ПРИМЕР. Фундаментальную систему решений (ф.с.р.) уравнения $y'' + 4y = 0$ образуют, например, функции $y_1 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x$, или функции $y_3 = \sin 2x,\ y_2 = 3\cos 2x$.

ТЕОРЕМА 4 (*о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения*). Пусть $y = y_ч(x)$ – некоторое частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (10.11) с непрерывными коэффициентами $a_i(x),\ i = 0,1,2,\ a_0(x) \neq 0$, а $y = y_0(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (10.12). Тогда общее решение дифференциального уравнения (10.11) имеет вид: $y = y_0(x) + y_ч(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $y = y_0 + y_ч$ – решение дифференциального уравнения (10.11). Подставим эту функцию в уравнение:

$$a_0(y_0 + y_ч)'' + a_1(y_0 + y_ч)' + a_2(y_0 + y_ч) =$$
$$= (a_0 y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0) + (a_0 y_ч'' + a_1 y_ч' + a_2 y_ч) = 0 + f(x) = f(x).$$

Покажем, что это решение – общее. Зададим произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, удовлетворяющие условиям теоремы Коши.

По теореме 3 $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, где решения y_1, y_2 дифференциального уравнения (10.12) образуют ф.с.р. Тогда для определения постоянных C_1, C_2 получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_ч(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y_ч'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y_ч(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_ч'(x_0) \end{cases},$$

основной определитель которой $\Delta = W\big(y_1(x_0),\ y_2(x_0)\big) \neq 0$ по теореме 2.

Значит, эта система имеет единственное решение $\left(C_1^0, C_2^0\right)$, а функция $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + y_ч(x)$ – решение дифференциального уравнения (10.11), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Таким образом, по определению $y = y_0(x) + y_ч(x)$ – общее решение дифференциального уравнения (10.11).

Что и требовалось доказать.