ПРОИЗВОДНАЯ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Как известно, производная функции одной переменной $y = y(x)$ характеризует скорость ее изменения при изменении x. Поэтому, очевидно, частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x характеризует скорость изменения этой функции в результате изменения x, или, по-другому, в направлении оси OX, а частная производная по y – скорость изменения функции в направлении оси OY. Однако, в каждой точке плоскости, кроме этих двух направлений, существует еще бесконечное множество других, и во многих случаях представляет интерес скорость изменения, или производная функции, по любому заданному направлению.

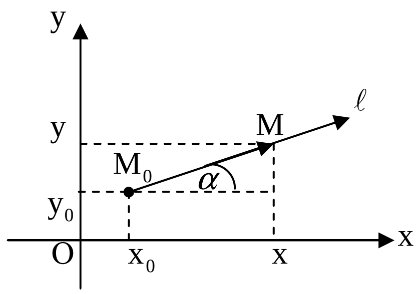

Рис. 12

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$. На произвольно направленной оси ℓ в плоскости XOY выберем фиксированную точку M_0 и переменную точку M (рис. 12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной функции* $z = z(x,y)$ в точке M_0 *по направлению* ℓ называется $\dfrac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{z(M) - z(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|}$.

Эта производная *характеризует скорость изменения функции в точке* M_0 *в направлении* ℓ.

Выведем формулу вычисления производной по направлению. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат зафиксирована точка $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ – произвольная, а направление ℓ образует с положительным направлением OX угол α (рис. 12). Обозначим $\left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = t$. Тогда $x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\sin\alpha$, поэтому функция $z = z(x, y)$ на выбранном направлении фактически зависит от одной переменной t (рис.13). Поэтому в соответствии с определением

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=o} = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\sin\alpha .$$

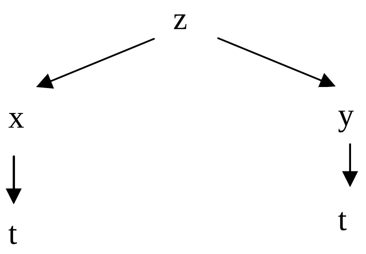

Рис. 13

Пусть теперь $u = u(x, y, z)$ – функция трех переменных, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная, $M(x, y, z)$ – произвольная точка и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы заданного направления ℓ в пространстве. Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

и
$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \qquad (6.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Градиентом* функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Если обозначить $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор направления ℓ, то, очевидно, производная по направлению (6.5) – скалярное произведение $grad\ u$ и $\vec{\tau}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(grad\ u, \vec{\tau}\right) = |grad\ u|\,|\vec{\tau}|\cos\omega, \quad \omega = \left(grad\ u, \ \ell\right).$$

Так как $|\vec{\tau}| = 1$, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} = |grad\ u|\cos\omega$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ достигает максимума в том случае, когда $\ell \uparrow\uparrow grad\ u$. Это означает, что $grad\ u(M)$ *указывает на направление наискорейшего возрастания функции в точке М*. При этом скорость наибольшего возрастания в данной точке равна $|grad\ u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$.

Итак, *градиентом скалярной величины называется вектор, который по численному значению и направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было отмечено выше, графиком функции двух переменных является пространственная поверхность. Поэтому величина производной $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)$ указывает, как будет меняться высота (значение переменной z) при движении из точки N_0 на поверхности, соответствующей M_0, в направлении ℓ (рис. 14): если $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)<0$, то при движении в данном направлении из точки N_0 высота будет уменьшаться, если же $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)>0$ – увеличиваться. Если $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)=0$, то движение в направлении ℓ – это движение вдоль линии уровня, то есть линии постоянной высоты.

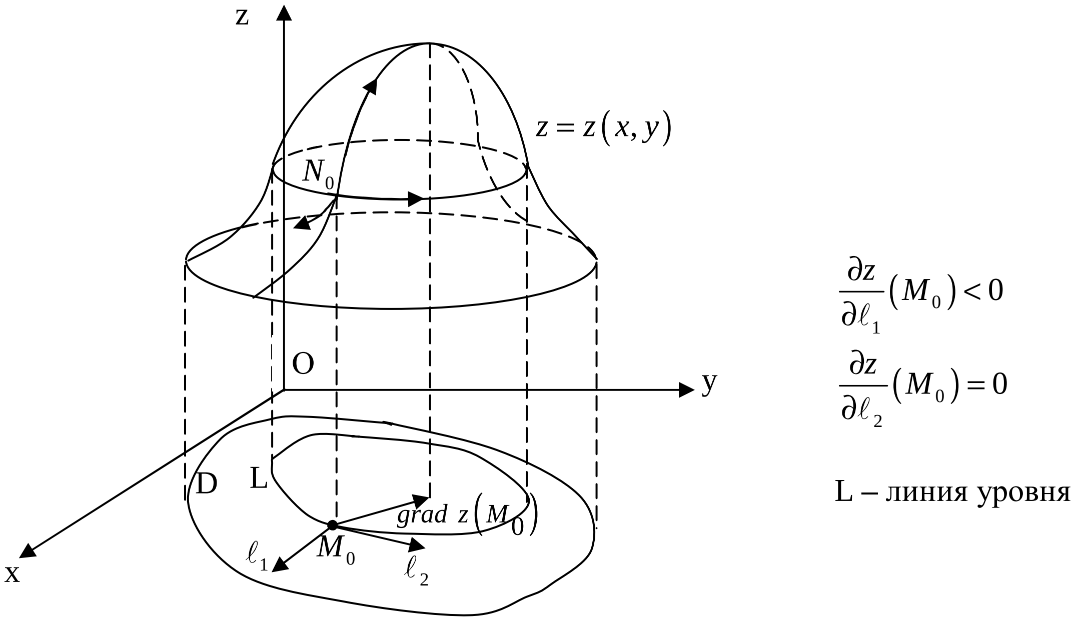

Рис. 14

Вектор $grad\ z(M_0)$ указывает, в каком направлении надо двигаться, чтобы крутизна подъема из точки N_0 была наибольшей.

ПРИМЕР. Вычислить производную по направлению вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ функции $z=2x\sqrt{y}-\frac{x^2}{3y^3}+4x$ в точке $M_0(3,1)$, если $M(-1,4)$. Найти направление наискорейшего возрастания этой функции в точке M_0.

Найдем частные производные первого порядка в точке $M_0(3,1)$:

$$z'_x(3,1)=2\sqrt{y}-\frac{2x}{3y^3}+4\Big|_{(3,1)}=4,\quad z'_y(3,1)=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{x^2}{y^4}\Big|_{(3,1)}=12.$$

Найдем вектор заданного направления и его направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{M_0 M}=(-4,3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|=5\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5},\ \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial \ell}(3,1) = -\frac{16}{5} + \frac{36}{5} = 4$. Это означает, что движение в направлении вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ из точки $N_0(3,1,15)$, лежащей на поверхности, будет подъемом (высота будет увеличиваться).

Направление наискорейшего возрастания функции в точке $M_0(3,1)$ – $grad\ z(3,1) = (4,12) = 4(1,3)$.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Касательной плоскостью* к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. *Нормалью* называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Покажем, что $grad\, F(M_0)$ направлен по нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Рассмотрим кривую L, лежащую на поверхности и проходящую через точку M_0 (рис. 15). Пусть она задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Если $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, движущейся при изменении t вдоль L, то $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а $\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ – радиус-вектор точки M_0.

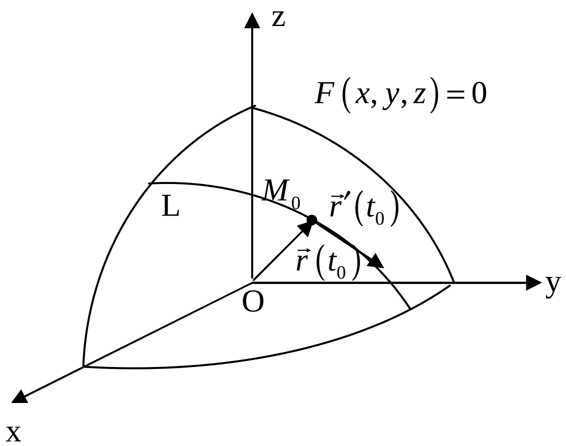

Рис. 15