$Q_n(x,y)$ – *однородные многочлены* n*-ой степени, являются однородными дифференциальными уравнениями первого порядка.*

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка *сводится к уравнению с разделяющимися переменными* в результате *замены переменной по формуле*: $z(x)=\dfrac{y(x)}{x}$. Действительно, так как $y(x)=z(x)x$, то $y'=z'x+z$, поэтому после выполнения подстановки уравнение (10.5) примет вид $z'x+z=\varphi(z)$, а дифференциальное уравнение $z'x=\varphi(z)-z$ является уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y},\ y(1)=2$.

Данное дифференциальное уравнение является однородным, поэтому сделаем замену переменной $z=\dfrac{y}{x}$. Тогда имеем: $z'x+z=z+\dfrac{1}{z}\Rightarrow z'x=\dfrac{1}{z}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$x\,dz=\frac{dx}{z}\ \Rightarrow\ \int z\,dz=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \frac{z^2}{2}=\ln|x|+C\ .$$

Возвращаясь к «старым» переменным, получим общий интеграл $\dfrac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$.

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$:

$\dfrac{4}{2}=\ln 1+C\ \Rightarrow C=2\ \Rightarrow y^2=2x^2\ln|x|+4x^2\ \Rightarrow y=\sqrt{2x^2\ln|x|+4x^2}$ – искомое частное решение.

Заметим, что если задать начальное условие $y(1)=-2$, то соответствующее частное решение будет иметь вид $y=-\sqrt{2x^2\ln|x|+4x^2}$.

10.2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если неизвестная функция и ее производная входят в него линейно, то есть в первой степени. Такое уравнение имеет вид

$$y'=p(x)y+q(x). \qquad (10.6)$$

Если $q(x)=0$, то дифференциальное уравнение $y'=p(x)y$ называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением первого порядка (оно является также дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными). Если $q(x)\neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным*.

ПРИМЕРЫ.

а) $y'=\dfrac{y}{x}+x$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение;

б) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ – не является линейным;

в) $\sin x\,dy-\left(y\,\mathrm{tg}\,x+\cos^2 x\right)dx=0$. Разделив обе части этого дифференциального уравнения на dx, получим $y'\sin x-y\,\mathrm{tg}\,x-\cos^2 x=0 \Rightarrow$

$y'\sin x=y\,\mathrm{tg}\,x+\cos^2 x$ – линейное дифференциальное уравнение;

г) $y\,y'=y\ln x+1$ – не является линейным.

Одним из методов решения уравнений вида (10.6) является *метод подстановки*. Идея метода состоит в том, что любая функция может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых произвольная. Например, $x=\sin 2x\cdot\dfrac{x}{\sin 2x}=\left(3x+5\right)\cdot\dfrac{x}{3x+5}$ и т.д.

Будем искать решение дифференциального уравнения (10.6) в виде произведения двух функций: $y(x)=u(x)\,v(x)$. Найдем $y'=u'v+uv'$ и подставим в уравнение:

$$u'v+uv'=puv+q \Rightarrow v\left(u'-pu\right)+uv'=q.$$

Так как первый сомножитель в произведении $y=uv$ можно выбрать произвольно, потребуем, чтобы функция $u(x)$ обращала в ноль первое слагаемое в последнем равенстве: $u'-pu=0$. Тогда для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(x)-p(x)\,u(x)=0 \\ v'(x)\,u(x)=q(x) \end{cases}. \tag{10.7}$$

Так как функция $u(x)$ выбирается в известном смысле произвольно, то она является каким-либо *частным* решением первого уравнения системы (10.7). Заметим, что оно является линейным однородным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Решив первое уравнение, подставим найденную функцию $u(x)$ во второе дифференциальное уравнение и найдем $v(x)$, как *общее* решение этого уравнения.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Пусть $y = uv \Rightarrow u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow v(u' + u\operatorname{tg} x) + uv' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Отсюда

$$\begin{cases} u' + u\operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = -u\operatorname{tg} x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{tg} x\, dx \Rightarrow \ln|u| = \ln|\cos x| \Rightarrow u = \cos x, \\ v'u = \dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx}\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \displaystyle\int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \operatorname{tg} x + C. \end{cases}$$

Заметим, что функция $y(x) = 0$ не является решением дифференциального уравнения $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, поэтому при разделении переменных в первом из уравнений системы обоснованно полагалось, что $u(x) \neq 0$.

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \cos x(\operatorname{tg} x + C) = \sin x + C\cos x.$$

Найдем теперь решение задачи Коши:

$$y(0) = C = 0 \Rightarrow y = \sin x \text{ – искомое частное решение.}$$

10.2.4. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если может быть приведено к виду

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1, \qquad (10.8)$$

При $\alpha = 0$ уравнение (10.8) является линейным, а при $\alpha = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными.