

Используя формулу вычисления полной производной, можно дифференцировать показательно-степенные функции.

ПРИМЕР. Найти первую производную функции $y = (tg\ 2x)^{\cos 3x}$.

Обозначим $u = tg\ 2x$, $v = \cos 3x$, тогда получим $y = u^v$ – сложная функция двух переменных и $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ (рис. 11).

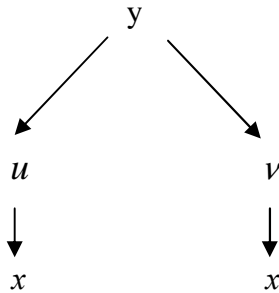


Рис. 11

Поэтому $y' = v u^{v-1} \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} + u^v \ln u \cdot (-3 \sin 3x) = u^v \left(\frac{2v}{u \cos^2 2x} - 3 \sin 3x \cdot \ln u \right),$

где $u = tg\ 2x$, $v = \cos 3x$.

Заметим, что найти производную показательно-степенной функции можно и по-другому – с помощью процедуры логарифмического дифференцирования.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Рассмотрим уравнение $4x^3 + 3xy + y^3 = 0$. Очевидно, есть пары значений x и y , обращающих его в верное числовое равенство, например: $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ и т.д. Однако не всякая пара (x, y) удовлетворяет этому уравнению. Значит, можно утверждать, что этим уравнением задана некоторая функция $y = y(x)$ (или $x = x(y)$), хотя явно вид этой зависимости в данном случае получить довольно сложно.

Функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего независимые и зависимую переменные, называется *неявной функцией*.

В приведенном примере равенство $4x^3 + 3xy + y^3 = 0$ задает неявную функцию одной переменной. Уравнением $x - 2y + 5 = 0$ также задается неявная

функция, которая легко может быть представлена в явном виде: $x = 2y - 5$ или $y = \frac{x+5}{2}$.

Однако не всякое уравнение, не разрешенное относительно одной из переменных, определяет неявную функцию. Например, уравнение $x^2 + 2y^4 + 3 = 0$ не задает функцию, так как, очевидно, нет ни одной пары действительных чисел, которая ему удовлетворяет.

Кроме неявных функций одной переменной, существуют неявные функции нескольких переменных. Так, например, тройки чисел $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ обращают выражение $xe^y + ye^z + ze^x = 1$ в верное числовое равенство, поэтому $xe^y + ye^z + ze^x - 1 = 0$ — функция двух переменных, заданная неявно. Здесь ни одну из трех переменных невозможно явно выразить через две другие.

$x^2 + y^2 - z = 0$ — также неявная функция двух переменных, но $z = x^2 + y^2$ — та же функция, заданная явно.

Пусть в общем случае дано уравнение $F(x, y) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждому значению x из некоторого множества X соответствует единственное значение $y \in Y$, которое вместе с x удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, то говорят, что это уравнение определяет на множестве X *неявную функцию* одной переменной $y = y(x)$.

Таким образом, для неявной функции имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in X$.

В некоторых случаях каждому $x \in X$ соответствует несколько значений y . Тогда равенство $F(x, y) = 0$ определяет не одну, а несколько неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ задает две неявные функции, которые можно записать в явном виде, разрешив его относительно y : $y = \sqrt{4 - x^2}$ или $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

Ответ на вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ определяло единственную функцию $y = y(x)$, дает теорема о существовании неявной функции.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в этой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ единственную неявную функ-

цию, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0 , причем $y(x_0) = y_0$.

(Без доказательства).

Рассмотрим функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы о существовании неявной функции. Тогда равенство $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = y(x)$, для которой в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$. Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

— формула для вычисления производной неявной функции одной переменной.

ПРИМЕР. Найти производную неявной функции $4x^3 + 3xy + y^3 = 0$.

$$F'_x = 12x^2 + 3y, \quad F'_y = 3x + 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{12x^2 + 3y}{3x + 3y^2} = -\frac{4x^2 + y}{x + y^2}.$$

Если считать, что это равенство задает функцию $x = x(y)$, то $\frac{dx}{dy} = -\frac{x + y^2}{4x^2 + y}$.

Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$. При условиях, аналогичных сформулированным в теореме о существовании неявной функции, это уравнение определяет z как функцию двух переменных $z = z(x, y)$. Поэтому $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ — тождество. Продифференцировав его по x и по y , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \end{aligned} \quad \text{при условии, что } F'_z \neq 0.$$

ПРИМЕР. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $xe^y + ye^z + ze^x - 1 = 0$.

$$F'_x = e^y + ze^x, \quad F'_y = xe^y + e^z, \quad F'_z = ye^z + e^x \Rightarrow z'_x = -\frac{e^y + ze^x}{ye^z + e^x}, \quad z'_y = -\frac{xe^y + e^z}{ye^z + e^x}$$

при условии, что $ye^z + e^x \neq 0$.