2ªPARTE - modelo

1. Discuta o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} (a+b)\,x + (a+b)\,z = 0 \\ bx + (a+b)\,y = 0 \\ ax + by + (a+b)\,z = 0 \end{cases}$ $, \forall a, b \in \mathbb{R}$ com base na análise das características de car($\mathbf{A}$) e car($[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]$)

2. Considere o conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$.

   (a) Mostre que U é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$

   (b) Identifique uma base de U e indique qual a sua dimensão

   (c) Escreva o vetor $\mathrm{v}_1 = (3, 4, 18)$ como combinação linear dos vetores $\mathrm{v}_2 = (1, 0, 2)$ e $\mathrm{v}_3 = (0, 1, 3)$

3. Considere os vetores $\mathrm{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathrm{v}_2 = (0, 1, 2)$ e $\mathrm{v}_3 = (1, 2, 0)$.

   (a) Averigue a dependência/independência linear destes 3 vetores

4. Considere a transformação linear $U \to V$ definida por $\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T\,(x, y, z) = (-x + y, 3z) \end{array}$

   (a) Verifique que a transformação é linear

   (b) determine o nucleo da transformação linear.

   (c) Determine a imagem da transformação linear

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

   (a) Encontre os valores prórios da matriz

   (b) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre os vetores próprios associados a este valor próprio

   (c) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre o espaço próprio associado a este valor próprio (aproveite a resolução da alínea anterior)

   (d) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre uma base do espaço próprio associado a este valor próprio (aproveite a resolução da alínea anterior)

   Uma base deste subespaço é, por exemplo, $\{(-2, 2, 0)\}$

1. Discuta o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} (a+b)\,x+(a+b)\,z=0 \\ bx+(a+b)\,y=0 \\ ax+by+(a+b)\,z=0 \end{cases}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ com base na análise das características de $\text{car}(\mathbf{A})$ e $\text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,])$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+b & 0 & a+b & 0 \\ b & a+b & 0 & 0 \\ a & b & a+b & 0 \end{array}\right]_{C_3\leftrightarrow C_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a+b & 0 & a+b & 0 \\ 0 & a+b & b & 0 \\ a+b & b & a & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+b & 0 & a+b & 0 \\ 0 & a+b & b & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \end{array}\right]_{C_3\leftrightarrow C_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a+b & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3+L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} a+b & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A})=3 \text{ sse } a+b\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a+2b\neq 0 \\ \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,])=3 \\ \text{GI}=n-\text{car}\,(\mathbf{A})=3-3=0 \end{array}\right. \text{, pelo que o sistema é possível determinado}$$

Se $a=-b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]_{C_3\leftrightarrow C_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3\leftrightarrow L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A})=2 \text{ sse } b\neq 0 \\ \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,])=2 \\ \text{GI}=n-\text{car}\,(\mathbf{A})=3-2=1 \end{array}\right. \text{, pelo que o sistema é possível simplesmente indeterminado}$$

Se $b=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right]_{C_3\leftrightarrow C_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A})=2 \text{ sse } a\neq 0 \\ \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,])=2 \\ \text{GI}=n-\text{car}\,(\mathbf{A})=3-2=1 \end{array}\right. \text{, pelo que o sistema é possível simplesmente indeterminado}$$

Se $a=-2b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -b & -b & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{car}(\mathbf{A})=2 \text{ sse } b\neq 0 \\ \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,])=2 \\ \text{GI}=n-\text{car}\,(\mathbf{A})=3-2=1 \end{array}\right. \text{, pelo que o sistema é possível simplesmente indeterminado}$$

$$\text{Conclusão} \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} SPD \text{ sse } a+b\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a+2b\neq 0 \\ SPind \text{ sse } a=-b \wedge b\neq 0 \\ SPind \text{ sse } a\neq 0 \wedge b=0 \\ SPind \text{ sse } a=-2b \wedge b\neq 0 \end{array}\right.$$

2. Considere o conjunto $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y-z=0\right\}$.

   (a) Mostre que U é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$

   $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y-z=0\right\}=\left\{(x,y,2x+3y)\in\mathbb{R}^3\right\}$

   Sejam $u_0=(0,0,0)$, $u_1=(x,y,z)$ e $u_2=(a,b,c)$ vetores de U

   i. O vetor nulo pertence a U

      Com efeito $u_0=0$, $(0,0,0)\in U$

ii. A soma de vetores pertence a V: $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in U$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 &= (x, y, 2x+3y) + (a, b, 2a+3b) \\ &= (x+a, y+b, 2x+3y+2a+3b) \\ &= (x+a, y+b, 2(x+a) + 3(y+b)) \in U \end{aligned}$$

iii. A multiplicação de um escalar por um vetor pertence a U: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in U, k\mathbf{u} \in U$

$$k\mathbf{u} = k(x, y, 2x+3y) = (kx, ky, k(2x+3y)) \in U$$

Logo, verificados os 3 axiomas, pode concluir-se que o conjunto U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Identifique uma base de U e indique qual a sua dimensão

Uma base possível para U é, por exemplo, $A = \{(1,0,2), (0,1,3)\}$.

$\dim(A) = 2$.

(c) Escreva o vetor $\mathrm{v}_1 = (3, 4, 18)$ como combinação linear dos vetores $\mathrm{v}_2 = (1, 0, 2)$ e $\mathrm{v}_3 = (0, 1, 3)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 18 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 3L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{v}_1 = 3\mathrm{v}_2 + 4\mathrm{v}_3$$

3. Considere os vetores $\mathrm{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathrm{v}_2 = (0, 1, 2)$ e $\mathrm{v}_3 = (1, 2, 0)$.

(a) Averigue a dependência/independência linear destes 3 vetores

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{car}(\mathbf{A}) = 3 \\ \mathrm{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 3 \\ \mathrm{GI} = n - \mathrm{car}\,(\mathbf{A}) = 3 - 3 = 0 \end{array} \right.$, pelo que o sistema é possível e determinado. Logo os 3 vetores são linearmente independentes

4. Considere a transformação linear $U \to V$ definida por $\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y, z) = (-x + y, 3z) \end{array}$

(a) Verifique que a transformação é linear

Sejam $u_1 = (a, b, c)$ e $u_2 = (x, y, z)$, dois vetores de $\mathbb{R}^3$

i. $\mathrm{o} \in U, T(\mathrm{o}) = (\mathrm{o})$?

$$\begin{aligned} T(\mathrm{o}) &= (\mathrm{o}) \\ T(0,0,0) &= (0,0) \\ (0,0) &= (0,0) \end{aligned}$$

ii. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$?

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(u_1) + T(u_2) \\ T(a+x, b+y, c+z) &= T(a,b,c) + T(x,y,z) \\ (-(a+x) + (b+y), 3(c+z)) &= (-a+b, 3c) + (-x+y, 3z) \\ &= (-a+b-x+y, 3c+3z) \\ &= (-(a+x) + (b+y), 3(c+z)) \end{aligned}$$

iii. $\forall k \in \mathbb{R}, T(ku) = kT(u)$?

$$\begin{aligned} T(ku) &= kT(u) \\ T(k(a,b,c)) &= kT(a,b,c) \\ T(ka, kb, kc) &= k(-a+b, 3c) \\ (-ka+kb, 3kc) &= (-k(a+b), 3kc) \end{aligned}$$

Logo, verificados os axiomas i) e ii), pode concluir-se que a transformação é linear.

(b) determine o nucleo da transformação linear.

$\mathrm{N}(T) \Rightarrow T(u) = 0 \Leftrightarrow (-x+y, 3z) = (0,0)$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Rightarrow SPind \begin{cases} -x+y=0 \\ 3z=0 \\ y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \\ \end{cases}$

$\mathrm{N}(T) = \{(y,y,0)\}$

(c) Determine a imagem da transformação linear

$\operatorname{Im}(T) \Rightarrow T(u) = v \Leftrightarrow (-x+y, 3z) = (a,b)$

$\begin{cases} -x+y=a \\ 3z=b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & 0 & b \end{array}\right]$

$\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Rightarrow SP, \forall a,b$

logo $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(a) Encontre os valores prórios da matriz

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & (3-\lambda) & 4 \\ -1 & -1 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & (3-\lambda) & 4 \\ -1 & -1 & (-2-\lambda) \end{vmatrix}_{C_2=C_2-C_3} = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 1 \\ 2 & (-1-\lambda) & 4 \\ -1 & 1+\lambda & (-2-\lambda) \end{vmatrix}_{L_3=L_3+L_2}$$

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 1 \\ 2 & (-1-\lambda) & 4 \\ 1 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$(-1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)$$

$$(-1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

(a) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre os vetores próprios associados a este valor próprio

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & (3-\lambda) & 4 \\ -1 & -1 & (-2-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-2L_1 \\ L_3=L_3+L_1}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]_{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3+L_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Rightarrow SPind$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z+y=0 \Leftrightarrow x=-y \\ 2z=0 \Leftrightarrow z=0 \\ y=y \end{cases}$$

Pelo que, os vetores próprios associados a este valor próprio são todos os vetores do conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) : x=-y \wedge z=0\right\} = \left\{(-y,y,0) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)\right\}$$

(b) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre o espaço próprio associado a este valor próprio (aproveite a resolução da alínea anterior)

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=-y \wedge z=0\right\} = \left\{(-y,y,0) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

(c) Admita que um dos valores próprios é $\lambda = 1$, e encontre uma base do espaço próprio associado a este valor próprio (aproveite a resolução da alínea anterior)

Uma base deste subespaço é, por exemplo, $\{(-2,2,0)\}$