Elaborado por: Eduarda Pinto Ferreira e Marta Pinto Ferreira
Proposta de resolução de alguns exercícios, pode ter erros, para comunicarem qualquer erro enviem um email para epf@isep.ipp.pt

1. Considere as funções $h(x) = 2^{x^2}(1+2x)$, determine:

a) $\frac{dh}{dx} = \left(2^{x^2}(1+2x)\right)' = 2x2^{x^2}ln2(1+2x) + 2^{x^2}2$ podiam parar aqui

$$= ln4\left(x2^{x^2}\right)(1+2x) + 2^{x^2+1}$$

$$(a^u)' = u'a^u lna \qquad ln(u^a) = aln(u)$$

$(uvw)' = (u)'vw + u(v)'w + uv(w)'$ podiam utilizar esta fórmula para o produto das 3 funções

b) $\frac{d^2h}{dx^2} = \left(2(ln2)x2^{x^2}(1+2x) + 2^{x^2}2\right) = \left(\left(2(ln2)x2^{x^2}\right)(1+2x) + 2^{x^2}2\right)'$

$$= \left(2(ln2)x2^{x^2}\right)'(1+2x) + \left(2(ln2)x2^{x^2}\right)(1+2x)' + \left(2^{x^2}2\right)' =$$

$= \left(2(ln2)2^{x^2} + 2(ln2)2x2^{x^2}ln2\right)(1+2x) + 2(ln2)x2^{x^2}2 + 2\left(2x2^{x^2}ln2\right)$ podiam parar aqui

$$= \left(2(ln2)2^{x^2} + 2(ln2)2x2^{x^2}ln2\right)(1+2x) + 2(ln2)x2^{x^2}2 + 4x2^{x^2}ln2$$

ou

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \left(ln4\left(x2^{x^2}\right)(1+2x) + 2^{x^2+1}\right)' = \left(ln4\left(2^{x^2} + ln4\left(x2^{x^2}\right)x\right)\right)(1+2x) + ln4\left(x2^{x^2}\right)2 + 2x2^{x^2+1}ln2$$

$$= \left(ln4\left(2^{x^2} + ln4\left(x2^{x^2}\right)x\right)\right)(1+2x) + ln16\left(x2^{x^2}\right) + x2^{x^2+1}ln4$$

2. Considere a função $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação $xy^4 + xcos(y) = x^3 - y^2$ determine a sua derivada em ordem a x.

$$xy^4 + xcos(y) = x^3 - y^2$$
$$x'y^4 + (y^4)'x + x'cos(y) + x\left(cos(y)\right)' = (x^3)' - (y^2)'$$

$y^4 + x4y^3y' + cos(y) + x\left(-sen(y)\right)y' = 3x^2 - 2yy'$ podiam parar aqui

$$4xy^3y' - xsen(y)y' + 2yy' = 3x^2 - y^4 - cos(y)$$
$$(4xy^3 - xsen(y) + 2y)y' = 3x^2 - y^4 - cos(y)$$
$$y' = \frac{3x^2 - y^4 - cos(y)}{4xy^3 - xsen(y) + 2y}$$

3. Considere a função $y = f(x)$, representada por $f(x) = sen(x) + 3$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto (0,3).

$y_0 = f(0) = sen(0) + 3 = 3$ não era necessário calcular, já é dado no enunciado

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$f'(x) = cos(x) \Longrightarrow m = f'(0) = cos(0) = 1$$

$y - 3 = 1(x - 0)$ podiam parar aqui

$$y = x + 3$$

4. Utilizando o teorema da derivada da função inversa, determine $\frac{dx}{dy}$ de $y(x) = e^{(x^3+1)}$ no ponto $(1, e^2)$.

Seja $y(x) = e^{(x^3+1)}$, então,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{(x^3+1)}$$

Logo, a inversa de y é:

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 e^{(x^3+1)}}$$

Como $(1, e^2)$., então:

$$\frac{dx}{dy}(e^2) = x'(e^2) = \frac{1}{\frac{dy(1)}{dx}} = \frac{1}{3(1)^2 e^{((1)^3+1)}} = \frac{1}{3e^2}$$

5. Resolva os seguintes integrais:

a) $\int \left(\frac{2a}{x} - \frac{b}{x^2} + 3c\right) dx = \int \frac{2a}{x} dx + \int -\frac{b}{x^2} dx + \int 3c\, dx = 2a \int \frac{1}{x} dx - b \int x^{-2}\, dx + 3c \int 1\, dx =$

$$= 2a\, ln|x| - b\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3cx + C$$ podiam parar aqui

$$= 2a\, ln|x| + \frac{b}{x} + 3cx + C$$

b) $\int (tg(2x) + sec(2x))^2 dx = \int (tg^2(2x) + 2tg(2x)sec(2x) + sec^2(2x))dx =$

$$= \int (sec^2(2x) - 1 + 2tg(2x)sec(2x) + sec^2(2x))dx =$$

$$= \int (2sec^2(2x) - 1 + 2tg(2x)sec(2x))dx = tg(2x) - x + \sec(2x) + C$$

Cálculos auxiliares

- $\int u'\, sec\, u\ \ tg\, udu = sec\, u + C.$ Está no formulário
- $tg^2(2x) = sec^2(2x) - 1$
- $\int 2sec^2(2x)dx = \int 2sec^2(2x)dx = tg(2x) + C$
- $\int 2tg(2x)sec(2x))dx = \sec(2x) + C$

6. Resolva o integral, $\int xsen^2(x)dx$ utilizando a fórmula de integração por partes.

Sinal	Derivar	Integrar	$\int xsen^2(x)dx =$
+	x	$sen^2(x)$	$= x\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sen(2x)\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}cos(2x)\right) + C$
-	1	$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sen(2x)\right)$	
+	0	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}cos(2x)$	$= \frac{x^2}{4} - \frac{xsen(2x)}{4} - \frac{1}{8}cos(2x) + C$

$$\int sen^2(x)dx = \int \frac{1 - cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \frac{1}{2}\int 2cos(2x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sen(2x)\right) + C$$

7. Utilizando a sugestão de substituição indicada, determine $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ fazendo $u = 1 + x^2$

Substituição incompleta: $\int \frac{x^3}{\sqrt{u}}\frac{1}{2x}du = \int \frac{x^2}{2\sqrt{u}}du$

$u = 1 + x^2$ $\quad$ $x^2 = u - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$ $\quad$ $du = 2xdx$ $\quad$ $dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{(u-1)x}{\sqrt{u}}\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} - u^{\frac{1}{2}} + C$$

Logo, $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$