AULA TEÓRICO - PRÁTICA 1

Tema: Funções Afim e Quadrática.
Função Módulo. Funções Exponencial e Logarítmica.

Objetivo: No final desta aula os alunos deverão ser capazes de:

• conhecer as funções afim e quadrática, a função módulo e as funções exponencial e logarítmica. Devem reconhecer essas funções através do gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal), esboçar o gráfico e reconhecer algumas propriedades: domínio, contradomínio, zeros, intersecção com os eixos coordenados, monotonia, etc..

• saber as propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;

• saber as propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = log_a x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;

• utilizar as regras operatórias de exponenciais e logaritmos;

• resolver equações e inequações.

1. Considere em $\mathbb{R}$, as funções f e g, assim definidas: $f(x) = -2x+8$ e $g(x) = x^2-5x+4$.

   1.1 Determine $f(2)$ e $g(3)$.

   1.2 Determine os zeros de f e de g.

   1.3 Determine os intervalos de $\mathbb{R}$ em que f é positiva e g é negativa.

   1.4 Calcule x, de modo que $f(x) \geq g(x)$.

   1.5 A função g é não injectiva. Justifique.

   1.6 Indique, sem fazer a representação gráfica da função g, as coordenadas do vértice da parábola, o eixo de simetria, o máximo ou mínimo (se existir).

2. Determine o domínio das funções seguintes:

   2.1 $f(x) = \sqrt{2x - 3x^2} - (x^2 + 3)$;

   2.2 $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt[4]{2x-1}}$;

2.3 $h(x) = -3 + 2\ln(x-1)$;

2.4 $i(x) = e^{\frac{1}{x}} + 3$;

2.5 $j(x) = -2\log(x^2 - 1)$;

3. Considere as funções: $f_1(x) = 3 - |2x+5|$ e $f_2(x) = \left|x^2 - 4x\right|$.

3.1 Defina analiticamente cada uma das funções e represente-as geometricamente.

3.2 Indique para cada uma delas subintervalos do respectivo domínio em que a função seja injectiva.

4. Simplifique as expressões seguintes:

4.1 $\log_3(\sqrt{3})\ \ln(\sqrt[3]{e^2}) - \log_5(1) + log_8(2)\ 5^{\log_5(12)}$

4.2 $2^{3+\log_2(x^5)} + log_{0.01}(10)$

5. Utilizando propriedades dos logaritmos, escreva cada uma das expressões em função de r, s e t, com $r = \ln a$, $s = \ln b$ e $t = \ln c$.

5.1 $A = \ln\left(a^2 \dfrac{\sqrt[3]{ab}}{c}\right)$.

5.2 $B = \ln\left(\sqrt{\dfrac{c^5}{ab^3}}\right)$.

6. Resolva cada uma das seguintes equações:

6.1 $log_4(x) = \dfrac{1}{2}$;

6.2 $9^{-3-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x-1}$;

6.3 $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^4\right) = \ln(2x)$;

6.4 $4 + 3\log(2x) = 16$;

6.5 $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

7. Determine o conjunto solução das inequações seguintes:

7.1 $e^{3x} < 3$

7.2 $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) < 1$

7.3 $2\ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(x-2)$

7.4 $\log(2x+1) < \log(x^2+6) - \log(x)$

8. Considere a função: $f(x) = -1 + 2^{x-1}$.

   8.1 Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

   8.2 Calcule a função inversa $y = f^{-1}(x)$.

   8.3 Esboce o gráfico das funções $f(x)$ e $f^{-1}(x)$, evidenciando a relação que existe entre eles.

   8.4 Mostre que $f(2) + f^{-1}(7) = \dfrac{5}{2} \log_{\sqrt{3}}(3)$

9. Considere a função: $f(x) = 5\left(1 + 2e^{3x}\right)$.

   9.1 Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

   9.2 Defina analiticamente a função $f^{-1}(x)$.

   9.3 Determine o conjunto solução da equação $f\left(\dfrac{1}{3}x - 1\right) + f^{-1}(15) = f(-\ln 2)$.

10. Considere a função: $g(x) = \dfrac{1}{2} \log_2\left(\dfrac{2}{1-x}\right)$.

    10.1 Determine o domínio e o contradomínio de $g(x)$.

    10.2 Defina analiticamente a função $g^{-1}(x)$.

11. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = 1 - \ln(e - x)$.

    11.1 Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

    11.2 Averigue se a função de $f(x)$ tem zeros.

    11.3 Determine o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 - \ln(3e)$.

    11.4 Caracterize a função inversa de $f(x)$.

    11.5 Determine o domínio e o contradomínio de $g(x) = 3\left(2 + |f^{-1}(x)|\right)$.

12. A cafetaria Doces da Lu mantém a temperatura ambiente constante. A Joana é cliente habitual e decidiu tomar um café.
    A temperatura, em graus centígrados, de um café, t minutos após ter sido colocado na chávena, é dada por

    $$T(t) = 20 + 50\, e^{-0.04t}, \quad (t \geq 0)$$

    12.1 Determine a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.

    12.2 Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus centígrados? Apresente o resultado em minutos e segundos.

13. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela, são grandezas usadas em Astronomia para determinar a distância (d), em *parsec*, a que essa estrela se encontra da Terra.

    As três variáveis (m, M, d) estão relacionadas pela fórmula

$$10^{0.4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$$

    13.1 A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$ e magnitude absoluta $M = -4.6$. Qual é a distância da Terra à Estrela Polar?
    (Apresente o resultado em *parsec*, arredondado às unidades.)

    13.2 Mostre que, para quaisquer m, M, d, se tem: $m = M - 5\ (1 - \log_{10} d)$.

14. Alguns biólogos modelam o número de espécies, S, numa área fixa A (como uma ilha por exemplo) pela relação espécie-área

$$\log S = \log c + k \log A,$$

    onde c e k são constantes positivas que dependem do tipo de espécie e habitat.

    14.1 Resolva a equação em função de S.

    14.2 Use a alínea anterior para mostrar que se $k = 3$, então, dobrar a área aumenta o número de espécies oito vezes.

Soluções:

1.1 $f(2) = 4$, $g(3) = -2$

1.2 4 é zero de f, 1 e 4 são zeros de g

1.3 $f(x) > 0 \wedge g(x) < 0 \Longrightarrow x \in]1, 4[$

1.4 $-1 \leq x \leq 4$

1.5 g tem dois zeros, o que significa que existem dois objetos diferentes com a mesma imagem, pois: $1 \neq 4$ e $g(1) = g(4) = 0$

1.6 $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$; $x = \frac{5}{2}$; a função tem um mínimo:$-\frac{9}{4}$

2.1 $D_f = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ 2.2 $D_g = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ 2.3 $D_h =]1, +\infty[$

2.4 $D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 2.5 $D_j =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

3.1 $f_1(x) = \begin{cases} 2x + 8 & ,\text{se } x < -\frac{5}{2} \\ -2x - 2 & ,\text{se } x \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$; $f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & ,\text{se } x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[\\ -x^2 + 4x & ,\text{se } x \in]0, 4[\end{cases}$

3.2 $f_1(x)$ é injetiva em $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right]$ ou $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$; $f_2(x)$ é injetiva em $]-\infty, 0]$ ou $[0, 2]$ ou $[2, 4]$ ou $[4, +\infty[$

4.1 $\frac{13}{3}$ 4.2 $8x^5 - \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}^+$

5.1 $A = \frac{7}{3}r + \frac{1}{3}s - t$ 5.2 $B = -\frac{1}{2}r - \frac{3}{2}s + \frac{5}{2}t$

6.1 $S = \{2\}$ 6.2 $S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$ 6.3 $S = \{2\}$ 6.4 $S = \{5000\}$ 6.5 $S = \{\ln 3\}$

7.1 $\left]-\infty, \frac{\ln 3}{3}\right[$ 7.2 $\left]\frac{13}{3}, +\infty\right[$ 7.3 $\left]\frac{11}{5}, 3\right[$ 7.4 $]0, 2[$

8.1 $D_f = \mathbb{R}$ $D'_f =]-1, +\infty[$

8.2 $f^{-1}(x) = 1 + log_2(x + 1)$

9.1 $D_f = \mathbb{R}$ $D'_f =]5, +\infty[$

9.2 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x - 5}{10}\right)$

9.3 $S = \{3 - \ln 8\}$

10.1 $D_g =]-\infty, 1[\qquad D'_g = \mathbb{R}$

10.2 $g^{-1}(x) = 1 - 2^{1-2x}$

11.1 $D_f =]-\infty, e[\qquad D'_f = \mathbb{R}$

11.2 Sim, $x = 0$

11.3 $x \in [-2e, e[$

11.4

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow]-\infty, e[\\ x &\longmapsto e - e^{-x+1} \end{aligned}$$

11.5 $D_g = \mathbb{R} \qquad D'_g = [6, +\infty[$

12.1 $T(0) = 70$ graus

12.2 $t = -25 \ln\left(\frac{45}{50}\right) \Leftrightarrow t \approx 2$ min 38 s

13.1 $d \approx 209$ *parsec*

14.1 $S = c\ A^k$