Licenciatura em Engenharia Informática
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Instituto Superior de Engenharia do Porto

Exame de Recurso - PARTE 1 **10 de fevereiro de 2023**

NOME: NÚMERO:

- A duração da parte 1 da prova é de **60 minutos**.
- Não é permitida a utilização de nenhum material de consulta ou auxiliar de cálculo.

GRUPO 1

Responda a cada uma das questões deste grupo no próprio enunciado. Não deve apresentar cálculos.

1. (1,5 val.) Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique uma afirmação verdadeira (escolha apenas uma opção).

☐ Verifica-se que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

☐ A entrada $(2,3)$ da matriz $P^{-1}R$ é 7 e a entrada $(4,1)$ de R^TP é igual a 8.

☐ A matriz PRR^T é do tipo 3×4.

☐ Nenhuma das outras opções é verdadeira.

2. (1,5 val.) Sejam A e $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas.

Indique uma afirmação verdadeira (escolha apenas uma opção).

☐ $(AB)^T = AB$

☐ A equação $A(B^T + X) = B^T$, em X, tem a solução $X = (A^{-1} - I)B$.

☐ A matriz $A + A^T$ não é simétrica.

☐ Nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

vire, p.f. (V1)

3. (2,5 val.) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Indique uma afirmação FALSA.

- ☐ O complemento algébrico de a_{34} é $= -4$.
- ☐ O menor principal de a_{22} é -4.
- ☐ O $\det(2A^{-1}) = -2$.
- ☐ O $\det(A - 4I_4) = \det(A) - 4$.

4. (1,0 val.) Dada a matriz $E = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real, indique uma afirmação verdadeira (escolha apenas uma opção).

- ☐ Se $k = 0$, a sua característica é 2.
- ☐ Se $k = 1$, a sua característica é 1.
- ☐ Se $k \neq 1$ e $k \neq -2$ a sua característica é 2.
- ☐ Nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

GRUPO 2

Neste grupo apresente as definições, os cálculos que efetuar e justifique todas as conclusões que obtiver. Utilize uma folha à parte.

1. (1,5 val.) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ c & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$, calcule $\begin{vmatrix} m-1/2 & 2m & m-2 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix}$, usando exclusivamente as propriedades dos determinantes.

2. (2,0 val.) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 3x - y = 2 \\ -x - y - 3z = a \end{cases}$$

onde a é um parâmetro real.

   a) Indique para que valores de a o sistema é de Cramer.

   b) Use o método de Cramer para encontrar a solução do sistema quando $a = 0$.

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Recurso - PARTE 2 **10 de fevereiro de 2023**

NOME: NÚMERO:

- A duração da parte 2 da prova é de **60 minutos**.
- Não é permitida a utilização de nenhum material de consulta ou auxiliar de cálculo.

GRUPO 1

Responda a cada uma das questões deste grupo no próprio enunciado. Não deve apresentar cálculos.

1. (1,5 val.) Em $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\}$. Indique apenas uma opção.

   ☐ $\{(1,0,0), (-1,0,1)\}$ é uma base de A.
   ☐ $\{(1,1,0), (0,0,0)\}$ é uma base de A.
   ☐ $\{(2,2,0), (-1,0,0)\}$ é uma base de A.
   ☐ $\{(1,1,0), (-1,0,1), (1,0,0)\}$ gera A.
   ☐ $\{(2,2,0), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ gera A.
   ☐ Nenhuma das outras opções.

2. (1,5 val.) Para os vetores $u = (1,2,2), v = (0,1,-3)$ e $s = (1,1,k)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, pode-se concluir que (indique apenas uma opção):

   ☐ Se $k = 4$ os vetores u, v e s são linearmente dependentes.
   ☐ Se $k = 1$ o vetor s é combinação linear de u e v.
   ☐ Se $k = 5$ os vetores u, v e s são linearmente dependentes.
   ☐ Nenhuma das outras opções.

3. (1,0 val.)Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido com as operações de adição que se seguem. O símbolo $+$ denota a operação usual de adição.

   $x \oplus_1 y = x + 3y$ $\qquad$ $x \oplus_2 y = x + y - 2$

   Pode-se afirmar que (escolha apenas uma opção):

   ☐ O oposto de 3 para $\oplus_2$ é 1.
   ☐ O elemento neutro de $\oplus_2$ é 0.
   ☐ A operação $\oplus_1$ é comutativa.
   ☐ A operação $\oplus_2$ não é comutativa.
   ☐ A operação $\oplus_1$ é associativa.
   ☐ Nenhuma das outras opções.

4. (1,5 val.) Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, y + z, x + y + z)$, complete as frases:

   a) O Núcleo de T é $N(T) =$ ....

   b) A Imagem de T é $Im(T) =$ .... (indique uma ou mais condições em x,y,z).

5. (1,0 val.) Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. A transformação associada a esta matriz, na base canónica, tem (indique só uma opção):

- ☐ O subespaço próprio S=$\{(x, 0, -3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ associado ao valor próprio $\lambda = 2$.
- ☐ O subespaço próprio S=$\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ associado ao valor próprio $\lambda = 2$.
- ☐ O subespaço próprio S=$\{(x, 0, -3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ associado ao valor próprio $\lambda = 4$.
- ☐ O subespaço próprio S=$\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ associado ao valor próprio $\lambda = 4$.
- ☐ Nenhuma das outras opções.

GRUPO 2

Neste grupo apresente as definições, os cálculos e justifique todas as conclusões que obtiver. Utilize uma folha à parte.

1. (2,0 val.) Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + ay + z = b \\ x + a^2y + az = a \\ x + ay + az = b \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$ onde a e $b \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema em função dos parâmetros a e b.

   b) Para $a = b = 2$ resolva-o pelo método de Gauss-Jordan.

2. (1,5 val.) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(4, -1) = (0, 1, 2)$. Determine $T(x, y)$ e $T(1, 1)$.

Algumas definições estudadas em ALGAN

O terno $(V, \oplus, \odot)$ é um **espaço vetorial** real se e só se:

(A_1) (Operação interna) $\forall u, v \in V, u \oplus v \in V$;
(A_2) (Comutatividade) $\forall u, v \in V, u \oplus v = v \oplus u$;
(A_3) (Associatividade) $\forall u, v, w \in V, (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$;
(A_4) (Existência de elemento neutro) $\exists e \in V, \forall u \in V, u \oplus e = u = e \oplus u$;
(A_5) (Existência de elemento oposto) $\forall u \in V, \exists u' \in V, u \oplus u' = e = u' \oplus u$.

(M_1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \alpha \odot u \in V$;
(M_2) (Associatividade da multiplicação por escalar) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V, (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$;
(M_3) (Distributividade da adição em V) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V, \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$;
(M_4) (Distributividade da adição em $\mathbb{R}$) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$;
(M_5) (Elemento neutro da multiplicação por escalar) $\forall u \in V, 1 \odot u = u$.

Diz-se que $(W, \oplus, \odot) \subseteq (V, \oplus, \odot)$ é um **subespaço vetorial** de $(V, \oplus, \odot)$ se e só se:

1. $0_V \in W$;
2. $\forall u, v \in W, u \oplus v \in W$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W, \alpha \odot u \in W$.

A transformação $T : V \to V'$ é uma **transformação linear** de V em V' se e só se:

1. $\forall u, v \in V, T(u + v) = T(u) + T(v)$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, T(\alpha u) = \alpha T(u)$.