GBI-Tutorium 9

Tristan Schnell

22.Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

Die Relation $\asymp$

Definition

Für zwei Funktionen f,g : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt $f \asymp g$ genau dann, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$$

Bedeutung

f $\asymp$ g bedeutet f wächst asymptotisch genauso schnell wie g.

Die Relation $\asymp$

Example

- n $\asymp$ 2n
  Beweis: Wähle $n_0 = 0, c = 1, c' = \frac{1}{2}$
  $\forall n \geq 0 : 1 \cdot n \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot n$
- $n^2 + 2n \asymp 5n^2 - 2n + 3$
- $n^2 \asymp n^3$
  Das gilt nicht! Beweis:
  - Es müsste gelten: $\exists \cdots : n^3 \leq c \cdot n^2$
  - Für n ¿ 0 gilt: $n^3 \leq c \cdot n^2 \Leftrightarrow n \leq c$
  - Es gibt aber kein c $\in \mathbb{R}_+$ so dass gilt: $\forall n > n_0 : c \leq n$

Θ(f)

Definition

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \mid f(n) \asymp g(n)\}$$

Bedeutung

Θ(f) ist also die Menge aller Funktionen die zu einer Funktion f(n) in Relation $\asymp$ stehen.

Die Relation $\asymp$

Allgemeine Rechenregeln für $\asymp$

- $a \cdot f \asymp b \cdot f (a, b \in \mathbb{R}_+)$
- $f \asymp g$, wenn f und g Polynome von gleichen Grad sind
- $log_a(n) \asymp log_b(n)$

$log_a(n) \asymp log_b(n)$

Wir wollen nun zeigen:

$$log_2(n) \asymp log_8(n)$$

Bemerkung

Allgemein gilt für a $\in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}_+$:

$$a^{log_a(n)} = n$$

$log_a(n) \asymp log_b(n)$

Anschaulich

n	1	5	64	512	4096	32768
$log_8(n)$	0	1	2	3	4	5
$log_2(n)$	0	3	6	9	12	15

Beweis

$n = 8^{log_8(n)} = (2^3)^{log_8(n)} = 2^{3 log_8(n)}$

Also gilt für $n \leq 1$: $log_2(n) = log_2(2^{3 log_8(n)}) = 3 log_8(n)$

$\Rightarrow log_2(n) = 3 log_8(n)$

Wegen af(n) $\asymp$ bf(n) folgt $log_2(n) \asymp log_8(n)$

$log_a(n) \asymp log_b(n)$

Allgemein

Man kann ebenso für allgemeine a und b zeigen, dass gilt:

$$log_a(n) \asymp log_b(n)$$

Im Allgemeinen kann man also einfach $\Theta(\log(n))$ schreiben, ohne die Basis anzugeben, weil sie egal ist.

$\preceq$ *und* $\succeq$

Definition

- $f \preceq g \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_o : f(n) \leq cg(n)$
- $f \succeq g \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n)$

Bedeutung

f wächst asymptotisch mindestens / höchstens genauso schnell wie g
(ab einem gewissen n)

Example

- $n^{10} \preceq n^{15}$
  Wähle z.B. $n_0 = 1, c = 1$
- $n^4 - n^2 \succeq n^3$
  Wähle z.B. $n_0 = 2, c = 1$

O und Ω

Definitionen

- $O(f(n)) = \{g(n) \mid g(n) \preceq f(n)\}$
- $\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid g(n) \succeq f(n)\}$

Example

- $n^{10} \in O(n^{15})$
- $n^4 - n^2 \in \Omega(n^3)$

Keine totale Ordnung!

!!!Achtung!!!

$\preceq$ und $\succeq$ bilden keine totale Ordnung!
Es gibt unvergleichbare Funktionen

Beispiel

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} n, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt weder f $\preceq$ g, noch f $\succeq$ g und schon gar nicht f $\asymp$ g!

Bemerkung

Es gilt

$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$
- $n \in O(5n)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$
- $n \in O(5n)$
- $O(n) \in O(n^2)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$
- $n \in O(5n)$
- $O(n) \in O(n^2)$
- $O(n) \subset O(n^2)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$
- $n \in O(5n)$
- $O(n) \in O(n^2)$
- $O(n) \subset O(n^2)$
- $O(n) \subset \Omega(n^2)$

Ja oder Nein?

- $n \in \Theta(n)$
- $n \in O(5n)$
- $n \in \Theta(5n^2)$
- $n \in O(5n)$
- $O(n) \in O(n^2)$
- $O(n) \subset O(n^2)$
- $O(n) \subset \Omega(n^2)$
- $\Theta(f(n)) \subset O(f(n))$

Algorithmus von Warshall

for i ← 0 **to** n - 1 **do**
  for j ← 0 **to** n - 1 **do**

$$W_{ij} \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ A_{ij} & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

  od
od

for k ← 0 **to** n - 1 **do**
  for i ← 0 **to** n - 1 **do**
    forj ← 0 **to** n - 1 **do**

$$W_{ij} \leftarrow max(W_{ij}, min(W_{ik}, W_{kj}))$$

    od
  od
od

Quicksort

quicksort(links, rechts)
    if (links $<$ rechts) **do**
        teiler $:=$ teile(links, rechts)
        quicksort(links, teiler-1)
        quicksort(teiler$+$1, rechts)
    od

Ende

Noch Fragen?

Unnützes Wissen

Weihnachten wurde 1647 vom englischen Parlament offiziell abgeschafft.