Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame Época Normal - PARTE 1 **30 de janeiro de 2023**

NOME: NÚMERO:

- A duração da parte 1 da prova é de **60 minutos**.
- Não é permitida a utilização de nenhum material de consulta ou auxiliar de cálculo.

GRUPO 1

Responda a cada uma das questões deste grupo no próprio enunciado. Não deve apresentar cálculos.

1. (1,5 val.) Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique uma afirmação FALSA. (Escolha apenas uma opção)

☐ Verifica-se que $P^2 + P - P^3 = I_3$.

☐ A entrada $(2,3)$ da matriz PQ é 7 e a entrada $(2,1)$ de QP é igual a 5.

☐ A equação $[(P^TX)^{-1}Q]^T = (P^T)^{-1}$, em X, tem a solução $X = (P^{-1})^TQP$.

☐ A entrada $(3,2)$ da matriz $RR^T + Q^T$ é 8.

☐ Nenhuma das afirmações é falsa.

2. (1,5 val.) Considere as matrizes $A, B, C, \mathbf{I_3} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e suponha que

$$A \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\longrightarrow} B \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} C \underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\longrightarrow} \mathbf{I_3}$$

Qual é a afirmação FALSA? (Escolha apenas uma opção)

☐ A matriz C é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

☐ A matriz B é invertível e $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

☐ A matriz A é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ Nenhuma das afirmações é falsa.

vire, p.f. (V1)

3. (2,5 val.) Dada a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

indique uma afirmação FALSA. (Escolha apenas uma opção)

- ☐ O complemento algébrico de d_{34} é $D_{34} = 11$.
- ☐ O menor complementar de d_{43} é $\overline{D_{43}} = -11$.
- ☐ O determinante de D é igual a 11.
- ☐ A matriz D tem inversa e $\det(2D^{-1}D^T) = 2$
- ☐ Nenhuma das afirmações é falsa.

4. (1,0 val.) Dada a matriz $E = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ k & 2k & -1 \\ 5 & -k & 0 \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real, indique uma afirmação FALSA. (Escolha apenas uma opção)

- ☐ Se $k = 0$, a sua característica é 2.
- ☐ Se $k = 7$, a sua característica é 3.
- ☐ Se $k \neq 0$, a sua característica é 3.
- ☐ Nenhuma das afirmações é falsa.

GRUPO 2

Neste grupo apresente as definições, os cálculos que efetuar e justifique todas as conclusões que obtiver. Utilize uma folha à parte.

1. (1,5 val.) Suponhamos que $|B| = -3$, onde $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Calcule o seguinte determinante, usando exclusivamente as propriedades dos determinantes **(indique as propriedades usadas).**

$$\begin{vmatrix} 7a & 2d & 3g-a \\ 7b & 2e & 3h-b \\ 7c & 2f & 3i-c \end{vmatrix}$$

2. (2,0 val.) Considere as matrizes $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ b & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 \\ a+1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) Indique para que valores de a e b o sistema $CX = D$ é de Cramer.

   b) Use o método de Cramer para encontrar a solução do sistema quando $a = 2$ e $b = 1$.

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame da Época Normal - PARTE 2 **30 de janeiro de 2023**

NOME: NÚMERO:

- A duração da parte 2 da prova é de **60 minutos**.
- Não é permitida a utilização de nenhum material de consulta ou auxiliar de cálculo.

GRUPO 1

Responda a cada uma das questões deste grupo no próprio enunciado. Não deve apresentar cálculos.

1. (2,0 val.) A matriz ampliada de um sistema de equações lineares $AX = B$, nas incógnitas x, y, z, t sendo a e b parâmetros reais, é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & a-6 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 & b-1 \end{array}\right]$$

Complete as frases:

a) Se $a \neq 6 \wedge b \neq 0$, então o sistema é .... porque ....

b) Se $a = 6 \wedge b = 2$, o sistema é .... porque ....

c) Se $a = 6 \wedge b = 2$, o conjunto solução é $C.S. =$ ....

d) Se $a = 7 \wedge b = 0$, então o sistema é .... porque ....

2. (1,0 val.) Em $\mathbb{R}^2$ considere os conjuntos $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}\}$, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 0\}$, $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y + 3\}$, $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}$ e $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 5y = 0\}$.

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ são (indique apenas uma opção):

- ☐ S_3
- ☐ S_2 e S_5
- ☐ S_3 e S_4
- ☐ S_3 e S_5
- ☐ S_2, S_3, S_4 e S_5
- ☐ S_1 e S_2
- ☐ S_2, S_4 e S_5
- ☐ Nenhuma das outras opções.

3. (1,0 val.) Em $\mathbb{R}^4$, uma base para o subespaço $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = -b \wedge c = 3d\}$ é (indique apenas uma opção):

- ☐ $\{(1, -1, -3, -1)\}$
- ☐ $\{(-1, 1, 3, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 6, 2)\}$
- ☐ $\{(-1, 1, 3, 1), (1, -1, 0, 0)\}$
- ☐ $\{(-1, 1, 3, 1), (2, -2, -6, -2)\}$
- ☐ $\{(-1, 1, 3, 1), (1, -1, -3, -1)\}$
- ☐ $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
- ☐ $\{(0, 0, 3, 1), (1, 1, 0, 0)\}$
- ☐ Nenhuma das outras opções.

4. (1,5 val.) Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z) = (x+y+z, 3x+3y+4z, x+y+2z).$$

4.1 O núcleo de T é (indique só uma opção):

- ☐ $N(T) = \{(-7y, y, 5y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $N(T) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $N(T) = \{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $N(T) = \{(3z, -z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

4.2 A Imagem de T é (indique só uma opção):

- ☐ $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b + c - a = 0\}$.
- ☐ $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c - b + 2a = 0\}$.
- ☐ $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c - 3b + 3a = 0\}$.
- ☐ $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b + c - 3a = 0\}$.

5. (1,0 val.) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Os seus valores próprios são (indique só uma opção):

- ☐ $2, 2, 4$.
- ☐ $1, 2, 3$.
- ☐ $0, 1, 3$.
- ☐ $0, 0, 2$.
- ☐ $2, 3, 3$.
- ☐ $0, 1, 2$.
- ☐ $1, 1, 2$.
- ☐ Nenhuma das outras opções.

GRUPO 2

Neste grupo apresente as definições, os cálculos e justifique todas as conclusões que obtiver. Utilize uma folha à parte.

1. (2,0 val.) No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, considere o conjunto $A = \{(1,1,-1,0), (0,1,1,-2), (1,0,0,0)\}$.

   a) Calcule o subespaço gerado por A.

   b) Verifique se A é um conjunto linearmente independente.

2. (1,5 val.) Verifique se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(2,1) = (1,7), \quad T(0,1) = (-1,3) \ \text{ e } \ T(4,-3) = (7,-1).$$

   Caso exista, determine $T(x,y)$ para qualquer (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Algumas definições estudadas em ALGAN

O terno $(V, \oplus, \odot)$ é um **espaço vetorial** real se e só se:

(A_1) (Operação interna) $\forall u, v \in V, u \oplus v \in V$;
(A_2) (Comutatividade) $\forall u, v \in V, u \oplus v = v \oplus u$;
(A_3) (Associatividade) $\forall u, v, w \in V, (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$;
(A_4) (Existência de elemento neutro) $\exists e \in V, \forall u \in V, u \oplus e = u = e \oplus u$;
(A_5) (Existência de elemento oposto) $\forall u \in V, \exists u' \in V, u \oplus u' = e = u' \oplus u$.

(M_1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \alpha \odot u \in V$;
(M_2) (Associatividade da multiplicação por escalar) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V, (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$;
(M_3) (Distributividade da adição em V) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V, \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$;
(M_4) (Distributividade da adição em $\mathbb{R}$) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$;
(M_5) (Elemento neutro da multiplicação por escalar) $\forall u \in V, 1 \odot u = u$.

Diz-se que $(W, \oplus, \odot) \subseteq (V, \oplus, \odot)$ é um **subespaço vetorial** de $(V, \oplus, \odot)$ se e só se:

1. $0_V \in W$;
2. $\forall u, v \in W, u \oplus v \in W$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W, \alpha \odot u \in W$.

A transformação $T : V \to V'$ é uma **transformação linear** de V em V' se e só se:

1. $\forall u, v \in V, T(u+v) = T(u) + T(v)$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, T(\alpha u) = \alpha T(u)$.