isep
Instituto Superior de Engenharia do Porto

Licenciatura em Engenharia Informática
Álgebra Linear e Geometria Analítica

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Instituto Superior de Engenharia do Porto

Teste V1 **19 de novembro de 2022**

Nome .... **Número:** ....

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular, nem de qualquer outro material de consulta.
- Apresente todos os cálculos que efetuar e justifique todas as conclusões que obtiver.
- Esta prova tem **6 questões**. Resolva-as em **4 grupos de folhas separadas**, como indicado abaixo.

---

1. (4.0 val.) Complete as afirmações abaixo, considerando as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

   (a) Se $X = A(B + C^T)^T$ então X é uma matriz do tipo ....

   (b) Sabe-se que a inversa da transposta da matriz A é da forma $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & y \\ x & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$. Conclui-se que $x =$ ...... e $y =$ ......

   (c) A matriz $Y = -BAI^{-3} + 4C^T$ é dada por $Y = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$

2. (2.5 val.) Considere a matriz abaixo, que depende do parâmetro real x.

$$M = \begin{bmatrix} x+1 & x & x^2 \\ x+1 & x^2 & x \\ x+1 & x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

   Discuta a característica de M, em função de x.

Mude para outra folha de resolução.

3. (1.5 val.) Dada a equação matricial $E^{-2}X + (X^T F)^T I^3 = F^T$, em $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sendo E invertível, resolva-a em ordem a X. Comente a afirmação: "A equação pode ser impossível".
   (Nota: Indique todas as propriedades das operações com matrizes que utilizou).

4. (1.5 val.) Sejam S uma matriz qualquer de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e b um número real qualquer. Prove que, se $|S - bI| = 0$, então $|S^T - bI| = 0$.

vire, p.f.

Mude para outra folha de resolução.

5. (6.5 val.) Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule o complemento algébrico A_{34} de a_{34} e o menor complementar $|\overline{A}_{22}|$ de a_{22}.

(b) Partindo de $\Delta = |A|$, sem calcular o seu valor final, escreva o determinante Δ_1 de segunda ordem que verifique $\Delta_1 = 2\Delta$.

(c) Obtenha o determinante $|2A^{-1}|$.

Mude para outra folha de resolução.

6. (4.0 val.) Dado o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, onde a é um parâmetro real:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + a^2 z = a \end{cases}$$

(a) Indique para que valores de a o sistema é um sistema de Cramer.

(b) Nas situações em que o sistema é de Cramer, indique os valores de a tais que $z = 2x$, usando as fórmulas de Cramer.

Sugestão: neste exercício calcule os determinantes usando as propriedades.