Отсюда новая *действительная* фундаментальная система решений может быть составлена из функций $y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_1 = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение дифференциального уравнения (10.14) тогда имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = 1 \pm 2i$: $\alpha = \operatorname{Re} k_1 = 1$, $\beta = \operatorname{Im} k_1 = 2$.

Следовательно, ф.с.р. данного уравнения состоит из функций $y_1 = e^x\cos 2x$, $y_2 = e^x\sin 2x$, а $y = e^x\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$ – общее решение.

Все вышесказанное можно систематизировать в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$		
Характеристическое уравнение	$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$		
Корни	$k_1 \neq k_2,\ k_{1,2} \in \mathbb{R}$	$k_1 = k_2 = k,\ k \in \mathbb{R}$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
Ф.с.р.	$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Общее решение	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

10.3.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ $n-$го ПОРЯДКА

Для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (10.17)$$

$a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$, характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (10.18)$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение (10.17), надо решить уравнение n-ой степени (10.18), которое имеет ровно n корней – действительных или комплексных. По виду найденных корней выписывается ф.с.р. с учетом того, что

1) каждому *простому* действительному корню k соответствует одно решение $y = e^{kx}$;
2) каждому действительному корню k *кратности* r соответствует r линейно независимых решений $y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}, \ldots,\ y_r = x^{r-1}e^{kx}$;
3) каждой паре *простых* комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствует пара решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$;
4) каждой паре комплексно сопряженных корней *кратности* r соответствует $2r$ линейно независимых решений

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_{2r-1} = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Подчеркнем, что ф.с.р. линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка содержит n линейно независимых решений. После нахождения ф.с.р. общее решение дифференциального уравнения (10.17) запишется в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y^{IV} + 6y''' + 9y'' = 0$, б) $y^{V} + 2y''' + y' = 0$.

а) характеристическое уравнение: $k^4 + 6k^3 + 9k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k+3)^2 = 0$. Это уравнение имеет две пары действительных корней кратности $r = 2$: $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = -3$. В соответствии с п. 2) ф.с.р. состоит из функций $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^{-3x},\ y_4 = xe^{-3x}$, а общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x} + C_4 xe^{-3x}.$$

б) характеристическое уравнение: $k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k(k^2+1)^2 = 0$. Это уравнение имеет простой действительный корень $k_1 = 0$ и две пары комплексных корней $k_{2,3} = i,\ k_{4,5} = -i$. В соответствии с п. 1) и п. 4) составим ф.с.р.: $y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\cos x,\ y_3 = x\sin x$. Отсюда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x.$$