10.4. Методы отыскания частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений

ТЕОРЕМА 5. Пусть $y = y_1(x)$ – некоторое решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x),$$

а $y = y_2(x)$ – некоторое решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x).$$

Тогда функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ – решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно подставить $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение:

$$a_0(x)(y_1'' + y_2'') + a_1(x)(y_1' + y_2') + a_2(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= \left(a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) + \left(a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

Что и требовалось доказать.

10.4.1. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (10.11)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

По теореме 4 его общее решение $y = y_0(x) + y_ч(x)$, где $y = y_0(x)$ – общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (10.12), а $y = y_ч(x)$ – некоторое частное решение (10.11).

По теореме 3 $y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – ф.с.р. линейного однородного дифференциального уравнения (10.12), а C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Идея метода вариации произвольных постоянных состоит в следующем: будем искать *частное решение* дифференциального уравнения (10.11) *в виде, «похожем» на* y_0, именно: $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Подберем эти функции так, чтобы $y_ч(x)$ удовлетворяло уравнению (10.11).

Вычислим производные $y_ч(x)$:

$$y'_ч = C'_1(x)y_1 + y'_1C_1(x) + C'_2(x)y_2 + y'_2C_2(x).$$

Пусть $$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0. \qquad (10.19)$$

Тогда $y'_ч = y'_1C_1(x) + y'_2C_2(x)$, откуда $y''_ч = C'_1(x)y'_1 + y''_1C_1(x) + C'_2(x)y'_2 + y''_2C_2(x)$.

Подставляя найденные производные в дифференциальное уравнение (10.11), получим:

$$a_0\left(C'_1y'_1 + y''_1C_1 + C'_2y'_2 + y''_2C_2\right) + a_1\left(y'_1C_1 + y'_2C_2\right) + a_2\left(C_1y_1 + C_2y_2\right) = f(x).$$

Перегруппируем слагаемые в этом равенстве:

$$C_1\left(a_0y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1\right) + C_2\left(a_0y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2\right) + a_0\left(C'_1y'_1 + C'_2y'_2\right) = f(x).$$

Так как $y_1(x),\ y_2(x)$ – ф.с.р. однородного дифференциального уравнения (10.12), то первые два слагаемые в левой части равны нулю, поэтому

$$a_0\left(C'_1y'_1 + C'_2y'_2\right) = f(x). \qquad (10.20)$$

(10.19) и (10.20) – два уравнения для определения двух неизвестных функций $C_1(x),\ C_2(x)$.

Таким образом, если $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}, \qquad (10.21)$$

то $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (10.11).

Основной определитель системы (10.21) $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$ по теореме 2, так как решения y_1, y_2 линейно независимы. Следовательно, система (10.21) имеет единственное решение $\left(C'_1(x), C'_2(x)\right)$. Проинтегрировав найденные функции, найдем $C_1(x), C_2(x)$ и запишем частное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),\ a_0(x) \neq 0$, частное решение находится в виде $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$,

где $y = y_i(x),\ i = 1,2,\ldots,n$ – ф.с.р. соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$$

Неизвестные функции $C_i(x),\ i=1,2,\ldots,n$ являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0 \\ \quad\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Рассмотренный метод отыскания частного решения называется *методом вариации произвольных постоянных.*

ПРИМЕР. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-\dfrac{y'}{x}=2x$.

Составим и решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y''-\dfrac{y'}{x}=0$.

Это уравнение допускает понижение порядка, поэтому сделаем подстановку:

$$p(x)=y' \Rightarrow p'-\frac{p}{x}=0 \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p|=\ln|x|+\ln C \Rightarrow p=Cx$$

или $y'=Cx \Rightarrow y_0=C\dfrac{x^2}{2}+C_2=C_1x^2+C_2,\ C_1=\dfrac{C}{2}$ – общее решение однородного уравнения. В соответствии с теоремой 3 функции $y_1=x^2,\ y_2=1$ образуют ф.с.р. этого уравнения.

Будем искать частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения в виде $y_ч(x)=C_1(x)x^2+C_2(x)$. Для того, чтобы найти неизвестные функции $C_1(x), C_2(x)$, составим и решим систему (10.21):

$$\begin{cases} C_1'x^2+C_2'=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+C_2'=0 \Rightarrow C_2'=-\dfrac{x^3}{3} \\ C_1'\cdot 2x+C_2'\cdot 0=2x \quad\Rightarrow\quad C_1'=1 \Rightarrow C_1=x \end{cases}.$$

Заметим, что, так как в данном случае находится *частное* решение исходного неоднородного дифференциального уравнения, то *достаточно найти некоторые частные решения для каждого из двух уравнений системы* (10.21).

Итак, $y_ч(x)=x\cdot x^2-\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{2x^3}{3}$, а $y=C_1x^2+C_2+\dfrac{2x^3}{3}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ – искомое общее решение.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y=2\operatorname{tg}x.$$

Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y''+4y=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет комплексные корни $k_{1,2}=\pm 2i \quad\Rightarrow\quad y_1=\cos 2x,\quad y_2=\sin 2x$ – ф.с.р., а $y_0=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Будем искать частное решение в виде $y_ч(x)=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$. Составим систему уравнений (10.21):

$$\begin{cases}C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0\\ -2C_1'\sin 2x+2C_2'\cos 2x=2\operatorname{tg}x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0\\ -C_1'\sin 2x+C_2'\cos 2x=\operatorname{tg}x\end{cases}.$$

Решим последнюю систему методом Крамера (см.гл.1):

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -\sin 2x & \cos 2x\end{vmatrix}=1,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 2x\\ \operatorname{tg}x & \cos 2x\end{vmatrix}=-\operatorname{tg}x\,\sin 2x,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos 2x & 0\\ \sin 2x & \operatorname{tg}x\end{vmatrix}=\operatorname{tg}x\,\cos 2x\;\Rightarrow\begin{cases}C_1'=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\operatorname{tg}x\,\sin 2x\\ C_2'=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\operatorname{tg}x\,\cos 2x\end{cases}.$$

Отсюда

$$C_1=-\int\operatorname{tg}x\,\sin 2x\,dx=-2\int\sin^2x\,dx=\int(\cos 2x-1)\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x-x,$$

$$C_2=\int\operatorname{tg}x\,\cos 2x\,dx=\int\operatorname{tg}x\left(2\cos^2x-1\right)dx=\int(\sin 2x-\operatorname{tg}x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|.$$

Таким образом,

$$y_ч(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x-x\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|\right)\sin 2x=$$
$$=-x\cos 2x+\sin 2x\ln|\cos x|,$$

а общим решением данного дифференциального уравнения является функция $y=(C_1-x)\cos 2x+(C_2+\ln|\cos x|)\sin 2x$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.