Глава 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Основные определения и примеры

При решении многих задач математики, физики и механики часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными переменными величинами, но зато удается составить уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называется *дифференциальным*.

ПРИМЕР. Тело охладилось за 10 минут от 100°C до 60°C. Температура окружающего воздуха поддерживается постоянной и равной 10°C. Определить через сколько минут температура тела станет равной 20°C.

Как известно из физики, скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.

Обозначим $T(t)$ – температуру тела в некоторый момент времени t. Тогда скорость изменения температуры равна производной $\frac{dT}{dt}$, и поэтому данный физический процесс описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10), \tag{10.1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, подлежащий определению. Это уравнение является дифференциальным. Искомая функция должна удовлетворять условиям задачи, а именно, $T(0) = 100$, $T(10) = 60$.

ПРИМЕР. Гибкая однородная нить подвешена за два конца. Найти уравнение кривой, по которой расположится нить под действием собственного веса (такую форму имеют подвешенные канаты, провода, цепи, поэтому уравнение этой кривой называется *уравнением цепной линии*).

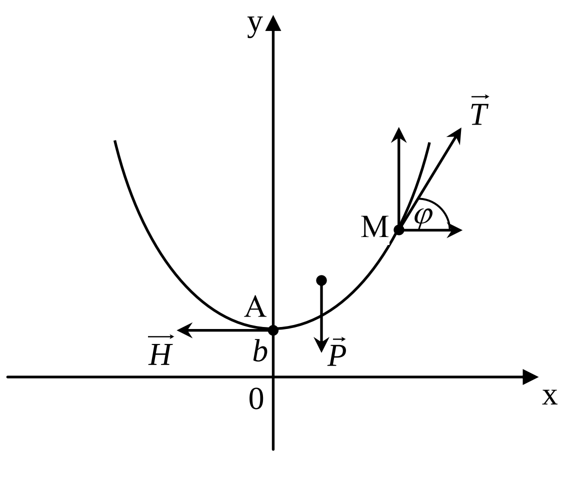

Рис. 1

Пусть $A(0, b)$ – самая низкая точка нити, а $M(x, y)$ – произвольная точка. Часть AM находится в равновесии под действием трех сил (рис.1):

1) сила натяжения $\vec{T}$, направленная по касательной в точке M и составляющая угол φ с осью OX,

2) сила натяжения $\vec{H}$ в точке A, действующая горизонтально,

3) вес $\vec{P}$, приложенный в центре масс и направленный вниз, $|\vec{P}| = P = \rho\ell$, где ρ – линейная плотность, ℓ – длина дуги.

Разложив вектор $\vec{T}$ на вертикальную и горизонтальную составляющие, получим уравнения равновесия:

$$T\cos\varphi = H,\ T\sin\varphi = \rho\ell \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = \frac{\rho}{H}\ell \quad \left(\left|\vec{T}\right| = T,\ \left|\vec{H}\right| = H\right).$$

Пусть уравнение нити имеет вид $y = y(x)$, тогда $\mathrm{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{H}\ell$.

Как известно (см. гл.8), $\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1 + y'^2(x)}$, поэтому $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\frac{d\ell}{dx} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1 + y'^2}$.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение цепной линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1 + y'^2}. \qquad (10.2)$$

Это уравнение связывает первую и вторую производные неизвестной функции. Заметим, что искомое решение удовлетворяет условиям $y(0) = b,\ y'(0) = 0$ (рис.1).

Как показывают эти примеры, дифференциальное уравнение может содержать первую, вторую, а также производные более высоких порядков неизвестной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение, которое связывает неизвестную функцию (или функции), ее производные и независимую переменную (или переменные), называется *дифференциальным уравнением*. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких – *уравнением с частными производными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Порядком* дифференциального уравнения называется старший из порядков входящих в него производных.

ПРИМЕР. Уравнение (10.1) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, (10.2) – обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\sin t$ – уравнение с частными производными второго порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решением* дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Если решение найдено в *неявном виде*, оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

ПРИМЕР. $y'' - \frac{2}{x} y' = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Легко проверить, что, например, $y = C,\ C \in \mathbb{R}$ является его решением. Также является решением $y = x^3 : y' = 3x^2,\ y'' = 6x \Rightarrow 6x - \frac{6x^2}{x} = 0$.

Функция $y = x^2$ этому уравнению не удовлетворяет, значит, решением не является.

Перейдем к изучению дифференциальных уравнений первого порядка.

10.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную, то есть имеет вид $F(x, y, y') = 0$.

Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{10.3}$$

называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то (10.3) можно переписать в виде $dy - f(x, y)dx = 0$. В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано и таким образом:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

ПРИМЕР. $y\,y' = y \ln x + 1$ – дифференциальное уравнение первого порядка. Перепишем его: $y\frac{dy}{dx} = y \ln x + 1 \Rightarrow (y \ln x + 1)dx - y\,dy = 0$. Наоборот, уравнение первого порядка $2x\,y\,dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$ может быть после деления обеих его частей на $dx \neq 0$ записано так: $\left(x^2 + y^2\right)y' + 2x\,y = 0 \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)y' = -2x\,y$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.