НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

ТЕОРЕМА (Вейерштрасса). Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений.

(Без доказательства)

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае функции одной переменной теорема Вейерштрасса была справедлива для функции, непрерывной на отрезке. Таким образом, аналогом отрезка на плоскости (или в пространстве) является замкнутая ограниченная область.

Рассмотрим непрерывную функцию $z = z(x,\, y)$, $(x,\, y) \in D$, где D – замкнутая ограниченная область. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо во внутренних точках области – точках ее экстремума,– либо на границе области.

Будем считать, что $z = z(x,\, y)$ дифференцируема во внутренних точках D.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения, надо

1) *найти значения функции в стационарных точках, принадлежащих* D,

2) *найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе* D,

3) *выбрать из найденных значений самое большое и самое маленькое.*

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $D: x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3$ (рис. 21).

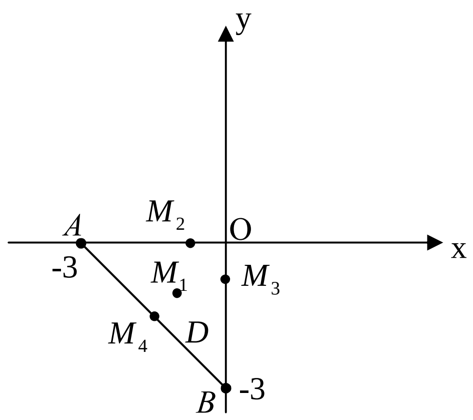

Рис. 21

1) Найдем стационарные точки функции, принадлежащие области D:

$$z'_x = 2x - y + 1,\ z'_y = 2y - x + 1 \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = -1.$$

Точка $M_1(-1,-1) \in D$ и $\boxed{z(M_1) = -1}$.

2) Исследуем функцию на границе. Граница состоит из трех участков OA, OB и AB (рис. 21). На каждом из этих участков будем решать задачу на условный экстремум.

На OA: $y=0,\ x\in[-3,\,0]$, поэтому $z_{OA}=x^2+x$ – функция одной переменной, заданная на отрезке. Здесь уравнение связи $y=0$ учтено подстановкой в $z(x,\,y)$.

Следуя алгоритму поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции, найдем

$$z'_{OA}=2x+1=0\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{2}\in[-3,\,0].$$

Значит, $M_2\left(-\frac{1}{2},\,0\right)$ – стационарная точка на границе и $\boxed{z(M_2)=-\frac{1}{4}}$.

Кроме того, $\boxed{z(O)=0}$ и $\boxed{z(A)=6}$.

Аналогично на OB: $x=0,\ y\in[-3,\,0]$, поэтому $z_{OB}=y^2+y,\ z'_{OB}=2y+1=0\ \Rightarrow$ $y=-\frac{1}{2}\in[-3,\,0]$.

Ещё одна стационарная точка на границе – $M_3\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ и $\boxed{z(M_3)=-\frac{1}{4}}$; $\boxed{z(B)=6}$.

На AB: $x+y=-3$ – уравнение связи для третьей задачи на условный экстремум. Подставим $y=-x-3$ в $z(x,\,y)$:

$$z_{AB}=x^2+(-x-3)^2+x(3+x)+x-3-x=3x^2+9x+6,\quad x\in[-3,\,0].$$

$z'_{AB}=6x+9=0\Rightarrow\ x=-\frac{3}{2}\in[-3,\,0]\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ M_4\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – стационарная точка на AB и $\boxed{z(M_4)=-\frac{3}{4}}$.

3) Сравним найденные значения функции, выделенные рамкой. Она достигает наибольшего значения в двух точках на границе: $z(A)=6$, $z(B)=6$, а наименьшего – во внутренней точке области D: $z(M_1)=-1$.

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$ (рис. 22).

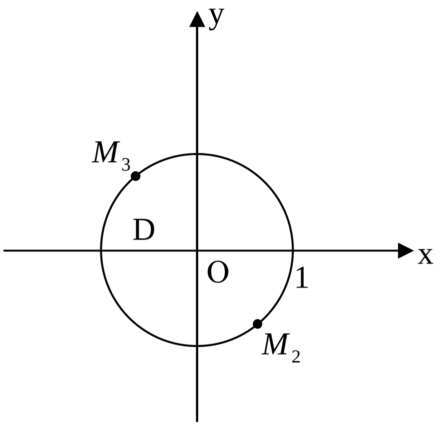

Рис. 22

1) Найдем стационарные точки функции, принадлежащие области D:

$$z'_x = 2x - 12,\ z'_y = 2y + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(6, -8) \notin D$$

Таким образом, внутри области стационарных точек нет.

2) Исследуем функцию на границе, то есть решим задачу на условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

В этом случае будем искать условный экстремум методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Составим и решим систему (6.10):

$$\begin{cases} 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{6}{1+\lambda},\ y = -\frac{8}{1+\lambda} \Rightarrow \frac{36}{(1+\lambda)^2} + \frac{64}{(1+\lambda)^2} = 1 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -11 \Rightarrow M_2\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right),\ M_3\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ – стационарные точки на границе и

$\boxed{z(M_2) = -19,\ \ z(M_3) = 21}$.

3) Так как внутри области и на её границе есть только две стационарные точки, то, очевидно, что $z(M_2) = -19$ – наименьшее значение, а $z(M_3) = 21$ – наибольшее значение этой функции в заданном круге.