ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Рассмотрим функцию $z = z(x, y),\ (x, y) \in D$ и зададим приращения $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0$ так, чтобы $(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полным приращением* функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$, соответствующим приращениям $\Delta x, \Delta y$, называется

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $z = z(x, y)$ называется *дифференцируемой* в некоторой точке $M(x, y)$, если её полное приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

где $A, B = const$, а $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

ТЕОРЕМА (достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных). Если функция $z = z(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ непрерывные частные производные $z'_x(x, y),\ z'_y(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0$ и рассмотрим полное приращение функции:

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y) =$$

$$= \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y)\big)}_{\text{изменяется только } y} + \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y) - z(x, y)\big)}_{\text{изменяется только } x}.$$

Так как по условию обе частные производные первого порядка существуют, применим к каждому слагаемому теорему Лагранжа: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),\ c \in (a, b)$ (см. гл. 5). При $b = y + \Delta y,\ a = y$ получим

$z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y) = z'_y(x + \Delta x,\ \bar{y})\,\Delta y$, где $\bar{y}$ – между y и $y + \Delta y$;

Аналогично, при $b = x + \Delta x,\ a = x$: $z(x + \Delta x,\ y) - z(x,\ y) = z'_x(\bar{x},\ y)\,\Delta x$, где $\bar{x}$ – между x и $x + \Delta x$.

Тогда

$$\Delta z = z'_x(\bar{x},\ y)\Delta x + z'_y(x + \Delta x,\ \bar{y})\,\Delta y \tag{6.1}$$

Кроме того, частные производные $z'_x(x,\ y)$, $z'_y(x,\ y)$ по условию непрерывны в окрестности точки $M(x,\ y)$, поэтому

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} z'_y(x+\Delta x,\ \overline{y}) = z'_y(x,\ y), \quad \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} z'_x(\overline{x},\ y) = z'_x(x,\ y) \Rightarrow$$

$$z'_x(\overline{x},\ y) = z'_x(x,\ y) + \alpha(\Delta x,\ \Delta y), \tag{6.2}$$

где $\alpha(\Delta x,\ \Delta y) \xrightarrow[\Delta x,\ \Delta y\to 0]{} 0$;

$$z'_y(x+\Delta x,\ \overline{y}) = z'_y(x,\ y) + \beta(\Delta x,\ \Delta y), \tag{6.3}$$

где $\beta(\Delta x,\ \Delta y) \xrightarrow[\Delta x,\ \Delta y\to 0]{} 0$.

Подставим (6.2), (6.3) в (6.1):

$$\Delta z = \left(z'_x(x,\ y) + \alpha(\Delta x,\ \Delta y)\right)\Delta x + \left(z'_y(x,\ y) + \beta(\Delta x,\ \Delta y)\right)\Delta y .$$

Обозначив $z'_x(x,\ y) = A,\ z'_y(x,\ y) = B$, получим требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Главная линейная часть полного приращения функции $z = z(x,\ y)$ в точке $M(x,\ y)$ называется ее *полным дифференциалом* в этой точке: $dz = z'_x(x,\ y)\,\Delta x + z'_y(x,\ y)\,\Delta y$.

Так как x и y – независимые переменные, то $\Delta x = dx,\quad \Delta y = dy$ и

$$dz = z'_x(x,\ y)\,dx + z'_y(x,\ y)\,dy .$$

ПРИМЕР. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2} + 6x - 2y$

а) в точке $M(x,\ y)$, б) в точке $A(1,\ 4)$.

$$z'_x\big|_{y=const} = 2\sqrt{y}\cdot\frac{(-2)}{x^3} + 6, \qquad z'_y\big|_{x=const} = \frac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2 .$$

а) $dz(x,\ y) = \left(\dfrac{-4\sqrt{y}}{x^3} + 6\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2\right)dy$,

б) $dz(1,\ 4) = (-8+6)\,dx + \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)dy = -2dx - 1{,}5dy$.