Análise Matemática

Derivação

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

1º Semestre 22-23

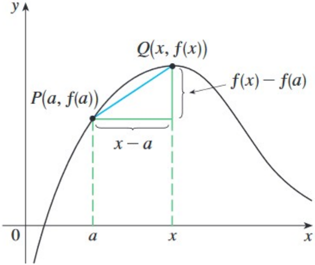
Sumário

Introdução

O problema de encontrar a linha tangente a uma curva e o de encontrar a velocidade de um objeto, envolvem encontrar um tipo especial de limite que é chamado de **derivada** e pode ser interpretado como uma **taxa de variação**.

Derivada - Definição

Se uma curva C tem a equação $y = f(x)$ e queremos encontrar a reta tangente a C no ponto $P(a, f(a))$, então consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e **calculamos a inclinação da linha secante** PQ, ou seja, a taxa de variação (razão incremental) de f no intervalo de extremos x e a.



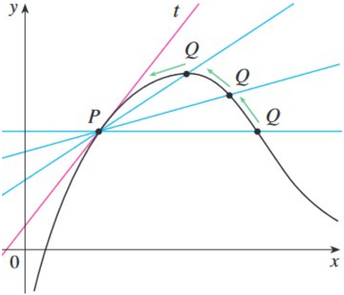
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada - Definição

Ao deixarmos Q aproximar-se de P ao longo da curva C, x vai aproximar-se de a.

Se m_{PQ} se aproxima de um número m, então definimos **a tangente** t como a reta que passa por P com inclinação m.

(Isto equivale a dizer que a linha tangente é a posição limite da linha secante PQ quando Q se aproxima de P).



Derivada - Definição

Derivada de uma função $f(x)$ num ponto

Chama-se **derivada** da função f em $x = a$ e denota-se **f'(a)**, ao limite seguinte, quando existe:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Assim, a derivada de uma função num ponto é o limite da razão incremental nesse ponto.

Derivada - Definição

Se, na definição de derivada, se efetuar a mudança de variável $x = a + \Delta x$, obtém-se a fórmula:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

o que permite determinar uma **expressão geral da derivada de f**.

Derivada - Definição

Dizemos que uma **função é derivável**, sem especificar onde, **se for derivável em todos os pontos do seu domínio**.

Uma **consequência** da definição de derivada, é que toda a função derivável é contínua.

Derivada - Derivadas laterais

Pode não existir derivada num ponto $x = a$, mas existirem derivadas laterais.
Nesse caso, definem-se as **derivadas laterais** de f no ponto a da seguinte forma:

- **derivada à esquerda** de f no ponto a:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- **derivada à direita** de f no ponto a:

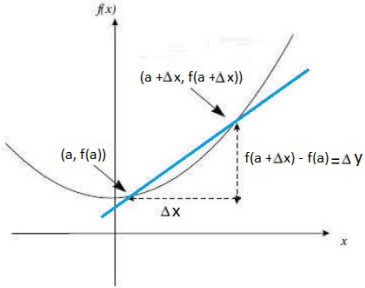
$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada de uma função num ponto

- Uma **condição necessária** e suficiente para que a função f tenha derivada no ponto a é que: $f'(a^-) = f'(a^+)$.
- A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita.
- Se a derivada de f no ponto a é finita, f diz-se **derivável** nesse ponto.
- Uma função pode ser contínua num dado ponto e não ter derivada nesse ponto.
- Se a derivada for infinita, a função pode não ser contínua.

Derivada - Interpretação geométrica

Considere-se a reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$.

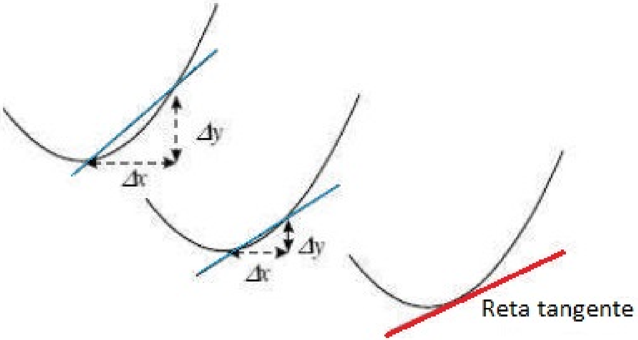


cujo declive é dado por

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{a + \Delta x - a} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Derivada - Interpretação geométrica

Se fizermos $\Delta x \to 0$, a reta secante aproxima-se da reta tangente



Derivada - Interpretação geométrica

Logo, o **declive da reta tangente** ao gráfico de f é dado por

$$m_t = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

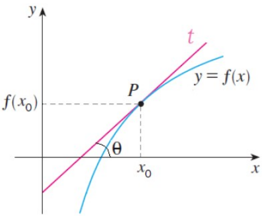
ou seja,
geometricamente, a derivada $f'(a)$ é interpretada como sendo o **declive da reta tangente** ao gráfico da função f no ponto $x = a$.

Derivada - Interpretação geométrica

O valor da derivada de uma função num ponto $P(x_0, f(x_0))$ é numericamente igual ao valor do declive da reta tangente à curva nesse ponto, isto é,

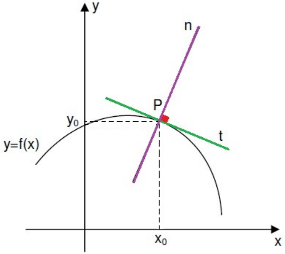
$$m_t = f'(x_0) = tan(\theta)$$

em que, m_t é o **declive da reta tangente** t e θ é o ângulo definido pela direção positiva de OX e a reta t tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P, isto é, θ é a inclinação da reta.



Derivada - Reta tangente

Sendo $P(x_0, f(x_0))$ um ponto que pertence ao gráfico da função f,



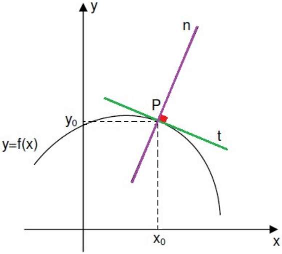
A equação da **reta tangente** ao gráfico de f que passa por P é dada por:

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0), \qquad m_t = f'(x_0)$$

- Se $f'(x_0) = 0$, a reta tangente é a **reta horizontal** $y = y_0$.

Derivada - Reta normal

Sendo $P(x_0, f(x_0))$ um ponto que pertence ao gráfico da função f,



A equação da **reta normal** ao gráfico de f que passa por P é dada por:

$$y - f(x_0) = m_n(x - x_0), \qquad m_n = -\frac{1}{m_t}$$

- Se $f'(x_0) = 0$, a reta normal é a **reta vertical** $x = x_0$.

Derivada - Notação de Leibniz

$f'(a) \Rightarrow$ notação usada até agora para designar a derivada de uma função $f(x)$ num ponto a do seu domínio.

Considere-se as duas variáveis x e y relacionadas através da igualdade $y = f(x)$.
A variável x é independente e y é a variável dependente.

A **notação de Leibniz** para a derivada refere apenas os nomes das variáveis livre e dependente.

$$\frac{dy}{dx}$$

Derivada - Notação de Leibniz

Os termos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

representam a derivada da função f num ponto genérico x.

Representa-se a derivada num ponto concreto **a**, escrevendo

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = \left[\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\right]_{x=a} = \left[f'(x)\right]_{x=a} = f'(a)$$

Regras de derivação

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais de variável real, deriváveis e com funções derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$. Então:

- $(f+g)(x)$ é derivável e
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
- $(f \cdot g)(x)$ é derivável e
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
- se $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é derivável e
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Regras de derivação

- Se $f(x) = c$, onde c é constante, então $f'(x) = 0$.
- Se $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Se $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}^+$, então $f'(x) = a^x \ln(a)$.
- Se $f(x) = \sin(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.
- Se $f(x) = \cos(x)$, então $f'(x) = -\sin(x)$.
- Se $f(x) = \tan(x)$, então $f'(x) = \sec^2(x)$.
- Se $f(x) = \cot(x)$, então $f'(x) = -\csc^2(x)$.
- Se $f(x) = \sec(x)$, então $f'(x) = \tan(x)\sec(x)$.
- Se $f(x) = \csc(x)$, então $f'(x) = -\cot(x)\csc(x)$.

Regras de derivação - Exemplo ✍

- Utilizando a regra da derivada da exponencial composta:

$$(u^v)' = \underbrace{vu^{v-1}u'}_{\text{potência}} + \underbrace{v'u^v \ln(u)}_{\text{exponencial}}$$

Exemplo 9

Determine a função derivada das seguintes funções:

9.1 $y = \ln(x^x)$

9.2 $y = 5^{3x+2} + (2x)^{2-3x}$

9.3 $y = (\sin(x))^{\tan(x)}$

Regras de derivação - Exemplo ✍

Resolução Exemplo 9:

9.1 $y = \ln(x^x) \Rightarrow y' = \dfrac{(x^x)'}{x^x} = \dfrac{x\ x^{x-1}\ x' + x'\ x^x\ \ln x}{x^x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{x\ x^x\ x^{-1}\ \cdot 1 + 1 \cdot\ x^x\ \ln x}{x^x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^x \left(x\ \ x^{-1}\ +\ \ln x\right)}{x^x}$$

$$\Rightarrow y' = 1\ +\ \ln x$$

9.2 $y = 5^{3x+2} + (2x)^{2-3x}$

$$y' = (3x-2)'5^{3x+2}\ln 5 + (2-3x)(2x)^{2-3x-1}(2x)' + (2-3x)'(2x)^{2-3x}\ln(2x)$$

$$y' = 3 \cdot 5^{3x+2}\ln 5 + (2-3x)(2x)^{1-3x} \cdot 2 + (-3)(2x)^{2-3x}\ln(2x)$$

$$y' = 3\ln 5 \cdot 5^{3x+2} + 2(2-3x)(2x)^{1-3x} - 3 \cdot (2x)^{2-3x}\ln(2x)$$

Regras de derivação - Exemplo ✍

Exemplo 9 (cont.):

9.3 $y = (\sin(x))^{\tan(x)}$

$$y' = (\tan x)\,(\sin(x))^{\tan(x)-1}\,(\sin x)' + (\tan x)'\,(\sin(x))^{\tan(x)}\,\ln(\sin x)$$

$$y' = (\tan x)\,(\sin(x))^{\tan(x)-1}\,(\cos x) + (\sec^2 x)\,(\sin(x))^{\tan(x)}\,\ln(\sin x)$$

$$y' = (\sin(x))^{\tan(x)}\,\left(1 + \sec^2 x\;\ln(\sin x)\right)$$

Diferencial de uma função

Definição

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em x e Δx um incremento de x.

- A diferencial de x é dada por $dx = \Delta x$;
- A **variação ou acréscimo da variável dependente** é dada por $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
- A **diferencial de** y em x é dada por $dy = f'(x)dx$.

Note-se que:

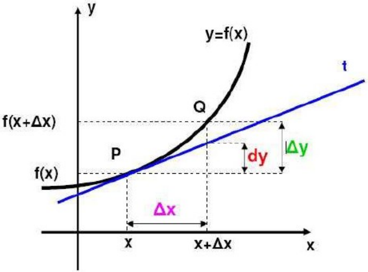
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diferencial de uma função

Geometricamente, quando a variável independente varia de x para para $x + \Delta x$ a **variação exata** da função é dada por

$$\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f(x)$$

O valor da diferencial dy é uma medida da variação de y correspondente à variação Δx tomada sobre a reta tangente à curva no ponto P (equivale a dizer que y varia a uma velocidade constante $f'(x)$ a partir do ponto P).



Diferencial de uma função

Quando, $\Delta x \approx 0$ tem-se que

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x)dx$$

Isso significa que, para pequenas variações em x, podemos usar a diferencial para avaliar a correspondente variação ocorrida em y.

Como, $\quad dy \approx \Delta y \quad e \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad$ então,

$$dy \approx f(x + \Delta x) - f(x)$$

isto é,

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, dx}$$

Diferencial - Aplicação

Podemos aplicar a noção de **diferencial** a:

- Cálculo;
- Aproximação de valores;
- Estimação de erros.

Diferencial - Cálculo - Exemplo ✍

Exemplo 10

Calcule o diferencial da função:

$$f(x) = (\tan x)^{x^2}.$$

Diferencial - Cálculo - Exemplo

Exemplo 10

Calcule o diferencial da função:

$$f(x) = (\tan x)^{x^2}.$$

Resolução: O diferencial de $f(x)$ é dada por $df = f'(x)dx$.

$$f'(x) = x^2\,(\tan x)^{x^2-1}\,(\tan x)' + (x^2)'\,(\tan x)^{x^2}\,\ln(\tan x)$$

$$f'(x) = x^2\,(\tan x)^{x^2-1}\sec^2(x) + 2x\,(\tan x)^{x^2}\,\ln(\tan x)$$

Portanto, $df = (\tan x)^{x^2}\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)\cos(x)} + 2x\;\ln(\tan x)\right)\,dx$

Diferencial - Aproximação de valores - Exemplo ✍

Exemplo 11

Calcule aproximadamente: $\sin(31^\circ)$.

Diferencial - Aproximação de valores - Exemplo ✍

Exemplo 11

Calcule aproximadamente: $\sin(31°)$.

Resolução: Seja $f(x) = \sin(x)$.

Note que $31° = 30° + 1°$ e $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$.

Fazemos $a = 30° = \dfrac{\pi}{6} rad$.

Usamos a aproximação $\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f\left(a + \Delta x\right) - f(x) \approx f'(a)\Delta x$

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180}$$

$$f(31°) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0.515115$$

Diferencial - Estimação de erros - Exemplo ✍

Exemplo 12

Um orifício cilíndrico circular de raio $4\ cm$ e $12\ cm$ de profundidade, existente num bloco metálico, deve ser aumentado para $4.12\ cm$ de raio. Aplique diferenciais e estime a quantidade de material retirado.

Diferencial - Estimação de erros - Exemplo ✍

Exemplo 12

Um orifício cilíndrico circular de raio $4\ cm$ e $12\ cm$ de profundidade, existente num bloco metálico, deve ser aumentado para $4.12\ cm$ de raio. Aplique diferenciais e estime a quantidade de material retirado.

Resolução: Seja $V(x) = \pi x^2\ 12 = 12\pi x^2$
Fazemos $a = 4\ cm$ e $\Delta x = 0.12\ cm$

Usamos a aproximação $\Delta V \approx dV$
$dV = V'(a)\Delta x = 24\pi\ a\ 0.12 \Rightarrow dV = 24 \times \pi \times\ 4 \times\ 0.12 = 11.52\pi$

Logo, $\Delta V \approx dV = 11.52\pi\ cm^3$

Exercícios ✍

1. Considere a função $y = f(x)$ definida por:

$$f(x) = -4\arccos(x) + \frac{\pi}{2}$$

   1.1 Determine o domínio e contradomínio da função;

   1.2 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde a abcissa toma o valor $\frac{1}{2}$;

   1.3 Determine a diferencial dy;

   1.4 Calcule um valor aproximado de $f(0.6)$.

Exercícios ✍

2. Considere a função $y = (x-2)^2$.
   Determine dy e Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0.1$.

3. Use o conceito de diferencial para calcular um valor aproximado de:
   3.1 $\sqrt{122}$
   3.2 $\ln(0.99)$
   3.3 $\tan(44^\circ)$

Exercícios ✍

Resolução:

1. $f(x) = -4\arccos(x) + \dfrac{\pi}{2}$

1.1 • $D_f = [-1, 1]$

• $D'_f = ?$ $\quad 0 \leq \arccos(x) \leq \pi$

$$-4\pi \leq -4\arccos(x) \leq 0$$

$$-4\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - 4\arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$D'_f = \left[-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Exercícios ✍

Resolução:

1.2 $r_t:\ y - \overbrace{y_0}^{?} = \overbrace{m_t}^{?}(x - x_0) \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

- $y_0 = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = -4\underbrace{\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)}_{\dfrac{\pi}{3}} + \dfrac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow \ y_0 = -\dfrac{5\pi}{6}$

- $m_t = f'(x_0) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = ?$

$$f'(x) = -4\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$m_t = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Exercícios ✍

Resolução:

A reta tangente é dada por: $y + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

1.3 $dy = y'\ dx \qquad dy = \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

1.4 $f(0.6) = ? \qquad 0.6 = x + \Delta x \qquad x = 0$ e $\Delta x = 0.6$

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$
$f(0.6) = f(0+0.6) \approx f(0) + f'(0) \times 0.6$

- $f(0) = -4\arccos(0) + \dfrac{\pi}{2} = -4 \times \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{2}$
- $f'(0) = 4$

$$f(0.6) \approx -\frac{3\pi}{2} + 4 \times 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad f(0.6) \approx \frac{-15\pi + 24}{10}$$

Exercícios ✍

Resolução:

2. $y = f(x) = (x-2)^2, \qquad x = 3 \quad \Delta x = 0.1$

- $dy = y' \overbrace{dx}^{=\Delta x} \;\Leftrightarrow\; dy = 2(x-2)\; dx$

  Substituindo os valores de x e de Δx temos:

$$dy = 0.2$$

- $\Delta y = f\,(x+\Delta x) - f\,(x) \;\Leftrightarrow\; \Delta y = (x + \Delta x - 2)^2 - (x-2)^2$

  Substituindo os valores de x e de Δx temos:

$$\Delta y = (3+0.1-2)^2 - (3-2)^2 \Leftrightarrow \Delta y = (1+0.1)^2 - 1 \Leftrightarrow \Delta y = 0.2 + 0.01$$

Exercícios ✍

Resolução:

3.1 • $\sqrt{122} \approx ?$ Seja $f(x) = \sqrt{x}$.

Note que $122 = x_0 + \Delta x_0 = 121 + 1$, pois 121 é um quadrado perfeito

Fazemos $x_0 = 121$ e $\Delta x_0 = 1$.

Usamos a aproximação

$$\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f\left(x_0 + \Delta x_0\right) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x_0$$

$$f\left(121 + 1\right) \approx f\left(121\right) + f'\left(121\right) \times 1$$

$$f(122) = \sqrt{122} \approx \sqrt{121} + \frac{1}{2\sqrt{121}} \times 1 \approx 11 + \frac{1}{22} \approx 11.045$$

Exercícios ✍

Resolução:

3.2 $\ln(0.99) \approx ?$ Seja $f(x) = \ln(x)$.

Note que $0.99 = x_0 + \Delta x_0 = 1 + (-0.01)$

Fazemos $x_0 = 1$ e $\Delta x_0 = -0.01$.

Usamos a aproximação

$$\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f\left(x_0 + \Delta x_0\right) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x_0$$

$$f\left(1 + (-0.01)\right) \approx f\left(1\right) + f'\left(1\right) \times \left(-0.01\right)$$

$$f(1) = \ln(0.99) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \times (-0.01) \approx 0 - 0.01 \approx -0.01$$

Exercícios ✍

Resolução:

3.3 $\tan(44^\circ) \approx ?$ Seja $f(x) = \tan(x)$.

Note que $44^\circ = x_0 + \Delta x_0 = 45^\circ + (-1^\circ)$.

Fazemos $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$ e $\Delta x_0 = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$.

Usamos a aproximação

$$\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f\left(x_0 + \Delta x_0\right) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x_0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$f(44^\circ) = \tan(44^\circ) \approx \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 1 - \frac{\pi}{90} \approx 0.965$$