ПРИМЕР. $y'' - \frac{2}{x} y' = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Легко проверить, что, например, $y = C,\ C \in \mathbb{R}$ является его решением. Также является решением $y = x^3 : y' = 3x^2,\ y'' = 6x \Rightarrow 6x - \frac{6x^2}{x} = 0$.

Функция $y = x^2$ этому уравнению не удовлетворяет, значит, решением не является.

Перейдем к изучению дифференциальных уравнений первого порядка.

10.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную, то есть имеет вид $F(x, y, y') = 0$.
Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{10.3}$$

называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то (10.3) можно переписать в виде $dy - f(x, y)dx = 0$. В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано и таким образом:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

ПРИМЕР. $y\,y' = y \ln x + 1$ – дифференциальное уравнение первого порядка. Перепишем его: $y\frac{dy}{dx} = y \ln x + 1 \Rightarrow (y \ln x + 1)dx - y\,dy = 0$. Наоборот, уравнение первого порядка $2x\,y\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ может быть после деления обеих его частей на $dx \neq 0$ записано так: $(x^2 + y^2)y' + 2x\,y = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)y' = -2x\,y$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

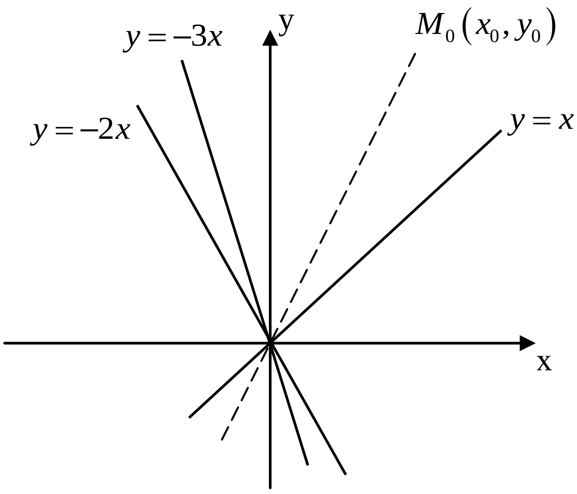

Рис. 2

Легко проверить, что $y = x$, $y = -2x$, $y = -3x$ и вообще $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ – решения этого дифференциального уравнения. Каждому из этих решений соответствует интегральная кривая: прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 2).

Если задать произвольную точку плоскости $M(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, то через нее проходит интегральная кривая $y = \frac{y_0}{x_0}x$, а через точки $N(0, y)$, $y \neq 0$ не проходит ни одной интегральной кривой (рис. 2).

Таким образом, можно сделать следующий вывод:

1) данное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений,
2) через любую точку плоскости, кроме принадлежащих оси OY, проходит единственная интегральная кривая,
3) через точки на оси OY либо не проходит ни одной интегральной кривой $(y \neq 0)$, либо проходит бесконечно много интегральных кривых (начало координат).

Этот вывод является иллюстрацией следующей теоремы.

ТЕОРЕМА Коши *(о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка)*. Пусть функция $f(x, y)$ – непрерывна вместе с производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой плоской области D. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in D$ существует, причем единственное, решение дифференциального уравнения (10.3), удовлетворяющее *начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

Без доказательства.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка: *найти интегральную кривую данного дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку плоскости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых не выполняется условие теоремы Коши, называются *особыми* точками дифференциального уравнения.

По теореме Коши через всякую неособую точку проходит единственная интегральная кривая. Если точка является особой для данного дифференциального уравнения, то через нее либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Общим* решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых значениях постоянной C из некоторого множества $y = y(x, C)$ является решением дифференциального уравнения;
2) при любом начальном условии, удовлетворяющем условиям теоремы Коши, найдется единственное значение $C = C_0$ такое, что $y = y(x, C_0)$ – решение, удовлетворяющее этому условию.

Решения дифференциального уравнения, полученные из общего при конкретных значениях постоянной C, называются *частными* решениями. *Задача Коши является задачей отыскания частного решения дифференциального уравнения.*

Все дифференциальные уравнения первого порядка разделяются на типы, которые различаются методами, применяемыми для их решения. Рассмотрим некоторые из них.

10.2.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)\,g(y) \qquad (10.4)$$

или

$$P_1(x)\,Q_1(y)dx + P_2(x)\,Q_2(y)\,dy = 0.$$

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x},\ g(y) = y$ – данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными;

б) $y'x + y = y^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - y}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x},\ g(y) = y^2 - y$ – это дифференциальное уравнение тоже является уравнением с разделяющимися переменными;