Aufgaben

Algorithmen

- Invariante finden+beweisen
- Invariante beweisen/widerlegen
- Algorithmus finden

Aufgabe 1

Aufgabe

$x \leftarrow a$
$y \leftarrow b$
for $i \leftarrow 0$ **to** $a + b + 1$ **do**
    $k \leftarrow min(x, y)$
    $g \leftarrow max(x, y)$
    $x \leftarrow k$
    $y \leftarrow g - k$
od

$a, b \in \mathbb{N}_0$ und $a + b \geq 1$

Finde und beweise eine aussagekräftige Schleifeninvariante.

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$

$\Rightarrow a = k \cdot n_1$ und $b = k \cdot n_2$

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$

$\Rightarrow a = k \cdot n_1$ und $b = k \cdot n_2$

sei oBdA $a \geq b$

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$
$\Rightarrow a = k \cdot n_1$ und $b = k \cdot n_2$
sei oBdA $a \geq b$
$\Rightarrow$ Nach erstem Schleifendurchlauf:

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$
$\Rightarrow a = k \cdot n_1$ und $b = k \cdot n_2$
sei oBdA $a \geq b$
$\Rightarrow$ Nach erstem Schleifendurchlauf:
$x = b$ und $y = a - b$

Aufgabe 2

Lösung

$ggT(a, b) = ggT(x, y)$

Beweis

sei $k = ggT(a, b)$
$\Rightarrow a = k \cdot n_1$ und $b = k \cdot n_2$
sei oBdA $a \geq b$
$\Rightarrow$ Nach erstem Schleifendurchlauf:
$x = b$ und $y = a - b$
$\Rightarrow x = k \cdot n_2$ und $y = (k \cdot n_1 + k \cdot n_2) = k \cdot (n_1 + n_2) = k \cdot n_3$
etc. . .

zurück

Aufgabe

$X_0 \leftarrow 2$
$Y_0 \leftarrow 5$
for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
    $j \leftarrow i$
    $Y_{j+1} \leftarrow 5Y_j - 6X_j$
    $X_{j+1} \leftarrow Y_j$
    $y \leftarrow g - k$
od

Beweise oder widerlege:
$Y_j = 2^{j+1} + 3^{j+1} \wedge X_j = 2^j + 3^j$ ist Schleifeninvariante.

Lösung

Vollständige Induktion!

Aufgabe 2

Lösung

Vollständige Induktion!

Induktionsanfang

$j = 0$:
$2^{0+1} + 3^{0+1} = 5 = Y_0 \wedge 2^0 + 3^0 = 2 = X_0$
Rest Tafel

zurück

Aufgabe 3

Aufgabe

Schreiben Sie einen Algorithmus auf, der folgendes leistet:

- Als Eingaben erhält er ein Wort $w : \mathbb{G}_n \to A$ und zwei Symbole $x \in A$ und $y \in A$.
- Am Ende soll eine Variable r den Wert 0 oder 1 haben, und zwar soll gelten:

$$\mathrm{r} = \begin{cases} 1 & \text{falls irgendwo in } w \text{ direkt} \\ & \text{hintereinander erst x und dann y vorkommen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Benutzen Sie zum Zugriff auf das i-te Symbol von w die Schreibweise $w(i)$.
Formulieren Sie den Algorithmus mit Hilfe einer **for**-Schleife.

Aufgabe 3

Lösung

$p \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**

$$p \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } w(i) = x \wedge w(i+1) = y \\ \text{p} & \text{sonst} \end{cases}$$

zurück