Licenciatura em Engenharia Informática
ÁLGEBRA LINEAR 2022/2023
Teórico-Prática 2. Matrizes

1. Determine a característica das matrizes seguintes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

2. Determine para que valores de x e de y as matrizes têm característica 3:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo a que $car(A) = 2$.

4. Sejam $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$. Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que $car(MN) = 2$.

5. Calcule a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, recorrendo à definição de inversa de uma matriz.

6. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X que satisfaz a equação $\left(A^T X^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$. A matriz X é simétrica? Justifique.

7. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1}, usando o método da condensação.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Determine a característica de A.

   b) Calcule, se possível, a matriz inversa de A pelo método da condensação.

9. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, averigúe se a matriz $A^T BA$ é invertível. Justifique a sua resposta.

10. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ a & 2a & -1 \\ 5 & -a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

    a) Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a característica da matriz A é 2. Justifique a sua resposta.

    b) Para $a = 1$, determine, caso exista, a matriz inversa de A.

    c) Para $a = 1$, determine a matriz X que satisfaz a equação matricial $(AX - B)^T = B$.

11. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Justifique a existência da matriz inversa M^{-1} sem efetuar o seu cálculo e, em seguida, efetue o cálculo de M^{-1}.

12. Sejam A, B e C matrizes de ordem n invertíveis. Prove que ABC é também uma matriz invertível e que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -k-2 & -2 \end{bmatrix}$.

    a) Determine k de modo a que exista A^{-1}.

    b) Para $k = 1$, calcule A^{-1}.

    c) Para $k = 1$, determine a matriz $B = 3I - 2A^2$.

    d) Para $k = 1$, determine a matriz X que verifica a equação $[A^T X - 2I - (BA)^T]^T = (A^{-1}B^{-1})^{-1}$.

14. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

    a) Condicione o parâmetro a de modo a que $car(A) = 2$.

    b) Para o valor de a calculado na alínea anterior, a matriz A admite inversa? Justifique.

    c) Para $a = -1$, resolva a equação matricial $AX + B^T = A$.

15. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 5 \\ 5 & x & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.
    a) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a característica da matriz A é 3. Justifique a sua resposta.
    b) Para $x = 0$, determine a matriz X que satisfaz a equação matricial $(AXA^T)^{-1} + \big(A(BA)^{-1}B\big)^T = 2I$.

16. Resolva, em ordem a X, cada uma das seguintes equações matriciais:
    a) $AX + (X^{-1}B)^{-1} = A$.
    b) $(A^{-1}X + B)^{-1} = A$.
    c) $(A^{-1}X)^{-1} + 2A = B$.
    d) $\big[(A^TX)^{-1}B\big]^T = (A^T)^{-1}$.

Soluções

1. a) $car(A) = 2$
   b) $car(B) = 3$
   c) $car(C) = 1$
   d) $car(D) = 4$
   e) $car(E) = 5$
   f) $car(F) = 2$
2. a) $x \neq y$
   b) $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 1\}$
3. $b = 1 \wedge a \neq 1$
4. $k = 0$
5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; Sim.
7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8. a) $car(A) = 3$
   b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
9. Não.
10. a) $a = 0 \vee a = -7$
    b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{11}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$
    c) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{4} & -1 \\ \frac{11}{2} & \frac{3}{4} & -3 \end{bmatrix}$

11. $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$

13. a) $k \neq 2$

    b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

    c) $B = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

    d) $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -16 & 2 & 6 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

14. a) $a = \frac{-1}{3}$

    b) Não

    c) $X = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -3 \\ 1/2 & 3/2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15. a) $x \neq -5 \wedge x \neq 5$

    b) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$

16. a) $X = (A + B^{-1})^{-1}A$

    b) $X = I - AB$

    c) $X = A(B - 2A)^{-1}$

    d) $X = (A^{-1})^T BA$

Referências

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.