Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим *ЛНДУ второго порядка* с *постоянными коэффициентами,* т. е. уравнение вида:

$y'' + py' + qy = f(x)$, (10)

где p и q - некоторые числа.

Согласно теореме, общее решение уравнения (10) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (10) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Для уравнений с постоянными коэффициентами (10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть f(x) уравнения (10) имеет так называемый «специальный вид»:

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ или

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов,* состоит в следующем: по виду правой части f(x) уравнения (10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (10) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где α R, $P_n(x)$ - многочлен степени n. Уравнение (10) запишется в виде:

$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$, (11)

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$y^* = x^r \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$, (12)

где r - число, равное кратности корня характеристического уравнения (α): $k^2 + pk + q = 0$ (т. е. r - число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x)$

$= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ - многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

а) Пусть α не является корнем характеристического уравнения

$k^2 + pk + q = 0$,

т.е. $\alpha \neq k_{1,2}$. Следовательно, $r = 0$, $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$, $(y^*)' = Q'_n(x)e^{\alpha x} + Q_n(x)\alpha e^{\alpha x}$,
$(y^*)'' = Q''_n(x)e^{\alpha x} + 2Q'_n(x)\alpha e^{\alpha x} + Q_n(x)\alpha^2e^{\alpha x}$.

После подстановки функции y^* и ее производных в уравнение (11) и сокращения на $e^{\alpha x}$, получим:

$Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x)$. (13)

Слева - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, справа - многочлен степени n, но с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему $(n + 1)$ алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

б) Пусть α является однократным (простым) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В этом случае искать решение в форме $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ нельзя, т. к. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, и уравнение (13) принимает вид $Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) = P_n(x)$.

В левой части - многочлен степени $(n - 1)$, в правой части - многочлен степени n. Чтобы получить тождество многочленов в решении y^*, нужно иметь многочлен степени $(n + 1)$. Поэтому частное решение y^* следует искать в виде $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$ (в равенстве (12) положить $r = 1$).

в) Пусть α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 = k_2$. В этом случае $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$, а поэтому уравнение (13) принимает вид $Q''_n(x) = P_n(x)$.

Слева стоит многочлен степени $n - 2$. Понятно, чтобы иметь слева многочлен степени n, частное решение y^* следует искать в виде $y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$

(в равенстве (12) положить $r = 2$).

Случай 2. Правая часть (10) имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно, α и β - действительные числа. Уравнение (10) запишется в виде:

$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$ (14)

Можно показать, что в этом случае частное решение y* уравнения (14) следует искать в виде

$y^* = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos \beta x + N_t(x)\sin \beta x)$, (15)

где r - число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ - многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l = \max(n, m)$.