Licenciatura em Engenharia Informática
ÁLGEBRA LINEAR 2022/2023
Teórico-Prática 4. Determinantes

1. Usando apenas as propriedades dos determinantes, calcule os determinantes seguintes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Use as propriedades dos determinantes para calcular os determinantes seguintes.

a) $|A|$; c) $|C|$; e) $|2AD|$;

b) $|B|$; d) $|D|$; f) $|CD^T|$.

3. Sem efetuar o cálculo, verifique que o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 6.

4. Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3 tal que $|A| = -1$ e $|B| = 2$, calcule:

a) $|2A|$; c) $|A^3|$; e) $|A^5B^2|$.

b) $2|A|$; d) $|A^T|$;

5. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, determine $\begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ d & -e & 2f \\ g & -h & 2i \end{vmatrix}$.

6. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$, calcule o valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+1 & 2y & 2z+1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} m - \frac{1}{3} & m & m-1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}.$$

8. Considere o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. Sem calcular o valor de Δ, apresente um determinante Δ', de $4^{\underline{a}}$ ordem, tal que $\Delta' = 2\Delta$ e todos os elementos sejam positivos.

9. Determine, para que valores de $x \in \mathbb{R}$, a matriz $\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{pmatrix}$ é invertível.

10. Mostre que $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ x & y & z & y & z \end{vmatrix} = 2x$.

11. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$. Sugestão: Use as propriedades dos determinantes.

12. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 3 \end{vmatrix} = 3$, calcule o valor de $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ a & a & a \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$.

13. Mostre que $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$. Sugestão: Use as propriedades dos determinantes.

14. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & x & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -x^2 \end{vmatrix} = 0$. Sugestão: Use as propriedades dos determinantes.

15. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A^3 = 0$ e $det(I - A) \neq 0$. Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

16. Diga, justificando, qual o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes:
    a) Sejam $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 3$ e $|B| = -2$. Então $|2A^TBA^{-1}| = -4$.

    b) Considere as matrizes

    $$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & b & e \\ f & b & g \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

    com $a, b, c, d, e, f, g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então $det(A + B + C) = det(A)$.

17. Determine a matriz inversa das matrizes seguintes, através do cálculo da matriz adjunta.

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

    b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

    a) Sem determinar a matriz inversa de C, C^{-1}, determine o valor de $|C^{-1}|$.

    b) Confirme o resultado anterior, determinando a matriz inversa C^{-1} e calculando o seu determinante.

Soluções

1. a) 0 b) 21 c) 160

2. a) $|A| = 0$, porque $c_3 = 2 * c_1$.
   b) $|B| = 0$, porque tem uma linha de zeros.
   c) $|C| = 1 \times 2 \times 4 = 8$ (matriz triangular).
   d) $|D| = 1 \times (-1) \times 3 = -3$ (matriz diagonal).
   e) $|2AD| = 2^3 \cdot |A| \cdot |D| = 0$.
   f) $|CD^T| = |C| \cdot |D^T| = |C| \cdot |D| = -24$.

4. a) -8; b) -2; c) -1; d) -1; e) -4.

5. -6.

6. 10.

7. $|A| = -m$.

8. Por exemplo, $\Delta' = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

9. $x \neq -1 \wedge x \neq 2$.

11. $x = 1 \vee x = -1$

12. $6a$

14. $x = 0 \vee x = -6$

16. a) Falsa. b) Verdadeira.

17. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. $|C^{-1}| = \frac{1}{56}$

Referências

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.