

GBI-Tutorium 8

Tristan Schnell

15.Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

- 1 Wiederholung
- 2 Algorithmen in Graphen
 - Repräsentation von Graphen
 - Wegematrix
 - Erreichbarkeitsrelationen
 - Rechenaufgaben
 - Algorithmus von Warshall

Letztes Übungsblatt

- Auch mysteriöse Foren haben nicht immer recht
- Achtet auf Aufgabenstellung

Wiederholung

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Repräsentation von Graphen

Adjazenzlisten

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $x \in V$ ein Knoten. Die Adjazenzliste des Knotens x ist eine Liste $L_x \in V^{(*)}$, die alle Knoten y enthält, für die $(x, y) \in E$ (gerichteter Graph) bzw. $\{x, y\} \in E$ (ungerichteter Graph):

Example

$G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\})$

Darstellung mit Adjazenzliste:

$L_1 = (2, 3)$

$L_2 = (2)$

$L_3 = (1, 2, 3)$

Repräsentation von Graphen

Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $n := |V|$. Eine Matrix $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ heißt Adjazenzmatrix von G , wenn gilt:

$$\forall i, j \in V : A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Repräsentation von Graphen

Example

$G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \})$

Darstellung als Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Graphen

Vergleich von Adjazenzliste und -matrix

Adjazenzliste

- Die Frage „Welche Knoten sind zu x adjazent?“ kann schnell beantwortet werden.
- Spart bei geringer Kantenanzahl Speicherplatz.

Adjazenzmatrix

- Die Frage „Existiert eine Kante zwischen x und y ?“ kann schnell beantwortet werden.
- Benötigt für feste Knotenanzahl immer gleich viel Speicher.

Repräsentation von Graphen

Zu Adjazenzmatrizen

Woran erkennt man eine Schlinge?

Welche Eigenschaften hat die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?

Welchen Graphen stellt folgende Matrix dar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Graphen

Zu Adjazenzmatrizen

Woran erkennt man eine Schlinge?

→ 1 auf der Diagonalen.

Welche Eigenschaften hat die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?

Welchen Graphen stellt folgende Matrix dar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Graphen

Zu Adjazenzmatrizen

Woran erkennt man eine Schlinge?

→ 1 auf der Diagonalen.

Welche Eigenschaften hat die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen?

→ Sie ist achsensymmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Welchen Graphen stellt folgende Matrix dar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von Graphen

Aufgabe

Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 5)\}$$

Gib die Adjazenzlisten und die Adjazenzmatrix an.

Zeichne den Graphen.

Repräsentation von Graphen

Aufgabe

Zeichne den Graphen mit der folgenden Adjazenzmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

Definition: Wegematrix

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $n := |V|$. Eine Matrix $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ heißt Wegematrix von G , wenn gilt:

$$\forall i, j \in V : W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Example

Bestimme die Wegematrix.

Wegematrix

Zum Nachdenken

Wie sieht die Wegematrix aus, wenn die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist?

Wegematrix

Zum Nachdenken

Wie sieht die Wegematrix aus, wenn die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist?

Wegematrix

Zum Nachdenken

Wie sieht die Wegematrix aus, wenn die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist?

Wann ist allgemein $W=A$?

Wegematrix

Zum Nachdenken

Wie sieht die Wegematrix aus, wenn die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist?

Wann ist allgemein $W=A$?

Lösung: Wenn eine Kantenrelation E transitiv und reflexiv ist ($E^* = E$)

Erreichbarkeitsrelationen

Definition: Erreichbarkeitsrelationen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die reflexiv-transitive Hülle der Kantenrelationen E nennt man Erreichbarkeitsrelation E^* .

$$E^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k$$

Definition: Wegematrix

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $n := |V|$. Eine Matrix $W \in \{0, 1\}^{n \times n}$ heißt Wegematrix von G , wenn gilt:

$$\forall i, j \in V : W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i, j) \in E^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Matrixmultiplikation

Die Wegematrix lässt sich über die Matrixmultiplikation errechnen.

Definition: Matrizenprodukt

Seien A eine $(l \times n)$ -Matrix und B eine $(n \times m)$ -Matrix.
Dann heißt die $(l \times m)$ -Matrix C mit:

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

das Produkt der Matrizen A und B.

Man schreibt $C = A \cdot B$

Potenzen der Adjazenzmatrix

Aufgabe

Sei A die Adjazenzmatrix des Graphen $G = (V, E)$. Berechne die Wegematrix W mit Hilfe der Matrixmultiplikation.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^1$$

Lösung

Lösung

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 4 \\ 4 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{sgn}(\sum_{k=0}^{n-1} A^k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algorithmus zum Berechnen von E^*

Code

```
W  $\leftarrow$  0
for i  $\leftarrow$  0 to n-1 do
    M  $\leftarrow$  Id
    for j  $\leftarrow$  1 to i do
        M  $\leftarrow$  M  $\cdot$  A
    od
    W  $\leftarrow$  W + M
od
W  $\leftarrow$  sgn(W)
```

Berechnungszeit

Dieser Code benötigt ungefähr n^5 Arithmetische Operationen (AO) zum berechnen der Wegematrix

Rechenaufgabe

Ein schneller Algorithmus

Angenommen, man hat eine feste Gesamtrechenzeit t zur Verfügung.

Der Algorithmus, der n^5 AO benötigt (Alg0), könnte in dieser Zeit $k_0 = 1000$ Problem instanzen abarbeiten (Wegematrizen für 1000 Graphen mit n Knoten erzeugen).

Wie viele Problem instanzen k_1 würde der Algorithmus, der nur n^4 AO benötigt, in der gleichen Zeit schaffen?

Rechenaufgabe

Lösung

Alg0 bearbeitet in der Zeit t k_0 mal n^5 AO: $t = k_0 \cdot n^5$

Alg1 bearbeitet in der Zeit t k_1 mal n^4 AO: $t = k_1 \cdot n^4$

Damit gilt:

$$k_0 \cdot n^5 = k_1 \cdot n^4$$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{k_0 \cdot n^5}{n^4}$$

$$\Leftrightarrow k_1 = k_0 \cdot n$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 1000 \cdot n$$

Algorithmus von Warshall

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
  for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
     $W_{ij} \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ A_{ij} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$   
  od  
od  
  
for  $k \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
  for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
    for  $j \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do  
       $W_{ij} \leftarrow \max(W_{ij}, \min(W_{ik}, W_{kj}))$   
    od  
  od  
od
```

Algorithmus von Warshall

Aufgabe

Gib zu folgenden Graphen jeweils die Adjazenzmatrix an und bestimme die reflexiv-transitive Hülle mit Hilfe des Warshall-Algorithmus. Kennzeichne bei jedem Schritt des Algorithmus die Veränderungen.

Ende

Fragen?

Unnützes Wissen

In der Schweiz gibt es bei manchen Geschirrspülmaschinen extra ein Käsefondue- und Racletteprogramm.