Espaços vetoriais e Transformações Lineares

0.1 Exercícios relativos a espaços vetoriais

1. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$

   (a) $A = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\right\}$;

   (b) $B = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b - 1\right\}$;

(a) Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1) \in A \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (a_1, a_1) \\ \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2) \in A \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (a_2, a_2) \end{cases}$

O vetor nulo pertence a $A = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\right\}$, $(0, 0) \in A$, pois as duas coordenadas são iguais.

Verificação do axioma para a soma de vetores: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in A$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= (a_1, a_1) + (a_2, a_2) \\ &= ((a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in A \textit{ pois as duas coordenadas são iguais} \end{aligned}$$

Verificação do axioma para multiplicação de um escalar por um vetor: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in A, k\mathbf{v}_1 \in A$

$k\mathbf{v}_1 = k(a_1, a_1) = (ka_1, ka_1) \in A$ pois as duas coordenadas são iguais

Logo, o conjunto A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

(b) Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1) \in B \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (b_1 - 1, b_1) \\ \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2) \in B \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (b_2 - 1, b_2) \end{cases}$

$B = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b - 1\right\}$

O vetor nulo não pertence a B, $(0, 0) \notin B$, pois $0 = 0 - 1 \Leftrightarrow 0 = -1$ é uma proposição falsa.

Logo o conjunto B não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

2. Averigúe se os seguintes conjuntos, algebrizados pelas operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um escalar real por um vetor, são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

   (a) $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = 2a \wedge c = 0\}$;

   (b) $B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = 0 \vee c = 0\}$;

   (c) $D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab = 0\}$;

   (d) $I = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : |a| = |b|\}$.

   (a) $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = 2a \wedge c = 0\}$;

   Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in A \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (a_1, 2a_1, 0), \\ \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in A \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (a_2, 2a_2, 0) \end{cases}$

   O vetor nulo pertence a A, $(0, 0, 0) \in A$, pois se $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in A$ então $\mathbf{v}_1 = (a_1, 2a_1, 0)$ com $a_1 \in \mathbb{R}$. Considerando $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$, tem-se $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0) = \mathbf{o} \in A$

   Verificação do axioma para a soma de vetores: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in A$

   $$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= (a_1, 2a_1, 0) + (a_2, 2a_2, 0) \\ &= (a_1 + a_2, 2a_1 + 2a_2, 0) \in A \\ &= (a_1 + a_2, 2(a_1 + a_2), 0) \in A \end{aligned}$$

   Verificação do axioma para multiplicação de um escalar rela por um vetor: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1 \in A, k\mathbf{v}_1 \in A$

   $$k(a_1, 2a_1, 0) = (ka_1, 2ka_1, 0) \in A$$

   Logo, o conjunto A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

   (b) $B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = 0 \vee c = 0\}$;

   Verificação do axioma para a soma de vetores: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in B, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in B$

   Neste caso, é mais fácil mostrar que este axioma não se verifica recorrendo a um contraexemplo

   Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (2, 0, 3) \in B \; pois \; a \; 2^{\text{a}} \text{ coordenada é nula} \\ \mathbf{v}_2 = (2, 3, 0) \in B \; pois \; a \; 3^{\text{a}} \text{ coordenada é nula} \end{cases}$

   $$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= (2, 0, 3) + (2, 3, 0) \\ &= (4, 3, 3) \notin B \; pois \; a \; 2^{\text{a}} \text{ e a } 3^{\text{a}} \text{ coordenadas são não nulas} \end{aligned}$$

   Logo, o conjunto B não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

   (c) $D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab = 0\}$;

   Verificação do axioma para a soma de vetores: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in D, (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in D$

   Neste caso, é mais fácil mostrar que este axioma não se verifica recorrendo a um contraexemplo

   Seja $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (a_1, 0, c_1) \in D, com \; a_1 \neq 0 \\ \mathbf{v}_2 = (0, b_2, c_2) \in D, com \; b_2 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 &= (a_1,0,c_1)+(0,b_2,c_2)\\ &= (a_1,b_2,c_1+c_2)\notin D\ pois\ a_1b_2\neq 0\end{aligned}$$

Logo, o conjunto D não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

(d) $I=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : |a|=|b|\}$.
Verificação do axioma para a soma de vetores: $\forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in I,(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\in I$
Neste caso, é mais fácil mostrar que este axioma não se verifica recorrendo a um contraexemplo

Seja $\begin{cases}\mathbf{v}_1=(-1,1,1)\in I\ pois\ |-1|=|1|\\ \mathbf{v}_2=(1,1,2)\in I\ pois\ |1|=|1|\end{cases}$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 &= (-1,1,1)+(1,1,2)\\ &= (0,2,3)\notin I\ pois\ |0|\neq|2|\end{aligned}$$

Logo, o conjunto I não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

3. Averigúe se o seguinte conjunto, algebrizados pela operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um escalar real por uma matriz, é subespaço vetorial
$A=\left\{\begin{bmatrix} a & 2a\\ -a & 3b\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_2 : a,b\in\mathbb{R}\right\}$, onde $\mathbf{M}_2$ representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2

(a) $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 2a\\ -a & 3b\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_2 : a,b\in\mathbb{R}\right\}$
Seja $a=b=0$,então $\begin{bmatrix} 0 & 2\times 0\\ -0 & 3\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in A$

Seja $\begin{cases}\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix} a_1 & 2a_1\\ -a_1 & 3b_1\end{bmatrix}\in A\Rightarrow a_1,b_1\in\mathbb{R}\\ \\ \mathbf{M}_2=\begin{bmatrix} a_2 & 2a_2\\ -a_2 & 3b_2\end{bmatrix}\in A\Rightarrow a_2,b_2\in\mathbb{R}\end{cases}$

Atendendo às propriedades da soma e do produto de números reais, tem-se:
Verificação do axioma para a soma de vetores:
$\forall \mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2\in A,(M_1+\mathbf{M}_2)\in A$

$$\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 2a_1\\ -a_1 & 3b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 2a_2\\ -a_2 & 3b_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (2a_1+2a_2)\\ (-a_1-a_2) & (3a_1+3b_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a_1+a_2) & 2(a_1+a_2)\\ -(a_1+a_2) & 3(a_1+b_2)\end{bmatrix}\in A$$

Verificação do axioma para multiplicação de um escalar rela por um vetor:

$\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{M}_1 \in A, k\mathbf{M}_1 \in A$

$k \begin{bmatrix} a_1 & 2a_1 \\ -a_1 & 3b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & 2ka_1 \\ -ka_1 & 3kb_1 \end{bmatrix} \in A$

Logo, o conjunto A é um subespaço vetorial de $\mathbf{M}_2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

■

4. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (5, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 2)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, e

   (a) escreva $\mathbf{v}_3$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;

   (b) identifique o vetor $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$ que tenha a primeira coordenada nula e seja combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(a) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_3$

isto é, $\quad k_1 (-1, 1) + k_2 (5, -1) = (1, 2)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,]) = n = 2 \Rightarrow SPD$

$$\begin{cases} -k_1 + 5k_2 = 1 \\ 4k_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 5k_2 - 1 = \dfrac{11}{4} \\ k_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Logo, $\mathbf{v}_3 = \dfrac{11}{4}\mathbf{v}_1 + \dfrac{3}{4}\mathbf{v}_2$

(b) Se $\mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^2$ tem a primeira coordenada nula, então $\mathbf{v}_4 = (0, b)$

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_4$

isto é, $\quad k_1 (-1, 1) + k_2 (5, -1) + k_3 (1, 2) = (0, b)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & b \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & b \end{array}\right]$$

Como $\Rightarrow \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,]) = 2, \forall b$ O sistema é sempre possível

Logo, $\mathbf{v}_4 = (0, b)\,, b \in \mathbb{R}$

■

5. Considere o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, o vetor $\mathbf{o} = (0, 0)$, e

(a) escreva, de duas formas distintas, este vetor nulo como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, -6)$;

(b) diga se este vetor nulo pode, ou não, ser escrito como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_3 = (1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (2, -1)$.

(a) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$

isto é, $\quad k_1 (-1, 3) + k_2 (2, -6) = (0, 0)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + 3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\Rightarrow$ $\mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 1$, este sistema é indeterminado.

Logo $\begin{cases} -k_1 + 2k_2 = 0 & \Leftrightarrow k_1 = 2k_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

e, por conseguinte, $\mathbf{0} = 2k_2\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$

Por exemplo $k_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{0} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $k_2 = 3 \Rightarrow \mathbf{0} = 6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$

(b) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$

e tem pelo menos uma solução, que é aquela em que os escalares são nulos. Vejamos se existem mais soluções,

$k_1 (1, 1) + k_2 (2, -1) = (0, 0)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = n = 2$, este sistema é possível e determinado.

Logo, $\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 & \Leftrightarrow k_1 = 0 \\ -3k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0 \end{cases}$

e, por conseguinte a única solução é, $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4$

■

6. Verifique que os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -7, 3)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Os 3 vetores geram o espaço de $\mathbb{R}^3$ se qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ for combinação linear dos vetores dados, isto é, se o sistema associado à combinação linear for um sistema possível e determinado.

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

isto é, $\quad k_1 (-1, 0, 0) + k_2 (2, 1, 0) + k_3 (5, -7, 3) = (a, b, c)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & 1 & -7 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = n = 3, \forall a, b, c$$

Logo, este sistema é possível e determinado e, por conseguinte, os 3 vetores geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

■

7. Averigúe se o vetor $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$ pertence ao subespaço vetorial real gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1)$.

O espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores, é o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores. Ou seja, é o conjunto de vetores para os quais o sistema associado à combinação linear é um sistema possível.

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

isto é, $\quad k_1\,(1, 0, 1) + k_2\,(2, 1, 1) = (a, b, c)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & c-a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 + L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a+b \end{array}\right]$$

$\operatorname{car}(\mathbf{A}) = car([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow c - a + b = 0$

Logo, os dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$, representado pelo conjunto $S = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - a + b = 0\big\}$

O vetor $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3) \notin S$ pois $3 - 2 + 1 = 2 \neq 0$.

■

8. Considere os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 2, c - 5)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e

   (a) determine o valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$ para o qual os três vetores são linearmente independentes;

   (b) para $c = 1$, escreva o vetor $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 1)$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$;

   (c) para $c = 9$, encontre o subespaço $S \in \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(a) Um conjunto de vetores é linearmente independente se a sua combinação linear nula resultar num sistema possível e determinado.

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$

isto é, $k_1(-1,0,-1) + k_2(1,-1,-1) + k_3(0,2,c-5) = (0,0,0)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & (c-5) & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & (c-5) & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (c-9) & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = 3 \Leftarrow c-9 \neq 0$$

Logo, para que os três vetores sejam linearmente independentes, $c \neq 9$.

(b) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_4$

isto é, $k_1(-1,0,-1) + k_2(1,-1,-1) + k_3(0,2,-4) = (1,1,1)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]_{L_3=L_3-2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = n = 3 \Rightarrow SPD$$

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 = 1 \\ -k_2 + 2k_3 = 1 \\ -8k_3 = -2 \Leftrightarrow k_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 - 1 \\ k_2 = 2k_3 - 1 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\dfrac{3}{2} \\ --- \\ --- \end{cases}$$

Logo, $v_4 = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_3$.

(c) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

isto é, $k_1(-1,0,-1) + k_2(1,-1,-1) + k_3(0,2,4) = (a,b,c)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ -1 & -1 & 4 & c \end{array}\right]_{L_3=L_3-L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & -2 & 4 & c-a \end{array}\right]_{L_3=L_3-2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right]$$

mas então $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow c - a - 2b = 0$
Logo, o subespaço gerado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ é o conjunto
$S = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - a - 2b = 0 \right\}$.

■

9. Averigúe a dependência/independência linear dos seguintes conjuntos

   (a) $A = \{(1, 2), (3, 4)\}$;
   (b) $B = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$;
   (c) $G = \left\{-3x^2, 2x^2 + x + 1, x + 4\right\}$, do espaço dos polinómios de grau não superior a dois;

(a) $A = \{(1, 2), (3, 4)\}$;
A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$
isto é, $k_1 (1, 2) + k_2 (3, 4) = (0, 0)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = n = 2 \Leftarrow SPD \begin{cases} k_1 + 3k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}$

Logo, os 2 vetores são linearmente independentes.

(b) $B = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$;
A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$
isto é, $k_1 (1, 2, 3) + k_2 (4, 5, 6) + k_3 (7, 8, 9) = (0, 0, 0)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SP1 \times I$

Logo, os 3 vetores são linearmente dependentes.

(c) $G = \left\{-3x^2, 2x^2 + x + 1, x + 4\right\}$

Seja $\begin{cases} \mathbf{p}_1 = -3x^2 \\ \mathbf{p}_2 = 2x^2 + x + 1 \\ \mathbf{p}_3 = x + 4 \end{cases}$ representado por $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (-3, 0, 0) \\ \mathbf{v}_2 = (2, 1, 1) \\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 4) \end{cases}$

A combinação linear é dada por $\sum\limits_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$
isto é, $k_1\,(-3,0,0) + k_2\,(2,1,1) + k_3\,(0,1,4) = (0,0,0)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = n = 3 \Leftarrow SPD$
Logo, os 3 vetores são linearmente independentes.

■

10. Considere as matrizes $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e

    (a) identifique os valores de a e b para os quais as 3 matrizes sejam linearmente independentes;
    (b) identifique os valores de a e b para os quais as 3 matrizes sejam linearmente dependentes;
    (c) estabeleça a relação de dependência entre as 3 matrizes.

(a) A combinação linear é dada por $\sum\limits_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$
isto é, $k_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Seja} \begin{cases} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = (1,3,-1,2) \\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 = (0,a,b,1) \\ \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 = (-1,0,2,-1) \end{cases}$$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & a & 0 & 0 \\ -1 & b & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3+L_1 \\ L_4=L_4-2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_4}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3=L_3-bL_2 \\ L_4=L_4-aL_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-b) & 0 \\ 0 & 0 & (3-a) & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3 \Leftarrow 1 - b \neq 0 \vee 3 - a \neq 0$.

Logo, as 3 matrizes são linearmente independentes se $a \neq 3 \vee b \neq 1$.

(b) As 3 matrizes são linearmente dependentes se $a = 3 \wedge b = 1$.

(c) Se $a = 3 \wedge b = 1$,

isto é, $k_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em (ver alínea anterior)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow -\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3$$

■

11. Averigúe se os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

isto é, $k_1 (1, 0, -1) + k_2 (2, 3, 4) = (a, b, c)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 3 & b \\ -1 & 4 & c \end{array}\right]_{L_3 = L_3 + L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 6 & c + a \end{array}\right]_{L_3 = L_3 - 2L_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & c + a - 2b \end{array}\right]$$

se $c + a - 2b = 0 \Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow SPD$

Logo, os 2 vetores não geram $\mathbb{R}^3$ mas sim um subespaço de $\mathbb{R}^3$ representado pelo conjunto $S = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c + a - 2b = 0\right\}$. Assim, os 2 vetores não formam uma base de $\mathbb{R}^3$ mas sim uma base do subespaço S.

ou

Como $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, os 2 vetores não formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

■

12. Dados os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$, obtenha um vetor $\mathbf{v}_3$ tal que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ se qualquer vetor $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ se definir de uma forma única como combinação linear dos vetores$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$

isto é, $k_1 (1, -1, 1) + k_2 (1, 0, 0) + k_3 (x, y, z) = (a, b, c)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x & a \\ -1 & 0 & y & b \\ 1 & 0 & z & c \end{array}\right] \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x & a \\ 0 & -1 & y & b \\ 0 & 1 & z & c \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x & a \\ 0 & -1 & y & b \\ 0 & 0 & z+y & c+b \end{array}\right]$$

Os 3 vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$ se o sistema é $SPD \Rightarrow z + y \neq 0 \Rightarrow$ $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = n = 3, \forall a, b, c.$

Logo, o vetor $\mathbf{v}_3$ é um vetor do tipo $\mathbf{v}_3 = (x, y, z) : z \neq -y$. Por exemplo $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)$.

■

13. Determine duas bases do subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por
$A = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (2a + b - c = 0) \wedge (a - c - d = 0)\right\}.$

$$\begin{cases} b = -2a + c \Leftrightarrow b = -c - 2d \\ a = c + d \end{cases}$$

Pelo que $\quad A = \left\{(c + d, -c - 2d, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$

Sendo $\dim(A) = 2$, são necessários 2 vetores de A linearmente independentes para formar uma base de A. Então,

- para $c = 0, d = 1$, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 1)$
- para $c = 1, d = -1$, por exemplo, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, -1)$

Como $dim\,(A) = 2$ e os vetores $\mathbf{v}_1$e $\mathbf{v}_2$ são v.l.i., uma possível base de A é dada pelo conjunto $\{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, -1)\}$

- para $c = 2, d = -1$, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -1)$
- para $c = 2, d = -2$, por exemplo, $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 2, -2)$

Como $dim\,(A) = 2$ e os vetores $\mathbf{v}_1$e $\mathbf{v}_2$ são v.l.i., uma outra possível base de A é dada pelo conjunto $\{(1, 0, 2, -1), (0, 2, 2, -2)\}$.

■

14. Determine uma base do espaço vetorial real cujos vetores são solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3t &= 0 \\ 2x - 5y + z + 2t &= 0 \end{cases}.$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SP2xind$.

$$\begin{cases} x-2y+3z-3t=0 \\ -y-5z+8t=0 \Leftrightarrow y=-5z+8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+3t \Leftrightarrow x=-13z+19t \\ --- \end{cases}$$
.

Logo, o espaço vetorial é o conjunto

$S=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=-13z+19t \wedge y=-5z+8t\right\}$

Como $\dim(S)=2$, só são necessários 2 vetores de S linearmente independentes para formar uma base de S.

Para $z=0, t=1 \Rightarrow v_1=(19,8,0,1)$ e para $z=1, t=0 \Rightarrow v_2=(-13,-5,1,0)$

Como v_1, v_2 são v.l.i., uma base possível é $\{v_1, v_2\}$.

■

15. Mostre que uma qualquer base do subespaço vetorial,

$S=\left\{\begin{bmatrix} a & -a \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2 : a,b\in\mathbb{R}\right\},$

é composta por apenas duas matrizes de S, onde $\mathbf{M}_2$ representa o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2.

Uma matriz qualquer $A\in S$ é da forma $A=\begin{bmatrix} a & -a \\ 2a & b \end{bmatrix}$, com $a,b\in\mathbb{R}$.
Então

$A=\begin{bmatrix} a & -a \\ 2a & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -a \\ 2a & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e por isso, qualquer matriz de S é combinação linear única das matrizes do conjunto $F=\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Ou seja F é uma base de S.

Como todas as bases de um mesmo espaço têm o mesmo número de vetores, uma base de S é composta por apenas duas matrizes de S.

■

16. Considere os vetores $\mathbf{v}_1=(2,2,4)$, $\mathbf{v}_2=(1,2,2)$ e $\mathbf{v}_3=(5,-1,0)$, do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, e

    (a) verifique se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$;

    (b) diga qual o espaço vetorial gerado por $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$;

    (c) diga qual a dimensão desse subespaço;

    (d) indique uma sua base desse subespaço;

    (e) indique as componentes do vetor $\mathbf{v}=(1,2,2)$ e na base que definiu na alínea anterior.

(a) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$
isto é, $k_1\,(2,2,4) + k_2\,(1,2,2) + k_3\,(5,-1,0) = (a,b,c)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & a \\ 2 & 2 & -1 & b \\ 4 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & a \\ 0 & 1 & -6 & b-a \\ 0 & 0 & -10 & c-2a \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = n = 3 \Leftarrow SPD$.
Logo, os 3 vetores são geradores de $\mathbb{R}^3$ e linearmente independentes, pelo que formam uma base de $\mathbb{R}^3$

(b) A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$
isto é, $k_1\,(2,2,4) + k_2\,(1,2,2) = (a,b,c)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 4 & 2 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c-2a \end{array}\right]$$

se $c - 2a = 0 \Rightarrow \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SPD$.
Logo, os 2 vetores geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ representado pelo conjunto
$S = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c - 2a = 0\right\}$

(c) $\dim(S) = 2$

(d) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, pois como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são vetores são geradores de S e linearmente independentes, formam uma base de S.

(e) As coordenadas de um vetor numa base são os coeficientes da combinação linear do vetores nos vetores dessa base.
A combinação linear é dada por $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$
isto é, $k_1\,(2,2,4) + k_2\,(1,2,2) = (1,2,2)$ A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\,]) = n = 2 \Leftarrow SPD$

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 1 \Leftrightarrow k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Logo, $\mathbf{v} = (0,1)_{\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}}$.
ou
Como $\mathbf{v} = \mathbf{v_2}$, então $\mathbf{v} = 0 \times \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$, logo $\mathbf{v} = (0,1)_{\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}}$.

■

17. Determine as coordenadas do vetor $\mathbf{w} = (1,1,1)$ na base U_1 definida por

$U_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 : \mathbf{u}_1 = (1,-2,1), \mathbf{u}_2 = (0,0,1), \mathbf{u}_3 = (3,-1,0)\}$, utilizando a matriz de mudança de base e comprove o resultado utilizando a combinação linear Representando por $\mathbf{M}_{U_1}^{U}$ a matriz de mudança da base canónica, U, para a base U_1, as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base U_1, são dadas por $\mathbf{w}_{U_1} = \mathbf{M}_{U_1}^{U}\mathbf{w}_U$

A matriz de mudança da base U (canónica) para a base U_1 é

$$\mathbf{M}_{U_1}^{U} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+2L_1 \\ L_3=L_3-l_1}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L_3=\frac{1}{5}L_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_1=L_1-3L_3 \\ L_2=L_2+3L_3}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{M}_{U_1}^{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } \mathbf{w}_{U_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Sendo conhecidas as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base canónica, as sua coordenadas na base U podiam ser diretamente obtidas pela solução do sistema

$$\sum_{i=1}^{3} k_i\mathbf{u}_i = \mathbf{w} \Leftrightarrow k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$$

isto é, $k_1(1,-2,1) + k_2(0,0,1) + k_3(3,-1,0) = (1,1,1)$

A construção da matriz, tal como apresentado no exercício 9, resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+2L_1 \\ L_3=L_3-L_1}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]_{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = n = 3 \Leftarrow SPD$.

Logo, $\begin{cases} k_1 + 3k_3 = 1 \Leftrightarrow k_1 = 1 - 3k_3 = -\dfrac{4}{5} \\ k_2 - 3k_3 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 3k_3 = \dfrac{9}{5} \\ k_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

Pelo que $w = \left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{3}{5}\right)_{U_1}$.

18. Considere as bases $U = \{(1,2,0), (-2,0,1)\}$ e $V = \{(2,0,4), (3,2,0)\}$. Identifique as coordenadas de um vetor $\mathbf{w}$ na base canónica, sabendo que é não nulo e que a expressão da combinação linear que descreve esse vetor em cada uma das bases verifica a igualdade $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{2} k_i u_i = \sum_{k=1}^{2} k_i v_i$.

Sejam os vetores da base C, canónica, representado por $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (1,0,0) \\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \end{cases}$

e os vetores da base U representado por $\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = (1,2,0) \\ \mathbf{u}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = (-2,0,1) \end{cases}$

e os vetores da base V representado por $\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3 = (2,0,4) \\ \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = (3,2,0) \end{cases}$

Atendendo à combinação linear.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_U &= k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 \\ &= k_1(1,2,0) + k_2(-2,0,1) \\ &= (k_1 - 2k_2, 2k_1, k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_V &= k_3\mathbf{v}_1 + k_4\mathbf{v}_2 \\ &= k_3(2,0,4) + k_4(3,2,0) \\ &= (2k_3 + 3k_4, 2k_4, 4k_3) \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{w}_U = \mathbf{w}_V$, tem-se $\begin{cases} k_1 - 2k_2 = 2k_3 + 3k_4 \\ 2k_1 = 2k_4 \\ k_2 = 4k_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - \frac{1}{4}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{1}{4}L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3 \Leftarrow$SP 1x indterminado

Logo, $\begin{cases} k_1 - 2k_2 - 2k_3 - 3k_4 = 0 \\ k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ -5k_3 - k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2k_2 + 2k_3 + 3k_4 \\ k_2 = -k_3 - k_4 \Leftrightarrow k_2 = 4k_3 \\ k_4 = -5k_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -5k_3 \\ k_2 = 4k_3 \\ k_4 = -5k_3 \end{cases}$$

Para, por exemplo, $k_3 = 1$, tem-se $\begin{cases} k_1 = -5 \\ k_2 = 4 \\ k_4 = -5 \end{cases}$,

Pelo que o vetor $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = k_3\mathbf{v}_1 + k_4\mathbf{v}_2$, isto é,
$\mathbf{w} = -5\,(1, 2, 0) + 4\,(-2, 0, 1) = (2, 0, 4) - 5\,(3, 2, 0) = (-13, -10, 4)$.

■

0.2 Exercícios relativos a transformações lineares

1. Verifique se as seguintes transformações são, ou não, lineares

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, -y)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (xy, 2x + y)$;

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T(1,2,3) = (1,0,1) \\ T(1,0,7) = (3,0,1) \\ T(0,0,0) = (2,2,4) \end{cases}$;

   (a) $T(x, y) = (2x - y, -y)$, sejam

   $\begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = (x_1, y_1) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_1) = (2x_1 - y_1, -y_1) \\ \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = (x_2, y_2) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_2) = (2x_2 - y_2, -y_2) \end{cases}$

   Verificação do axioma $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 : T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$

   $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$

   $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (2x_1 - y_1, -y_1) + (2x_2 - y_2, -y_2)$

   $T(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) = (2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2,\, -y_1 - y_2)$

   $(2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2),\, -(y_1 + y_2)) = (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2),\, -(y_1 + y_2))$

   Verificação do axioma $\quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{R} : kT(\mathbf{u}) \quad = T(k\mathbf{u})$

   $$\begin{aligned} kT(x, y) &= T(k(x, y)) \\ k(2x - y, -y) &= T(kx, ky) \\ (2kx - ky, -ky) &= (2kx - ky, -ky) \end{aligned}$$

   Verificadas os axiomas 1 e 2, pode afirmar-se que T é uma transformação linear.

   (b) $T(x, y) = (xy, 2x + y)$; sejam

   $\begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = (x_1, y_1) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_1) = (x_1 y_1, 2x_1 + y_1) \\ \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = (x_2, y_2) \quad ; \quad T(\mathbf{u}_2) = (x_2 y_2, 2x_2 + y_2) \end{cases}$

   Verificação do axioma $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 : T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$

   $$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= T(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \\ &= ((x_1 + x_2) \times (y_1 + y_2),\, 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2,\, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) &= (x_1 y_1, 2x_1 + y_1) + (x_2 y_2, 2x_2 + y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2,\, 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2,\, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2,\, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) \\ &\neq T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

   Não se verifica este axioma, logo T não é uma transformação linear.

   ou

   Como a primeira coordenada é um produto, T não é uma transformação linear.

Podemos provar que T não é uma transformação linear com um contraexemplo

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = (1,2) & ; \quad T(\mathbf{u}_1) = (2,4) \\ \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = (1,3) & ; \quad T(\mathbf{u}_2) = (3,5) \end{cases}$$

$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$
$= T((1,2) + (1,3))$
$= T(2,5)$
$= (10,9)$

$T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$
$= (2,4) + (3,5)$
$= (5,9)$
$\neq T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$

Não se verifica este axioma, logo T não é uma transformação linear.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T(1,2,3) = (1,0,1) \\ T(1,0,7) = (3,0,1) \\ T(0,0,0) = (2,2,4) \end{cases}$.

T não é uma transformação linear pois o axioma $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \forall k \in \mathbb{R} : kT(\mathbf{u}) = T(k\mathbf{u})$ não se verifica (a transformação do vetor nulo não dá o vetor nulo)

$T(0,0,0) = (2,2,4) \neq (0,0,0)$.

■

2. Determine a imagem e o núcleo das seguintes transformações lineares

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2y, -x)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x, y, 0)$;

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} T(1,0) = (1,2) \\ T(0,1) = (3,4) \end{cases}$;

(a) $T(x,y) = (2y, -x)$;

- Determinação de $\mathrm{Im}(T) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (a,b)\right\}$
  Seja $T(x,y) = (2y, -x) = (a,b)$
  $$\begin{cases} 2y = a \\ -x = b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & a \\ -1 & 0 & b \end{array}\right]_{L_1 \longleftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b \\ 0 & 2 & a \end{array}\right]$$
  $\mathrm{car}(\mathbf{A}) = \mathrm{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 2 \Leftarrow SPD, \forall a, b$
  Logo, $\mathrm{Im}(T) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2$

- Determinação de $\mathrm{N}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\right\}$
  Seja $T(x,y) = (2y, -x) = (0,0)$
  $$\begin{cases} 2y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
  Logo, $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$

(b) $T(x,y,z) = (2x, y, 0)$.

- Determinação de $\text{Im}(T)$
  $\text{Im}(T) = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (a,b,c)\right\}$
  $T(x,y,z) = (2x,y,0) \Leftrightarrow (2x,y,0) = (a,b,c)$
  $$\begin{cases} 2x = a \\ y = b \\ 0 = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$
  SP, $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow$ se $c = 0$
  Logo, $\text{Im}(T) = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0\right\}$

- Determinação de $\text{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\}$
  $T(x,y,z) = (2x,y,0) \Leftrightarrow (2x,y,0) = (0,0,0)$
  $$\begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
  $\text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SP$ 1xind
  $$\begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
  Logo, $\text{N}(T) = \{(0,0,c)\,, c \in \mathbb{R}\}$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} T(1,0) = (1,2) \\ T(0,1) = (3,4) \end{cases}$.

- Determinação da expressão da transformação linear.
  Representando por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T nas bases canónicas, então
  $$\mathbf{T}_V^U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
  $$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{bmatrix}$$
  $T(x,y) = (x + 3y, 2x + 4y)$

- Determinação de $\text{Im}(T)$
  $\text{Im}(T) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (a,b)\right\}$
  Seja $T(x,y) = (x + 3y, 2x + 4y) = (a,b)$
  $$\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right]_{L_2 = L_2 - 2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & b - 2a \end{array}\right]$$
  $\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SP, \forall a, b$
  Logo, $\text{Im}(T) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2$

- Determinação de $\text{N}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\right\}$
  Seja $T(x,y) = (x + 3y, 2x + 4y) = (0,0)$
  $$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right]_{L_2 = L_2 - 2L_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$
  $\Rightarrow \text{car}(\mathbf{A}) = \text{car}([\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}\,]) = 2 \Leftarrow SPD$
  $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
  Logo, $\text{N}(T) = \{(0,0)\}$

$\blacksquare$

3. Seja a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(2x-y,x+y)$ e determine

   (a) a matriz da transformação linear associada à base canónica de ;

   (b) a matriz da transformação linear associada à base $U_1=\{(1,2),(3,5)\}$ para o espaço de partida e na base canónica, para o espaço de chegada;

   (c) a matriz da transformação linear associada à base $V_1=\{(-1,2),(-4,7)\}$ para o espaço de chegada e na base canónica, para o espaço de partida;

   (d) a matriz da transformação linear associada às bases $U_1=\{(1,2),(3,5)\}$para o espaço de partida. e $V_1=\{(-1,2),(-4,7)\}$para o espaço de chegada;

   (e) as coordenadas da imagem de $(-1,3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$;

   (f) as coordenadas da imagem de $(-1,3)$ na base $V_1=\{(-1,2),(-4,7)\}$;

   (g) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(-3,9)$.

(a) Representando por $\mathbf{A}$ ou por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T nas bases canónicas, então

$$\begin{cases}T(1,0)=(2,1)\\T(0,1)=(-1,1)\end{cases}\Rightarrow\mathbf{T_V^U}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

(b) Representando por $\mathbf{T}_V^{U_1}$ a matriz de T na base U_1 para o espaço de partida e na base canónica, base $V=\{(1,0),(0,1)\}$, para o espaço de chegada., então

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_V^{U_1}&=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U_1}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1\\3&8\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1\\3&8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(c) Representando por $\mathbf{T}_{V_1}^U$ a matriz de T na base $V_1=\{(-1,2),(-4,7)\}$ para o espaço de chegada e na base canónica, base $U=\{(1,0),(0,1)\}$, para o espaço de partida, então

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{V_1}^{U}&=\mathbf{V_1}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\\&=\begin{bmatrix}-1&-4\\2&7\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}7&4\\-2&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}18&-3\\-5&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cálculo da matriz inversa, $\mathbf{V_1}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L1=L1+2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L2=L2-2L1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]_{L1=L1-3L2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

(d) Representando por $\mathbf{T}_{V_1}^{U_1}$ a matriz de T associada às bases $U_1 = \{(1,2),(3,5)\}$para o espaço de partida. e $V_1 = \{(-1,2),(-4,7)\}$para o espaço de chegada, e usando a inversa calculada na alínea c), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{V_1}^{U_1} &= \mathbf{V_1}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U_1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 39 \\ -3 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(e) Representando por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T associada às bases canónicas, então $\mathbf{T}_V^U = A$ e usando a matriz calculada em a), tem-se

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, $T(-1,3) = (-5,2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(f) Utilizando a matriz $\mathbf{T}_{V_1}^U$ obtida em c), matriz de T na base $V_1 = \{(-1,2),(-4,7)\}$ para o espaço de chegada e na base canónica e na base $U = \{(1,0),(0,1)\}$ para o espaço de partida, então

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_{V_1}^U \mathbf{w}_U \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, $T(-1,3) = (-27,8)$ na base $V_1 = \{(-1,2),(-4,7)\}$.

(g) Representando por $\mathbf{T}_V^U$ a matriz de T associada às bases canónicas, então $\mathbf{T}_V^U = A$.

$$T(\mathbf{w}_U) = \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U$$

$$\mathbf{w}_U = \left(\mathbf{T}_V^U\right)^{-1} T(\mathbf{w}_U)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz inversa, $\left(\mathbf{T}_V^U\right)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]_{L1 \leftrightarrow L2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]_{L2=L2-2L1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right]_{L2=-\frac{1}{3}L2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]_{L1=L1-L2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Ou seja, $T(2,7) = (-3,9)$

$\blacksquare$

4. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $T(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + z, -2z)$

   e determine

   (a) a matriz da transformação linear associada à base canónica de ;

   (b) a matriz da transformação linear associada à base $U_1 = \{(1, 2, 1), (4, 5, -3), (3, 4, -2)\}$ para o conjunto de partida e base canónica para o conjunto de chegada;

   (c) a matriz da transformação linear associada à base $V_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ para o conjunto de chegada e à base canónica para o conjunto de partida;

   (d) a matriz da transformação linear associada às bases $U_1 = \{(1, 2, 1), (4, 5, -3), (3, 4, -2)\}$ e $V_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;

   (e) as coordenadas da imagem de $(1, 2, 3)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$;

   (f) as coordenadas da imagem de $(1, 2, 3)$ na base $V_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;

   (g) as coordenadas do vetor cuja imagem é $(2, -2, 4)$.

(a) Representando por $\mathbf{T}_V^U = A$ a matriz de T associada à base canónica de $\mathbb{R}^3$, então

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (2,1,0) \\ T(0,1,0) = (1,-1,0) \\ T(0,0,1) = (-1,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{T}_V^U = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Representando por $\mathbf{T}_V^{U_1}$ a matriz de T associada à base à base $U_1 = \{(1, 2, 1), (4, 5, -3), (3, 4, -2)\}$ para o conjunto de partida e à base canónica para o conjunto de chegada, então

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_V^{U_1} &= \mathbf{V^{-1}AU_1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 16 & 12 \\ 0 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 16 & 12 \\ 0 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Representando por $\mathbf{T}_{V_1}^U$ a matriz de T associada à base $V_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ para o conjunto de chegada e à base canónica para o conjunto de partida, e usando a matriz inversa calculada em 5-c), então

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{V_1}^{U} &= \mathbf{V_1}^{-1}\mathbf{AU} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(d) Representando por $\mathbf{T}_{V_1}^{U_1}$ a matriz de T associada às bases $U_1 = \{(1,2,1),(4,5,-3),(3,4,-2)\}$ e $V_1 = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$, e usando a matriz inversa calculada em 5-c), então

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{V_1}^{U_1} &= \mathbf{V_1}^{-1}\mathbf{AU_1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 16 & 12 \\ 0 & -4 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -3 & -20 & -15 \\ 1 & 26 & 19 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(e) Utilizando a matriz $\mathbf{T}_{V}^{U}$ obtida em a), matriz de T associada à base canónica, tem-se

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_{U_E} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ou seja, $T(1,2,3) = (1,2,-6)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(f) Utilizando a matriz $\mathbf{T}_{V_1}^{U}$ obtida em c), a matriz de T associada à base $V_1 = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$ para o conjunto de chegada e à base canónica para o conjunto de partida, tem-se

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_{V_1}^U \mathbf{w}_U \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ou seja, $T(1,2,3) = (2,1,-7)$ na base V_1.

(g) Utilizando a matriz $\mathbf{T}_{V}^{U}$ obtida em a), matriz de T associada à base canónica, tem-se

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U \\
\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ x-y+z \\ -2z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+z=-2 \\ -2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 = \frac{-1}{2} L_3}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]_{L_2=L_2-2L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]_{L_2=\frac{1}{3}L_2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-2 \\ y-z=2 \\ z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

Logo, $\mathbf{w} = (0,0,-2)$

■

5. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{cases} T(1,0) & = (1,1,2) \\ T(0,1) & = (2,1,-1) \end{cases}$ e determine

   (a) a matriz, $\mathbf{T}_V^U$, da transformação linear e relativa às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;

   (b) a matriz, $\mathbf{T}_{V_1}^U$,da transformação linear e relativa à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base $V_1 = \{(3,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$;

   (c) a expressão analítica de $T(x,y)$.

(a) $\mathbf{T}_V^U = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{V_1}^U &= \mathbf{V_1}^{-1}\mathbf{AU} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, a transformação linear é definida por $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, com $T(x, y) = (x + 2y, x + y, 2x - y)$

$\blacksquare$

6. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que

   (a) a matriz **A** tenha 4 valores próprios reais e distintos;

   (b) a matriz **A** tenha apenas 2 valores próprios reais e distintos, tendo ambos multiplicidade algébrica 2;

   (c) a matriz **A** tenha apenas 2 valores próprios reais e distintos, tendo um deles multiplicidade algébrica 3.

(a)

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 & 4 \\ 0 & (k-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \left(k^2-\lambda\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(k-\lambda)\left(k^2-\lambda\right)(-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = k \vee \lambda = k^2 \vee \lambda = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = k \\ \lambda = k^2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Para que A tenha 4 valores próprios reais e distintos para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. $k = -2$, por exemplo.

(b) Para que A tenha 2 valores próprios reais e distintos, ambos multiplicidade algébrica 2, $k = -1$

(c) Para que A tenha 2 valores próprios reais e distintos, um deles multiplicidade algébrica 3, $k = 1$

$\blacksquare$

7. Para $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre os valores próprios, os correspondentes vetores próprios, subespaço próprio e uma sua base

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo dos valores próprios

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 2 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

Aplicando o Teorema de Laplace à 2^{a}coluna, vem:

$$(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

$(1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2]=0 \Leftrightarrow 1-\lambda=0 \vee \lambda^2-\lambda-2=0$

Pelo que os valores próprios desta matriz são $\lambda=1 \vee \lambda=2 \vee \lambda=-1$

  - Cálculo dos vetores próprios

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u}=\mathbf{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 2 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda=-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2+2L_1 \\ L_3=L_3-2L_1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \Leftrightarrow x=-z \\ 2y+2z=0 \Leftrightarrow y=-z \\ z=z \end{cases}$$

Pelo que o subespaço próprio associado a este valor próprio é
$S_{\lambda=-1}=\left\{(-z,-z,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$
Uma base deste subespaço é dada por $\{(-1,-1,1)\}$.

Para $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{\substack{C_1\leftrightarrow C_3 \\ C_2\leftrightarrow C_3 \\ L_3=L_3+L_2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z-x=0 \Leftrightarrow z=x=0 \\ -2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ y=y \end{cases}$$

Pelo que o subespaço próprio associado a este valor próprio é
$S_{\lambda=1}=\left\{(0,y,0)\in\mathbb{R}^3\right\}$
Uma base deste subespaço é dada por $\{(0,1,0)\}$.

Para $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]_{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+L_1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + z = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{z}{2} \\ -y - z = 0 \Leftrightarrow y = -z \\ z = z \end{cases}$$

Pelo que o subespaço próprio associado a este valor próprio é

$$S_{\lambda=2} = \left\{ \left(\frac{z}{2}, -z, z \right) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Uma base deste subespaço é dada por $\{(1, -2, 2)\}$.

■

8. Determine a e b de modo que $(1,1)$ e $(1,0)$ sejam vetores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

Por definição de vetor próprio, se u é vetor próprio de $\mathbf{A}$, então $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{A}u = \lambda u$.

Logo, se $(1,1)$ é um vetor próprio de $\mathbf{A}$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \lambda_1 \\ a + b = \lambda_1 \end{cases}$$

Por outro lado, se $(1,0)$ é um vetor próprio de $\mathbf{A}$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Logo, $a = 0$ e $b = 2$. Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são $\lambda = 1 \vee \lambda = 2$.

■

9. Considere e T:$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $\begin{cases} T(1,0,0,0) = (1,-2,0,8) \\ T(0,1,0,0) = (0,1,-2,-1) \\ T(0,0,1,0) = (0,0,1,-1) \\ T(0,0,0,1) = (0,0,0,1) \end{cases}$

   (a) calcule o transformado de $(2,3,1,4)$;
   (b) determine os valores e os vetores próprios do endomorfismo T;
   (c) indique, justificando, se a matriz de transformação linear associada às bases canónicas é uma matriz diagonalizável.

(a)

$$\mathbf{T}_V^U = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_U) &= \mathbf{T}_V^U \mathbf{w}_U \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $T(2,3,1,4) = (2,-1,-5,16)$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 8 & -1 & -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 8 & -1 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^4 = 0$

$\lambda = 1$ (raiz quadrupla)

- Cálculo dos vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$,

  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 8 & -1 & -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & (1-\lambda) & 0 \end{array}\right]$$

para $\lambda = 1$, $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ L_2 = L_2 + 4L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Como a $\operatorname{car}(\mathbf{A}) = \operatorname{car}([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = 3$ e $GI = 1$, este sistema é um sistema possível e indeterminado, pelo que

$$\begin{cases} -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ -y - z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ t = t \end{cases}$$

Pelo que o subespaço próprio associado a este valor próprio é $\mathbf{S}_{\lambda=1} = \{(0,0,0,t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$
Logo, os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$ são todos os vetores representados pelo conjunto $\{(0,0,0,t)\,, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

(c) Não, a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonizável pois não há uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por vetores próprios de $\mathbf{A}$ logo não existe a matriz $\mathbf{P}$ invertível tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

■