## AULA TEÓRICO - PRÁTICA 3

**Tema:** Derivadas de funções reais de variável real.

**Objetivo:** No final desta aula os alunos deverão ser capazes de:
- definir função derivável;
- interpretar geometricamente a derivada;
- determinar as retas tangente e normal ao gráfico de uma função num ponto;
- determinar derivadas usando as regras de derivação;
- resolver exercícios envolvendo diferenciais.

1. Determine a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 3$:

   **1.1** recorrendo à definição de derivada num ponto.

   **1.2** determinando primeiro $f'(x)$ pelas regras de derivação.

2. Seja $f$ uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.
   Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$.

3. Calcule as derivadas das seguintes funções:

   **3.1** $f(x) = 7^{\arctan(x^3)}$;

   **3.2** $f(x) = \ln\left(\sin\left(x^2\right)\right)$;

   **3.3** $f(x) = \ln\left(\sin(x)\right)^2$;

   **3.4** $f(x) = \ln^2\left(\sin(x)\right)$;

   **3.5** $f(x) = e^{x^2+3}$;

   **3.6** $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$;

   **3.7** $f(x) = x^2\ e^{-x}$;

   **3.8** $f(x) = \tan(1 + \ln x)$;

   **3.9** $f(x) = x^x$;

   **3.10** $f(x) = \sin(x^2 - 5)\ \cos(\sin x)$;

   **3.11** $f(x) = log_7(\sin x^2)$;

   **3.12** $f(x) = \sec(x^{\cos x})$;

   **3.13** $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$;

   **3.14** $f(x) = e^{\ln \tan x}$;

   **3.15** $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

   **3.16** $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;

**3.17** $f(x) = \arctan(ax^2),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

**3.18** $f(x) = \dfrac{1}{8} \arctan\left(\dfrac{2}{3} \tan x\right)$;

**3.19** $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

**3.20** $f(x) = x^2\ \arccos(x)$.

4. Escreva as equações das retas tangentes e das retas normais aos gráficos das funções:

   **4.1** $f(x) = 2^{-x^2+2x}$ no(s) ponto(s) de ordenada unitária.

   **4.2** $g(x) = \ln(x^2 - 3) - \ln(x - 1)$ no ponto de abcissa 2.

5. Determine a equação da reta tangente e da reta normal à curva definida por $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1}{2} - x}\right)$, no ponto de ordenada $\dfrac{\pi}{6}$.

6. Determine a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{\pi}{3} - \arccos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$, no ponto de abcissa positiva em que esta é perpendicular à reta de equação $\sqrt{3}\ x + 3y = 6$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, a função definida por $f(x) = \ln x$.
   No gráfico da função $f$ existe um ponto onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. Qual é a abcissa desse ponto?

8. Determine a expressão de $\Delta y$ e de $dy$ para a função $y = x^2 + 5x - 2$.

9. Para cada uma das funções indicadas, determine:

   **9.1** $y = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right), \qquad dy = ?$

   **9.2** $y = 3^{\ln(\tan x)}, \qquad dy|_{\frac{\pi}{4}} = ?$

   **9.3** $y = \cos^2\left(\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}\right), \qquad dy = ?$

10. Através de diferenciais, calcule o valor aproximado de:

    **10.1** $\sqrt{36.02}$;

    **10.2** $\sin(61°)$;

    **10.3** $\ln(0.98)$;

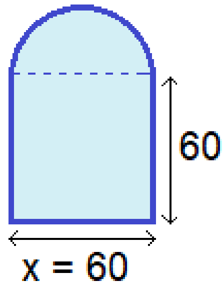
    **10.4** $\sqrt[3]{128}$.

11. Calcule, usando aproximação linear, um valor aproximado de $\dfrac{2}{\sqrt{0.99 + (0.99)^2}}$.

12. Uma janela tem a forma de um quadrado com um semicírculo na parte superior, como se pode observar na figura.

A Luana mediu um dos lados da janela e concluiu que mede 60 $cm$ com um possível erro de medição de 0.1 $cm$.

Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo da **área** da janela.




13. De duas funções reais de variável real $f$ e $g$ sabe-se que:

- $f$ é definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
- o ponto de coordenadas $(2, -3)$ pertence ao gráfico da função $g$;
- a tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 2 é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual é o valor de $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$?

**Soluções**:

1.1 e 1.2 6 2. $\dfrac{2}{3}$

3.1 $f'(x) = \dfrac{3x^2 \ln 7}{1+x^6}\ 7^{\arctan(x^3)}$ 3.2 $f'(x) = 2x\cot(x^2)$ 3.3 $f'(x) = 2\cot(x)$

3.4 $f'(x) = 2\ln(\sin x)\ \cot x$ 3.5 $f'(x) = 2x\ e^{x^2+3}$ 3.6 $f'(x) = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x-1}}\ 2^{\sqrt{x-1}}$

3.7 $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ 3.8 $f'(x) = \dfrac{1}{x}\ \sec^2(1+\ln x)$ 3.9 $f'(x) = x^x(1+\ln x)$

3.10 $f'(x) = 2x.\cos(x^2-5).\cos(\sin x) - \sin(x^2-5).\cos x.\sin(\sin x)$ 3.11 $f'(x) = \dfrac{2x}{\ln 7}\ \cot(x^2)$

3.12 $f'(x) = \sec(x^{\cos x})\tan(x^{\cos x})\ x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)$ 3.13 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

3.14 $f'(x) = \sec^2 x$ 3.15 $f'(x) = \dfrac{2x}{1-x^4}$ 3.16 $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}$ se $x > 0$

3.17 $f'(x) = \dfrac{2ax}{1+a^2x^4}$ 3.18 $f'(x) = \dfrac{3\sec^2 x}{36+16\tan^2 x}$ 3.19 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3.20 $f'(x) = 2x \arccos x - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

4.1 • Em $P_1(0,1)$: Reta tangente: $\Longrightarrow y = 2\ln(2)x + 1$; reta normal: $\Longrightarrow y = -\dfrac{1}{2\ln(2)}x + 1$

• Em $P_2(2,1)$: Reta tangente: $\Longrightarrow y = -2\ln(2)(x-2) + 1$; reta normal: $\Longrightarrow y = \dfrac{1}{2\ln(2)}(x-2) + 1$

4.2 Reta tangente: $\Longrightarrow y = 3(x-2)$; reta normal: $\Longrightarrow y = -\dfrac{1}{3}\,(x-2)$

5. Reta tangente $\Longrightarrow y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{\pi}{6}$ Reta normal $\Longrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{\pi}{6}$

6. $y = \sqrt{3}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$ 7. 1

8. $\Delta y = (2x+5)\Delta x + (\Delta x)^2$ e $dy = (2x+5)\Delta x$

9.1 $dy = -\dfrac{4}{4-x^2}\ dx$ 9.2 $dy|_{\frac{\pi}{4}} = 2\ \ln 3\ dx$ 9.3 $dy = -\dfrac{3}{2\sqrt{(2-x)^3}}\sin\left(\dfrac{6}{\sqrt{2-x}}\right)\ dx$

10.1 $\sqrt{36.02} \approx \dfrac{3601}{600} \approx 6.002$ 10.2 $\sin(61^\circ) \approx \dfrac{180\sqrt{3}+\pi}{360}$

10.3 $\ln(0.98) \approx -0.02$ 10.4 $\sqrt[3]{128} \approx \dfrac{126}{25} \approx 5.04$

11. $\dfrac{2.015}{\sqrt{2}} \approx 1.4248$

12. $12 + \dfrac{3\pi}{2}\ cm^2$

13. $\dfrac{5}{36}$