ÁLGEBRA LINEAR

2.Determinantes

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2022/2023

Referências:

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN, Publicação de apoio à unidade curricular*, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.

Definição

O conceito de determinante surgiu tendo por objetivo a simplificação do estudo e resolução de sistemas de equações lineares.

Permutações de n elementos

Consideremos o conjunto dos primeiros n naturais, $\{1, 2, \ldots, n\}$. Uma permutação σ sobre esse conjunto é uma função que ordena os elementos deste conjunto.

Por exemplo, $\sigma = (2, 4, 5, 3, 1)$ é uma ordenação dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

O conjunto de todas as permutações sobre n elementos é denotado de S_n, que tem $n!$ elementos.

Uma permutação σ diz-se par se o número de trocas entre dois números (em posições consecutivas) necessárias para obtermos a sequência crescente $(1, 2, \ldots, n)$ for par. Diz-se ímpar, se o número de trocas for ímpar.

Por exemplo, $\sigma = (2, 4, 5, 3, 1)$ é uma permutação par:

$$(2, 4, 5, 3, 1) \to (2, 4, 5, 1, 3) \to (2, 4, 1, 5, 3) \to (2, 1, 4, 5, 3) \to (1, 2, 4, 5, 3)$$

$$\to (1, 2, 4, 3, 5) \to (1, 2, 3, 4, 5)$$

(6 trocas são suficientes para obtermos a sequência crescente).

Para cada permutação σ, $sgn(\sigma)$ diz-se o sinal de σ. Este tem o valor 1 se a permutação for par e o valor -1 se a permutação for ímpar.

Definição de Determinante

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Designa-se por determinante de A, e representa-se por $|A|$ ou $det(A)$, à soma algébrica dos produtos que se obtêm efetuando todas as permutações dos segundos índices do termo principal, fixados os primeiros índices, e fazendo-se preceder os produtos do sinal + ou -, conforme a permutação dos segundos índices seja par ou ímpar.

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Exercício

Encontre uma fórmula para o determinante de uma matriz de 2ª ordem e uma matriz de 3ª ordem.

Cálculo de determinantes de 2ª e 3ª ordens

Nota: Só existe determinante de uma matriz quadrada. O seu valor é um número real.

Matrizes 1ª ordem

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Matrizes 2ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrizes 3ª ordem: Regra de Sarrus

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
& \searrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\
& \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \\
& \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & \\
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
& \swarrow & & \searrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23}
\end{array}
\begin{array}{l}
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\
-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).
\end{array}$$

A Regra de Sarrus apenas se aplica a matrizes de ordem 3: repetem-se as duas primeiras linhas da matriz. Considera-se a diagonal principal e as outras duas diagonais que lhe são paralelas e aos produtos dos elementos que nelas figuram atribui-se o sinal $+$. Considera-se depois a diagonal secundária e as duas diagonais que lhe são paralelas e aos produtos dos elementos destas diagonais atribui-se o sinal -. A soma algébrica dos produtos assim obtidos é igual a $|A|$.

Exercício

Calcule os determinantes seguintes:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Determinantes de ordem superior

Seja A uma matriz de ordem n. Designa-se por menor complementar do elemento a_{ij}, e representa-se por $|\overline{A}_{ij}|$, o determinante da matriz que se obtém por supressão da linha l_i e coluna c_j da matriz A.

Designa-se por complemento algébrico do elemento a_{ij}, e representa-se por A_{ij}, o produto do menor complementar por $(-1)^{i+j}$, isto é,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|\overline{A}_{ij}|.$$

O Teorema de Laplace

Teorema de Laplace

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. O determinante de uma matriz A de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer, por exemplo linha i, pelos respetivos complementos algébricos, ou seja:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Nota: O Teorema de Laplace permite, portanto, calcular um determinante de ordem n, à custa de n determinantes de ordem $n-1$.

Exemplo

Seja $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Usando o Teorema de Laplace desenvolvendo ao longo da 2ª linha, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta = \; & 3A_{21} + 2A_{22} + 0A_{23} + 0A_{24} = \\
= \; & 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
= \; & -3\left[2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
& +2\left[1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
= \; & -3[0 + 4 + 2] + 2[0 - 4 + 4] \\
= \; & -18.
\end{aligned}$$

Propriedades dos determinantes

#1

O determinante de uma matriz é igual ao determinante da matriz que se obtém da primeira por troca ordenada das suas linhas com as suas colunas, i. e.,

$$|A^T| = |A|.$$

Resulta que, qualquer propriedade de um determinante que seja demonstrada relativamente às linhas de uma matriz ficará também demonstrada para as suas colunas. Usamos assim a denominação fila para nos referirmos, simultaneamente, às linhas e às colunas de uma matriz.

#2

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A são todos nulos, então

$$|A| = 0.$$

Exemplo:

Aplicando o Teorema de Laplace à segunda linha da matriz, temos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \times A_{21} + 0 \times A_{22} + 0 \times A_{23} = 0$$

#3

Ao trocarmos duas filas paralelas, o determinante da matriz resultante será simétrico ao determinante da matriz inicial.

#4

O determinante de uma matriz com duas filas paralelas iguais é nulo.

#5

Se multiplicarmos todos os elementos de uma fila por uma constante k, o determinante da matriz resultante tem como valor o produto do determinante da matriz inicial por k.

Exemplo:

Se $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 26$, então $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = 13$, pois resulta de multiplicarmos a terceira coluna por $\frac{1}{2}$.

Observação: Seja $k \in \mathbb{R}$ e A uma matriz de ordem n. Então, $|kA| = k^n|A|$.

#6

O determinante de uma matriz com duas filas paralelas proporcionais é nulo.

#7

O determinante de uma matriz não se altera quando se adiciona a uma fila uma outra fila paralela multiplicada por uma constante k.

#8

O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

Para o determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$, basta aplicar o Teorema de Laplace fazendo o desenvolvimento ao longo da primeira coluna:

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

#9

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada matriz, i.e.,

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

#10

Resulta, da propriedade anterior, que

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Nota: Em geral, $|A + B| \neq |A| + |B|$.

#11

Se cada elemento de uma fila de uma matriz for igual à soma de duas parcelas, o determinante dessa matriz pode decompor-se na soma de dois determinantes de duas matrizes que se obtêm da inicial substituindo os elementos dessa fila, respetivamente, pelas primeiras e pelas segundas parcelas, mantendo inalteradas as restantes filas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & a+b \\ 2 & 5 & c+d \\ 3 & 6 & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & c \\ 3 & 6 & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & b \\ 2 & 5 & d \\ 3 & 6 & f \end{vmatrix}$$

O Teorema de Laplace e as propriedades dos determinantes

Um dos inconvenientes da aplicação direta do Teorema de Laplace é o facto de exigir a resolução de n determinantes de ordem $n-1$. No entanto, se conjugarmos as propriedades dos determinantes com o Teorema de Laplace, podemos resolver apenas um determinante de ordem $n-1$. Para isso, resolve-se o determinante em duas fases:

1. selecionar um fila qualquer e, usando as propriedades, anular os seus elementos com exceção de um;
2. aplicar o Teorema de Laplace a essa fila.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{l_2 \leftarrow l_2 + l_1}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-10 - 5) = -30.$$

Cálculo da inversa de uma matriz usando a matriz adjunta

Seja A uma matriz de ordem n. Definimos a matriz adjunta de A, e representamos por $Adj(A)$, à matriz transposta da matriz que se obtém de A substituindo os seus elementos pelos respetivos complementos algébricos.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então a matriz adjunta da matriz A é dada por

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$Adj(A)=\begin{bmatrix} (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix} & (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^3\begin{vmatrix} -3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ (-1)^4\begin{vmatrix} -3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix} & (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ -14 & -4 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -14\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. Então:

1. Tem-se
$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = |A| \cdot I_n.$$
2. Se A é invertível, então
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A).$$
3. A matriz A é invertível se e só se $|A| \neq 0$.
4. Se A é invertível, então $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ a matriz do exemplo anterior. Temos $|A| = 2$ e, portanto, A é uma matriz invertível. Usando a matriz adjunta para o cálculo da sua inversa, obtemos

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -14 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$