AULA TEÓRICO - PRÁTICA 5

Tema: Funções Reais de Várias Variáveis

Objetivo: No final desta aula os alunos deverão ser capazes de:

• determinar derivadas parciais;

• determinar derivadas de funções compostas usando o teorema da derivada da função composta;

• resolver exercícios envolvendo o diferencial total.

1. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

   1.1 $f(x,y) = 5x^2y + 4xy^3$;

   1.2 $f(x,y) = 2^{xy^3}$;

   1.3 $f(x,y) = ln(3^x + x^y)$;

   1.4 $f(x,y,z) = e^x \sin(z) + \cos(x - 3y)$;

   1.5 $f(x,y,z) = (\cot x)^{\tan y} + z^{xy}$;

   1.6 $f(x,y,z) = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} - \cos(ln(z))$ em $P = (1,0,1)$.

2. Seja $z = ln(x+y)$.
   Aplicando o teorema da derivada da função composta, escreva a expressão de $\dfrac{dz}{dt}$, sendo $x = \tan(2t)$ e $y = \dfrac{1}{3^t}$.

3. Considere a função $f(x,y) = ln\left(x^2 - 3y\right) + y$.
   Sendo $x = \sqrt{u} + cos(v)$ e $y = arctan(u+v)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=0}}$, aplicando o teorema da derivada da função composta.

4. Calcule, caso exista, o diferencial total das seguintes funções:

   4.1 $f(x,y) = x^3 - x^2y + 3y^2$;

   4.2 $f(x,y) = x^2e^{xy} + x\arctan(y)$, no ponto $(0,1)$;

4.3 $f(x,y) = ln(x^2+y^2) + x\tan(y)$, no ponto $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

4.4 $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + \ln(z^y)$, no ponto $(2,0,1)$.

5. Seja $z = f(x,y) = 3x^2 - xy$. Calcule $\triangle z$ e dz quando (x,y) varia de $(1,2)$ para $(1.01, 1.98)$.

6. Usando o conceito de diferencial total, calcule o valor aproximado das seguintes funções nos pontos indicados:

   6.1 $f(x,y) = \sqrt[5]{x + \ln y}$, no ponto $(32.1, 1.2)$;

   6.2 $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, no ponto $(47^\circ, 44^\circ)$.

7. Num cone circular reto (cone de revolução), o raio da base e a altura são medidos como tendo 12 cm e 27 cm, respetivamente, com um possível erro de medição de até 0.1 cm em cada.
   Use diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo do volume do cone.

Soluções:

1.1 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 10xy + 4y^3; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 5x^2 + 12xy^2$

1.2 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 2^{xy^3} ln2; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 2^{xy^3} ln2$

1.3 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3^x ln3 + yx^{y-1}}{3^x + x^y}; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^y lnx}{3^x + x^y}$

1.4 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin z - \sin(x - 3y); \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3\sin(x - 3y); \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = e^x \cos z$

1.5 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\tan x \tan y}{\sin^2 x}(\cot x)^{\tan y} + yz^{xy} lnz; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sec^2 y (\cot x)^{\tan y} ln(\cot x) + xz^{xy} lnz; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = xyz^{xy-1}$

1.6 $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_P = 0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = |_P = 0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}|_P = 0$

2. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2\ \sec^2(2t)\ 3^t - \ln 3}{3^t\ \tan(2t) + 1}$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=0}} = \dfrac{2}{16 - 3\pi} + \dfrac{1}{2}$

4.1 $dz = (3x^2 - 2xy)\ dx + (-x^2 + 6y)\ dy$

4.2 $df|_{(0,1)} = \dfrac{\pi}{4}\ dx$

4.3 $df|_{\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} = 1\ dx + \dfrac{8}{\pi}\ dy$

4.4 $df|_{(2,0,1)} = 4\ dx + 4\ dy$

5. $\triangle z = 0.0605 \qquad dz = 0.06$

6.1 $f(32.1, 1.2) \approx 2 + \dfrac{3}{800} \approx 2.00375$

6.2 $f(47^\circ, 44^\circ) \approx \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{120} \approx 0.53$

7. $26.4\pi\ cm^3 \approx 83\ cm^3$