Análise Matemática

Estudo de Funções

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

1º Semestre 22-23

Sumário

Generalidades sobre Funções

Definição

Uma **função f** definida de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ num conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ é uma aplicação (correspondência) que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B, isto é

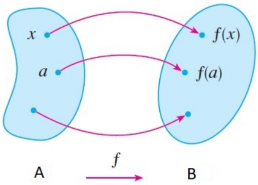
$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

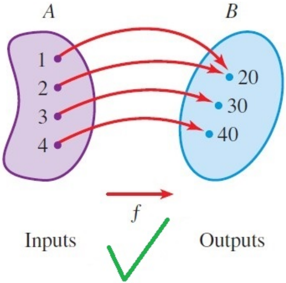
Simbolicamente escreve-se,

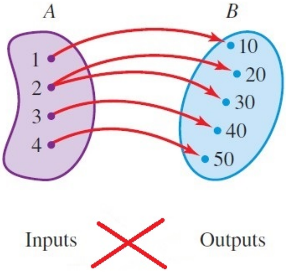
$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- O elemento x designa-se por **objeto** (ou variável independente) e o elemento y por **imagem** de x (ou variável dependente de x).

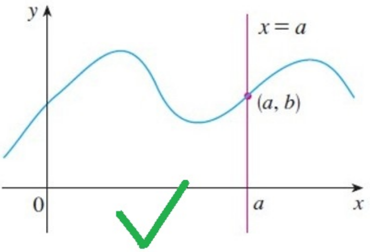
Generalidades sobre Funções

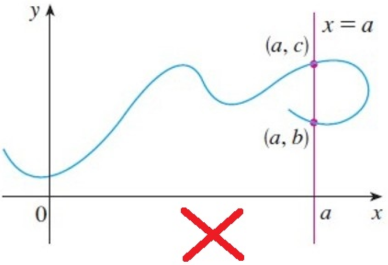






Teste da linha vertical - Uma curva no plano xy é gráfico de uma **função** de x se e só se qualquer linha vertical não cruzar a curva mais de uma vez.





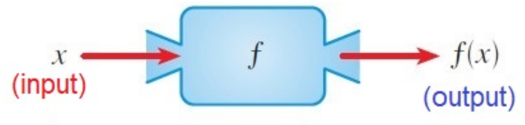
Generalidades sobre Funções

- O conjunto A é o **conjunto de partida** da função, sendo designado por **domínio** da função, é representado por D ou D_f : $D_f = A$ e corresponde ao conjunto de valores que a variável independente x pode assumir;
- O conjunto B é o **conjunto de chegada** da função;
- CD_f ou D'_f designa-se por **contradomínio** da função f e corresponde ao conjunto das imagens y, isto é,

$$CD_f = D'_f = \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}\,;$$

- A **imagem geométrica** de f é o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que $y = f(x)$.

É útil pensar numa função como uma máquina!
Se x pertence ao domínio da função f, então quando x entra na máquina, é aceite como uma entrada e a máquina produz uma saída $f(x)$ de acordo com a regra da função.

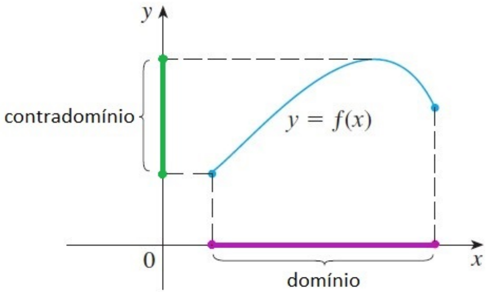


Assim, podemos pensar no **domínio** como o conjunto de todas as **entradas possíveis** e o **contradomínio** como o conjunto de todas as **saídas possíveis**.

Generalidades sobre Funções

Definição

Uma função que tem por domínio e contradomínio subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ diz-se uma **função real de variável real** (abreviadamente, f.r.v.r).



Generalidades sobre Funções - Conceitos

Seja f uma função e $A \subseteq D_f$. A função f diz-se:

- **positiva** em A se $f(x) > 0$, para $x \in A$;
- **negativa** em A se $f(x) < 0$, para $x \in A$;
- **crescente** em A se, $\forall x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **estritamente crescente** em A se, $\forall x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) > f(x_2)$;
- **decrescente** em A se, $\forall x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **estritamente decrescente** em A se, $\forall x_1, x_2 \in A$ tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) < f(x_2)$.

Generalidades sobre Funções - Conceitos

Seja f uma função e $A \subseteq D_f$. A função f diz-se:

- **constante** em A se $\forall x_1, x_2 \in A$ se tem $f(x_1) = f(x_2)$.
- **monótona** em A se for crescente ou decrescente em A.
- **nula** e x é um **zero** de f, quando $f(x) = 0$, $\forall x \in A$;
- **periódica** se satisfaz a condição $f(x) = f(x+T), \forall x \in A$; o número T chama-se o período da função, habitualmente é o menor número que satisfaz a condição.

Generalidades sobre Funções - Conceitos

- f diz-se **injetiva** se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

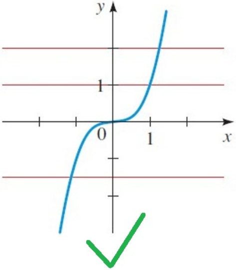
- f diz-se **sobrejetiva** se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é, $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$.

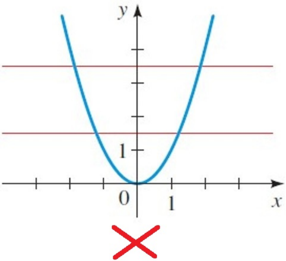
- f diz-se **bijetiva** se é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, isto é, $\forall y \in B, \exists^1 x \in A : y = f(x)$.

O **gráfico** de uma função f é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x)) \in D_f \times D'_f$, onde x é a **abcissa** e $f(x)$ é a **ordenada**.

Generalidades sobre Funções - Conceitos

Teste da linha horizontal - Uma função é **injetiva** se e só se qualquer linha horizontal intersetar o gráfico da função em apenas um ponto.



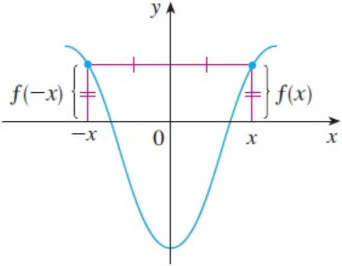


Generalidades sobre Funções - Conceitos

Seja f uma função e $A \subseteq D_f$. A função f diz-se:

- **par** se $\forall x \in A$, se tem $f(-x) = f(x)$.

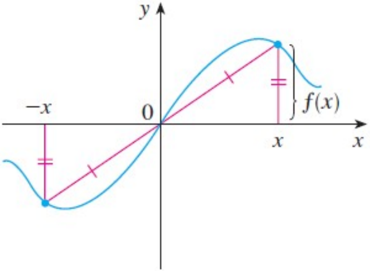
  Geometricamente, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo dos yy.



Generalidades sobre Funções - Conceitos

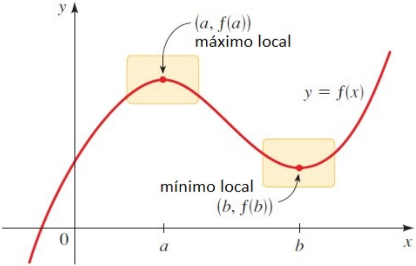
- **ímpar** se $\forall x \in A$, se tem $f(-x) = -f(x)$.

  Geometricamente, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial.



Generalidades sobre Funções - Conceitos

- Seja f uma função, $A \subseteq D_f$ e $M \in A$. Diz-se que $f(M)$ é um máximo de f se $f(x) \leq f(M), \forall x \in A$.
  A M chama-se **ponto de máximo**.
- Seja f uma função, $A \subseteq D_f$ e $m \in A$. Diz-se que $f(m)$ é um mínimo de f se $f(x) \geq f(m), \forall x \in A$.
  A m chama-se **ponto de mínimo**.



Operações com funções

Entre funções podem realizar-se diversas operações que originam outras funções.
Dadas duas funções reais de variável real f e g, podemos obter novas funções de x, que se chamam:

- $f(x)+g(x)$ **soma** de f com g;
- $f(x)-g(x)$ **diferença** entre f e g;
- $f(x)\cdot g(x)$ **produto** de f por g;
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **quociente** de f por g;
- $\sqrt[n]{f(x)}$ **raíz de índice** n de f;
- $|f(x)|$ **módulo** de $f(x)$.

Domínios

Os domínios destas novas funções podem ser mais restritos do que os domínios originais das funções f e g. Assim,

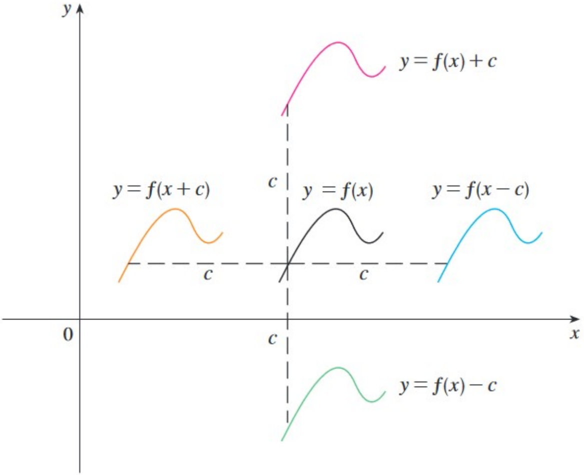
- a soma, a diferença e o produto têm como domínio o conjunto $D_f \cap D_g$;
- o quociente está definido nos pontos de $D_f \cap D_g$ que não anulam g. Isto é,
  $D_f/g = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$;
- $D_{\sqrt[n]{f(x)}} = \begin{cases} D_f & , n \text{ ímpar} \\ D_f \cap \{x : f(x) \geq 0\} & , n \text{ par} \end{cases}$
- $D_{|f(x)|} = D_f$.

Deslocamentos verticais e horizontais

Seja f uma função real de variável real e $c \in \mathbb{R}^+$. Obtém-se o gráfico de:

- $y = f(x) + c$, deslocando c unidades para cima o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = f(x) - c$, deslocando c unidades para baixo o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = f(x - c)$, deslocando c unidades para a direita o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = f(x + c)$, deslocando c unidades para a esquerda o gráfico de $y = f(x)$.

Deslocamentos verticais e horizontais



Transformação de funções

Reflexões e esticamentos horizontais e verticais

Seja f uma função real de variável real e $c > 1$. Obtém-se o gráfico de:

- $y = cf(x)$, esticando verticalmente por um fator de c o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = \dfrac{1}{c}f(x)$, comprimindo verticalmente por um fator de c o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = f(cx)$, comprimindo horizontalmente por um fator de c o gráfico de $y = f(x)$;

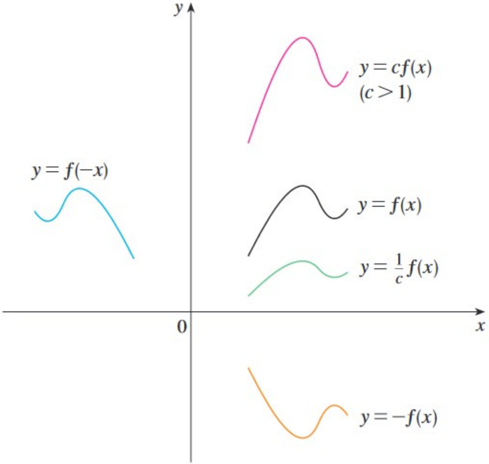
Transformação de funções

Reflexões e esticamentos horizontais e verticais

- $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, esticando horizontalmente por um fator de c o gráfico de $y = f(x)$;
- $y = -f(x)$, refletindo o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo dos xx;
- $y = f(-x)$, refletindo o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo dos yy.

Transformação de funções

Reflexões e esticamentos horizontais e verticais

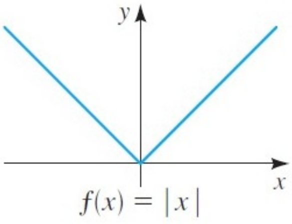


Transformação de funções

Transformação do valor absoluto de uma função

- Seja $y = f(x) = |x|$. Tem-se:

$$y = |x| \;\Leftrightarrow\; y = \begin{cases} x & ,\text{se } x \geq 0 \\ -x & ,\text{se } x < 0 \end{cases}$$



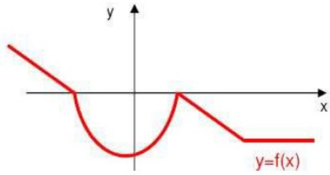
$$D = \mathbb{R} \qquad\qquad D' = \mathbb{R}_0^+$$

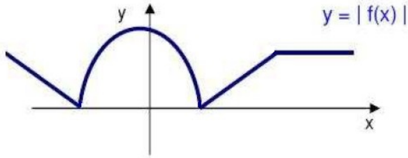
Transformação de funções

Transformação do valor absoluto de uma função

- **Generalizando:** seja f uma função real de variável real e $y = |f(x)|$. Por definição tem-se:

$$y = |f(x)| \Leftrightarrow y = \begin{cases} f(x) & , \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

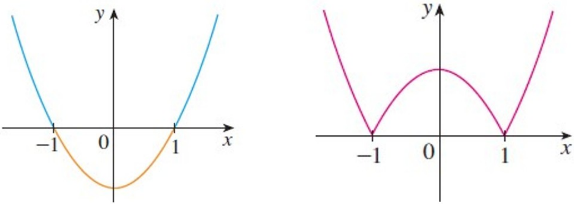




Transformação do valor absoluto de uma função

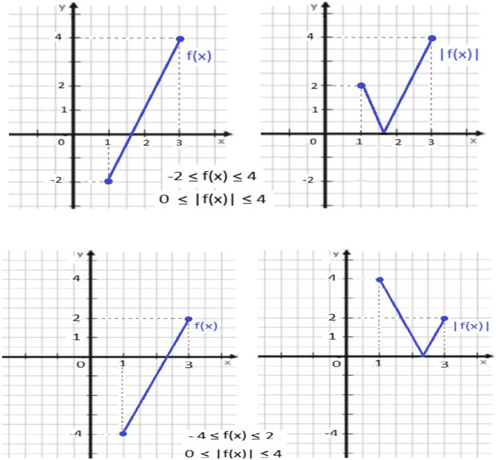
O gráfico de $y = |f(x)|$ é obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$ da seguinte forma:

- A parte do gráfico de $y = f(x)$ acima do eixo dos xx permanece igual;
- A parte do gráfico de $y = f(x)$ abaixo do eixo dos xx é refletida em torno do eixo dos xx.

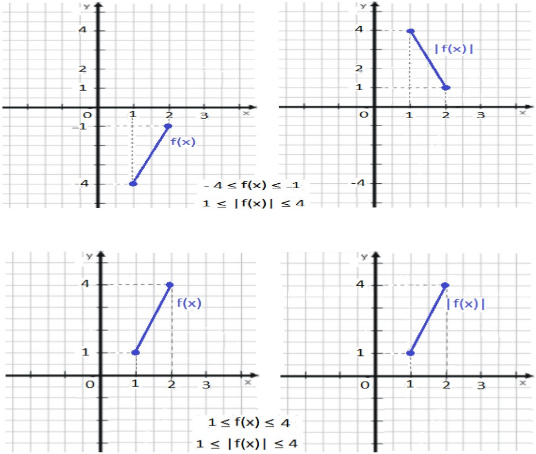


Transformação de funções

Transformação do valor absoluto de uma função - Exemplos



Transformação do valor absoluto de uma função - Exemplos



Funções Elementares

Grande parte dos fenómenos naturais podem ser representados pelas chamadas **funções elementares**.

- **Funções algébricas** que envolvem operações tais como a adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação sobre os números reais, nomeadamente:
  - **Funções polinomiais** definidas por um polinómio;
  - **Funções racionais** definidas por quocientes de polinómios;
  - **Funções irracionais** definidas por expressões que envolvem pelo menos um radical.

- **Funções transcendentes** que não são algébricas, como as **funções trigonométricas**, **exponencial** e **logarítmicas**.

Funções Polinomiais

Uma **função polinomial** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau n é uma função da forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- n é o grau do polinómio;
- $a_n, a_{n-1}, a_2, a_1, a_0$ são constantes reais $(a_n \neq 0)$;
- x é a variável independente;
- $y = f(x)$ é a variável dependente.

Funções Polinomiais - Exemplos

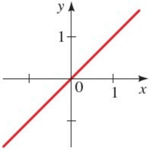
Exemplos

Função constante $(n = 0)$;

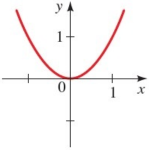
Função afim $(n = 1)$;

Função quadrática $(n = 2)$;

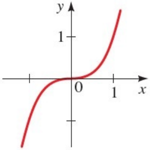
Função cúbica $(n = 3)$.



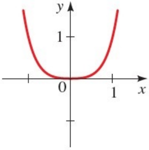
$y = x$



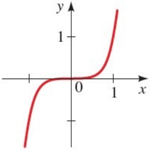
$y = x^2$



$y = x^3$



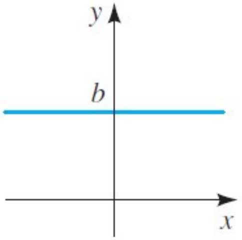
$y = x^4$



$y = x^5$

Função constante

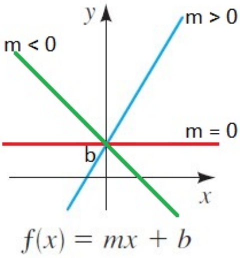
- Uma função $y = f(x)$ diz-se **constante** quando é da forma $f(x) = b, \quad b \in \mathbb{R}$.
- A sua expressão analítica é um polinómio de grau zero $(n = 0)$.
- Geometricamente, a função constante é uma reta horizontal de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\{b\}$.



$f(x) = b$

Função Afim

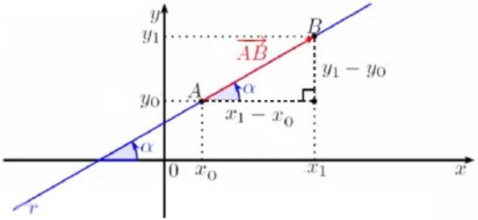
- A função **afim** tem a forma $f(x) = m\,x + b, \quad m, b \in \mathbb{R}$.
- A sua expressão analítica é um polinómio de primeiro grau $(n = 1)$.
- Geometricamente, a função afim é uma **reta** de **declive** (coeficiente angular) m e **ordenada na origem** b, em que $D_f = D'_f = \mathbb{R}$.



Função Afim

- **Reta** que passa no ponto $A = (x_0, y_0)$: $\quad y - y_0 = m(x - x_0)$

reta r definida pelos pontos $A\,(x_0, y_0)$ e $B\,(x_1, y_1)$ de inclinação α

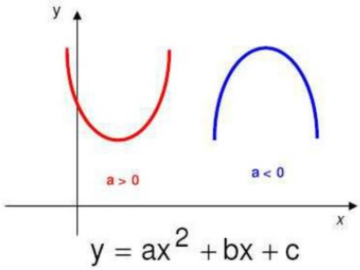


Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_1 - x_0\,,\, y_1 - y_0)$

o declive da reta r é $\boxed{m = \tan\alpha = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$

Função Quadrática

- Uma função $y = f(x)$ diz-se **quadrática** quando é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
- A sua expressão analítica é um polinómio de grau dois $(n = 2)$.
- Geometricamente, a função quadrática é uma **parábola** cuja concavidade está voltada para cima se $a > 0$ e está voltada para baixo se $a < 0$.

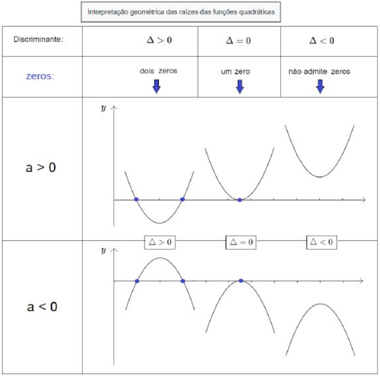


Função Quadrática

Zeros de uma função quadrática

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$ o **binómio discriminante**,



Vértice da Parábola

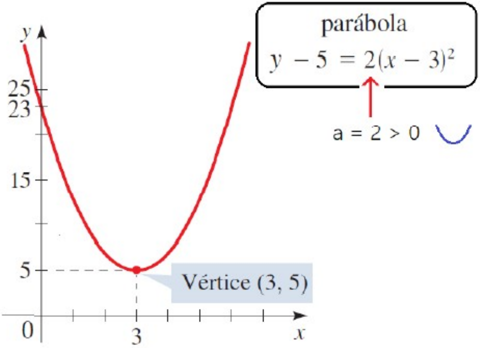
- **Se a parábola está escrita na forma** $f(x) = ax^2 + bx + c$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por

$$V \rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- **Se a parábola está escrita na forma** $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

$$V \rightarrow (x_0, y_0)$$

Vértice da Parábola



Funções Racionais

As **funções racionais** são funções cuja expressão analítica se define à custa do quociente de dois polinómios, isto é:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

onde, n, m são os graus dos polinómios p e q respetivamente.

O domínio de uma função racional é constituido pelos números reais que não anulam o denominador, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

Funções Racionais - Exemplo ✍

Exemplo 1

Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{4-x^2}$.
Calcule o domínio de f.

Funções Racionais - Exemplo ✍

Exemplo 1

Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{4-x^2}$.
Calcule o domínio de f.

Resolução:
O domínio de f é dado por

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Funções Irracionais

As **funções irracionais** são aquelas cuja expressão analítica envolve pelo menos um radical, isto é, existem operações sobre a variável independente que não são redutíveis à adição, subtração multiplicação e divisão.
Alguns exemplos de funções irracionais são:

$$g(x) = \sqrt{x+3}, \quad h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^3+7}}, \quad t(x) = 3x - 7 + \frac{\sqrt[3]{1-3x}}{x^4+3}$$

Note que o domínio de um radical é dado por:

$$D_{\sqrt[n]{f(x)}} = \begin{cases} D_f & , n \text{ ímpar} \\ D_f \cap \{x : f(x) \geq 0\} & , n \text{ par} \end{cases}$$

Funções Irracionais - Exemplo ✍

Exemplo 2

Considere a função f definida por $f(x) = 1 + 5x - \sqrt{4 - x^2}$.
Calcule o domínio de f.

Funções Irracionais - Exemplo ✍

Exemplo 2

Considere a função f definida por $f(x) = 1 + 5x - \sqrt{4 - x^2}$.
Calcule o domínio de f.

Resolução:
O domínio de f é dado por

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\right\} = [-2, 2]$$

Exercícios ✍

1. Determine a função afim tal que $f(-1) = 3$ e $f(2) = 0$.
2. Determine a função quadrática g tal que $g(0) = 1, g(1) = 1$ e $g(-2) = 4$.
3. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = 1 - x - x^2 \qquad g(x) = \frac{2x-1}{3-x}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{1-3x}}{2x+3} \qquad i(x) = \sqrt[3]{x-5}$$

   3.1 Determine o domínio e, caso existam, os zeros de cada uma delas.
   3.2 Determine o contradomínio de f e esboce o seu gráfico.
   3.3 Resolva a equação $i(2x+3) = g(2)$.

Funções Trigonométricas

A **trigonometria** é um ramo da matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos do triângulo.

A palavra TRIGONOMETRIA tem origem grega: TRI (três), GONO (ângulo) e METRIEN (medida) e significa medida de triângulos.

Funções Trigonométricas

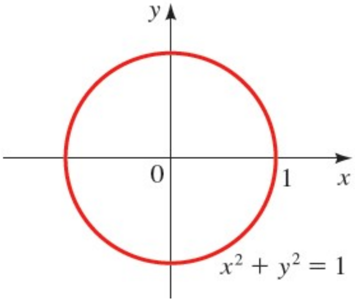
Uma das características especiais das **funções trigonométricas** é a periodicidade, daí estas funções constituírem um instrumento matemático essencial no **estudo dos fenómenos periódicos** que, como é sabido, são extremamente frequentes na Natureza.

Recordaremos seguidamente as funções **seno, cosseno e tangente** ao mesmo tempo que introduziremos as respetivas funções inversas: **arco seno, arco cosseno e arco tangente**.

Funções trigonométricas - definição

Definição

O círculo unitário é o círculo de raio 1 centrado na origem no plano xy.



Relações entre as funções trigonométricas

Como as funções trigonométricas se podem definir em termos de círculo unitário, são chamadas de funções circulares.

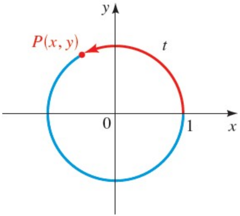
Funções trigonométricas - definição

Funções trigonométricas de números reais

Seja t qualquer número real e seja $P(x,y)$ o ponto terminal no círculo unitário determinado por t. Define-se

$$\sin(t) = y \qquad \cos(t) = x \qquad \tan(t) = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\cot(t) = \frac{x}{y}, y \neq 0 \quad \sec(t) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \csc(t) = \frac{1}{y}, y \neq 0$$



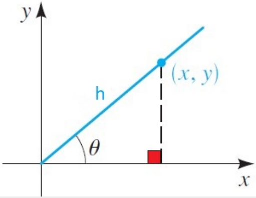
Funções trigonométricas - definição

Funções trigonométricas num triângulo retangulo

$$\sin(\theta) = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h} \qquad \cos(\theta) = \frac{\text{cat.adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h}$$

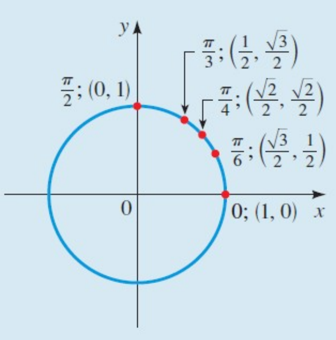
$$\tan(\theta) = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{cat.ajacente}} = \frac{y}{x} \qquad \cot(\theta) = \frac{\text{cat.adjacente}}{\text{cat.oposto}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat.ajacente}} = \frac{h}{x} \qquad \csc(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat.oposto}} = \frac{h}{y}$$

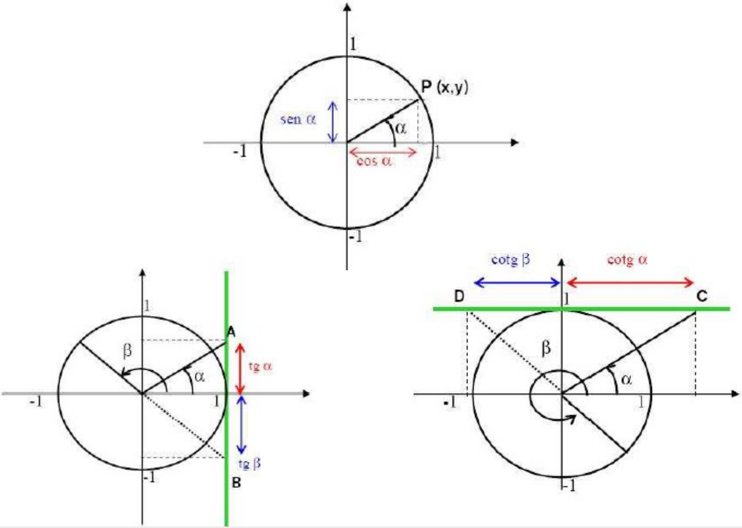


Alguns valores das funções trigonométricas

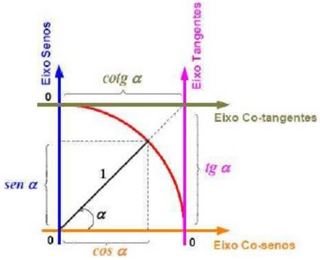
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot t$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec t$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$-$
$\csc t$	$-$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

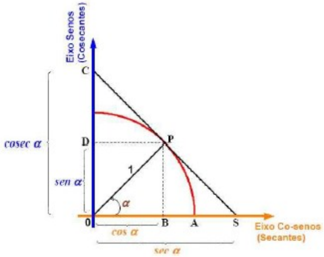


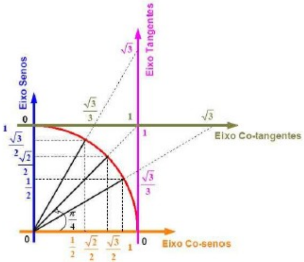
Círculo trigonométrico e as razões trigonométricas



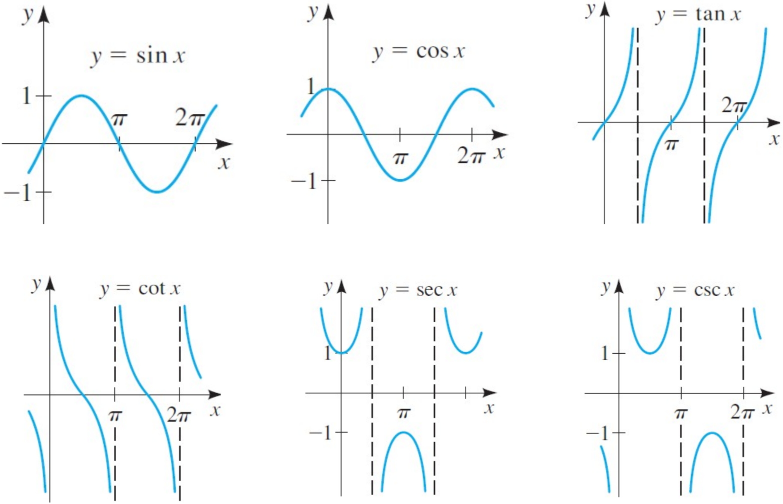
Círculo trigonométrico e as razões trigonométricas







Gráficos das funções trigonométricas



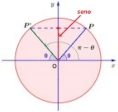
Fórmulas Principais

- $\tan(x) = \dfrac{sin(x)}{\cos(x)}$
- $\cot(x) = \dfrac{1}{tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $\csc(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

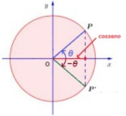
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Equações Trigonométricas

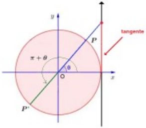
$$\sin(X) = \sin(\theta) \Leftrightarrow X = \theta + 2k\pi \ \vee \ X = \pi - \theta + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$$



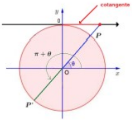
$$\cos(X) = \cos(\theta) \Leftrightarrow X = \theta + 2k\pi \ \vee \ X = -\theta + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$$



$$\tan(X) = \tan(\theta) \Leftrightarrow X = \theta + k\pi \ \ k \in \mathbb{Z}$$



$$\cot(X) = \cot(\theta) \Leftrightarrow X = \theta + k\pi \ \ k \in \mathbb{Z}$$



Funções Inversas

A noção de **função inversa** está ligada à noção de **função injetiva**.
Definimos a função inversa apenas de **funções injetivas**.

No entanto, uma função poderá não ser injetiva em todo o seu domínio, mas apenas em algum subconjunto estritamente contido no seu domínio. Nesse caso, podemos restringir a função a esse subdomínio e aí considerar a sua inversa.

Funções Inversas - exemplos

- ◇ A **função constante** $f(x) = c$ **não tem inversa**, exceto se restringirmos o seu domínio a um único ponto.

- ∗ A **função linear** $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ **tem inversa** em todo o seu domínio; $D_f = \mathbb{R}$ se e só se $a \neq 0$. Neste caso a expressão designatória da função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.

- ⋆ A **função quadrática** $f(x) = x^2$ **tem inversa** em $[0, +\infty[$ e a expressão designatória da função inversa é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Inversa de uma função

Definição

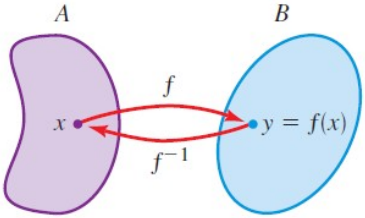
Seja $f : A \to B$ uma função injetiva. À função de $f(A)$ em A que a cada $y \in f(A)$ faz corresponder o (único) $x \in A$ tal que $y = f(x)$, damos o nome de **função inversa de f** e é designada por f^{-1}. De forma equivalente tem-se

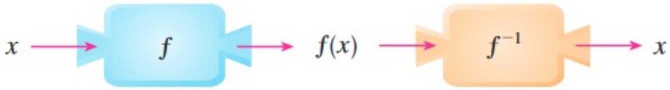
$$f^{-1} : f(A) \subseteq B \to A$$

$$\forall x \in A \quad \forall y \in f(A), \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Tem-se que o domínio da função inversa é igual ao contradomínio da função direta ($Df^{-1} = D'f$) e o contradomínio da função inversa é igual ao domínio da função direta ($D'f^{-1} = Df$).

Inversa de uma função





☞ **Notas:**

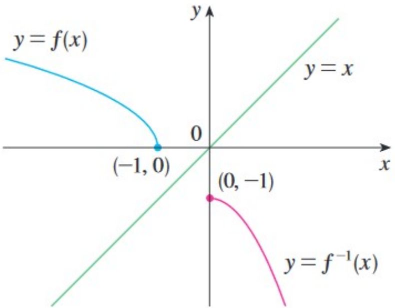
Nota 1: Decorre da definição anterior que
$\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$ e
$\forall y \in f(A) \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

Nota 2: Não confundir a notação de imagem da função inversa, $f^{-1}(x)$, com o inverso algébrico $\dfrac{1}{f(x)}$ que pode ser representado por $[f(x)]^{-1}$.

Função Inversa

☞ **Notas:**

Nota 3: Os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos um do outro em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
Representação gráfica:



Função Exponencial

Definição

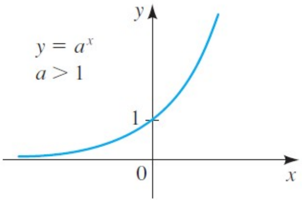
Seja a um número positivo diferente de 1. Chama-se **função exponencial** de base a, à função dada por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto y = a^x \end{aligned}$$

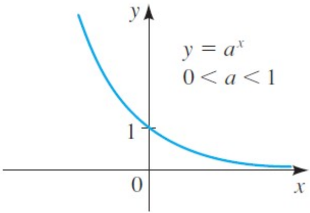
- O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}$ (reais);
- Contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (reais positivos, maiores que zero).

Função Exponencial - gráfico

Se $a > 1$, $\quad f(x)$ é crescente,
$a^m > a^n \Rightarrow m > n$



Se $0 < a < 1$, $\quad f(x)$ é decrescente,
$a^m > a^n \Rightarrow m < n$



Função Exponencial - Características

- $D = \mathbb{R}$;
- $D' = \mathbb{R}^+$;
- função injetiva, contínua em $\mathbb{R}$;
- tem uma assíntota horizontal em $y = 0$;
- $0 < a < 1 \Rightarrow$ função é estritamente decrescente,
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0.$
- $a > 1 \Rightarrow$ função é estritamente crescente,
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$

Função Exponencial - Propriedades

Sendo a um número real positivo diferente de 1 então:

- $a^0 = 1$;
- $a^1 = a$;
- $a^{x+y} = a^x \ a^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $a^{xy} = (a^x)^y \,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $a^{x/y} = (a^x)^{1/y} = \sqrt[y]{a^x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$.

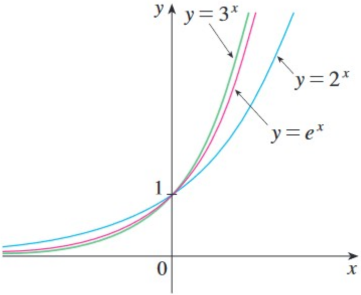
Função Exponencial

A função exponencial mais usada é a função exponencial de base natural, em que a base **a** é igual ao número **e**:

$$y = e^x = \exp(x)$$

$$e \equiv \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2.718282$$

Nota: O número e é designado por número de Euler. Outras designações são número de Neper, número exponencial, $\cdots$



Função Exponencial - Exemplo ✍

Exemplo 3

Determine o domínio e o contradomínio da função $y = f(x) = 3 - 7\ e^{2+3x}$.

Função Exponencial - Exemplo ✍

Exemplo 3

Determine o domínio e o contradomínio da função $y = f(x) = 3 - 7\ e^{2+3x}$.

Resolução:

• $D_f = ?$ $\quad -\infty < 2 + 3x < +\infty$

$$\Leftrightarrow\ -\infty - 2 < 3x < +\infty - 2\ \Leftrightarrow\ -\infty < 3x < +\infty$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-\infty}{3} < x < \frac{+\infty}{3}\ \Leftrightarrow\ -\infty < x < +\infty$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R}$$

Exemplo 3 (cont.):

- $D'_f = ?$ $\qquad 0 < e^{2+3x} < +\infty$

$\Leftrightarrow \ (-7) \times (+\infty) < -7\ e^{2+3x} < (-7) \times (0)$

$\Leftrightarrow \ -\infty < -7\ e^{2+3x} < 0$

$\Leftrightarrow \ -\infty + 3 < 3 - 7\ e^{2+3x} < 0 + 3$

$\Leftrightarrow \ -\infty < f(x) < 3$

$$\therefore D'_f = \left]-\infty, 3\right[$$

Função Exponencial

A função exponencial é uma **bijeção** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, isto é:

- dado $x \in \mathbb{R}$ existe um e um só $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = a^x$;
- dado $y \in \mathbb{R}^+$ existe um e um só **expoente** $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$.

Este expoente diz-se o logaritmo de y na base a e representa-se por

$$x = \log_a(y)$$

Função Logarítmica

Definição

Seja $f(x) = a^x$ a função exponencial de base $a\,(a \neq 1)$. A função inversa de $f(x)$ designa-se por **função logaritmo** de base a e é dada por

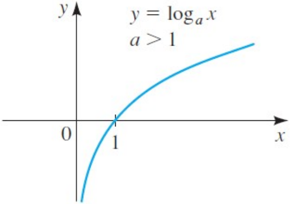
$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a(x) \end{aligned}$$

- O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}^+$;
- O contradomínio é $\mathbb{R}$.

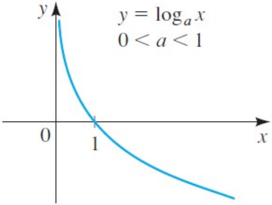
Nota: Quando a base do logaritmo é o número de Neper (e), o logaritmo escreve-se sob a forma de $\ln(x)$ e é designada por **função logarítmica de base natural**.

Função Logarítmica - gráfico

Se $a > 1$, $f(x)$ é crescente,
$\log_a(m) > \log_a(n) \Rightarrow m > n$



Se $0 < a < 1$, $f(x)$ é decrescente,
$\log_a(m) > \log_a(n) \Rightarrow m < n$



Função Logarítmica - gráfico

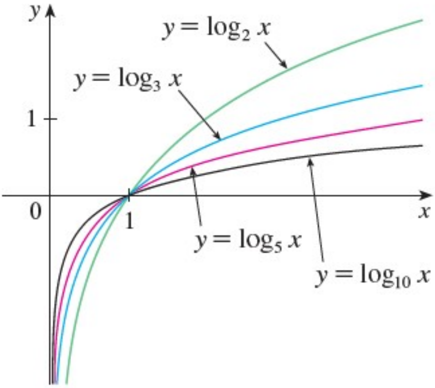


Figura: Gráfico de logaritmos com bases distintas

Função Logarítmica - Características

- $D = \mathbb{R}^+$;
- $D' = \mathbb{R}$;
- função injetiva, contínua em $\mathbb{R}^+$;
- tem uma assíntota vertical em $x = 0$;
- $0 < a < 1 \Rightarrow$ função é estritamente decrescente,
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$
- $a > 1 \Rightarrow$ função é estritamente crescente,
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$

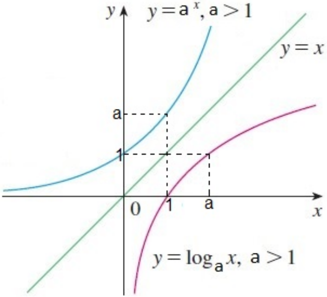
Função Logarítmica - Propriedades

Sendo a um número real positivo diferente de 1 então:

- $\log_a(a) = 1$ (**logaritmo da base**);
- $\log_a(1) = 0$ (**logaritmo da unidade**);
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (**logaritmo do produto**);
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (**logaritmo do quociente**);
- $\log_a(x^b) = b\log_a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}$ (**logaritmo da potência**);
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a(x)}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$ (**logaritmo da raíz**);
- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (**mudança de base**).

Das definições das funções exponencial e logaritmo resulta que:

- Ambas são injetivas;
- Verifica-se que: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- São funções inversas uma da outra;
- Graficamente, são **simétricas** relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$.



Função Exponencial - Exemplo ✍

Exemplo 4

Determine o domínio e o contradomínio da função $y = f(x) = 3 - 5\ \ln(-2x + 1)$.

Função Exponencial - Exemplo ✍

Exemplo 4

Determine o domínio e o contradomínio da função $y = f(x) = 3 - 5\ \ln(-2x+1)$.

Resolução:

- $D_f = ?$ $\qquad 0 < -2x + 1 < +\infty$

$$\Leftrightarrow\ 0 - 1 < -2x < +\infty - 1\ \Leftrightarrow\ -1 < -2x < +\infty$$

$$\Leftrightarrow\ +\infty \times \left(-\frac{1}{2}\right) < x < (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ -\infty < x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$$

Exemplo 4 (cont.):

- $D'_f =?$ $\qquad -\infty < \ln(-2x+1) < +\infty$

$\Leftrightarrow \ (-5)\times(+\infty) < -5\ \ln(-2x+1) < (-5)\times(-\infty)$

$\Leftrightarrow \ -\infty < -5\ \ln(-2x+1) < +\infty$

$\Leftrightarrow \ -\infty + 3 < 3 - 5\ \ln(-2x+1) < +\infty + 3$

$\Leftrightarrow \ -\infty < f(x) < +\infty$

$$\therefore D'_f = \mathbb{R}$$

Função Trigonométrica Seno

Definição

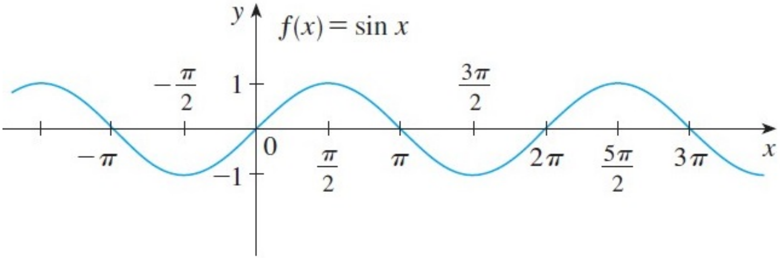
A **função seno** define-se por

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

- $D = \mathbb{R}$, $D' = [-1,1]$, Zeros: $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$;
- função ímpar: $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- função periódica de período 2π:
  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \ k \in \mathbb{Z}$;
- tem valor máximo 1 em: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$;
- tem valor mínimo -1 em: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Função Trigonométrica Seno

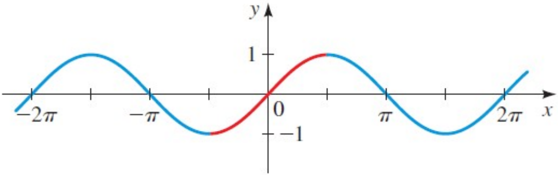
Representação gráfica:

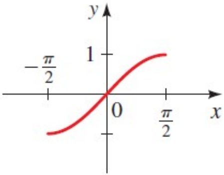


A função seno é sobrejetiva e **não é injetiva** logo não tem função inversa.

Função Trigonométrica Inversa

Podemos **restringir o domínio** da função seno a um intervalo convenientemente escolhido, por forma a obtermos uma função injetiva.





Função Trigonométrica Inversa

Há uma grande variedade de escolha desse intervalo, no entanto, **convencionamos** escolher o intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Designamos este intervalo por **restrição principal** da função seno.

Função Trigonométrica Inversa Arco-seno

A sua inversa designa-se por **função arco-seno**.

Definição

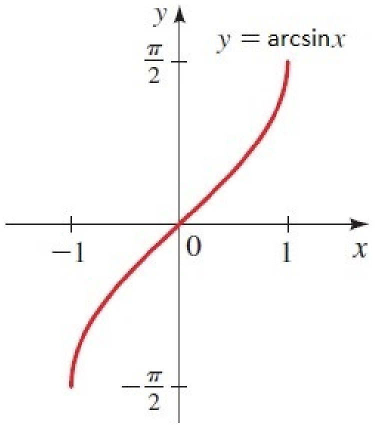
A função arco-seno define-se por

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto y = \arcsin(x) \end{aligned}$$

- $D = [-1,1]$, $D' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, Zeros: $x = 0$;
- função ímpar;
- tem valor máximo $\frac{\pi}{2}$ em $x = 1$;
- tem valor mínimo $-\frac{\pi}{2}$ em $x = -1$;
- função crescente.

Função Trigonométrica Inversa Arco-seno

Representação gráfica:



Função Trigonométrica Inversa Arco-seno

☞ Dizer que y é o arco-seno de x , é dizer que x é o seno de y e que y pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Função Trigonométrica Inversa Arco-seno - Exemplo ✍

Exemplo 5

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

Função Trigonométrica Inversa Arco-seno - Exemplo ✍

Exemplo 5

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

Resolução:

Trata-se do único número real y tal que

$$\sin(y) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Como sabemos que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, vem $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Função Trigonométrica Cosseno

Definição

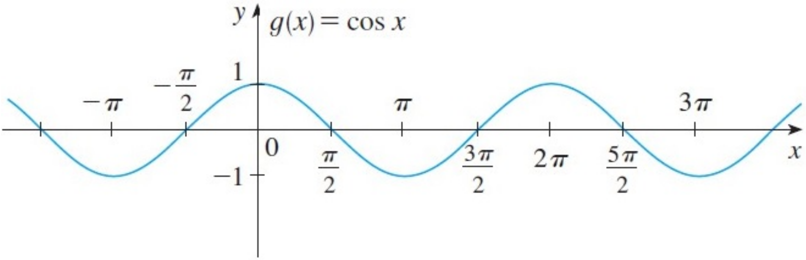
A função cosseno define-se por

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto y = \cos(x) \end{aligned}$$

- $D = \mathbb{R}$, $D' = [-1,1]$, Zeros: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$;
- função par: $\cos(-x) = \cos(x)$;
- função periódica de período 2π:
  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x),\ \ k \in \mathbb{Z}$;
- tem valor máximo 1 em: $x = 0 + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$;
- tem valor mínimo -1 em: $x = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Função Trigonométrica Cosseno

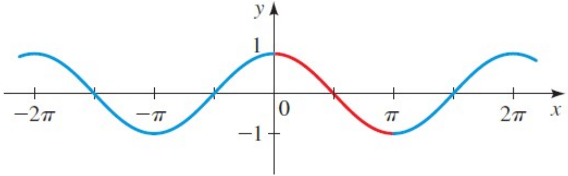
Representação gráfica:

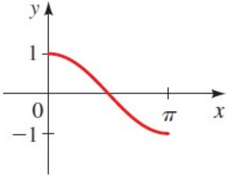


A função cosseno **não é injetiva** logo não tem função inversa.

Função Trigonométrica Inversa

O método utilizado para, partindo da função seno, obtermos a função arco-seno pode ser adaptado à função cosseno.
Considerarmos **uma restrição** a um intervalo conveniente, por forma a obtermos uma função injectiva.





Função Trigonométrica Inversa

Há uma grande variedade de escolha desse intervalo, no entanto, **convencionamos** escolher o intervalo

$$[0, \pi]$$

Designamos este intervalo por **restrição principal** da função cosseno.

Função Trigonométrica Inversa Arco-cosseno

A sua inversa designa-se por **função arco-cosseno**.

Definição

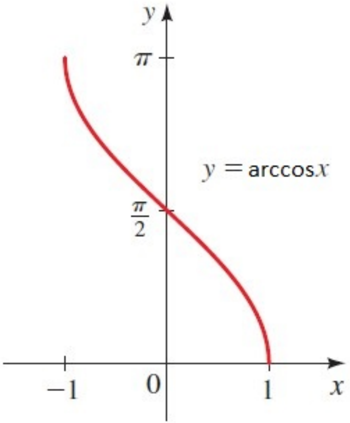
A função arco-cosseno define-se por

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto y = \arccos(x) \end{aligned}$$

- $D = [-1,1]$, $D' = [0,\pi]$, Zeros: $x = 1$;
- função não é par nem é ímpar;
- tem valor máximo π em $x = -1$;
- tem valor mínimo 0 em $x = 1$;
- função decrescente.

Função Trigonométrica Inversa Arco-cosseno

Representação gráfica:



Função Trigonométrica Inversa Arco-cosseno

☞ Dizer que y é o arco-cosseno de x , é dizer que x é o cosseno de y e que y pertence ao intervalo $[0, \pi]$:

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$$

$$\cos\left(\arccos x\right) = x \quad \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\arccos\left(\cos x\right) = x \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Função Trigonométrica Inversa Arco-cosseno - Exemplo ✍

Exemplo 6

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

Função Trigonométrica Inversa Arco-cosseno - Exemplo ✍

Exemplo 6

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

Resolução:

Trata-se do único número real y tal que

$$\cos(y) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Como sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, vem $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Função Trigonométrica Tangente

Definição

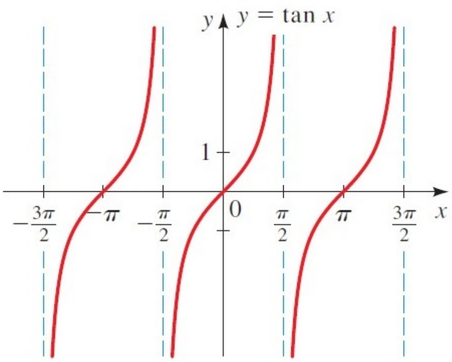
A função tangente define-se por

$$\begin{aligned} \tan : D_{\tan} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

- O domínio é o conjunto $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- O contradomínio é $\mathbb{R}$;
- Zeros: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- Assíntotas verticais: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- Função ímpar e periódica de período π.

Função Trigonométrica Tangente

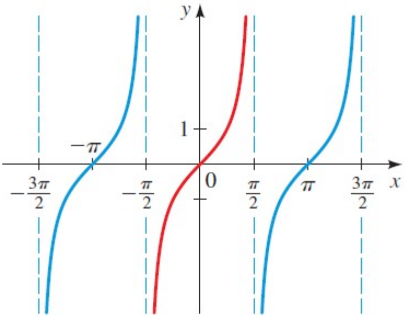
Representação gráfica:

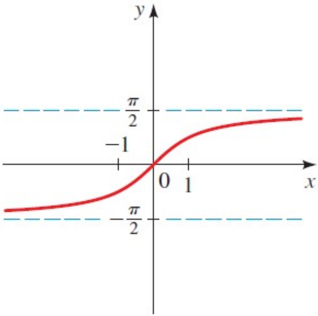


A função tangente **não é injetiva** logo não tem função inversa.

Função Trigonométrica Inversa

Também aqui se considera **uma restrição** a um intervalo conveniente, por forma a obtermos uma função injetiva.





Função Trigonométrica Inversa

Quando se **restringe** a função tangente ao intervalo

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

obtém-se a **restrição principal da tangente**.

Temos assim uma função bijetiva (logo, invertível) correspondente a um período da função tangente.

Função Trigonométrica Inversa Arco-tangente

A sua inversa designa-se por **função arco-tangente**.

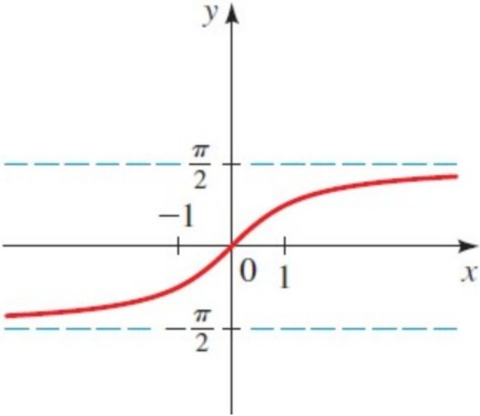
Definição

A função arco-tangente define-se por

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto y = \arctan(x) \end{aligned}$$

- O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}$;
- O contradomínio é $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $x = 0$ é um zero da função;
- Função crescente.

Representação gráfica:



Função Trigonométrica Inversa Arco-tangente

☞ Dizer que y é o arco-tangente de x , é dizer que x é a tangente de y e que y pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y$$

$$\tan(\arctan x) = x \qquad \forall x$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Função Trigonométrica Inversa Arco-tangente - Exemplo ✍

Exemplo 7

$\arctan(\sqrt{3}) =?$

Exemplo 7

$\arctan(\sqrt{3}) =?$

Resolução:

Trata-se do único número real y tal que

$$\tan(y) = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Como sabemos que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, vem $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Função Trigonométrica Cotangente

Definição

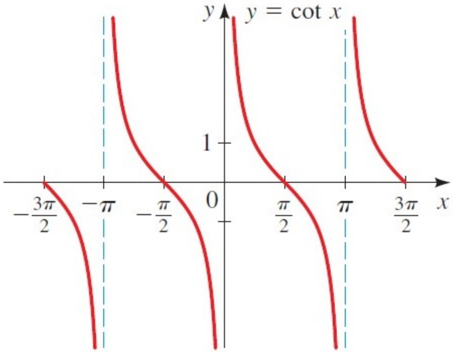
A função cotangente define-se por

$$
\begin{aligned}
\cot : D_{\cot} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto y = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}
$$

- O domínio é o conjunto $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- O contradomínio é $\mathbb{R}$;
- Zeros: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- Assíntotas verticais: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- Função par e periódica de período π.

Função Trigonométrica Cotangente

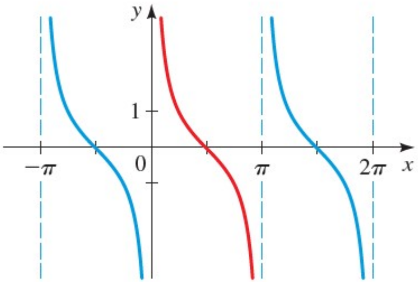
Representação gráfica:

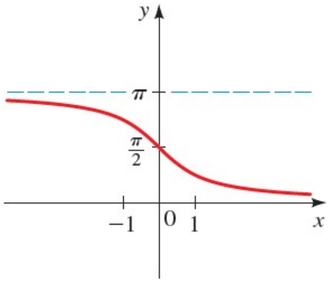


A função cotangente **não é injetiva** logo não tem função inversa.

Função Trigonométrica Inversa

Também aqui se considera **uma restrição** a um intervalo conveniente, por forma a obtermos uma função injetiva.





Função Trigonométrica Inversa

Quando se **restringe** a função cotangente ao intervalo

$$]0, \pi[$$

obtém-se a **restrição principal da cotangente**.

Temos assim uma **função bijetiva** (logo, invertível) correspondente a um período da função cotangente.

Função Trigonométrica Inversa Arco-cotangente

A sua inversa designa-se por **função arco-cotangente**.

Definição

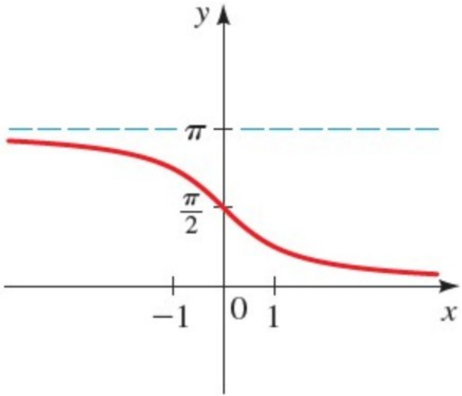
A função arco-cotangente define-se por

$$\begin{aligned} arccot : \mathbb{R} &\longrightarrow]0,\pi[\\ x &\longmapsto y = arccot(x) \end{aligned}$$

- O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}$;
- O contradomínio é $]0,\pi[$;
- Função não tem zeros;
- Função decrescente.

Função Trigonométrica Inversa Arco-cotangente

Representação gráfica:



Função Trigonométrica Inversa Arco-cotangente

☞ Dizer que y é o arco-cotangente de x , é dizer que x é a cotangente de y e que y pertence ao intervalo $]0, \pi[$:

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$\cot\left(arccot x\right) = x \qquad \forall x$$

$$arccot\left(\cot x\right) = x \quad \text{se} \quad 0 < x < \pi$$

Exemplo 8

$arccot(\sqrt{3}) =?$

Função Trigonométrica Inversa Arco-cotangente - Exemplo ✍

Exemplo 8

$arccot(\sqrt{3}) =?$

Resolução:
Trata-se do único número real y tal que

$$\cot(y) = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad 0 < y < \pi.$$

Como sabemos que $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, vem $arccot(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.

Exercícios ✍

1. Determine o domínio das seguintes funções reais de variável real:

   1.1 $f_1(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{1+x}$

   1.2 $f_2(x) = \sec\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

   1.3 $f_3(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

   1.4 $f_4(x) = \dfrac{5+3x}{2-x}$

   1.5 $f_5(x) = \dfrac{\cot(2x+\pi)}{5}$

   1.6 $f_6(x) = e^{\frac{2}{x^3-x}}$

Exercícios ✍

2. Calcule:

   2.1 $\log_2(64)$

   2.2 $\log_{16}(16)$

   2.3 $\log_3(\sqrt{27})$

   2.4 $5^{\log_5(125)}$

   2.5 $\log_7(1)$

   2.6 $\ln(\ln(e^e))$

Exercícios ✍

3. Considere as funções definidas por:
   $f(x) = 2\ln(4-3x)$ e $g(x) = 1 - 4e^{x-1}$
   3.1 Determine o domínio de cada uma das funções;
   3.2 Calcule $f(-4) + g(5)$;
   3.3 Caracterize as funções inversas de f e g;
   3.4 Calcule os zeros de f e g;
   3.5 Resolva a inequação $f(x) > 2$.

4. Determine as expressões designatórias das funções inversas das seguintes funções:
   4.1 $f(x) = \cos\left((x+2)\,\pi\right)$;
   4.2 $f(x) = 2^{\arcsin(x-4)}$.

Exercícios ✍

5. Considere as funções definidas por:
$f(x) = \arcsin(x)$ e $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos(x)$
   5.1 Determine o domínio e o contradomínio de f e g;
   5.2 Esboce os respetivos gráficos;
   5.3 O que pode concluir sobre as funções f e g.
6. Considere a função $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x\right)$.
   6.1 Caracterize f^{-1};
   6.2 Resolva a equação $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
7. Determine o domínio e o contradomínio da função
$y = f(x) = \left|\dfrac{\pi}{2} - 2\ arccot(3x)\right|$.

Exercícios

Resolução:

1.1 $f_1(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{1+x}$

$$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x > 0 \wedge 1 + x \geq 0\} = [-1, 2[$$

1.2 $f_2(x) = \sec\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$

$D_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0\right\}$

$2x - \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios ✍

Resolução:

1.3 $f_3(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

$$D_{f_3} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\right\} = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]2, +\infty[$$

1.4 $f_4(x) = \dfrac{5 + 3x}{2 - x}$

$$D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Exercícios ✍

Resolução:

1.5 $f_5(x) = \dfrac{\cot(2x+\pi)}{5} = \dfrac{\cos(2x+\pi)}{5\sin(2x+\pi)}$

$D_{f_5} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(2x+\pi) \neq 0\}$

$2x + \pi \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$$D_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \left\{x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1.6 $f_6(x) = e^{\frac{2}{x^3-x}}$

$$D_{f_6} = \left\{x \in \mathbb{R} : \overbrace{x^3 - x}^{x(x^2-1)} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

Resolução:

2.1 $\log_2(64) = \log_2(2^6) = 6\overbrace{\log_2(2)}^{1} = 6$

2.2 $\log_{16}(16) = 1$

2.3 $\log_3(\sqrt{27}) = \log_3(27)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_3(3^3) = \dfrac{3}{2}\log_3(3) = \dfrac{3}{2}$

2.4 $5^{\log_5(125)} = 125$

2.5 $\log_7(1) = 0$

2.6 $\ln(\ln(e^e)) = \ln(e\underbrace{\ln(e)}_{1}) = \ln e = 1$

Exercícios ✍

Resolução:

3. $f(x) = 2\ln(4-3x)$ e $g(x) = 1 - 4e^{x-1}$

3.1

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - 3x > 0\} = \left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right[$
- $D_g = \mathbb{R}$

3.2 $f(-4) + g(5) = 8\ln 2 - 4e^4 + 1$

3.3 Caracterizar uma função é calcular o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão designatória.

- $f^{-1}(x) :?$ $f(x)$ é uma função injetiva, logo admite inversa

$$D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R} \text{ e } D'_{f^{-1}} = D_f = \left]-\infty, \frac{4}{3}\right[$$

Exercícios ✍

Resolução:
Calculando a expressão da função inversa temos:

$$y = 2\ln(4-3x) \Leftrightarrow \ln(4-3x) = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 4-3x = e^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{4-e^{\frac{y}{2}}}{3}$$

Logo $f^{-1}(x) = \dfrac{4-e^{\frac{x}{2}}}{3}$

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\infty, \frac{4}{3}\right[\\ x &\longmapsto \frac{4-e^{\frac{x}{2}}}{3} \end{aligned}$$

Exercícios ✍

Resolução:

- $g^{-1}(x)$:? $g(x)$ é uma função injetiva, logo admite inversa

Calculando o contradomínio de $g(x)$:

$e^{x-1} > 0 \Rightarrow -4e^{x-1} < 0 \Rightarrow 1 - 4e^{x-1} < 1 \Rightarrow D'_g =]-\infty, 1[$

$$D_{g^{-1}} = D'_g =]-\infty, 1[\text{ e } D'_{g^{-1}} = D_g = \mathbb{R}$$

Calculando a expressão da função inversa temos:

$$y = 1 - 4e^{x-1} \Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{1-y}{4} \Leftrightarrow x = 1 + \ln\left(\frac{1-y}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} g^{-1} :]-\infty, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 + \ln\left(\frac{1-x}{4}\right) \end{aligned}$$

Exercícios ✍

Resolução:

3.4

- $f(x) = 2\ln(4-3x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4-3x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

- $g(x) = 1 - 4e^{x-1} = 0$

$$e^{x-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - 1 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x = 1 - \ln 4$$

3.5 $f(x) > 2 \Leftrightarrow 2\ln(4-3x) > 2$ Atenção ao domínio!

$$\ln(4-3x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 3x > e \Leftrightarrow x < \frac{4-e}{3}$$

Intersetando com o domínio temos: $S = \left]-\infty, \frac{4-e}{3}\right[$

Exercícios ✍

Resolução:

4.1

- $f(x) = \cos\left((x+2)\,\pi\right)$

$$y = \cos\left((x+2)\,\pi\right) \Leftrightarrow (x+2)\,\pi = \arccos(y) \Leftrightarrow x+2 = \frac{1}{\pi}\arccos(y)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -2 + \frac{1}{\pi}\arccos(x)$$

4.2 $f(x) = 2^{\arcsin(x-4)}$

$$y = 2^{\arcsin(x-4)} \Leftrightarrow \arcsin(x-4) = \log_2(y) \Leftrightarrow x-4 = \sin\left(\log_2(y)\right)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 4 + \sin\left(\log_2(x)\right)$$

Exercícios ✍

Resolução:

5. $f(x) = \arcsin(x)$ e $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

5.1 • $f(x) = \arcsin(x)$

$D_f = [-1, 1] \qquad D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

• $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$D_g = [-1, 1] \qquad D'_g = ? \qquad 0 \leq \arccos(x) \leq \pi$

$$-\pi \leq -\arccos(x) \leq 0$$

$$-\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore D'_g = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Exercícios ✍

Resolução:

6. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x\right)$

6.1 • $D_f = ?$ $\qquad -1 \leq \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x \leq 1$

$$-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq -2x \leq 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore D_f = \left[-\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right]$$

Resolução:

- $D'_f = ?$ $\quad 0 \leq \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x\right) \leq \pi$

$$\therefore D'_f = [0, \pi]$$

- $f^{-1}(x) = ?$ $\quad y = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x\right)$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2x = \cos(y) \Leftrightarrow 2x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \cos(y) \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\cos(y)}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\cos(x)}{2}$$

Exercícios ✍

Resolução:

6.2 $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2x\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Substituindo na expressão da função inversa temos:

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercícios ✍

Resolução:

7. $y = f(x) = \left|\frac{\pi}{2} - 2\ arccot(3x)\right|$

- $D_f =?$ $\quad -\infty < 3x < +\infty \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < +\infty$

$$\therefore D_f = \mathbb{R}$$

- $D'_f =?$ $\quad 0 < arccot(3x) < \pi \;\Leftrightarrow\; -2\pi < -2\ arccot(3x) < 0$

$$\Leftrightarrow\; -2\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\ arccot(3x) < 0 + \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\ arccot(3x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left|\frac{\pi}{2} - 2\ arccot(3x)\right| < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore D'_f = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$$