**ПРИМЕР.** Рассмотрим уравнение $y''+4y=0$. Легко проверить непосредственной подстановкой, что функции $y_1=\cos 2x,\ y_2=3\cos 2x,\ y_3=\sin 2x$ – его решения.

По теореме 1 при любых $C_1, C_2$ функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cos 2x+3C_2\cos 2x$$

– решение этого дифференциального уравнения.

Функция $y=C_1y_1+C_3y_3=C_1\cos 2x+C_3\sin 2x,\quad C_1, C_3\in\mathbb{R}$ тоже является решением.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Два решения однородного дифференциального уравнения (10.12) называются *линейно независимыми*, если их отношение постоянно. В противном случае эти решения называются *линейно независимыми*.

**ПРИМЕР.** Для решений уравнения из предыдущего примера имеем:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\cos 2x}{3\cos 2x}=\frac{1}{3}=const\ \Rightarrow\ y_1, y_2 \text{ – линейно зависимы;}$$

$$\frac{y_1}{y_3}=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\neq const\ \Rightarrow\ y_1, y_3 \text{ – линейно независимы;}$$

$$\frac{y_2}{y_3}=\frac{3\cos 2x}{\sin 2x}\neq const\ \Rightarrow\ y_2, y_3 \text{ – линейно независимы.}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Определителем Вронского* $n$ функций называется функциональный определитель вида

$$W\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для двух функций определитель Вронского имеет вид $W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

**ПРИМЕР.** Для рассмотренных выше решений

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} \cos 2x & 3\cos 2x \\ -2\sin 2x & -6\sin 2x \end{vmatrix}=0;\quad W\left(y_1,y_3\right)=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

**ТЕОРЕМА 2** (о *необходимом и достаточном условии линейной зависимости решений линейного однородного дифференциального уравнения*). Пусть $a_i(x),\ i=0,1,2$ непрерывны, а $a_0(x)\neq 0\quad \forall x\in[a,b]$. Тогда для того, чтобы решения $y=y_1(x), y=y_2(x)$ дифференциального уравнения (10.12) были линейно зависимы на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $W(y_1(x),y_2(x))$ был равен нулю хотя бы для одного значения $x_0\in[a,b]$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

1. *Необходимость*: решения $y_1,y_2$ линейно зависимы $\Rightarrow W(y_1(x),\ y_2(x))=0$ хотя бы при одном значении $x_0\in[a,b]$.

По определению линейной зависимости двух решений $\dfrac{y_1}{y_2}=k=const\ \Rightarrow$

$$y_1=k\,y_2 \Rightarrow\ W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} k\,y_2 & y_2\\ k\,y_2' & y_2'\end{vmatrix}=0\quad \forall x\in[a,b].$$

2. *Достаточность*: $W(y_1(x_0),\ y_2(x_0))=0,\ x_0\in[a,b]\ \Rightarrow$ решения $y_1,\ y_2$ дифференциального уравнения (10.12) линейно зависимы.

Так как (10.12) – линейное однородное дифференциальное уравнение, то оно имеет нулевое решение $\overline{y}(x)\equiv 0$, для которого $\overline{y}(x_0)=\overline{y'}(x_0)=0\quad \forall\ x_0\in[a,b]$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1\,y_1(x_0)+C_2\,y_2(x_0)=0\\ C_1\,y_1'(x_0)+C_2\,y_2'(x_0)=0\end{cases}. \tag{10.13}$$

Ее основной определитель $\Delta=W(y_1(x_0),\ y_2(x_0))=0$ по условию, поэтому она имеет бесконечное множество решений (см.гл.1). Пусть $(C_1^0,\,C_2^0)$ – некоторое нетривиальное решение (10.13). Тогда функция $y(x)=C_1^0\,y_1(x)+C_2^0\,y_2(x)$ по теореме 1 – решение (10.12), причем вследствие (10.13) $y(x_0)=y'(x_0)=0$.

Таким образом, одним и тем же начальным условиям удовлетворяют два решения уравнения (10.12), что противоречит теореме Коши. Следовательно, $y(x)=\overline{y}(x)\ \Rightarrow\ C_1^0\,y_1(x)+C_2^0\,y_2(x)=0\ \Rightarrow\ y_1=-\dfrac{C_2^0}{C_1^0}y_2$, то есть решения $y_1,y_2$ линейно зависимы.

Что и требовалось доказать.