Уравнение касательной плоскости (6.7):

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$$x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0-\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)=0 \Rightarrow x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0=R^2.$$

Уравнения нормали (6.8):

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0} \Rightarrow \frac{x}{x_0}-1=\frac{y}{y_0}-1=\frac{z}{z_0}-1 \Rightarrow \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Заметим, что эта прямая проходит через начало координат, то есть центр сферы.

ПРИМЕР. Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(2,-3,13)$.

Эта поверхность задана явным уравнением и $z'_x=2x,\ z'_y=2y$.

Поэтому уравнение касательной плоскости в данной точке имеет вид: $z-13=4(x-2)-6(y+3)$ или $4x-6y-z-13=0$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z=z(x,\ y)$ определена во всех точках некоторой области D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $M(x_0,\ y_0)\in D$ называется точкой максимума (минимума) функции $z=z(x,\ y)$, если существует её окрестность $D_1\subset D$, всюду в пределах которой $z(x,\ y)\le z(x_0,\ y_0)$ $\left(z(x,\ y)\ge z(x_0,\ y_0)\right)$.

Из определения следует, что если $M(x_0,\ y_0)$ – точка максимума, то $\Delta z=z(x,\ y)-z(x_0,\ y_0)\le 0 \quad \forall (x,\ y)\in D_1$; если $M(x_0,\ y_0)$ – точка минимума, то $\Delta z=z(x,\ y)-z(x_0,\ y_0)\ge 0 \quad \forall (x,\ y)\in D_1$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции двух переменных). Пусть функция $z=z(x,\ y)$ имеет в точке $M(x_0,\ y_0)$ экстремум. Если в этой точке существуют производные первого порядка, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение $y = y_0$. Тогда $z = z(x,\ y_0)$ – функция одной переменной x. Она имеет экстремум при $x = x_0$ и по необходимому условию экстремума дифференцируемой функции одной переменной (см. гл. 5) $\frac{\partial z}{\partial x}(x,\ y_0)\Big|_{x=x_0} = 0$.

Аналогично, зафиксировав значение $x = x_0$, получим, что $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,\ y)\Big|_{y=y_0} = 0$.

Что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Стационарной точкой* функции $z = z(x,\ y)$ называется точка M, в которой обе частные производные первого порядка равны нулю:

$$\begin{cases} z'_x(M) = 0 \\ z'_y(M) = 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированное необходимое условие не является достаточным условием экстремума.

Пусть $z = xy \Rightarrow \begin{cases} z'_x = y = 0 \\ z'_y = x = 0 \end{cases}$. Значит, $O(0,\ 0)$ – стационарная точка этой функции. Рассмотрим произвольную ε - окрестность начала координат.

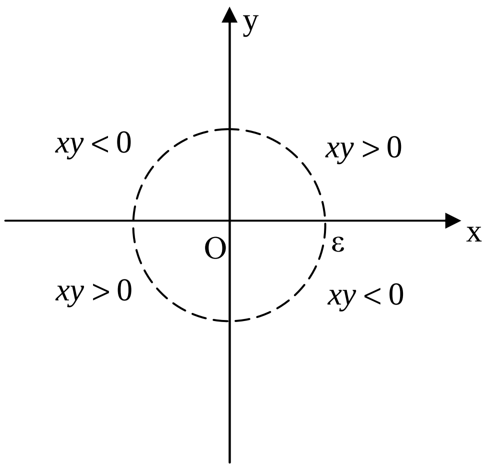

Рис. 16

В пределах этой окрестности $\Delta z = z(x,\ y) - z(0,\ 0) = xy$ имеет, очевидно, разные знаки (рис. 16). А это означает, что точка $O(0,\ 0)$ точкой экстремума по определению не является.

Таким образом, *не всякая стационарная точка – точка экстремума*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Непрерывная функция может иметь экстремум, но не иметь стационарной точки.

Рассмотрим функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Её графиком является верхняя $(z\ge 0)$ половина конуса, и, очевидно, $O(0,\,0)$ – точка минимума (рис. 17).

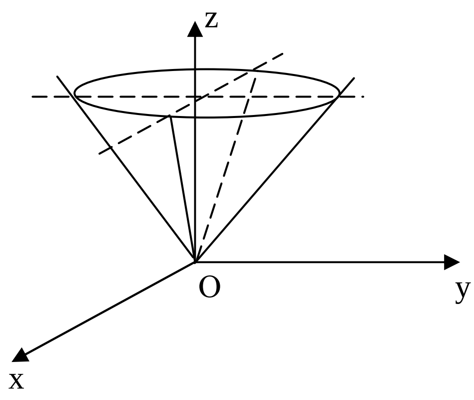

Рис. 17

Но $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow z'_x(0,\,0)$, $z'_y(0,\,0)$ не существуют, и точка $\mathrm{O}(0,\,0)$ стационарной не является. (Заметим, что верхняя половина конуса не имеет касательной плоскости в начале координат.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z=z(x,\,y)$ равны нулю или не существуют, называются ее *критическими* точками.

ТЕОРЕМА (достаточное условие экстремума функции $z=z(x,\,y)$). Пусть функция $z=z(x,\,y)$ имеет частные производные второго порядка в некоторой окрестности *стационарной* точки $M\left(x_0,\,y_0\right)$. Пусть, кроме того,

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}(M) & z''_{xy}(M) \\ z''_{xy}(M) & z''_{yy}(M) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если

1) $\Delta>0$, то M – точка экстремума, именно: точка максимума, если $z''_{xx}(M)<0$, или точка минимума, если $z''_{xx}(M)>0$;

2) $\Delta<0$, то экстремума в точке M нет;

3) $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования для выяснения характера точки M.

(Без доказательства).

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-2x+y$.

Найдем стационарные точки: $\begin{cases} z'_x=3x^2-2=0 \\ z'_y=1\ne 0 \end{cases}$. Стационарных точек нет, значит, функция не имеет экстремума.

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + y^2 + 5x^2$.
Чтобы найти стационарные точки, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0, 0),\ M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right),\ M_3(-1, 2),\ M_4(-1, -2),$$ то есть данная функция имеет четыре стационарные точки.

Проверим достаточное условие экстремума для каждой из них:

$$z''_{xx} = 12x + 10,\ z''_{xy} = 2y,\ z''_{yy} = 2(x+1) \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как $\Delta_3 < 0,\ \Delta_4 < 0$, то в точках M_3, M_4 экстремума нет.
$\Delta_1 > 0$ и $z''_{xx}(M_1) = 10 > 0$, значит, $M_1(0, 0)$ – точка минимума и $z_{\min} = z(0, 0) = 0$; $\Delta_2 > 0$ и $z''_{xx}(M_2) = -10 < 0$, значит, $M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ – точка максимума и $z_{\max} = z\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27}$.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Пусть ищется экстремум функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ при условии, что $F(x, y) = 0$. Это означает, что значения $z(x, y)$ рассматриваются и сравниваются только для точек, лежащих на линии $F(x, y) = 0$ (в плоскости XOY).

Задача отыскания экстремума функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, называется задачей на *условный экстремум*.

Можно сказать, что безусловный максимум – это как бы вершина горы, а условный – самая высокая точка горной тропы, проекция которой на плоскость XOY имеет уравнение $F(x, y) = 0$. На рис. 18 точка M – точка безусловного максимума, точка K_1 – точка условного максимума при условии $F_1(x, y) = 0$. При условии $F_2(x, y) = 0$ условный максимум находится точке K_2.