AULA TEÓRICO - PRÁTICA 2

Tema: Trigonometria. Funções trigonométricas. Funções trigonométricas inversas.

Objetivo: No final desta aula os alunos deverão ser capazes de:

- estudar as funções seno, cosseno, tangente, co-tangente, secante e co-secante: definição; domínio, contradomínio, zeros, intervalos de monotonia e respetivos gráficos;
- utilizar as fórmulas trigonométricas;
- definir e caracterizar as funções trigonométricas inversas arcsin, arccos, arctan e arccot.

1. Sejam: $n(x) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e
$m(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(3\pi + x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin(2\pi + x)$.

   Mostre que $\quad m(x) = n(x) + \arctan\left(\ln\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

2. Para cada equação:

   a) Encontre todas as soluções da equação.

   b) Encontre as soluções que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi[$.

   2.1 $2\cos(2\theta) + 1 = 0$

   2.2 $2\cos^2(\theta) + \sin(\theta) = 1$

   2.3 $\sec(\theta) - \tan(\theta) = \cos(\theta)$

3. Mostre que o ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ pertence ao círculo de raio 1 centrado na origem do plano xy.

4. Calcule

   4.1 $\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)$;

   4.2 $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

   4.3 $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

   4.4 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4.5 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

4.6 $\arcsin\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$;

4.7 $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

4.8 $\csc\left(\arctan\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

4.9 $\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{7}\right)\right)$;

4.10 $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)$;

4.11 $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$;

4.12 $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

4.13 $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$;

4.14 $\csc\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

4.15 $\sec\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

5. Determine o ponto $P(x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arccot}\left(\frac{x+2-\pi}{\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right) \quad \text{e} \quad y = \csc\left(\arcsin\left(-\frac{3}{8}\right)\right).$$

6. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das funções definidas por:

6.1 $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$;

6.2 $g(x) = -\frac{\pi}{3} + \operatorname{arccot}(-3x)$.

7. Determine o domínio e o contradomínio das funções definidas por:

7.1 $f(x) = 1 - 5\cos\left(\frac{x}{3}\right)$;

7.2 $f(x) = 1 - |-2 + 3\sin(2x)|$;

7.3 $f(x) = 4\arcsin\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \pi$;

7.4 $f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\operatorname{arccot}(5x)$;

7.5 $f(x) = \left|-3\pi + 2\arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\right|$;

7.6 $f(x) = \pi - \frac{5}{3}\left|\arctan(1-4x)\right|$.

8. Considere a função real de variável real $f(x) = 2\cos\left(\frac{3x-\pi}{3}\right) + 1$. Determine:

8.1 O domínio e o contradomínio da função.

8.2 Uma expressão geral dos zeros da função.

8.3 A expressão da função inversa e caracterize-a.

9. Considere a restrição principal da função cosseno e a função: $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(3x)$.

9.1 Determine o domínio e o contradomínio de f.

9.2 Determine a expressão da função inversa $f^{-1}(x)$.

9.3 Defina, em extensão, o conjunto $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \; e^{\frac{\pi}{3} - f(x)} = 1\right\}$.

10. Seja g a função real de variável real definida por: $g(x) = 1 - \sin(2x)$.

10.1 Indique o domínio e o contradomínio de g.

10.2 Sendo $h(x) = g(x) + g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, mostre que h é uma função constante.

11. Caracterize a função inversa da função definida por: $t(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\arctan(1-x)}{3}$.

12. É dada a função definida por: $h(x) = 2 + \arcsin(3x+1)$. Determine

12.1 o domínio e o contradomínio de h;

12.2 $h(0)$ e $h\left(-\frac{1}{6}\right)$;

12.3 $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \; h(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^4\right)\right\}$.

12.4 a caracterização da função inversa de h.

13. Considere a função $y = f(x) = b + 2\arcsin(3x + a), \quad a, b \in \mathbb{R}$.
Determine o valor das constantes a e b de modo que $D_f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$ e $D'_f = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

14. Um navio encontra-se atracado num porto. A distância d, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar varia com a maré.
Admita que d (em metros) é dada, em função do tempo t (em horas), por

$$d(t) = 10 - 3\cos(2t).$$

14.1 Qual é a distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré alta?

14.2 Qual é o primeiro instante em que esse ponto do casco está a uma distância mínima do fundo do mar?

Soluções:

2.1 a) $\frac{\pi}{3}+k\pi,\ -\frac{\pi}{3}+k\pi;\quad k\in\mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$

2.2 a) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi;\quad k\in\mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$

2.3 a) $k\pi;\quad k\in\mathbb{Z}$ b) $0,\ \pi$

4.1 -1 4.2 2 4.3 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4.4 $\frac{2\pi}{3}$ 4.5 $\frac{3}{5}$ 4.6 $-\frac{\pi}{5}$ 4.7 $\frac{2\pi}{3}$ 4.8 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4.9 $\frac{\sqrt{45}}{7}$ 4.10 $\frac{5\pi}{6}$ 4.11 $-\frac{\pi}{5}$ 4.12 $\frac{\pi}{4}$ 4.13 $\frac{\pi}{6}$ 4.14 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4.15 2

5. $P(x,y)=\left(\pi,-\frac{8}{3}\right)$

6.1 $D_f=[-1,0]$ $D'_f=[0,\pi]$ zero: -1

6.2 $D_g=\mathbb{R}$ $D'_g=\left]-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$ zero: $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

7.1 $D_f=\mathbb{R}$ $D'_f=[-4,6]$

7.2 $D_f=\mathbb{R}$ $D'_f=[-4,1]$

7.3 $D_f=[0,6]$ $D'_f=[-3\pi,\pi]$

7.4 $D_f=\mathbb{R}$ $D'_f=\left]-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$

7.5 $D_f=[-4,4]$ $D'_f=[2\pi,4\pi]$

7.6 $D_f=\mathbb{R}$ $D'_f=\left]\frac{\pi}{6},\pi\right]$

8.1 $D_f=\mathbb{R}$ $D'_f=[-1,3]$

8.2 $x=\pi+2k\pi\ \vee\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

8.3 $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}+\arccos\left(\frac{x-1}{2}\right)$ $D_{f^{-1}}=[-1,3]$ $D'_{f^{-1}}=\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

9.1 $D_f=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ $D'_f=\left[-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 9.2 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi-3x}{6}\right)$

9.3 $x=\frac{1}{3}$

10.1 $D_g=\mathbb{R}$ $D'_g=[0,2]$

11.

$$\begin{aligned} t^{-1}:\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 1-\tan\left(\frac{3\pi-6x}{4}\right)\end{aligned}$$

12.1 $D_h = \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ $\quad D'_h = \left[2-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}\right]$

12.2 $h(0) = \frac{4+\pi}{2}$ e $h\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{12+\pi}{6}$

12.3 $\frac{\sqrt{3}-2}{6}$

12.4

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : \left[2-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \left[-\frac{2}{3}, 0\right] \\ x & \longmapsto & \frac{-1+\sin(x-2)}{3} \end{array}$$

13. $a = 2, \quad b = -\frac{\pi}{3}$

14.1 13 m

14.2 0 h