Análise Matemática

Derivadas 1

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

1º Semestre 22-23

Sumário

Função Composta

Definição

Sejam $g : A \to B$ e $f : C \to D$ duas funções tais que o contradomínio de g é um subconjunto do domínio de f, $g(A) \subset C$.
Desta forma, qualquer que seja o $x \in A$, a sua imagem $g(x)$ está no domínio de f e existe $f(g(x)) \in D$.

Podemos definir uma nova função de A com valores em D:

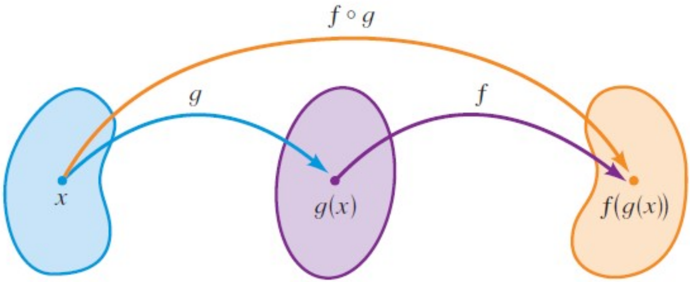
$$\begin{array}{ccccc} A & \to & g(A) \subset C & \to & D \\ x & \mapsto & g(x) & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Função Composta

Damos o nome de f **composta com** g, e designamos por $f \circ g$, à função definida por $f \circ g : A \to D$, da seguinte forma

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in A.$$

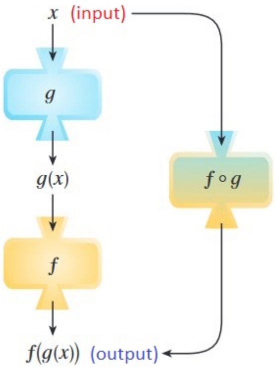
Esquema gráfico



O **domínio de $f \circ g$** é definido por:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Esquema gráfico

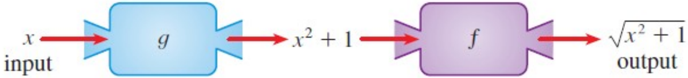


A máquina $f \circ g$ é composta pela máquina g (primeiro) e depois pela máquina f

Esquema gráfico

- Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Determine a função composta $f \circ g$.

Como $f \circ g = f(g(x))$, temos:



Derivada da função composta

Podemos calcular derivadas de funções que são soma, produto ou quociente de funções elementares.

Ainda não tratamos funções mais complexas, como por exemplo $\cos(\sqrt{x})$ sem aplicar diretamente a definição de derivada.

Derivada da função composta

Teorema de derivada da função composta

Sejam f e g duas funções reais tais que $D_f \subseteq D'_g$. Se g é derivável no ponto x e f é derivável no ponto $y = g(x)$, então a função composta $f \circ g$ é derivável em x. Temos

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Derivada da função composta

Teorema de derivada da função composta

Usando a notação de Leibniz, consideramos $y = f(u)$ e $u = g(x)$, ambas funções diferenciáveis, temos

$$\begin{array}{ccccc} y & \rightarrow & u & \rightarrow & x \\ \\ \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dy}{du} & \times & \dfrac{du}{dx} \end{array} \tag{1}$$

Podemos agora **generalizar** todas as fórmulas de derivação das funções elementares.

Exemplo ✍

Exemplo 11

Considere a função $f(x) = \cos\sqrt{x^2 - 3}$.

11.1 Escreva a função f como decomposição de outras funções;

11.2 Calcule a sua derivada, usando o teorema da derivada da função composta.

Exemplo ✍

Exemplo 11

Considere a função $f(x) = \cos\sqrt{x^2 - 3}$.

11.1 Escreva a função f como decomposição de outras funções;

11.2 Calcule a sua derivada, usando o teorema da derivada da função composta.

Resolução:

11.1 Seja $y = \cos\sqrt{x^2 - 3}$.
Uma decomposição possível é: $y = \cos(u)$, $u = \sqrt{v}$ e $v = x^2 - 3$.

Exemplo ✍

Exemplo 11 (cont.):

11.2 Neste caso temos:

$$y \quad \rightarrow \quad u \quad \rightarrow v \quad \rightarrow x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

Ou seja, $\dfrac{dy}{dx} = -\sin(u) \times \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \times 2x$

Agora temos de escrever o resultado em função da variável independente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \sin(\sqrt{x^2-3}).$$

Função Inversa

Viu-se, anteriormente, que uma função f diz-se **injetiva** se não admitir o mesmo valor em pontos distintos do seu domínio, i.e.,

$$\forall x_1 \neq x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Geometricamente, isto equivale a dizer que toda a reta horizontal interseta o gráfico da função f no máximo num ponto.

Função Inversa

Dada uma função **injetiva** $y = f(x)$, designa-se por **função inversa** de f, e escreve-se f^{-1}, à função $x = f^{-1}(y)$ onde,

$$D_{f^{-1}} = D'_f \quad \wedge \quad D'_{f^{-1}} = D_f$$

☞**Nota**: Não confundir a função inversa de $f(x)$, denotada por $f^{-1}(x)$ com inverso algébrico de $f(x)$, denotado por $[f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$.

Derivada da função inversa

Teorema de derivada da função inversa

Sejam f uma função real de variável real, **injetiva** num intervalo $I \subseteq D_f$ e f^{-1} a função inversa de f quando restringida ao intervalo I, $f^{-1} : f(I) \to I$.

Se f é derivável num ponto x interior ao intervalo I e $f'(x) \neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $y = f(x)$ e tem-se:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Teorema de derivada da função inversa

Usando a notação de Leibniz, consideramos $y = f(x)$ e que admite função inversa, então podemos escrever a derivada da sua função inversa do seguinte modo:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Podemos agora **generalizar** todas as fórmulas de derivação das funções elementares.

Exemplos

Exemplo 12

Usando o teorema da derivada da função inversa, mostre que:

12.1 $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12.2 $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exemplos ✍

Resolução Exemplo 12:

12.1 Seja $y = \arcsin(x)$ com $-1 \leq x \leq 1$, cuja função inversa é, $x = \sin(y)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Usando o teorema da derivada da função inversa, vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = (*)$$

No intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(y) > 0$

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se $\cos(y) = +\sqrt{1 - \sin^2(y)}$, logo substituindo em $(*)$ obtemos:

Exemplos ✍

Exemplo 12 (cont.):

12.1

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Generalizando, $y = \arcsin(u)$ em que $u = u(x)$ a expressão da derivada da função em ordem à variável x, é obtida associando a regra anterior à da função composta.

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(u)) = \frac{d}{du}(\arcsin(u)) \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{du}{dx}$$

Exemplos ✍

Exemplo 12 (cont.):

12.2 Seja $y = \arctan(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, cuja função inversa é,
$x = \tan(y)\ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$.

Aplicando o teorema da derivada da função inversa, obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)} = (*)$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se
$1 + \tan^2(y) = \sec^2(y)$, logo substituindo em $(*)$ obtemos:

$$(*) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Exemplo 12 (cont.):

12.2 **Generalizando**, $y = \arctan(u)$ em que $u = u(x)$ a expressão da derivada da função em ordem à variável x, é obtida associando a regra anterior à da função composta.

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan(u)\right) = \frac{d}{du}\left(\arctan(u)\right) \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \times \frac{du}{dx}$$

Exercícios ✍

1. Usando o teorema da derivada da função inversa, calcule $\dfrac{dx}{dy}$ da função $y = \arccos(2x) + 1$.

Derivadas de ordem superior a um

• Seja f uma função real de variável real derivável e com função derivada $f'(x)$.
Se a função f' é derivável num ponto $x = a$ interior a $D'_f \subseteq D_f$, então dizemos que a função f **é duas vezes derivável** no ponto $x = a$.

Esta derivada denota-se por $f''(x)$ e designa-se por segunda derivada da função f em $x = a$.

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada da}} \quad \underbrace{\left(\frac{df}{dx}\right)}_{1^{\text{a}}\ \text{derivada}} = \underbrace{\frac{d^2 f}{dx^2}}_{2^{\text{a}}\ \text{derivada}}$$

E assim, **sucessivamente**, podemos definir a derivada de qualquer ordem superior a 2.

Derivadas de ordem superior a um

Definição

Sejam f uma função real de variável real e $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que f é uma função n-vezes derivável no ponto $x = a$, se a função f for $n-1$ vezes derivável numa vizinhança do ponto $x = a$ e se existir o limite

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

Derivadas de ordem superior a um

Seja $y = f(x)$

- Derivada de 1^a ordem: y'; f'; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{df}{dx}$;

- Derivada de 2^a ordem: $y'' = (y')'$; $f'' = (f')'$;
$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$; $\dfrac{d^2f}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$;

- Derivada de 3^a ordem: $y''' = (y'')'$; $f''' = (f'')'$;
$\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$; $\dfrac{d^3f}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)$;

Derivadas de ordem superior a um

- Derivada de 4^a ordem: $y^{(4)}$; $f^{(4)}$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$; $\dfrac{d^4f}{dx^4}$;

$$\vdots$$

- **Derivada de ordem n**:
$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$; $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$; $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right)$;
$\dfrac{d^nf}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{(n-1)}f}{dx^{(n-1)}}\right)$