Глава 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждой паре $(x,\, y)$ значений двух не зависящих друг от друга переменных x и y из некоторой области их изменения D по некоторому правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то говорят, что на области D задана функция двух переменных $z = z(x,\, y)$.

Область D называется *областью определения функции двух переменных*, а множество значений, принимаемых переменной z, – ее *областью значений*.

Самый распространенный способ задания функции двух переменных – аналитический, то есть с помощью формул.

ПРИМЕР. а) $z = x^2 + y^2,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Эта функция определена на всей плоскости. Из аналитической геометрии известно, что $z = x^2 + y^2$ – уравнение эллиптического параболоида, поэтому можно сказать, что эллиптический параболоид является графиком этой функции (рис. 1).

б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта функция определена, если $x^2 + y^2 \le 1$, то есть внутри единичного круга. После возведения в квадрат обеих частей равенства $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ получим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, но так как $z \ge 0$, то график этой функции – верхняя полусфера (рис. 2).

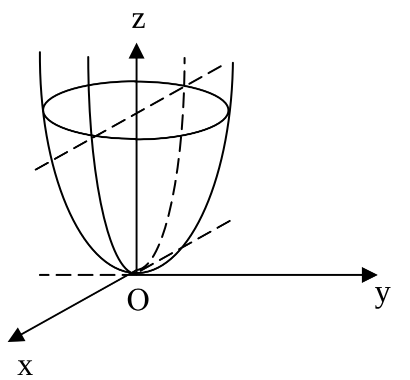

Рис. 1

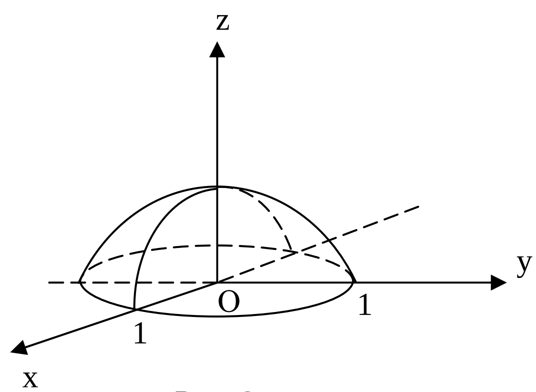

Рис. 2

в) $z = 2x + 3y - 5,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. Графиком этой функции является плоскость.

Таким образом, *графиком функции двух переменных является поверхность*.

Рассматривая функции двух переменных, мы будем иметь дело с множествами точек, которые представляют собой часть плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Окрестностью* (или ε*-окрестностью*) точки $M(x_0, y_0)$ называется множество точек плоскости, координаты которых связаны неравенством $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$.

Другими словами, окрестностью точки $M(x_0, y_0)$ на плоскости будем называть круг с центром в этой точке радиуса ε, не включающий окружность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка M называется *внутренней точкой* множества D, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в D.

То есть внутренние точки области принадлежат ей вместе с некоторой достаточно малой своей окрестностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если любая окрестность точки M содержит как точки области D, так и точки, не принадлежащие D, то M называется *граничной точкой* области D. Множество всех граничных точек области D называется ее *границей*.

Или, по-другому, граница плоской области – это линия, которая ее ограничивает, а точки области, не лежащие на ее границе, – внутренние точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*, или *незамкнутой*. Если к области относятся и все точки границы, то она называется *замкнутой*.

Вся плоскость по определению считается и открытой, и замкнутой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоская область называется *ограниченной*, если существует круг, целиком содержащий эту область.

ПРИМЕР. $D=\{(x,\ y): |x|\le 1,\ |y-1|\le 2\}$ – прямоугольник с центром в точке (0,1) (рис. 3) – ограниченная и замкнутая область;

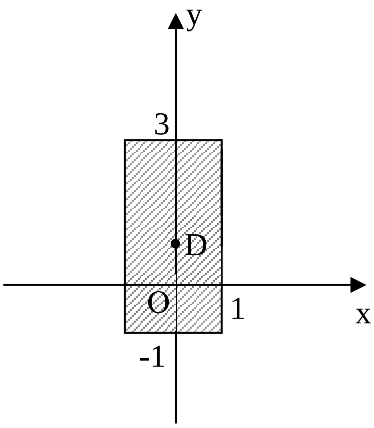

Рис. 3

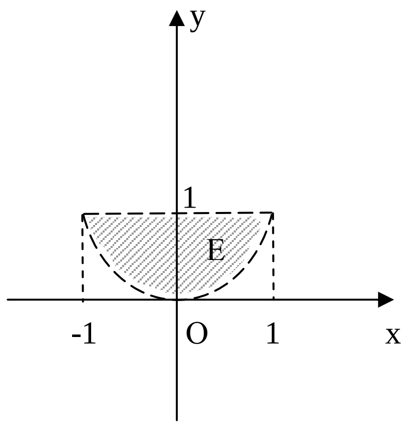

Рис. 4