10.3.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{10.14}$$

где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

Будем искать решение дифференциального уравнения (10.14) в виде $y = e^{kx}$. Подставим эту функцию в уравнение:

$$y' = k e^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx} \ \Rightarrow \ a_0 k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0 \ \Rightarrow$$

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{10.15}$$

Если k удовлетворяет уравнению (10.15), то функция $y = e^{kx}$ является решением дифференциального уравнения (10.14).

Уравнение (10.15) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения (10.14).

Решение дифференциального уравнения (10.14) будет зависеть от характера корней квадратного уравнения (10.15). Как всякое квадратное уравнение, оно может иметь либо пару действительных различных корней $(D > 0)$, либо совпадающие (двукратные) корни $(D = 0)$, либо пару комплексно-сопряженных корней $(D < 0)$.

Рассмотрим всевозможные случаи.

1) Пусть характеристическое уравнение имеет *различные действительные* корни $k_1 \neq k_2$. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ – решения дифференциального уравнения (10.14), причем $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} \neq const$. Следовательно, y_1, y_2 линейно независимы, а потому образуют ф.с.р. По теореме 3 общее решение (10.14) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 8y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 8 = 0 \Rightarrow$ $k_1 = 4,\ k_2 = -2 \Rightarrow y_1 = e^{4x},\ y_2 = e^{-2x}$ – ф.с.р.

Тогда $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$ – общее решение этого дифференциального уравнения.

2) Пусть характеристическое уравнение имеет *действительные равные* корни $k_1 = k_2 = k$. Тогда $y_1 = e^{kx}$ – решение дифференциального уравнения (10.14). Покажем, что в качестве второго решения, линейно независимого с этим, можно взять функцию $y_2 = xe^{kx}$.

Подставим эту функцию в уравнение:

$$y' = e^{kx} + kxe^{kx},\ \ y'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx} \ \Rightarrow$$

$$a_0\left(2ke^{kx} + k^2xe^{kx}\right) + a_1\left(e^{kx} + kxe^{kx}\right) + a_2xe^{kx} = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(a_0k^2 + a_1k + a_2\right) + 2a_0k + a_1 = 0,$$

где k – двукратный корень уравнения (10.15). По теореме Виета $k_1 + k_2 = 2k = -\dfrac{a_1}{a_0} \ \Rightarrow\ 2a_0k + a_1 = 0$, поэтому $y_2 = xe^{kx}$ удовлетворяет уравнению (10.14). Кроме того, $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}} \neq const$, то есть y_1, y_2 образуют ф.с.р., и общее решение дифференциального уравнения (10.14) в этом случае имеет вид:

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 10k + 25 = 0 \Rightarrow \left(k+5\right)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -5.$$

Отсюда ф.с.р. состоит из функций $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = xe^{-5x}$ и общее решение имеет вид $y = e^{-5x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

3) Пусть характеристическое уравнение (10.15) имеет *комплексные* корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Так как $k_1 \neq k_2$, то решения $\overline{y_1} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $\overline{y_2} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ линейно независимы, значит, образуют ф.с.р. Но по теореме 1 при любых C_1, C_2 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ – решение (10.14), поэтому подберем постоянные C_1 и C_2 так, чтобы получить пару *действительных* линейно независимых решений уравнения. Воспользуемся для этого *формулой Эйлера* (она будет доказана позже в гл.13)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{10.16}$$

Из (10.16) имеем:

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$\overline{y_2} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Отсюда новая *действительная* фундаментальная система решений может быть составлена из функций $y_1 = \dfrac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_1 = \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение дифференциального уравнения (10.14) тогда имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = 1 \pm 2i$: $\alpha = \mathrm{Re}\; k_1 = 1,\; \beta = \mathrm{Im}\; k_1 = 2$.

Следовательно, ф.с.р. данного уравнения состоит из функций $y_1 = e^x\cos 2x,\; y_2 = e^x\sin 2x$, а $y = e^x\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$ – общее решение.

Все вышесказанное можно систематизировать в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$		
Характеристическое уравнение	$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$		
Корни	$k_1 \neq k_2,\; k_{1,2} \in \mathbb{R}$	$k_1 = k_2 = k,\; k \in \mathbb{R}$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
Ф.с.р.	$y_1 = e^{k_1 x},\; y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx},\; y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Общее решение	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

10.3.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ $n-$го ПОРЯДКА

Для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (10.17)$$

$a_i \in \mathbf{R},\; i = 0,1,\ldots,n$, характеристическое уравнение имеет вид: