ÁLGEBRA LINEAR

3.Sistemas de Equações Lineares

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2022/2023

Referências:

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN, Publicação de apoio à unidade curricular*, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.

Um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e com os termos independentes $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ representa-se por:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$$

ou, na forma matricial, por $AX = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde A é a matriz dos coeficientes, X é o vetor das incógnitas e b é o vetor dos termos independentes.

Designa-se por solução do sistema $AX = b$ qualquer n-úplo ordenado $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça todas as equações do sistema.

Dois sistemas dizem-se equivalentes se todas as soluções do primeiro satisfazem o segundo e vice-versa.

Resolver um sistema de equações lineares significa determinar todas as suas soluções. Chama-se conjunto solução do sistema, e representa-se por CS, ao conjunto formado por todas as soluções do sistema.

Discutir um sistema de equações lineares consiste em classificá-lo de uma das formas:

$$\text{Sistema de equações}\begin{cases}\text{Possível} & \begin{cases}\text{Determinado (SPD) - uma só solução}\\ \\ \text{Indeterminado (SPI) - infinitas soluções}\end{cases}\\ \\ \text{Impossível (SI) - não tem soluções}\end{cases}$$

Sistemas de Cramer

Um Sistema de Cramer é um sistema tal que:

1. o número de equações é igual ao número de incógnitas, n;
2. o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, $\Delta = |A| \neq 0$, isto é, a matriz é regular e a sua característica é n.

Teorema

Um Sistema de Cramer é possível e determinado.

Fórmulas de Cramer

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}$$

onde Δ_i é o determinante que se obtém de Δ substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes b.

Corolário

Seja $AX = b$ um sistemas de equações lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.Então o sistema é de Cramer se e só se é possível e determinado.

Designa-se por sistema homogéneo um sistema de equações lineares cujos termos independentes são todos nulos.

Proposição

Seja $AX = b$ um sistemas de equações lineares homogéneo. Então:

1. $AX = b$ tem como solução a solução nula, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
2. Se o sistema for um Sistema de Cramer, então a solução nula é a única solução do sistema.

Exemplo 1

Os sistemas

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 2 \\ x & +3y & -2z & = & 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & -y & = & 2 \\ 2x & +y & = & 3 \\ -x & +3y & = & 4 \end{cases}$$

não são Sistemas de Cramer porque o primeiro tem mais incógnitas do que equações e o segundo tem mais equações do que incógnitas.

Exemplo 2

O sistema

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ -2x & -4y & = & 2 \end{cases}$$

não é um Sistema de Cramer pois $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0.$

Exemplo 3

O sistema

$$\begin{cases} 2x & -y & = & -3 \\ x & +y & = & 6 \end{cases}$$

é um Sistema de Cramer porque o número de equações é igual ao número de incógnitas, 2, e $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

A solução é

$$\begin{cases} x & = & \dfrac{\Delta_x}{\Delta} & = & \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{-3} & -1 \\ \mathbf{6} & 1 \end{vmatrix}}{3} & = & \dfrac{-3+6}{3} & = & 1 \\ y & = & \dfrac{\Delta_y}{\Delta} & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{-3} \\ 1 & \mathbf{6} \end{vmatrix}}{3} & = & \dfrac{12+3}{3} & = & 5 \end{cases}$$

ou seja, $CS = \{(1,\ 5)\}$.

Exercício

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y = -2. \end{cases}$$

1. Mostre que é um sistema de Cramer.
2. Resolva o sistema, usando as fórmulas de Cramer.

R: $CS = \{(2, -2, 1)\}$

Método de Eliminação de Gauss

É possível estudar qualquer sistema $AX = B$ através da matriz completa do sistema, $\overline{A} = [A \mid B]$:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Método da Condensação

Efetuam-se em $\overline{A} = [\ A \mid B\ ]$ operações elementares até se obter um sistema equivalente da forma $[\ C \mid D\ ]$, onde C é uma matriz em escada equivalente a A.

Operações elementares sobre as linhas que são permitidas:

1. troca de duas linhas: corresponde à troca da ordem de duas equações;
2. multiplicação de uma linha por $k \neq 0$: corresponde à multiplicação de ambos os membros de uma equação por uma constante não nula,;
3. adição a uma linha de um múltiplo de outra linha: corresponde à adição a uma equação de outra depois de multiplicada por uma constante não nula.

Operações elementares sobre as colunas que são permitidas:

1. a troca de duas colunas da matriz dos coeficientes, A: corresponde à troca, no sistema, da ordem das incógnitas, pelo que deverá ser devidamente identificada.

Teorema

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares com n incógnitas e seja $CX = D$ um sistema equivalente ao sistema $AX = B$, onde C é uma matriz em escada equivalente a A. Então, fazendo $\overline{C} = [C \mid D]$:

1. Se $car(C) = car(\overline{C})$, então o sistema é possível.
   1. Se $car(C) = car(\overline{C}) = n$, então o sistema é possível e determinado.
   2. Se $car(C) = car(\overline{C}) < n$, então o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação $n - car(C)$.
2. Se $car(C) < car(\overline{C})$, então o sistema é impossível.

Exemplos:

- Se $car(C) = car(\overline{C}) = n$ temos o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right]$$

ou

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

com $c_{ii} \neq 0, \forall i$. Logo o sistema é possível e determinado (SPD).

- Se $car(C) = car(\overline{C}) < n$ temos o sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2p} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{pp} & \dots & c_{pn} & d_p \end{array}\right]$$

ou

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2p} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{pp} & \dots & c_{pn} & d_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

com $c_{ii} \neq 0, \forall i$. Logo o sistema é possível e indeterminado (SPI) e $n - car(C)$ é o grau de indeterminação.

Por exemplo, se o grau de indeterminação for 1, dizemos que o sistema é simplesmente indeterminado e escrevemos SP1I. Se o grau de indeterminação for 2, dizemos que o sistema é duplamente indeterminado e escrevemos SP2I.

- Se $car(C) < car(\overline{C})$ temos o sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2p} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{pp} & \dots & c_{pn} & d_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right]$$

com $c_{ii} \neq 0, \forall i$, e alguns dos $d_i \neq 0$, para $i > p$. Logo o sistema é impossível (SI).

Exemplo

Pretende-se resolver o sistema $\left\{\begin{array}{llll} x & +4y & +3z & = & 1 \\ 2x & +5y & +3z & = & 5 \\ x & -3y & -2z & = & 4 \end{array}\right.$.

$$[\ A \mid B\ ] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 2\times l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[l_2 \leftarrow -1/3 \times l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -5 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + 7\times l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

Tem-se $car(C) = car(\overline{C}) = n = 3$, logo o sistema é possível e determinado.

Para obtermos a solução do sistema, podemos proceder de uma das formas seguintes:

1. Escrever o sistema da matriz em escada e resolvê-lo por substituição, da última equação para a primeira: $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ y + z = -1 \\ 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ y + (-2) = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4(1) + 3(-2) = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

2. Condensar a matriz (da direita para a esquerda e de baixo para cima) até obter a matriz identidade (Método de Eliminação de Gauss-Jordan):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow 1/2 \times l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_1 \leftarrow l_1 - 3 \times l_3 \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 - 4 \times l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Logo o conjunto solução do sistema é $CS = \{(3, 1, -2)\}$.

Exemplo

Pretende-se resolver o sistema $\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & & +z & = & 3 \\ & 2y & -3z & = & 5 \end{array}\right.$.

$$[\ A \mid B\ ] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 2 \times l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \leftarrow -1/2 \times l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, $\begin{cases} x + \dfrac{z}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y - \dfrac{3z}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3z}{2} \end{cases}$ O sistema é

possível e simplesmente e indeterminado

$(car(C) = car(\overline{C}) = 2 < n = 3)$ e o grau de indeterminação é $n - car(C) = 3 - 2 = 1$.

A solução do sistema é

$$CS = \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{z}{2}, \frac{5}{2} + \frac{3z}{2}, z \right), \forall z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo

Discutir, em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$, o sistema

$$\left\{\begin{array}{lllll} ax & +y & +z & = & 1 \\ x & +ay & +z & = & a \\ x & +y & +az & = & a^2 \end{array}\right. .$$

$$[\ A \mid B\ ] = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_2 \leftarrow l_2 - a \times l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1}]{}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} & y & z & \end{array} \end{array} \xleftrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a^2-a \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} & z & y & \end{array} \end{array}$$

$$\xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right]$$

O sistema é SPD se se tem $car(C) = car(\overline{C}) = n = 3$. Para isso a diagonal principal só pode conter elementos não nulos, isto é, $1 - a \neq 0 \wedge 2 - a - a^2 \neq 0$, ou seja, $a \neq 1 \wedge a \neq -2$.

Vejamos agora como classificar o sistema nas restantes situações:

- Para $a = 1$ temos o sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

  Como $1 = car(C) = car(\overline{C}) < n = 3$, o sistema é possível e duplamente indeterminado (SP2I). A solução geral do sistema é

  $$CS = \{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Para $a = -2$ temos o sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$.

  O sistema é impossível $(2 = car(C) \neq car(\overline{C}) = 3)$.

Resulta que:

- $a \neq 1 \wedge a \neq -2$: SPD;
- $a = 1$: SP2I;
- $a = -2$: SI.