ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕР. Вычислить частные производные первого порядка функции $z = x^2 y \sin^2 y \cos x + x y^2 \sin y \cos^2 x$.

Решение этой задачи в том виде, как она сформулирована, приведет, очевидно, к громоздким вычислениям: в каждом слагаемом придется находить производную произведения. Однако можно, заметив определенную симметрию в заданном выражении и обозначив $u = x \sin y$, $v = y \cos x$, значительно упростить вид функции z: $z = u^2 v + u v^2$. Вычислить частные производные функции $z = z(u, v)$ значительно проще, чем функции $z = z(x, y)$. Но для этого необходимо выяснить, как связаны между собой производные функций $z = z(x, y)$ и $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Функция $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ называется *сложной функцией двух переменных*: она формально зависит от переменных u и v, а фактически – от x и y.

Будем считать, что функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), а функция $z(u, v)$ – в соответствующей точке (u, v). Вычислим производную z'_x.

Зададим приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ получат частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$. Так как $z(u, v)$ дифференцируема в точке (u, v), то по определению ее полное приращение имеет вид:

$$\Delta z = z'_u(u, v)\Delta_x u + z'_v(u, v)\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x u + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x v,$$

причем $$\lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) = \lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) = 0. \qquad (6.4)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + z'_v(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right).$$

Функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), поэтому непрерывны. Значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x v = 0$.

Кроме того, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = v'_x$.

Отсюда с учетом (6.4) имеем

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u \, u'_x + z'_v \, v'_x + u'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \alpha\left(\Delta_x u, \, \Delta_x v\right) + v'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \beta\left(\Delta_x u, \, \Delta_x v\right) =$$

$$= z'_u \, u'_x + z'_v \, v'_x .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично, задавая $\Delta y \neq 0$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Способ написания этих формул станет наглядным, если составить схему зависимости сложной функции от ее формальных (промежуточных) и фактических переменных (рис. 8):

$$\begin{tikzcd}
 & & & z \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & u \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & v \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x & & y & & x & & y
\end{tikzcd}$$

Рис. 8

Вернемся к примеру в начале этого параграфа.

ПРИМЕР. Найти частные производные первого порядка сложной функции $z = u^2 \, v + u \, v^2$, $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

$$z'_u = 2u\,v + v^2, \quad z'_v = u^2 + 2u\,v,$$

$$u'_x = \sin y, \quad u'_y = x \cos y, \quad v'_x = -y \sin x, \quad v'_y = \cos x.$$

Отсюда

$$z'_x = \left(2u\,v + v^2\right) \sin y + \left(u^2 + 2u\,v\right)\left(-y \sin x\right),$$

$$z'_y = \left(2u\,v + v^2\right) x \cos y + \left(u^2 + 2u\,v\right) \cos x,$$

где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

Эта идея применима для составления формул вычисления производных сложных функций, зависящих от любого числа как фактических, так формальных переменных.

ПРИМЕР. Составить формулы вычисления производных первого порядка функции $z = z(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(y, t)$.

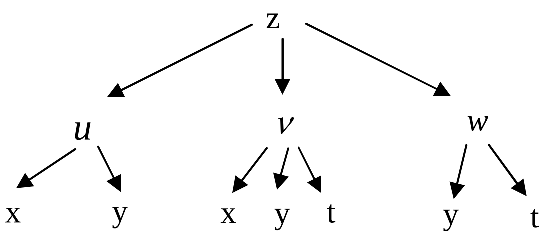

Рис. 9

Согласно схеме зависимости (рис. 9) эта функция зависит фактически от трех переменных x, y, t, и формулы вычисления производных имеют вид:

$$z'_x = z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x\ , \quad z'_y = z'_u\, u'_y + z'_v\, v'_y + z'_w\, w'_y\, , \quad z'_t = z'_v\, v'_t + z'_w\, w'_t.$$

Рассмотрим сложную функцию $z = z(x, u, v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

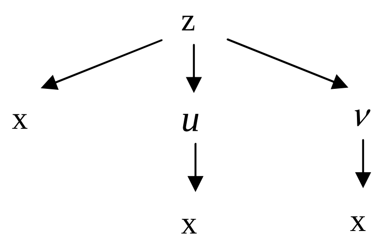

Рис. 10

Формально эта функция зависит от трех переменных, а фактически $z = z(x)$ – функция только одной переменной x. Поэтому производная от нее по x – не частная, а обыкновенная производная, которая в таком случае называется *полной производной* данной *сложной функции*. Вычисляется она по формуле $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (рис. 10). В этой формуле $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – *частная* производная функции, зависящей от трех переменных x, u, v, а $\dfrac{dz}{dx}$ – *полная* производная.

Используя формулу вычисления полной производной, можно дифференцировать показательно-степенные функции.

ПРИМЕР. Найти первую производную функции $y=\left(tg\ 2x\right)^{\cos 3x}$.

Обозначим $u=tg\ 2x,\ \ v=\cos 3x$, тогда получим $y=u^{v}$ – сложная функция двух переменных и $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (рис. 11).

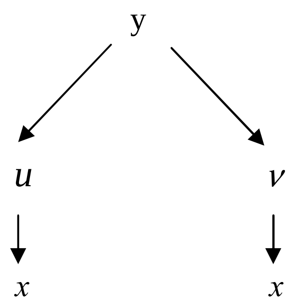

Рис. 11

Поэтому $y'=v\,u^{v-1}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}+u^{v}\ \ln u\cdot\left(-3\sin 3x\right)=u^{v}\left(\dfrac{2v}{u\cos^2 2x}-3\sin 3x\cdot\ln u\right)$,

где $u=tg\ 2x,\ \ v=\cos 3x$.

Заметим, что найти производную показательно-степенной функции можно и по-другому – с помощью процедуры логарифмического дифференцирования.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Рассмотрим уравнение $4x^3+3xy+y^3=0$. Очевидно, есть пары значений x и y, обращающих его в верное числовое равенство, например: $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ и т.д. Однако не всякая пара (x,y) удовлетворяет этому уравнению. Значит, можно утверждать, что этим уравнением задана некоторая функция $y=y(x)$ (или $x=x(y)$), хотя явно вид этой зависимости в данном случае получить довольно сложно.

Функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего независимые и зависимую переменные, называется *неявной функцией*.

В приведенном примере равенство $4x^3+3xy+y^3=0$ задает неявную функцию одной переменной. Уравнением $x-2y+5=0$ также задается неявная