ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых не выполняется условие теоремы Коши, называются *особыми* точками дифференциального уравнения.

По теореме Коши через всякую неособую точку проходит единственная интегральная кривая. Если точка является особой для данного дифференциального уравнения, то через нее либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Общим* решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых значениях постоянной C из некоторого множества $y = y(x, C)$ является решением дифференциального уравнения;
2) при любом начальном условии, удовлетворяющем условиям теоремы Коши, найдется единственное значение $C = C_0$ такое, что $y = y(x, C_0)$ – решение, удовлетворяющее этому условию.

Решения дифференциального уравнения, полученные из общего при конкретных значениях постоянной C, называются *частными* решениями. *Задача Коши является задачей отыскания частного решения дифференциального уравнения.*

Все дифференциальные уравнения первого порядка разделяются на типы, которые различаются методами, применяемыми для их решения. Рассмотрим некоторые из них.

10.2.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{10.4}$$

или
$$P_1(x)\, Q_1(y) dx + P_2(x)\, Q_2(y)\, dy = 0.$$

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x},\ g(y) = y$ – данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными;

б) $y'x + y = y^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - y}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x},\ g(y) = y^2 - y$ – это дифференциальное уравнение тоже является уравнением с разделяющимися переменными;

в) $y'x + x = y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - x}{x}$ – данное уравнение не может быть представлено в виде (10.4), поэтому не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;

г) $\left(xy^2 + x\right)dx + e^{2x+y}dy = 0 \Rightarrow x\left(y^2 + 1\right)dx + e^{2x}e^y\,dy = 0$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

д) дифференциальное уравнение (10.1) является уравнением с разделяющимися переменными.

Для того чтобы решить уравнение вида (10.4), надо сначала разделить переменные, то есть преобразовать его к виду, когда в левой части равенства будет одна переменная, а в правой – другая.

Приведем *алгоритм решения* уравнений вида $y' = f(x)\,g(y)$.

1 шаг: заменим в (10.4) y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и перепишем уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$;

2 шаг: умножим обе части на dx: $dy = f(x)\,g(y)dx$;

3 шаг: разделим обе части уравнения на $g(y)$, считая, что $g(y) \neq 0$: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Дифференциальное уравнение такого вида называется уравнением с *разделенными* переменными;

4 шаг: проинтегрируем обе части этого уравнения: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Вычислив интеграл слева и справа, получим общее решение дифференциального уравнения в неявном, как правило, виде, то есть его общий интеграл.

ЗАМЕЧАНИЕ. При делении обеих частей уравнения на $g(y)$ (шаг 3) могут быть потеряны некоторые решения дифференциального уравнения: если $g(y_0) = 0$, то постоянная функция $y = y_0$ – решение, в чем легко убедиться, подставив ее в уравнение.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' + y = y^2.$$

Как было отмечено выше, это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow x\,dy = \left(y^2 - y\right)dx.$$

Полагая, что $x\left(y^2 - y\right) \neq 0$, получим

$$\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{(1-y)+y}{y(y-1)}dy=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow -\ln|y|+\ln|y-1|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Отметим, что здесь постоянная интегрирования для удобства дальнейших преобразований записана как $\ln|C|$. Используя свойства логарифмов, имеем: $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|C\,x|$, или $\frac{y-1}{y}=C\,x$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения (решение, записанное в неявном виде).

Заметим, что при делении на $\left(y^2-y\right)$ были потеряны решения $y=1$ и $y=0$. Однако решение $y=1$ в общем интеграле содержится (при $C=0$), а $y=0$ – нет. Поэтому, выразив y из равенства $\frac{y-1}{y}=C\,x$, запишем общее решение данного дифференциального уравнения, которое состоит из функций $y=1+C\,x\,y,\ \ y=0,\ \ C\in\mathbb{R}$.

ПРИМЕР. Вернемся к уравнению (10.1) и ответим на вопрос, заданный в примере на стр. 4.

$$\frac{dT}{dt}=k(T-10)\ \Rightarrow\ dT=k(T-10)dt\Rightarrow\int\frac{dT}{T-10}=\int k\,dt\ \Rightarrow\ \ln(T-10)=k\,t+C_1.$$

Так как по условию задачи $T(0)=100$, то $\ln 90=C_1\Rightarrow\ln(T-10)-\ln 90=k\,t$. Чтобы найти коэффициент k, воспользуемся вторым условием: при $t=10$ температура $T=60^\circ$. Тогда получим $\ln 50-\ln 90=10k$, следовательно,

$$\ln(T-10)-\ln 90=\frac{1}{10}(\ln 50-\ln 90)t\ \Rightarrow t=10\frac{\ln(T-10)-\ln 90}{\ln 50-\ln 90}\ .$$

Поэтому тело остынет до температуры $T=20^\circ$ за время

$$t=10\frac{\ln 10-\ln 90}{\ln 50-\ln 90}\approx 37{,}38\ \text{(мин.)}.$$

Заметим, что из равенства $\ln(T-10)-\ln 90=\frac{\ln 50-\ln 90}{10}t$ следует, что температура тела изменяется по закону $T=10+90e^{\frac{t}{10}\ln\frac{5}{9}}$, или $T=10+90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}}$ – эта функция является решением задачи Коши, поставленной в рассмотренном примере.