Análise Matemática

Funções de Várias Variáveis

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

1º Semestre 22-23

Sumário

Funções Reais de Várias Variáveis

FVV - Motivação

- As funções de apenas uma variável foram objeto de estudo em anos anteriores.

  Este tipo de funções porém não é representativa da maioria dos problemas da Física e da Engenharia que assentam na existência de fenómenos que envolvem mais de uma variável.

FVV - Motivação

Exemplos de Funções de Duas Variáveis

- A **temperatura** T num determinado ponto da superfície terrestre, num dado momento, depende da
  - **longitude** x e da
  - **latitude** y do ponto.

Assim T é uma **função de duas variáveis**, x e y.
Indicamos esta dependência funcional escrevendo:

$$T = f(x, y)$$

FVV - Motivação

Exemplos de Funções de Duas Variáveis

- O **volume** V de um cilindro depende do
  - **raio** do círculo da base, r e da
  - **altura** h do cilindro.

Esta relação é escrita pela equação $V = \pi r^2 h$.
Dizemos que V é uma função de r e h e escrevemos:

$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

FVV - Definição

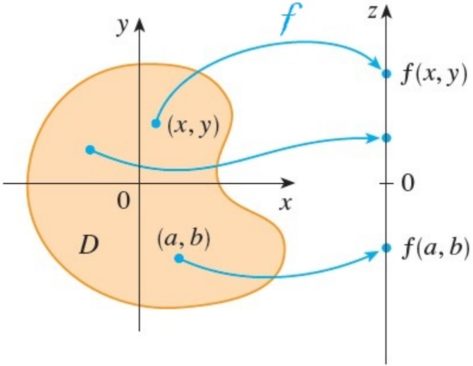
Definição

Uma **função real f de n variáveis reais** definida em $D \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma correspondência que a todo o elemento de D associa um único elemento z de $\mathbb{R}$:

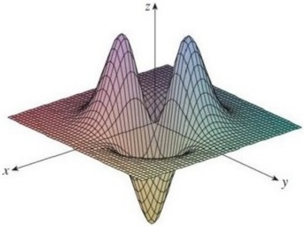
$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\longmapsto z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Às variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dá-se o nome de **variáveis independentes ou argumentos** e a z dá-se o nome de **variável dependente**.

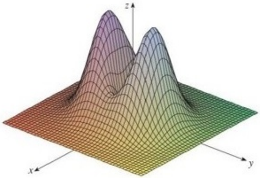
- Uma **função de duas variáveis** é uma função para a qual o domínio (D) é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e o contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$.



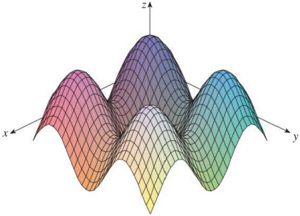
FVV - Alguns Exemplos



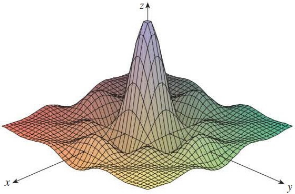
$f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



$f(x, y) = \sin x + \sin y$



$f(x, y) = \dfrac{\sin x \, \sin y}{xy}$

FVV - Domínio e Contradomínio

Domínio

O **domínio** é o conjunto de pontos para os quais **a função está definida**, ou seja, a região $D \in \mathbb{R}^n$ tal que os valores calculados da função para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, resultem em valores $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ finitos e reais.

Contradomínio

O **contradomínio ou imagem** de uma função de várias variáveis é o conjunto de todos os **valores assumidos** pela variável dependente,

$$CD = D' = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}$$

FVV - Domínio

☞**Observação**: Seja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Se $g(X) = \sqrt{f(X)}$, então o domínio da função é o conjunto

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n : f(X) \geq 0 \wedge X \in D_f\}$$

- Se $g(X) = ln(f(X))$ ou $g(X) = log(f(X))$, então o domínio da função é o conjunto

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n : f(X) > 0 \wedge X \in D_f\}$$

FVV - Domínio

☞**Observação**: Seja $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Se $g(X) = \dfrac{f(X)}{g(X)}$, então o domínio da função é o conjunto

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n : g(X) \neq 0 \wedge X \in D_f\}$$

- Se $g(X) = \arcsin(f(X))$ ou $g(X) = \arccos(f(X))$, então o domínio da função é o conjunto

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n : -1 \leq f(X) \leq 1 \wedge X \in D_f\}$$

FVV - Exemplos

Exemplo 13

Considerem-se as funções $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ e $g(x,y) = x\ln(y^2 - x)$.

Calcule $f(2,3)$, $g(5,3)$ e o domínio de f e de g.

FVV - Exemplos

Exemplo 13

Considerem-se as funções $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ e $g(x,y) = x\ln(y^2 - x)$.

Calcule $f(2,3)$, $g(5,3)$ e o domínio de f e de g.

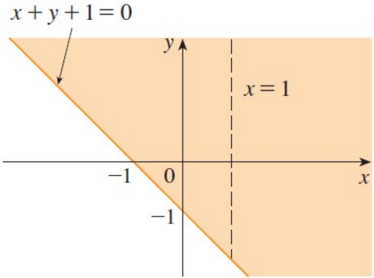
Resolução:

- $f(2,3) = \dfrac{\sqrt{2+3+1}}{2-1} = \sqrt{6}$.

$g(5,3) = 5\ln(3^2 - 5) = 5\ln(4)$.

Exemplo 13 (cont.):

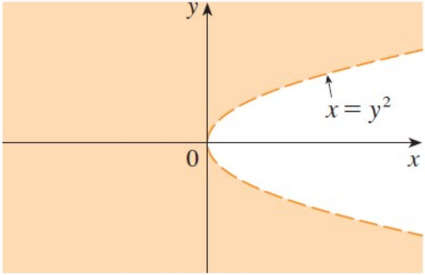
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+1 \geq 0 \ \wedge \ x-1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x-1 \ \wedge \ x \neq 1\right\} \end{aligned}$$



FVV - Exemplos

Exemplo 13 (cont.):

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y^2\right\} \end{aligned}$$



FVV - Exemplos

Exemplo 14

Encontrar o domínio e o contradomínio da função $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

FVV - Exemplos

Exemplo 14

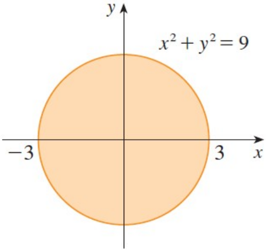
Encontrar o domínio e o contradomínio da função $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Resolução:

- O domínio de h é:

$$\begin{aligned} D_h &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\} \end{aligned}$$

Ou seja, é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 3.



FVV - Exemplos-cont.

Exemplo 14 (cont.):

- O contradomínio de h é:

$$\begin{aligned} D'_h &= \{z : z = h(x,y),\ (x,y) \in D_h\} \\ &= \left\{z : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D_h\right\} \end{aligned}$$

Como $z \geq 0$ e $9 - x^2 - y^2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$

Logo,

$$D'_h = \{z : 0 \leq z \leq 3\} = [0,3]$$

FVV - Exercícios

1. Determine e represente graficamente o **domínio** das seguintes funções:

    1.1 $f(x,y) = 2y^2\sqrt{x} + 1$

    1.2 $f(x,y) = arccos(x^2 + y^2)$

    1.3 $f(x,y) = ln(4 - x^2 - y^2)$

    1.4 $f(x,y) = ln(x^2 + y) - \frac{1}{\sqrt{2-y^2}}$

    1.5 $f(x,y) = \sqrt{xy} + arcsen(\frac{x}{2})$.

FVV - Gráfico de uma função

- A **representação gráfica** de uma função permite visualizar o seu comportamento.

Chama-se **gráfico de uma função** $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ao conjunto

$$G_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \wedge x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

- Para $n = 1$, o gráfico é representado em $\mathbb{R}^2$.
- Para $n = 2$, o gráfico é representado em $\mathbb{R}^3$.

FVV - Gráfico de uma função

Gráfico de uma função de duas variáveis

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis.

O **gráfico de f** é uma **superfície** de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = f(x, y)$

$$G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f \wedge z = f(x, y)\right\}$$

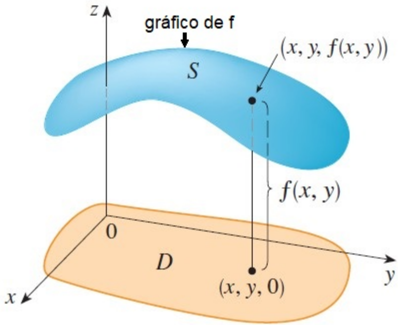
ou

$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\right\}$$

Escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícito o valor que f toma em (x, y).

A z chamamos ***variável dependente*** e a x e y ***variáveis independentes***.

FVV - Gráfico



O **gráfico** de uma função de duas variáveis é uma **superfície** no espaço $\mathbb{R}^3$.

O gráfico S de f localiza-se na parte superior ou na parte inferior relativamente ao seu domínio D no plano xOy.

FVV - Gráfico - Exemplo

Exemplo 15

Esboce o gráfico das funções seguintes:

- $f(x, y) = 2$;
- $f(x, y) = 4 - 2x - 4y$;
- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

FVV - Gráfico - Exemplo

Resolução Exemplo 15:

- $f(x,y) = 2$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z = 2\right\} \\ &= \{(x,y,2),\ x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Plano paralelo a XOY e que passa em $z = 2$.

FVV - Gráfico - Exemplo

Resolução Exemplo 15:

- $f(x,y) = 4 - 2x - 4y \qquad\qquad D_f = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z = 4 - 2x - 4y\right\} \\ &= \{(x,y,4-2x-4y),\ x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Plano que interseta os 3 planos coordenados nos pontos $x = (2,0,0)$, $y = (0,1,0)$ e $z = (0,0,4)$.

Exemplo 15 (cont.):

- $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f \wedge z = f(x,y)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f \wedge z = \sqrt{4-x^2-y^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}),\ x,y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Semiesfera $(z \geq 0)$ de centro $(0,0,0)$ e raio 2.

FVV

O **gráfico de uma função de três variáveis** é um subconjunto do espaço de quatro dimensões e, como tal, não temos a possibilidade de representá-lo num gráfico. Dizemos que se trata de uma **hipersuperfície** de $\mathbb{R}^4$.

De modo geral, o gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

Derivadas Parciais

Derivadas Parciais

A **taxa de variação** de **uma função de várias variáveis** pode ser estudada tendo por base a taxa de variação de funções com uma só variável.

Pode-se estudar a taxa de variação de uma função de várias variáveis considerando que apenas uma dada variável sofre um incremento, e mantendo-se as restantes constantes.

Derivadas Parciais

Consideremos a função real de duas variáveis reais $f(x, y)$. Se fixarmos y no valor y_0, podemos definir a função real de uma só variável real

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Se a função for derivável em x_0, à derivada $g'(x_0)$ de g em x_0 damos o nome de **derivada parcial de f em ordem a x no ponto** (x_0, y_0) e representamos por

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

Derivadas Parciais

Sabendo que, pela definição de derivada $g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$ podemos então escrever:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

A equivalente **derivada parcial de f em ordem a y no ponto** (x_0, y_0) será representada por

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Derivadas Parciais

☞ **Notação:** Se $z = f(x, y)$, escrevemos:

$$f'_x(x, y) = f'_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f'_y(x, y) = f'_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Interpretação geométrica

- Considere-se o ponto da superfície, $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Intersetando a superfície com o plano (paralelo a XOZ) de equação $y = y_0$ obtém-se uma curva, C_1, contida no plano $y = y_0$ e de equação $z = f(x, y_0) = g(x)$.

Então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$ é o **declive da reta**, contida no plano $y = y_0$ e que é tangente à curva C_1 no ponto P.

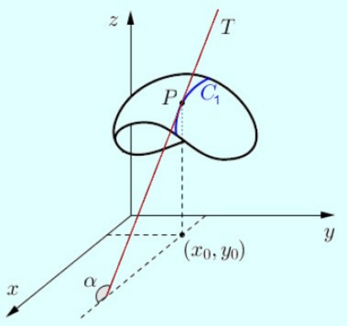
Ou seja, é a **tangente** da medida do ângulo que a reta faz com o semi-eixo OX.

$$\tan \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Interpretação geométrica

Derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acréscimo"ao ponto (x_0, y_0) na **primeira** coordenada.



Interpretação geométrica

- Intersetando a superfície de equação $z = f(x, y)$ com o plano (paralelo a YOZ) de equação $x = x_0$ obtém-se uma curva, C_2, contida no plano $x = x_0$ e de equação $z = f(x_0, y) = g(y)$.

Então $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g'(y_0)$ é o **declive da reta**, contida no plano $x = x_0$ e que é tangente à curva C_2 no ponto P.

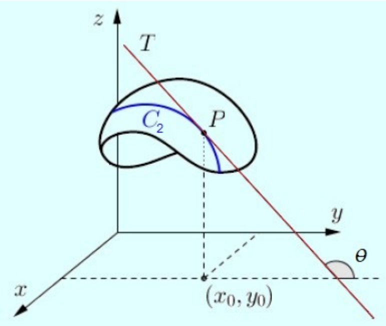
Ou seja, é a tangente da medida do ângulo que a reta faz com o semi-eixo OY.

$$\tan\theta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Interpretação geométrica

Derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acréscimo"ao ponto (x_0, y_0) na **segunda** coordenada.



Cálculo da derivada parcial

Regras de cálculo para as derivadas parciais de $z = f(x, y)$

- Para encontrar f'_x , **consideramos** y **como uma constante e derivamos** $f(x, y)$ **em ordem a** x.
- Para encontrar f'_y , **consideramos** x **como uma constante e derivamos** $f(x, y)$ **em ordem a** y**.**

Assim, todas as regras de derivação aplicam-se ao cálculo de derivadas parciais.

Cálculo da derivada parcial

Exemplo 16

Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y) = xy - 2x + 3y$.

Cálculo da derivada parcial

Exemplo 16

Calcule as derivadas parciais da função $f(x,y) = xy - 2x + 3y$.

Resolução:

- Considerando y como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a x, vem $f'_x(x,y) = f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - 2$.
- Considerando x como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a y, vem $f'_y(x,y) = f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 3$.

Cálculo da derivada parcial

Exemplo 17

Seja $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Calcular $f'_x(2,1)$ e $f'_y(2,1)$.

Cálculo da derivada parcial

Exemplo 17

Seja $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Calcular $f'_x(2,1)$ e $f'_y(2,1)$.

Resolução:

- Considerando y como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a x, vem
$f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \;\Rightarrow\; f'_x(2,1) = 3\times 2^2 + 2\times 2\times 1^3 = 16.$

- Considerando x como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a y, vem
$f'_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y \;\Rightarrow\; f'_y(2,1) = 3\times 2^2\times 1^2 - 4\times 1 = 8.$

Generalização da derivada parcial

A generalização das **derivadas parciais** para funções com mais de duas variáveis é direta. Ou seja, as regras e notações definidas para funções de duas variáveis também se aplicam a funções com mais de duas variáveis.

Generalização da derivada parcial

Exemplo 18

Encontrar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ se $f(x,y,z) = e^{xy} lnz$.

Generalização da derivada parcial

Exemplo 18

Encontrar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ se $f(x, y, z) = e^{xy} ln z$.

Resolução:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} ln z$, considerando y e z como constantes.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} ln z$, considerando x e z como constantes.
- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{e^{xy}}{z}$, considerando x e y como constantes.

Derivadas parciais de 2ª ordem

Se $z = f(x, y)$ for uma função de duas variáveis, então as suas derivadas parciais de 1^{a} ordem também são funções de duas variáveis, e então podemos considerar as suas derivadas, denominadas **derivadas parciais de 2^{a} ordem de f** .

Derivadas em ordem a x e em ordem a y de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Derivadas parciais de 2ª ordem

Derivadas em ordem a y e em ordem a x de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

Derivadas parciais de 2ª ordem

Exemplo 19

Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem da função
$f(x, y) = e^{xy} + xcos(y) - x^3$.

Derivadas parciais de 2ª ordem

Exemplo 19

Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem da função
$f(x, y) = e^{xy} + xcos(y) - x^3$.

Resolução:
Existem quatro derivadas parciais de 2^a ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Comecemos por calcular as derivadas de 1^a ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + cos(y) - 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - x\sin(y)$$

Derivadas parciais de 2ª ordem

Exemplo 19 (cont.):

As derivadas de 2^a ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy} + cos(y) - 3x^2\right) = y^2 e^{xy} - 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy} + cos(y) - 3x^2\right) = e^{xy} + xye^{xy} - \sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{xy} - x\sin(y)\right) = x^2 e^{xy} - x\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy} - x\sin(y)\right) = e^{xy} + xye^{xy} - \sin(y)$$

Teorema de Schwarz

Teorema (Schwarz)

Se existirem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *numa vizinhança do ponto* X_0, *e se* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *for contínua nesse ponto, então também existe* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0)$ *e o seu valor é igual a* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)$.

Às derivadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0)$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)$, *dá-se o nome de* ***derivadas mistas de 2ª ordem***.

Diferenciabilidade

Definição

Uma função f diz-se de classe C^1 se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais de primeira ordem. Uma função diz-se de classe C^k quando possui derivadas parciais de classe C^{k-1}. Uma função contínua diz-se de classe C^0.

☞ Observação: Quando uma função é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, diz-se **diferenciável**.

Derivadas de ordem superior

Sendo as derivadas parciais de 2^{a} ordem de uma função $f(x, y)$ também funções de x e y, podemos calcular as derivadas de 3^{a} ordem e assim sucessivamente.

Todos os conceitos estudados anteriormente para funções de duas variáveis **são extensíveis** a funções de mais de duas variáveis.

Para cálculo da derivada parcial em ordem a x de uma **função de mais de duas variáveis** consideram-se constantes todas as outras variáveis.

Funções de mais de duas variáveis

Exemplo 20

Seja $f(x, y, z) = e^{xyz} + cos(zy^2) - y^3$. Calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$.

Exemplo 20

Seja $f(x,y,z) = e^{xyz} + cos(zy^2) - y^3$. Calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$.

Resolução:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) =?$$

- Em primeiro lugar temos de calcular a derivada de 1ª ordem, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz} - y^2 \sin(zy^2)$$

Exemplo 20 (cont.):

- Em segundo lugar calculamos a derivada $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xye^{xyz} - y^2\sin(zy^2)\right)\\ &= xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} - 2y\sin(zy^2) - 2y^3z\sin(zy^2)\end{aligned}$$

- Por fim calculamos a derivada pedida.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} - 2y\sin(zy^2) - 2y^3z\sin(zy^2)\right)\\ &= e^{xyz} + xyze^{xyz} + 2xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}\end{aligned}$$

Diferencial, Valores Aproximados

Funções diferenciáveis e diferencial de uma função

A noção de diferenciabilidade está ligada aos chamados problemas de **aproximação linear**. Se uma função

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é diferenciável em x_0, ponto interior de D, então numa vizinhança suficientemente pequena de x_0, a função cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ dá uma boa aproximação para f.
Se uma função real de 2 variáveis reais, f, é diferenciável em (x_0, y_0), ponto interior do domínio de f, então numa vizinhança suficientemente pequena de (x_0, y_0) pode substituir-se f por uma função cujo gráfico é um plano, com um erro pequeno.

Funções diferenciáveis e diferencial de uma função

Consideremos a função $z = f(x, y)$

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Seja (x_0, y_0), um ponto interior de D.
Considerem-se acréscimos (variações) Δx e Δy $(\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R})$ das variáveis independentes x e y tais que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Seja Δz o acréscimo (incremento) correspondente da variável dependente z, i.e.,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

FVV - Variação de $f(x, y)$

Variando apenas uma das variáveis independentes, mantendo a outra constante, a função sofre uma variação parcial; caso variem as duas, a função sofre uma variação dita total.

Variações parciais da função	Variação total da função (1)
$\Delta xz = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$	$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$
$\Delta yz = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$	

A expressão (1) representa o valor exato da variação da função, quando x e y variam.

FVV - Diferencial de $f(x,y)$

Diferencial

1. Para as variáveis independentes $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$.

2. Para a função $z = f(x,y)$, podem considerar-se:

Diferenciais parciais da função

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Diferencial total da função

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

FVV - Cálculos aproximados

À semelhança do que se verifica para funções univariáveis, a variação total da função é aproximada pelo diferencial total, isto é,

$$\Delta z \approx dz$$

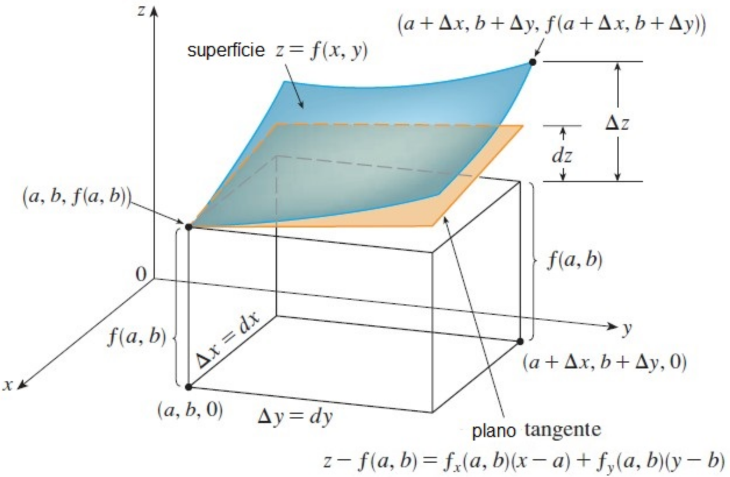
$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \Leftarrow$$ dz é uma **aproximação linear** de Δz

A expressão anterior pode ser reescrita,

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz.$$

Esta expressão é muito útil no cálculo do valor aproximado da variação de uma função quando as suas variáveis independentes x e y variam respetivamente de Δx e Δy.

FVV - Interpretação geométrica



FVV - Exemplos ✍

Exemplo 21

Considere a função $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

a) Determine o diferencial dz.

b) Se x varia de 2 para 2.05 e y varia de 3 para 2.96, compare os valores de Δz e dz.

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 21

Considere a função $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$.
a) Determine o diferencial dz.
b) Se x varia de 2 para 2.05 e y varia de 3 para 2.96, compare os valores de Δz e dz.

Resolução:
a)

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= (2x+3y)\,dx + (3x-2y)\,dy \end{aligned}$$

Exemplo 21 (cont.):

b) Sejam $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0.04$, então

$$dz = (2 \times 2 + 3 \times 3) \times 0.05 + (3 \times 2 - 2 \times 3) \times (-0.04) = 0.65$$

O incremento de z é:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3) \\ &= 0.6449 \end{aligned}$$

Verifica-se que $\Delta z \approx dz$.

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 22

Aplicando o conceito de diferencial total, calcule um valor aproximado de $\sqrt{9.02} + \ln(0.99)$.

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 22

Aplicando o conceito de diferencial total, calcule um valor aproximado de $\sqrt{9.02} + \ln(0.99)$.

Resolução:

Considere-se:

- $f(x, y) = \sqrt{x} + \ln(y)$.
- $x + \Delta x = 9.02 \quad \Rightarrow x = 9$ e $\Delta x = 0.02$.
- $y + \Delta y = 0.99 \quad \Rightarrow y = 1$ e $\Delta y = -0.01$.

Como o diferencial total aproxima a variação total da função, dadas as variações das variáveis independentes, tem-se $\Delta f \approx df$.

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 22 (cont.):

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx df \ \Leftrightarrow\ f(9.02, 0.99) \approx f(9,1) + df(9,1)$

- $f(9,1) = \sqrt{9} + \ln(1) = 3$
- O diferencial total é dado por:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx + \left(\frac{1}{y}\right) dy \end{aligned}$$

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 22 (cont.):

$$df(9,1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{9}}\right) \times 0.02 + \left(\frac{1}{1}\right) \times (-0.01) = -\frac{1}{150}$$

Assim,

$$\sqrt{9.02} + \ln(0.99) = f(9.02, 0.99) \approx 3 - \frac{1}{150} = \frac{449}{150} \approx 2.99333$$

Nota: $\sqrt{9.02} + \ln(0.99) = f(9.02, 0.99) \approx 2.99328$.

FVV - Exemplos ✍

Exemplo 23

Aplicando o conceito de diferencial total, calcule o valor aproximado de $\sqrt{24.8 - 9.1}$

Função Composta

FVV - Função composta

Recorde-se que se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, ou seja,

- se f for uma função da variável x e
- se x for uma função da variável t

então dizemos que f é uma função composta pois o argumento da função é ainda uma função. Indiretamente podemos, então, dizer que f é uma função de t, $y = f(g(t))$.

$$y \mapsto x \mapsto t$$

Se f e g forem funções deriváveis então podemos calcular a derivada de f em ordem a t:

Regra da Cadeia (Funções de uma variável)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 24

Sejam $y = 2x^2 + 1$ e $x = t^3 + 3$, calcular $\dfrac{dy}{dt}$.

FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 24

Sejam $y = 2x^2 + 1$ e $x = t^3 + 3$, calcular $\dfrac{dy}{dt}$.

Resolução:

$$y \;\mapsto\; x \mapsto\; t$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

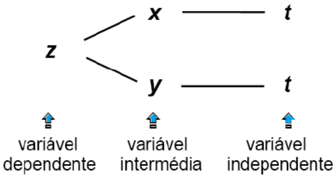
logo a derivada de f em ordem a t é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (4x)(3t^2) = 4(t^3+3)(3t^2) = 12t^2(t^3+3)$$

FVV - Função composta

Uma só variável independente

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis em t.
Então $z = f(g(t), h(t))$ é função de uma só variável **t**.



Para determinar a **derivada da função composta**, $\dfrac{dz}{dt}$, usaremos a **regra da cadeia** fazendo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \Leftarrow \texttt{Derivada total}$$

Exemplo 25

Seja $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos(t)$, calcular $\dfrac{dz}{dt}$ em $t = 0$.

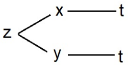
FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 25

Seja $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos(t)$, calcular $\dfrac{dz}{dt}$ em $t = 0$.

Resolução:

Pela regra da cadeia vem:



$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \left(2xy + 3y^4\right)\left(2\cos(2t)\right) + \left(x^2 + 12xy^3\right)\left(-\sin(t)\right)
\end{aligned}
$$

FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 25 (cont.):

Como queremos calcular a derivada num ponto **não é necessário** substituir x e y por t.
Assim:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; x = \sin(0) = 0 \;\text{ e }\; y = \cos(0) = 1.$$

Logo,

$$\frac{dz}{dt}\,|_{t=0} = (0+3)\,(2\cos(0)) + (0+0)\,(-\sin(0)) = 6$$

FVV - Função composta - Exercícios ✍

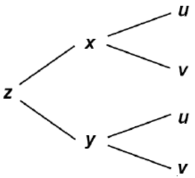
Exercícios

1. Sendo $z = ycotg(2x) + ln^2(xy)$ e $x = 2\sqrt{t}$ e $y = \dfrac{1}{2t}$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

2. Sendo $w = f(x, y, z)$ em que $x = g(z)$ e $y = h(z)$, escreva a expressão da derivada $\dfrac{dw}{dz}$.

Mais do que uma variável independente

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ são funções diferenciáveis de u e de v. Então $z = f(g(u, v), h(u, v))$ é função de duas variáveis **u** e **v**.



Então podem definir-se as seguintes derivadas parciais da função:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

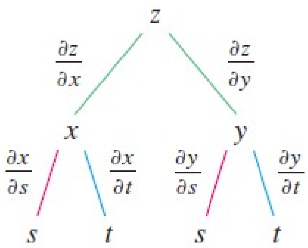
Exemplo 26

Seja $z = e^x \sin(y)$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Exemplo 26

Seja $z = e^x \sin(y)$, onde $x = st^2$ e $y = s^2 t$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Resolução:



Exemplo 26 (cont.):

Pela regra da cadeia vem:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= \left(e^x \sin(y)\right)\left(t^2\right) + \left(e^x \cos(y)\right)(2st) \\
&= t^2 e^{st^2} \sin(s^2 t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2 t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \left(e^x \sin(y)\right)(2st) + \left(e^x \cos(y)\right)\left(s^2\right) \\
&= 2ste^{st^2} \sin(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t)
\end{aligned}
$$

FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 27

Seja $z = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$, onde $x = \ln(u^2)$ e $y = e^{uv}$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ no ponto $(1, 0)$.

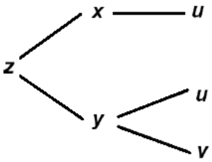
FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 27

Seja $z = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$, onde $x = \ln(u^2)$ e $y = e^{uv}$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ no ponto $(1,0)$.

Resolução:

Se $P = (1,0)$ então $u = 1$ e $v = 0$, logo $x = \ln(1) = 0$ e $y = e^0 = 1$.



Exemplo 27 (cont.):

Calculemos as diferentes derivadas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_P = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_P = 0$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{du}|_P = 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = ve^{uv} \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial u}|_P = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = ue^{uv} \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial u}|_P = 1$$

FVV - Função composta - Exemplo ✍

Exemplo 27 (cont.):

Pela regra da cadeia vem:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u}|_P = 1 \times 2 + 0 \times 0 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial v}|_P = 0 \times 1 = 0$$

FVV - Função composta - Exercícios ✍

Exercícios

Fazer a representação esquemática e a escrita das fórmulas que se ajustam a cada uma das situações seguintes:

1. $w = f(x, y, z)$ em que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$.

2. $w = f(x, y, z)$ em que $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$ e $z = z(t)$.

FVV - Função composta

Se a dependência entre as diferentes variáveis é tal que a variável independente **não é única**, as fórmulas a aplicar **têm de ser adaptadas**, em cada caso, à situação em concreto.

FVV - Exemplo ✍

Exemplo 28

Qual a variação do volume de uma caixa retangular, se o seu comprimento é de 8 cm e está a aumentar 3 cm/s, a sua largura é de 6 cm e está a aumentar 2 cm/s e a sua altura é de 4 cm e está a aumentar 1 cm/s?

Exemplo 28 Resolução:

$\frac{dx}{dt} = 3$, $\frac{dy}{dt} = 2$ e $\frac{dz}{dt} = 1$, no instante em que $x = 8$, $y = 6$ e $z = 4$.

Queremos encontrar $\frac{dV}{dt}$ nesse instante.

Seja $V = xyz$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt}$$

Substituindo temos:

$$\frac{dV}{dt} = (6)(4)(3) + (8)(4)(2) + (8)(6)(1) = 184\ cm^3/s$$