10.3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейным дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$$

где $a_0(x)\neq 0\ \forall x\in[a,b]$.

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением*, если же $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*.

ПРИМЕРЫ.

а) $x^2y'''+xy''+2y'=x^2-2x+3$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами;

б) $y''+2y'-3y=0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами;

в) $yy''+3y'=\sin 2x$ – нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \tag{10.11}$$

$a_0(x)\neq 0\ \forall\ x\in[a,\ b]$.

Уравнение

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{10.12}$$

называется однородным дифференциальным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению (10.11). Это уравнение имеет решение $y(x)\equiv 0$, которое называется нулевым или тривиальным.

ТЕОРЕМА 1 (*о линейной комбинации решений линейного однородного дифференциального уравнения*). Пусть $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ – два решения линейного однородного дифференциального уравнения (10.12). Тогда для любых постоянных C_1,C_2 линейная комбинация $y=C_1y_1+C_2y_2$ также является решением (10.12).

Доказать самостоятельно.