AULA TEÓRICO - PRÁTICA 4

Tema: Teorema da derivada da função composta. Teorema da derivada da função inversa. Derivadas de ordem superior.

Objetivo: No final desta aula os alunos deverão ser capazes de:

- determinar derivadas de funções compostas usando o teorema da derivada da função composta;
- determinar a derivada de uma função usando o teorema da derivada da função inversa;
- determinar derivadas de ordem superior à 1ª de funções reais de variável real.

1. Aplicando o teorema de derivação da função composta, e supondo que essas derivadas existem, calcule a derivada em cada caso:

   1.1 $y = \sqrt{u}$ e $u = \dfrac{1+x}{1-x}$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

   1.2 $y = \sec u$ e $u = x^4 - 2x + 1$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

   1.3 $y = \ln u$ e $u = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

   1.4 $z = e^u$, $u = \sec v$ e $v = t^5$, $\dfrac{dz}{dt} = ?$

   1.5 $z = \ln v$, $v = \cos x$ e $x = \arctan t$, $\dfrac{dz}{dt} = ?$

   1.6 $w = \ln u$, $u = z^2$ e $z = \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dw}{dt} = ?$

   1.7 $y = \dfrac{\pi}{3} - 2\arcsin(2-x)$, $x = 2e^{-2t}$ e $t = \ln\sqrt{w+1}$, $\dfrac{dy}{dw}\Big|_{t=0} = ?$

   1.8 $z = \arcsin(3y)$, $y = \sec(2x) + \tan(2x) + 1$ e $x = 2\arctan(t)$, $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = ?$

2. Aplicando o teorema da derivação da função inversa, calcule:

   2.1 $y = \sqrt[3]{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

   2.2 $y = 2\ln(x+2)$, $\dfrac{dx}{dy} = ?$

2.3 $y = \arcsin(\sqrt{x})$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

2.5 $y = \ln(\sqrt{x^3+1})$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

2.4 $y = \dfrac{1}{2}\arctan(2-x)$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

2.6 $y = \operatorname{arccot}(5-x)$, $\quad \dfrac{dx}{dy} = ?$

3. Seja dada a função real de variável real $y = f(x)$, definida por $y = \pi + 2\arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

3.1 Determine a derivada $\dfrac{dy}{dx}$

3.1.1 Por cálculo direto;

3.1.2 Aplicando o teorema da derivada da função inversa.

3.2 Determine a equação da reta tangente à curva no ponto de intersecção da curva representativa da função f com a reta $y = \dfrac{3\pi}{2}$.

3.3 Sendo $x = \dfrac{1}{t^2}$ e $t = e^{2v}$, determine $\dfrac{dy}{dv}$, aplicando o teorema da derivação da função composta.

4. Seja dada a função real de variável real $y = f(x) = 1 + \dfrac{\cos(2x)}{2}$.

4.1 Caracterize a função inversa f^{-1}.

4.2 Sendo $w = e^{-2z}$, $z = \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)$ e $y = f(x)$, calcule $\dfrac{dw}{dx}$, aplicando o teorema da derivada da função composta.

4.3 Determine as coordenadas do ponto da curva $y = f(x)$, no qual a reta tangente é paralela à reta $y = 2$, sendo $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

5. Para cada função, determine a derivada indicada:

5.1 $y = \ln(1-x^2)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.2 $y = e^{x^3}$, $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

5.3 $y = \sin(x^3 - 2x)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.4 $y = \arctan(\ln x)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1} = ?$

6. Seja $y = f(x) = \operatorname{arccot}(x)$.
Determine: $\dfrac{dy}{dx}$, $\quad f'(1)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\quad f''(1)$.

7. A equação do movimento de uma partícula é $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, com s em centímetros e t em segundos.
   Calcule a velocidade e a aceleração como função do tempo.
   Qual é a aceleração ao fim de 2 segundos?

Soluções:

1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ 1.2 $\dfrac{dy}{dx} = \sec(x^4-2x+1)\tan(x^4-2x+1)(4x^3-2)$ 1.3 $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec x$

1.4 $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{5t^4\ e^{\sec(t^5)}\ \sin(t^5)}{\cos^2(t^5)}$ 1.5 $\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{t}{1+t^2}$ 1.6 $\dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{2}{t}$ 1.7 $\dfrac{dy}{dw}\Big|_{t=0} = -4$ 1.8 $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 6$

2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 2.2 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}\, e^{\frac{y}{2}}$ 2.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

2.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{2+2(2-x)^2}$ 2.5 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{2(x^3+1)}$ 2.6 $\dfrac{dx}{dy} = \csc^2(y)$

3.1 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{4+x^2}$

3.2 $y = -\dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{3\pi}{2}$

3.3 $\dfrac{dy}{dv} = \dfrac{16e^{4v}}{1+4e^{8v}}$

4.1 $D_{f^{-1}} = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ $D'_{f^{-1}} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(2x-2)$

4.2 $\dfrac{dw}{dx} = -2\left[1 + \dfrac{\cos(2x)}{2}\right]\ \sin(2x)$

4.3 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

5.1 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}$

5.2 $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 3e^{x^3}\left(2+18x^3+9x^6\right)$

5.3 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x\cos(x^3-2x) - (3x^2-2)^2\sin(x^3-2x)$

5.4 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=1} = -1$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(1) = \dfrac{1}{2}$

7. $v(t) = 6t^2 - 10t + 3$
$a(t) = 12t - 10$
$a(2) = 14\ cm/s^2$