Teste modelo — Licenciatura Engª Eletrotécnica e Computadores

Elaborado por: Eduarda Pinto Ferreira e Marta Pinto Ferreira

Proposta de resolução de alguns exercícios, pode ter erros, para comunicarem qualquer erro enviem um email para epf@isep.ipp.pt

1. Considere as funções $g(x) = 2^{\sqrt{x-1}}(3x+5)^4$; $h(x) = e^{x^2}ln(x)$, determine:

a) $\frac{dg}{dx} = \left(2^{\sqrt{x-1}}(3x+5)^4\right)' = \left(2^{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\right)'(3x+5)^4 + 2^{\sqrt{x-1}}((3x+5)^4)' =$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}2^{(x-1)^{\frac{1}{2}}}ln2(3x+5)^4 + 4(3x+5)^3 \times 3 \times 2^{\sqrt{x-1}}$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(a^u)' = u'a^u lna$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

b) $\frac{dh}{dx} = \left(e^{x^2}ln(x)\right)' = \left(e^{x^2}\right)'ln(x) + \left(ln(x)\right)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}ln(x) + \frac{1}{x}e^{x^2}$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = \left((f(x)g(x))h(x)\right)' = \left((f'(x)g(x) + g'(x)f(x))h(x)\right) + \left((f(x)g(x))h'(x)\right) =$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

c) $\frac{d^2h}{dx^2} = \left(2xe^{x^2}ln(x) + \frac{1}{x}e^{x^2}\right)' = \left(2xe^{x^2}ln(x)\right)' + \left(\frac{1}{x}e^{x^2}\right)' =$

$$= \left(2xe^{x^2}\right)'ln(x) + \left(ln(x)\right)'2xe^{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)'e^{x^2} + \left(e^{x^2}\right)'\frac{1}{x} =$$

$$= \left((2x)'e^{x^2} + \left(e^{x^2}\right)'2x\right)ln(x) + \left(ln(x)\right)'2xe^{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)'e^{x^2} + \left(e^{x^2}\right)'\frac{1}{x} =$$

$$= \left(2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\right)ln(x) + \frac{1}{x}2xe^{x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}e^{x^2} + 2xe^{x^2}\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Considere a função $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação $xy = sin(y^2) + e^{1-2x}$ determine a sua derivada em ordem a x.

Como $u = u(x)$ e $v = v(x)$ vem

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(sin(u)\right)' = u'cos(u)$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Então para $y = f(x)$ e $v = v(x)$ vem

$$(yv)' = y'v + v'y$$

$$\left(sin(y)\right)' = y'cos(y)$$

$$(y^n)' = ny^{n-1}y'$$

$$x'y + xy' = (y^2)'cos(y^2) + (1-2x)'e^{1-2x}$$

$$y + xy' = 2yy'cos(y^2) - 2e^{1-2x}$$ *podiam parar aqui*

$$-2yy'cos(y^2) + xy' = y - 2e^{1-2x}$$

$$(-2ycos(y^2) + x)y' = y - 2e^{1-2x}$$

$$y' = \frac{y - 2e^{1-2x}}{x - 2ycos(y^2)}$$

3. Considere a função $y = f(x)$, representada por $f(x) = 1 - 2(x-2)^2$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto de abcissa $(1, -1)$.

$$x_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad y_0 = -1$$

$$f'(x) = -4(x-2) \Longrightarrow f'(1) = -4(1-2) = 4$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - (-1) = 4(x-1) \qquad \textit{podiam parar aqui}$$

$$y + 1 = 4(x-1)$$

$$y = 4x - 5$$

4. Calcule a derivada da função inversa de $y(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4$ no ponto (1,4).

Seja $y(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4$, então,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 5x^4 + 15x^2 + 2 + 0$$

Logo, a inversa de y é:

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{5x^4 + 15x^2 + 2}$$

Como $(1,4)$, então $x = 1$ e $y = 4$:

$$\frac{dx}{dy}(4) = x'(4) = \frac{1}{\frac{dy(1)}{dx}} = \frac{1}{5(1)^4 + 15(1)^2 + 2} = \frac{1}{22}$$

5. Resolva os seguintes integrais:

a. Exercício nº30 das TP $\qquad u = x^3 + 3x \qquad u' = 3x^2 + 3$

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx = \int (x^2+1)(x^3+3x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int 3(x^2+1)(x^3+3x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int (3x^2+3)(x^3+3x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \quad \textit{podiam parar aqui}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

b. Exercício nº31 das TP

$$\int \frac{2+lnx}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{x}(lnx)^1\, dx = 2ln|x| + \frac{ln^2|x|}{2} + C, \qquad u = lnx \qquad u' = \frac{1}{x}$$

ou

$$\int \frac{2+lnx}{x}dx = \int \frac{1}{x}(2+lnx)^1 dx = \frac{(2+lnx)^2}{2} + k \qquad \textit{podiam parar aqui}$$

$$= \frac{4+4lnx+ln^2x}{2} + k = 2 + 2ln|x| + \frac{ln^2|x|}{2} + k = 2ln|x| + \frac{ln^2|x|}{2} + C,$$

$$u = 2 + lnx \qquad u' = \frac{1}{x}$$

c. Exercício nº75 das TP

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{sen^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{sen^2 x} - \frac{\cos x}{sen^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{sen\, x}\right)^2 - \frac{\cos x}{sen\, x}\frac{1}{sen\, x}dx = \int (cossec^2(x) - cot\,g\,(x)\ \ cossec(x))dx =$$

$$= -cot\,g\,(x) + cossec(x) + C$$

6. Resolva o integral, $\int ln\big(cos(x)\big)cosec^2(x)\,dx$ utilizando a fórmula de integração por partes.

Sinal	Derivar	Integrar	
+	$ln\big(cos(x)\big)$	$cosec^2(x)$	$\int ln\big(cos(x)\big)cosec^2(x)\,dx =$ $= -ln\big(cos(x)\big)cotg(x) - \int tg(x)cotg(x)dx =$ $= -ln\big(cos(x)\big)cotg(x) - \int \frac{sen(x)}{cos\,(x)}\frac{cos(x)}{sen\,(x)}dx =$ $= -ln\big(cos(x)\big)cotg(x) - \int 1dx =$ $= -ln\big(cos(x)\big)cotg(x) - x + C$
−	$\frac{-sen(x)}{cos\,(x)} = -tg(x)$	$-cotg(x)$	

7. Utilizando o método da substituição, resolva o integral, $\int \frac{sen(2x)}{\sqrt{1+sen^2(x)}}dx$ fazendo $u = sen(x)$.

$$u = sen(x) \qquad \frac{du}{dx} = cos(x) \qquad du = cos(x)dx \qquad dx = \frac{1}{cos(x)}du$$

$$\int \frac{sen(2x)}{\sqrt{1+sen^2(x)}}dx = \int \frac{2sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+sen^2(x)}}dx = \int \frac{2u\,cos(x)}{\sqrt{1+u^2}}\frac{1}{cos(x)}du = \int \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}du =$$

$$= \int 2u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{(1+u^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{1+u^2} + C$$

Logo,

$$\int \frac{sen(2x)}{\sqrt{1+sen^2(x)}}dx = 2\sqrt{1+sen^2(x)} + C$$