Решив первое уравнение, подставим найденную функцию $u(x)$ во второе дифференциальное уравнение и найдем $v(x)$, как *общее* решение этого уравнения.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Пусть $y = uv \Rightarrow u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow v(u' + u\,\mathrm{tg}\,x) + uv' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Отсюда

$$\begin{cases} u' + u\,\mathrm{tg}\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = -u\,\mathrm{tg}\,x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx \Rightarrow \ln|u| = \ln|\cos x| \Rightarrow u = \cos x, \\ v'u = \dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx}\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \displaystyle\int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \mathrm{tg}\,x + C. \end{cases}$$

Заметим, что функция $y(x) = 0$ не является решением дифференциального уравнения $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, поэтому при разделении переменных в первом из уравнений системы обоснованно полагалось, что $u(x) \neq 0$.

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \cos x(\mathrm{tg}\,x + C) = \sin x + C\cos x.$$

Найдем теперь решение задачи Коши:

$$y(0) = C = 0 \Rightarrow y = \sin x \text{ – искомое частное решение.}$$

10.2.4. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если может быть приведено к виду

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1, \tag{10.8}$$

При $\alpha = 0$ уравнение (10.8) является линейным, а при $\alpha = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = -1$). Это уравнение, кроме того, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка;

б) $y^2 y' = y^3 \ln x + 1 \Rightarrow y' = y \ln x + \dfrac{1}{y^2}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = -2$);

в) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = \dfrac{1}{2}$).

Уравнения вида (10.8) могут быть решены так же, как и линейные, *методом подстановки*: будем искать решение в виде $y(x) = u(x)\, v(x)$. Подставим эту функцию в уравнение: $u'v + uv' = puv + q(uv)^\alpha \Rightarrow v(u' - pu) + uv' = q(uv)^\alpha$. Тогда функции $u(x), v(x)$ найдутся как решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' - pu = 0 \\ v'u = q(uv)^\alpha. \end{cases}$$

Сначала решим первое уравнение этой системы, причем $u(x)$ – его *частное* решение. Подставив $u(x)$ во второе уравнение, найдем $v(x)$ как *общее* решение этого дифференциального уравнения.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Пусть $y = uv \Rightarrow u'v + v'u + 4xuv = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} \Rightarrow v(u' + 4xu) + v'u = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv}$. Отсюда

$$\begin{cases} u' + 4xu = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = -4xu \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{du}{u} = -4\int x\,dx,\; u \neq 0 \Rightarrow \ln|u| = -2x^2 \;\Rightarrow\; u = e^{-2x^2} \\ v'u = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} \;\Rightarrow\; v'e^{-2x^2} = 2xe^{-x^2}\sqrt{ve^{-2x^2}} \;\Rightarrow\; v' = 2x\sqrt{v} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\int x\,dx \end{cases}.$$

Интегрируя, получаем $2\sqrt{v} = x^2 + C$, или $v = \dfrac{(x^2 + C)^2}{4}$. Заметим, что при разделении переменных в первом из этих уравнений было потеряно решение $u(x) = 0$, а, значит, и решение $y(x) = 0$ исходного дифференциального уравнения.

Следовательно, общее решение имеет вид $y = e^{-2x^2} \dfrac{\left(x^2 + C\right)^2}{4}$, $y = 0$.

Отметим, что решение $y = 0$ не содержится в решении $y = e^{-2x^2} \dfrac{\left(x^2 + C\right)^2}{4}$ ни при каком значении постоянной C.

10.2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если левая часть его является полным дифференциалом некоторой функции $\upsilon(x,y)$. Это имеет место, если $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

ПРИМЕРЫ.

а) $\left(x^2 + y^2\right)y' + 2xy = 0$ – это уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Перепишем его таким образом: $2xy\,dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$. Тогда

$$P(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x;\ Q(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Значит, это не только однородное дифференциальное уравнение, но и уравнение в полных дифференциалах.

б) $2xy\,dx - \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$. Так как для этого дифференциального уравнения $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x$, оно не является уравнением в полных дифференциалах, хотя, так же как и предыдущее, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

По теореме о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (см.гл. 9) для того, чтобы выражение $f_x\,dx + f_y\,dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, необходимо и достаточно выполнение равенства $\dfrac{\partial f_y}{\partial x} = \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$. Поэтому, если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то существует функция