindi un polinomio omogeneo di secondo grado in λ ed è chiamata forma quadratica associata ad A. A è detta:

- Definita positiva se $F(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$.
- Semidefinita positiva se $F(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, $\exists \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $F(\overline{\lambda}) = 0$.

- Definita negativa se $F(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$.
- Semidefinita negativa se $F(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, $\exists \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $F(\overline{\lambda}) = 0$.
- Indefinita se $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^n : F(\lambda) < 0, F(\mu) > 0$.

Definition 6.4 (Classificazione dei punti critici per funzioni C^2)**.**

Theorem 6.2 (Condizione sufficiente)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A di classe C^2, $x_0 \in A$:

- Se $\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0)$ e $H_f(x_0)$ definita positiva allora x_0 è punto di minimo relativo per f in A.
- Se $\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0)$ e $H_f(x_0)$ definita negativa allora x_0 è punto di massimo relativo per f in A.
- Se $\nabla f(x_0) = (0, \ldots, 0)$ e $H_f(x_0)$ indefinita allora x_0 è punto di sella per f in A.

7 Varietà regolari e Dini

Definition 7.1 (Varietà regolare)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1. Diremo che $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \ldots, 0)\}$ è una varietà regolare di $\mathbb{R}^n$ se $\forall x \in \Gamma$ $rk(J_f(x))$ ha rango massimo cioè k.

Definition 7.2 (Spazio tangente)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1, $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \ldots, 0)\}$ varietà regolare, $x_0 \in \Gamma$ allora

$$T_{x_0}\Gamma = \{h \in \mathbb{R}^n | \langle \nabla f_i(x_0), h \rangle = 0\} \tag{7.1}$$

è detto spazio tangente a Γ in x_0.

Definition 7.3 (Spazio normale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1, $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \ldots, 0)\}$ varietà regolare, $x_0 \in \Gamma$ allora

$$N_{x_0}\Gamma = Span\{\nabla f_i(x_0)\} \tag{7.2}$$

è detto spazio normale a Γ in x_0.

Theorem 7.1 (Teorema del Dini a due dimensioni)**.** Sia $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A di classe C^1, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che:

$$g(x_0, y_0) = 0, \qquad g_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{7.3}$$

Allora esistono un intervallo reale aperto I, con $x_0 \in I$, un intervallo reale aperto J, con $y_0 \in J$, ed una funzione $f(x) : I \to J$ di classe C^1 tali che:

$$f'(x_0) = -\left(\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}\right) \quad x \in I \tag{7.4}$$

e

$$g(x, y) = 0 \quad \xLeftrightarrow{(x,y) \in I \times J} \quad y = f(x) \tag{7.5}$$

Proof. **Esistenza di** $f(x)$**:** Per il teorema di permanenza del segno, esiste un rettangolo $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$, tale che $g_y(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in R$ (per comodità supponiamo il segno della derivata crescente). Per costruzione la funzione $h(y) = g(x_0, y)$ è strettamente crescente e continua per $y \in J$ e pertanto $g(x_0, y_0 + \sigma) > 0 > g(x_0, y_0 - \sigma)$. Per il teorema del segno poiché g è continua esiste $0 < \delta_1 < \delta$ date che $g(x, y_0 + \sigma) > 0 > g(x, y_0 - \sigma), \forall \overline{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. Pertanto $\forall x$ fissato la funzione $\overline{h} = g(\overline{x}, y)$ è strettamente crescente e continua nell'intervallo $\overline{y} \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ ed esiste un unico $\overline{y} : g(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Continuità di $f(x)$: Verifichiamo che il $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$ per ogni $\overline{x} \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$. Dobbiamo dunque verificare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$ per ogni $x \in]\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta[\cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$. Si ha $g(\overline{x}, f(\overline{x}) - \varepsilon) < 0 < g(\overline{x}, f(\overline{x}) - \varepsilon)$. Per la continuità di g e il teorema di permanenza del segno, per ogni $x \in]\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta[$ si ha:

$$g(x, f(\overline{x}) - \varepsilon) < 0 < g(x, f(\overline{x}) + \varepsilon) \tag{7.6}$$

Poiché $g(x, y)$ è strettamente monotona e continua in $y \in [f(\overline{x}) - \varepsilon, f(\overline{x}) + \varepsilon]$ esiste un unico $y = f(x) \in [f(\overline{x}) - \varepsilon, f(\overline{x}) + \varepsilon]$ tale che $g(x, f(x)) = 0$.

Differenziabilità di $f(x)$: Siano $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)) \in I \times J$ e $\phi = (\phi_1, \phi_2) : [0, 1] \to I \times J$ la funzione

$$x = \phi_1(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = \phi_2(t) = f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

la cui immagine è il segmento di retta passante per i punti $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in I \times J$. Per costuzione la funzione

$$h(t) = (g \circ \phi)(t) = g(x_1 + t(x_2 - x_1), f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))) \tag{7.7}$$

è di classe $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ e per il teorema del valor medio di Lagrange, esiste $c \in]1, 0[$ tale che $h'(c) = 0$, usando il teorema della funzione composta si ha:

$$0 = h'(c) = g_x(\phi_1(c), \phi_2(c))(x_2 - x_1) + g_y(\phi_1(c), \phi_2(c))(f(x_2) - f(x_1)) \tag{7.8}$$

da cui si ricava che:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{g_x(\phi_1(c), \phi_2(c))}{g_y(\phi_1(c), \phi_2(c))} \tag{7.9}$$

Adesso se facciamo tendere x_2 a x_1, per la conitnuità della funzione f, $f(x_2)$ tende a $f(x_1)$. Pertanto $\phi_1(c)$ tende a x_1 e $\phi_2(c)$ tende a $f(x_1)$. Per continuità di g_x e g_y si ha infine che:

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{g_x(x_1, f(x_1))}{g_y(x_1, f(x_1))}. \tag{7.10}$$

□

Theorem 7.2 (Teorema del Dini a piú dimensioni)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1. Sia $(x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_{n-k}^0, y_1^0, \dots, y_k^0) \in A$ soluzione del sistema $g(x, y) = 0$, se la jacobiana:

$$J_{g,y}(x^0, y^0) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(x^0, y^0) \tag{7.11}$$

è invertibile ($det\, J_{g,y}(x^0, y^0 \neq 0)$ allora esistono intorni aperti $I \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$, $J \subseteq \mathbb{R}^k$ tali che $(x^0, y^0) \in I \times J \in A$ e $f : I \to J$ funzione di classe C^1 tale che :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k) = 0 \end{cases} \overset{I \times J}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y_1 = f(x_1, \dots, x_{n-k}) \\ \vdots \\ y_k = f(x_1, \dots, x_{n-k}) \end{cases} \tag{7.12}$$

e

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k) = -\frac{\left|\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(y_1, \dots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \dots, y_k)}(x_1, \dots, x_{n-k}, f_1(x), \dots, f_k(x)\right|}{\left|\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}(x_1, \dots, x_{n-k}, f_1(x), \dots, f_k(x)\right|} \tag{7.13}$$

8 Estremanti condizionati

Definition 8.1 (Varietà regolare)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1. Diremo che $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \dots, 0)\}$ è una varietà regolare di $\mathbb{R}^n$ se $\forall x \in \Gamma$ $rk(J_f(x))$ ha rango massimo cioè k.

Definition 8.2 (Spazio tangente)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1, $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \dots, 0)\}$ varietà regolare, $x_0 \in \Gamma$ allora

$$T_{x_0}\Gamma = \{h \in \mathbb{R}^n | \langle \nabla f_i(x_0), h \rangle = 0\} \tag{8.1}$$

è detto spazio tangente a Γ in x_0.

Definition 8.3 (Spazio normale)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione definita su un aperto A di classe C^1, $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \dots, 0)\}$ varietà regolare, $x_0 \in \Gamma$ allora

$$N_{x_0}\Gamma = Span\{\nabla f_i(x_0)\} \tag{8.2}$$

è detto spazio normale a Γ in x_0.

Definition 8.4 (Massimo locale su Γ)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare il punto $x_0 \in \Gamma$ è detto di massimo locale per f ristretta a Γ se $\exists B(x_0, r) : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in \Gamma \cap B(x_0, r)$.

Definition 8.5 (Minimo locale su Γ)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare il punto $x_0 \in \Gamma$ è detto di minimo locale per f ristretta a Γ se $\exists B(x_0, r) : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \Gamma \cap B(x_0, r)$.

Theorem 8.1 (Teorema di Fermat per estremanti condizionati)**.** Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare. Sia $x_0 \in \Gamma$ punto di massimo oppure minimo locale di g ristretta a Γ allora:

$$\forall \hat{\nu} \in T_{x_0}\Gamma \qquad \frac{\partial g}{\partial \hat{\nu}}(x_0) = 0 \tag{8.3}$$

Observation 8.2. Dal punto di vista geometrico il teorema di Fermat per estremanti condizionati ci dice che il gradiente della funzione in un punto estremante condizionato è ortogonale a $T_{x_0}\Gamma$ per cui appartiene a $N_{x_0}\Gamma$ per cui $\nabla g(x_0) \in span\{\nabla f(x_0)\}$ (con f funzione che definisce Γ).

Theorem 8.3 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A, sia $\Gamma \subseteq A$ una varietà regolare $n-k$ dimensionale e supponiamo che $x_0 \in \Gamma$ sia punto estremante condizionato di f ristretta a Γ. Detta funzione lagrangiana:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = g(x_1, \dots, x_n) - \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n) \tag{8.4}$$

allora $\exists \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k \in \mathbb{R}$ tali che: $(x_0, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$ è punto critico di F.

Theorem 8.4. Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita su un aperto A di classe C^2, sia $\Gamma = \{x \in A \mid f(x) = (0, \dots, 0)\}$ una varietà regolare $n-k$ dimensionale con $f_i \in C^2(A, \mathbb{R})$ e supponiamo che $x_0 \in \Gamma$, sia F la funzione lagrangiana associata:

1. Se x_0 è punto di minimo locale (rispettivamente massimo locale) di f ristretta a Γ allora $\exists \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla F(x_0, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k) = 0$ e la forma quadratica $H_F(x_0, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k)$ ristretta ad $(h, \mu) \in T_{x_0}\Gamma \times \mathbb{R}^k$ è semidefinita positiva o definita positiva (rispettivamente semidefinita negativa o definita negativa)

2. Se $\exists \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla F(x_0, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k) = 0$ e $H_F(x_0, \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_k)$ ristretta ad $(h, \mu) \in T_{x_0}\Gamma \times \mathbb{R}^k$ è definita positiva (rispettivamente definita negativa) allora x_0 è punto di minimo locale (rispettivamente massimo locale) per f ristretta a Γ.

9 Misura di Peano-Jordan e integrale multiplo di Riemann

Definition 9.1 (Intervallo superiormente semiaperto (i.s.s) e la sua misura)**.** $I = [a_1, b_1[\times[a_n, b_n[$ con $a_i \le b_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ è detto insieme superiormente semiaperto. Si chiama misura elementare di I e si indica con $\mu_n(I)$ il numero positivo

$$\mu_n(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

Definition 9.2 (Plurintervallo e la sua misura)**.** Si chiama plurintervallo P l'unione finita e disgiunta di i.s.s. Si chiama misura elementare di P e si indica con $\mu_n(P)$ il numero positivo

$$\mu_n(P) = \sum_{k=1}^{q} \mu_n(I_k).$$

Osservazione: esistono infinite decomposizioni di P come unione disgiunta di i.s.s ma la misura non dipende da esse.

Theorem 9.1 (Proprietà delle misure dei plurintervalli)**.** Sia $\mathbb{P} = \{P \subseteq \mathbb{R} : P \text{ plurintervallo}\}$

1) Finita additività Se $P, Q \in \mathbb{P}$ e $P \cap Q = \emptyset$ allora $\mu_n(P \cup P') = \mu_n(P) + \mu_n(Q)$

2) Monotonia Se $P, Q \in \mathbb{P}$ e $P \subseteq Q$ allora $\mu_n(P) \le \mu_n(Q)$

3) Modularità Se $P, Q \in \mathbb{P}$ allora $\mu_n(P \cup Q) + \mu_n(P \cap Q) = \mu_n(P) + \mu_n(Q)$

4) Se $P, Q \in \mathbb{P}$ allora $\mu_n(P \setminus Q) = \mu_n(P) - \mu_n(P \cap Q)$

5) Corollario 3) Se $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}$ allora $\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} \mu_n(P_i)$

Definition 9.3 (Misura interna ed esterna di un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$)**.** Sia X un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$. La misura interna $I(X)$ e la misura esterna $E(X)$ secondo Peano-Jordan di X sono definite rispettivamente da:

$$I(X) = sup\{\mu_n(P) : P \in \mathbb{P}, P \subseteq X\};$$
$$E(X) = inf\{\mu_n(P) : P \in \mathbb{P}, P \supseteq X\}.$$

Definition 9.4 (Insieme limitato misurabile secondo P-J)**.** Sia X un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$, è detto misurabile secondo P-J se $I(X) = E(X)$ e in tal caso chiamiamo misura n-dimensionale di X tale valore, $\mu_n(X) = I(X) = E(X)$. Denoteremo con $J_b(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^n$ limitate e misurabili secondo P-J.

Theorem 9.2 (Proprietà della misura)**.** Proprietà della misura di P-J di un insieme limitato:

1) Finita additività Se $X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$, $X \cap Y = \emptyset$ allora $X \cap Y$ è misurabile e $\mu_n(X \cap Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$

2) Monotonia Se $X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$, $X \subseteq Y$ allora $\mu_n(X) \le \mu_n(Y)$

3) Modularità Se $X, \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora $\mu_n(X \cup Y) + \mu_n(X \cap Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y)$

4) Se $X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora $\mu_n(X \setminus Y) = \mu_n(X) - \mu_n(X \cap Y)$

5) Corollario 3) Se $X_1, \ldots, X_k \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora $\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} \mu_n(X_i)$

6) Se $X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora $int(X), cl(X) \in J_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(X) = \mu_n(int(X)) = \mu_n(cl(X))$

Theorem 9.3 (Caraterizzazione degli insiemi a misura nulla)**.** Insiemi limitati a misura nulla secondo P-J, sia X limitato:

1) $int(X) = \emptyset \Leftrightarrow I(X) = 0$.

2) $X \in J_b(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(X) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists P' \in \mathbb{P}, X \subseteq P' : \mu_n(P) < \varepsilon$.

3) Se $X \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora $int(X) = \emptyset \Leftrightarrow \mu_n(X) = 0$

Definition 9.5 (Misura di un insieme)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che X è misurabile secondo P-J se $\forall Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ si ha $X \cap Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ allora:

$$\mu_n(X) = sup_{Y \in J_b(\mathbb{R}^n)} \mu_n(X \cap Y) \tag{9.1}$$

Definition 9.6 (Integrale secondo Riemann)**.** Sia $f : A \subseteq J(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ limitata e $f(x) \geq 0, \forall x \in A$, sia $R(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$ il sottografico di f. Allora diciamo che f è integrabile secondo Riemann in A se $R(f)$ è misurabile come sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ secondo P-J e in tal caso

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \mu_{n+1} R(f) \tag{9.2}$$

inoltre se $\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \leq +\infty$ diremo f sommabile secondo Reimann in A.

Definition 9.7 (Integrale secondo Riemann per funzioni a segno variabile)**.** Sia $f : A \in J(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ allora definisco due funzioni come segue $f_+, f_- : A \to \mathbb{R}$ tali che $f_+(x) = max\{f(x), 0\}$ e $f_-(x) = max\{-f(x), 0\}$. Se f_+ e f_- sono integrabili secondo Riemann e almeno uno fra $\int_A f_+$ e $\int_A f_-$ è finito allora definiamo integrale di f in A:

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_A f_+(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots, dx_n - \int_A f_-(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{9.3}$$

Inoltre se $\int_A f_+, \int_A f_- < +\infty$ allora diremo che f è sommabile in A.

Theorem 9.4. Sia $A \in J(\mathbb{R}^n)$:

1) Linearità Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ sommabili allora $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $c_1 f + c_2 g$ è sommabile e

$$\int_A [c_1 f(x_1, \ldots, x_n) + c_2 g(x_1, \ldots, x_n)] dx_1 \ldots dx_n = c_1 \int_A f(x_1, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n + c_2 \int_A g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{9.4}$$

2) Additività Sia $\mu_n(A) < \infty$, $A_1, A_2 \subseteq A$ tali che $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1, A_1 \in J(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_n(A_1 \cap A_2) = 0$ se $f : A \to \mathbb{R}$ è sommabile allora:

$$\exists \int_{A_1} f, \int_{A_2} f \quad \text{e}$$

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_{A_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \int_{A_2} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

10 Teoremi di riduzione degli integrali multipli

Definition 10.1 (Dominio normale rispetto ad un asse)**.** Siano $\psi, \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\phi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a, b]$ allora $A = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ si chiama dominio normale rispetto all'asse y, $A \in J(\mathbb{R})$ e

$$\mu_2(A) = \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)] dx = \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx \tag{10.1}$$

Theorem 10.1 (Riduzione per integrali doppi su domini normali rispetto ad un asse)**.** Siano $\psi, \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\phi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a, b], A = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ allora :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx \tag{10.2}$$

Definition 10.2 (Solido di Cavalieri)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3, A \in J_b(\mathbb{R}^3)$ diremo che A è un solido di Cavalieri se esiste un asse λ tale che le sezioni di livello $\overline{\lambda}$ di A sono misurabili $\forall \overline{\lambda} \in [a,b]$ e vuote se $\overline{\lambda} < a, \overline{\lambda} > b$.

Theorem 10.2 (Riduzione per i solidi di Cavalieri)**.** Sia $A \in J_b(\mathbb{R}^3)$ solido di Cavalieri rispetto all'asse z e tale che $sez_z(A) \in J_b(\mathbb{R}^2),\ \forall z \in [a,b];\ sez_z(A) = \emptyset \quad \forall z < a, z > b$ allora :

$$\mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(sez_z(A))dz \tag{10.3}$$

Inoltre se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua:

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dz \left[\iint_{sez_z(A)} f(x,y,z)dxdy \right] \tag{10.4}$$

Definition 10.3 (Dominio normale in $\mathbb{R}^3$)**.** Siano $\alpha, \beta \in C^0(K \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con $K \in J_b(\mathbb{R}^2)$ e sia $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y) \quad \forall x, y \in K$ allora A definito $A = \{(x,y,z) \in K \times \mathbb{R} : \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ è detto dominio normale rispetto all'asse z.

Theorem 10.3 (Riduzione di integrali tripli su domini normali rispetto ad un asse)**.** Siano $\alpha, \beta \in C^0(K \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con $K \in J_b(\mathbb{R}^2)$ e sia $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y) \quad \forall x, y \in K,\ A = \{(x,y,z) \in K \times \mathbb{R} : \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ allora:

1. $$A \in J_b(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad \mu_3(A) = \iint_K dxdy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz = \iint_K dxdy[\beta(x,y) - \alpha(x,y)] \tag{10.5}$$

2. $$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \iint_K dxdy \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right] \tag{10.6}$$

11 Teorema di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo

Definition 11.1 (Trasformazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)**.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione, è detta lineare se:

- $f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$
- $f(cv) = cf(v), \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}.$

Inoltre sia $A \in M_{n \times n}$ la matrice associata alla trasformazione lineare f allora $|det(A)|$ è il fattore con cui vengono modificati i volumi degli oggetti contenuti negli spazi.

Theorem 11.1 (Teorema di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $detJ_\Phi \neq 0$ e $1-1$. Sia $K \subseteq A$, $K \in J_b(\mathbb{R}^n)$ compatto e connesso e $f \in C^0(\Phi(K), \mathbb{R})$. Allora:

1. $\Phi(K)$ è compatto, connesso e in $J_b(\mathbb{R}^n)$:
$$\mu_n(\Phi(K)) = \int \cdots \int_{\Phi(K)} dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_K |detJ_\Phi(u_1, \dots, u_n)| \, du_1 \dots du_n \tag{11.1}$$

2. Caso generale del cambiamento di variabile:
$$\int \cdots \int_{\Phi(K)} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_K (f \circ \Phi)(u_1, \dots, u_n) \, |detJ_\Phi(u_1, \dots, u_n)| \, du_1 \dots du_n \tag{11.2}$$

Observation 11.2 ($det J_\Phi \neq 0$ e $1-1$)**.** A differenza del caso lineare nel caso lineare $det J_\Phi \neq 0$ non garantisce l'iniettività globale della Φ, per questo nelle ipotesi vengono richieste entrambe.

Observation 11.3 (q.o.)**.** Il teorema resta valido se $det J_\Phi \neq 0$ quasi ovunque in K e Φ è $1-1$ quasi ovunque su K.

Theorem 11.4 (Passaggio a coordinate polari nel piano)**.** La trasformazione da coordinate polari (r, φ) a coordinate cartesiani (x, y), è data dalla funzione $\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ di componenti:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi; \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

La cui jacobiana è:

$$J_\Phi(r,\varphi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

di determinante r da cui:

$$\iint_{\Phi(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{11.4}$$

Theorem 11.5 (Passaggio a coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$)**.** La trasformazione da coordinate sferiche (ρ, φ, θ) a coordinate cartesiane (x, y, z), è data dalla funzione $\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, \pi[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ di componenti:

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\varphi\cos\theta; \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z &= \rho\cos\varphi. \end{aligned}$$

La cui jacobiana è:

$$J_\Phi(\rho,\varphi,\theta) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.5}$$

di determinante $\rho^2\sin(\varphi)$, da cui:

$$\iiint_{\Phi(A)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta. \tag{11.6}$$

Theorem 11.6 (Passaggio a coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$)**.** La trasformazione da coordinate cilindriche (r, h, θ) a coordinate cartesiane (x, y, z), è data dalle funzione $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ di componenti:

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\theta \\ y &= r\ \sin\theta \\ z &= h \end{aligned}$$

La cui jacobiana è:

$$J_\Phi(r,\theta,h) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,h)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

di determinante r, da cui:

$$\iiint_{\Phi(A)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A f(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\,r\,dr\,d\theta\,dh. \tag{11.8}$$

Observation 11.7. Mancano le dimostrazioni che insiemi di misura nulla vanno in insiemi di misura nulla, le spiegazioni vengono bene anche con i disegni.

12 Campi conservativi

Definition 12.1 (Campo vettoriale)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e connesso un campo vettoriale è una funzione $F : X \to \mathbb{R}^n$.

Definition 12.2 (Curva)**.** È detta curva un'applicazione $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Le equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \qquad t \in I. \tag{12.1}$$

sono dette equazioni parametriche della curva di parametro t.

Definition 12.3 (Curva semplice)**.** Una curva $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ è detta semplice se presi due punti qualsiasi distinti t_1, t_2 in I di cui almeno uno interno a I è vero $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Definition 12.4 (Curva chiusa)**.** Una curva $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definita su $I = [a, b]$ chiuso e limitato è detta chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Definition 12.5 (Curva regolare)**.** Una curva $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è detta regolare se $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ e $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Definition 12.6 (Cambiamento di parametrizzazione di una curva)**.** Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, sia $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ un diffeo C^1:

$$\begin{tikzcd} {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\psi"'] & {[a,b]} \arrow[r, "\varphi"] & \gamma = \varphi[a,b] \end{tikzcd} \tag{12.2}$$

allora $(\varphi \circ \psi)[\alpha, \beta] = \gamma$ (il sostegno della curva è invariato) e $(\varphi \circ \psi) \in C^1$ inoltre:

- se φ è semplice aperta allora che $(\varphi \circ \psi)$ è semplice aperta.
- se φ è semplice chiusa allora che $(\varphi \circ \psi)$ è semplice chiusa, inoltre se ψ è un diffeo crescente allora $a = \psi(\alpha)$ e $b = \psi(\beta)$ se è un diffeo decrescente allora $a = \psi(\beta)$ e $b = \psi(\alpha)$.
- se $\rho : [\alpha, \beta] \to \gamma$ e $\varphi : [a, b] \to \gamma$ allora $\exists \psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ diffeo C^1 tale che:

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\rho"'] & \gamma \end{tikzcd} \tag{12.3}$$

Observation 12.1. γ ha quindi infinite parametrizzazioni equivalenti per diffeo C^1 avremmo quindi una classe di equivalenza delle parametrizzazioni C^1 che hanno come immagine γ:

$$\varphi \sim \rho \ \text{ se } \ \exists \psi : [\alpha, \beta] \to [a, b] \ \text{ diffeo } C^1 \quad : \rho = \varphi \circ \psi, \ \varphi = \rho \circ \psi^{-1}. \tag{12.4}$$

Definition 12.7 (Orientamento del sostegno di una curva)**.** Diremo che γ è orientata con orientamento T se $\exists T : \gamma \to \mathbb{R}^n$ continua tale che: $\forall x \in T \quad T(x) \in T_x\gamma, \ \|T(x)\| = 1$.

Definition 12.8 (Effetto sull'orientamento del cambiamento di parametrizzazione)**.** Sia $\varphi : [a, b] \to \gamma$ con γ orientabile $(\varphi'(t) \in T_{\varphi(t)})$, $\psi : [\alpha, \beta]$ diffeo C_1 allora $\rho(\tau) = (\varphi \circ \psi)(\tau)$ è una parametrizzazione equivalente a φ. Orientamento indotto dalla parametrizzazione ρ :

$$\frac{\frac{d\rho}{d\tau}(\tau)}{\|\frac{d\rho}{d\tau}(\tau)\|} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau)) \cdot \frac{d\psi}{d\tau}(\tau)}{\|\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau)) \cdot \frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\|} = \operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\right) \cdot \frac{\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau))}{\|\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau))\|} \tag{12.5}$$

Definition 12.9 (Lunghezza di una curva)**.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva, ad ogni partizione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ possiamo associare la spezzata Π definendone la lunghezza $l(\Pi) = \sum \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|$. Definiamo ora la lunghezza ella curva $L(\varphi) = sup\{l(\Pi)\}$. Sia φ regolare allora:

$$L_\gamma = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \tag{12.6}$$

Theorem 12.2 (Invarianza della lunghezza di una curva rispetto a parametrizzazioni equivalenti)**.** Siano $\varphi : [a,b] \to \gamma$ una curva regolare e $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ diffeo C^1, $\rho : [\alpha,\beta] \to \gamma$ tale che $\rho(\tau) = (\varphi \circ \psi)(\tau)$ allora:

$$\begin{aligned} L_p = \int_\alpha^\beta \|\frac{d\rho}{d\tau}(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^\beta \|\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau)) \cdot \frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^\beta \operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\right) \cdot \frac{d\psi}{d\tau}(\tau) \cdot \|\frac{d\varphi}{dt}(\psi(\tau))\| \tau = \\ = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} \|\frac{d\varphi}{dt}(t)\| \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{d\psi}{dt}(\psi^{-1}(\tau))\right) dt \end{aligned} \tag{12.7}$$

Definition 12.10 (Ascissa curvlinea)**.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una generica rappresentazione parametrica della curva γ e fissato un $t_0 \in [a,b]$ la funzione:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau, \quad \forall t \in [a,b] \tag{12.8}$$

è strettamente crescente, derivabile e di derivata positiva per ogni t, $s(t)$ è quindi un cambiamento di parametro ammissibile e il parametro s è detto ascissa curvilinea.

Definition 12.11 (Campo vettoriale)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e connesso un campo vettoriale è una funzione $F : X \to \mathbb{R}^n$.

Definition 12.12 (Lavoro)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua con $\gamma \subset A$ di orientamento $\hat{\tau}$, sia inoltre detta una 1-forma differenziale un'applicazione $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$ che associa ogni elemento al suo funzionale lineare $\omega = \langle f(x), dx \rangle$. È definito lavoro l'integrale:

$$L = \int_{\gamma,\tau} \omega = \int_{\gamma,\tau} \langle f(x), dx \rangle = \int_\gamma \langle f(x), \tau(x) \rangle ds \tag{12.9}$$

(con $x = u(s)$, s ascissa curvilinea associata all'orientamento $\hat{\tau}$)

Observation 12.3. L è invariante rispetto a un cambiamento di parametrizzazione associati a diffeo crescenti. Invece sia $-\gamma$ una curva equivalente a γ ma orientata in verso opposto (cambiamento di parametrizzazione per diffeo decrescente)

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega. \tag{12.10}$$

Observation 12.4 (Campi conservativi)**.** Sia f un campo vettoriale definito su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto conservativo se $\exists U \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che:

$$f(x) = \nabla U(x) \qquad \forall x \in A. \tag{12.11}$$

Theorem 12.5 (Caratterizzazione dei campi conservativi)**.** Sia $f \in C^0(A, \mathbb{R}^n)$ campo vettoriale allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è conservativo.
2. Il lavoro su ogni coppia di curve regolari a tratti orientabili con estremi coincidenti è tra loro uguale.
3. Il lavoro su ogni curva regolare a tratti orientabile e chiusa è nullo.

Theorem 12.6. Sia f un campo vettoriale definito su $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

- Se f conservativo allora :

$$\omega = \langle f(x), dx \rangle = \sum f_j(x) dx_j = \sum \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) dx_j = dU(x) \tag{12.12}$$

quindi se f è un campo vettoriale conservativo ω è una 1-forma differenziale esatta. E inoltre per ogni curva orientabile orientata $(\gamma, \hat{\tau})$ di estremi P_1, P_2 si ha:

$$\int_{\gamma,\tau} \omega = U(P_2) - U(P_1). \tag{12.13}$$

- La condizione di irrotazionalità di f è necessaria per la sua conservatività. Inoltre se f è irrotazionale ω è una 1-forma chiusa.
- (*Lemma di Poincaré*) Se A è semplicemente connesso e f è irrotazionale allora è anche conservativo.
- Se f è irrotazionale allora è localmente conservativo per lemma di Poincaré.

13 Aperti regolari

Definition 13.1 (Superficie)**.** $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ è detta superficie se $\exists r : \overline{\Omega} \to \Sigma$ di classe C^1 tale che:

$$(x, y, z) \in \Sigma \qquad \begin{cases} x = r_1(u, v) \\ y = r_2(u, v) \\ z = r_3(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in \overline{\Omega}. \tag{13.1}$$

Definition 13.2 (Superficie regolare)**.** Σ è detta superficie regolare se esiste $r \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare tale che:

- $r(\overline{\Omega}) = \Sigma$
- $J_r(u, v)$ ha rango massimo $\forall (u, v) \in \Omega$

Definition 13.3 (Superficie semplice)**.** Σ è detta superficie semplice se esiste $\Omega \in \mathbb{R}^2$ e $r \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ tale che:

- $r(\overline{\Omega}) = \Sigma$
- $r : \Omega \xrightarrow{1-1} \Sigma$

Definition 13.4 (Superficie orientabile)**.** Sia $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che è orientabile se esiste $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tale che :

$$\forall (x, y, z) \in \Sigma \ : \quad N(x, y, z) \in N_{(x,y,z)}\Sigma \quad \text{e} \quad \|N(x, y, z)\| = 1 \tag{13.2}$$

in tal caso N è detto orientamento di Σ.

Definition 13.5 (Superficie regolare con bordo)**.** Σ è detta superficie regolare con bordo se esiste $r \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare tale che:

- $r(\overline{\Omega}) \xrightarrow{1-1} \Sigma$
- $J_r(u, v)$ ha rango massimo $\forall (u, v) \in \overline{\Omega}$

Observation 13.1 (Orientamento indotto del bordo)**.** L'orientamento $\hat{\nu}$ di Σ induce un orientamento naturale del bordo $\partial\Sigma$ con il versore $\hat{\tau}$ e l'orientamento $\hat{\tau}$ è quello con il quale si gira in senso antiorario $\partial\Sigma$ rispetto ad un osservatore in piedi sulla superficie rispetto all'orientamento $\hat{\tau}$.

Definition 13.6. Area di una superficie Se Σ è una superficie regolare e $r : \overline{\Omega} \xrightarrow{su} \Sigma$ è una parametrizzazione regolare definisco la quantità area della superficie:

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\overline{\Omega}} \|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\| dudv. \tag{13.3}$$

Definition 13.7 (Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie)**.** Sian Σ una superficie regolare, $r : \overline{\Omega} \xrightarrow{su} \Sigma$ una parametrizzazione regolare, $F \in C^1(A \in \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3$ e $\hat{\nu}$ l'orientamento di Σ definisco il flusso di F attraverso Σ come l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle F, \hat{\nu} \rangle d\sigma &= \iint_{\overline{\Omega}} \langle (F \circ r)(u,v), \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\|} \rangle \cdot \|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\| dudv \\ &= \iint_{\overline{\Omega}} \langle (F \circ r)(u,v), \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \rangle dudv \end{aligned} \tag{13.4}$$

14 Teorema di Stokes

Definition 14.1 (Campo vettoriale)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e connesso un campo vettoriale è una funzione $F : X \to \mathbb{R}^n$.

Definition 14.2 (Rotore)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme aperto e connesso, un campo vettoriale $F : X \to \mathbb{R}^3$ è detto rotore di F:

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \tag{14.1}$$

Definition 14.3 (Superficie orientabile)**.** Sia $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che è orientabile se esiste $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tale che :

$$\forall (x,y,z) \in \Sigma \ : \quad N(x,y,z) \in N_{(x,y,z)}\Sigma \quad \text{e} \quad \|N(x,y,z)\| = 1 \tag{14.2}$$

in tal caso N è detto orientamento di Σ.

Definition 14.4 (Superficie regolare con bordo)**.** Σ è detta superficie regolare con bordo se esiste $r \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare tale che:

- $r(\overline{\Omega}) \xrightarrow{1-1} \Sigma$
- $J_r(u,v)$ ha rango massimo $\forall (u,v) \in \overline{\Omega}$

Observation 14.1 (Orientamento indotto del bordo)**.** L'orientamento $\hat{\nu}$ di Σ induce un orientamento naturale del bordo $\partial\Sigma$ con il versore $\hat{\tau}$ e l'orientamento $\hat{\tau}$ è quello con il quale si gira in senso antiorario $\partial\Sigma$ rispetto ad un osservatore in piedi sulla superficie rispetto all'orientamento $\hat{\tau}$.

Theorem 14.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, $(\Sigma, \hat{\nu})$ superficie regolare orientabile, $\Sigma \subseteq A$ e sia $(\partial\Sigma, \hat{\tau})$ il suo bordo canonicamente orientato allora:

$$\iint_{\Sigma} \langle \nabla \wedge F, \hat{\nu} \rangle d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle F, \hat{\tau} \rangle ds \tag{14.3}$$

15 Teorema della divergenza

Definition 15.1 (Campo vettoriale)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e connesso un campo vettoriale è una funzione $F : X \to \mathbb{R}^n$.

Definition 15.2 (Divergenza)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e connesso, un campo vettoriale $F : X \to \mathbb{R}^n$ è detta divergenza di F:

$$\langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = Tr\, J_F(x, y, z) \tag{15.1}$$

Definition 15.3 (Aperto regolare)**.** $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto regolare se è un insieme aperto, limitato, connesso e $int(cl(A)) = A$. E se ∂A è unione disgiunta di superfici regolari a tratti chiuse e orientabili. Inoltre ∂A è orientato canonicamente dal campo vettoriale $\hat{\nu} : \partial A \to \mathbb{R}^3$ inoltre se ∂A ha normale esterna allora $\forall P \in \partial A\ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\begin{aligned} P + \lambda(\hat{\nu}) &\notin \overline{A} \\ P - \lambda(\hat{\nu}) &\in \overline{A} \end{aligned} \qquad \forall 0 < \lambda < \delta. \tag{15.2}$$

Definition 15.4 (Superficie regolare con bordo)**.** Σ è detta superficie regolare con bordo se esiste $r \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare tale che:

- $r(\overline{\Omega}) \xrightarrow{1-1} \Sigma$
- $J_r(u, v)$ ha rango massimo $\forall (u, v) \in \overline{\Omega}$

Definition 15.5 (Superficie orientabile)**.** Sia $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che è orientabile se esiste $N : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ tale che :

$$\forall (x, y, z) \in \Sigma \ : \quad N(x, y, z) \in N_{(x,y,z)}\Sigma \quad \text{e} \quad \|N(x, y, z)\| = 1 \tag{15.3}$$

in tal caso N è detto orientamento di Σ.

Definition 15.6 (Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie)**.** Sian Σ una superficie regolare, $r : \overline{\Omega} \xrightarrow{su} \Sigma$ una parametrizzazione regolare, $F \in C^1(A \in \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3$ e $\hat{\nu}$ l'orientamento di Σ definisco il flusso di F attraverso Σ come l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle F, \hat{\nu} \rangle d\sigma &= \iint_{\overline{\Omega}} \langle (F \circ r)(u, v), \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u, v)}{\|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u, v)\|} \rangle \cdot \|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u, v)\| dudv \\ &= \iint_{\overline{\Omega}} \langle (F \circ r)(u, v), \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) \rangle dudv \end{aligned} \tag{15.4}$$

Theorem 15.1 (Teorema della divergenza)**.** Sia $F \in C^2(cl(A), \mathbb{R}^3)$, A aperto regolare in $\mathbb{R}^3$, $(A \in J_b(\mathbb{R}^3)$, $(\partial A, \hat{\nu})$ frontiera di A con $\hat{\nu}$ orientamento esterno allora:

$$\iiint_A \nabla \cdot F dxdydz = \iint_{\partial A} \langle F, \hat{\nu} \rangle d\sigma \tag{15.5}$$