Exercice 2 :

1/ Soit $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$

$\Theta \sim U([0,2\pi])$ et $f_R(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(r)$

Θ et R indépendant.

$$f_{\Theta \times R}(\theta, r) = f_\Theta(\theta) \times f_R(r) \quad \text{par indépendance.}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times r\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(r)\, 1\!\!1_{[0,2\pi]}(\theta)$$

~~déterminons~~ déterminons la densité de probabilité de (X,Y) par la méthode de changement de ~~la~~ variable. Posons la fonction de transfert

$$g(r,\theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \qquad J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

d'où $\det J_g = r$

La formule de la fonction muette est : $\mathbb{E}[h(Y)] = \int_Y h(y) f_Y(y)\,dy = \int_X h(y)\, f_X(g^{-1}(y)) \times \frac{1}{\det J_g(g^{-1}(y))}\,dy.$

or ici en remplaçant $f_{X,Y}(x,y) = f_{R,\Theta}(r,\theta) \times \frac{1}{|\det J_g|} = \frac{r}{2\pi}\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \times \frac{1}{r}$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$$

or $r^2 = x^2 + y^2$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right).$$

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)}$$

où $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)}$ qui est la fonction densité d'une loi normale centrée réduite.

On remarque que les variable son séparables et que les marginales sont des $N(0,1)$

2/ Il faut utiliser the Inverse transform sampling method.

Nous savons que $F_X(x) = U$ où $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

Regardons dans le cas :

$$F_R(x) = \mathbb{P}(R \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_R(r)\,dr = \int_{-\infty}^{x} r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(r)\,dr$$
$$= \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^x$$
$$= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

ainsi $u = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$x = \sqrt{-2\log(1-u)}$

d'où $R = \sqrt{-2\log(1-U)}$

Idem pour Θ nous trouvons que

$\Theta = 2\pi U$.

Algo :

Simuler $U_1, U_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$.

Poser $R = \sqrt{-2\log(1-U_1)}$ $\Theta = 2\pi U_2$.

Calculer $X = R\cos(\Theta)$, $Y = R\sin(\Theta)$

Retourner (X,Y)

Par la question 1 nous avons que (X,Y) est un couple de deux distribut° gaussienne indépendantes.

3/ a) À la fin de la boucle While. la condition $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ selection uniformement sur un disque unité ainsi (V_1, V_2) est une distribution uniforme du disque unité

b) On cherche le nombre moyen de pas dans la boucle while.

On sample uniformément sur ~~le carré~~ V_1 et V_2 sur $[-1,1]$. qui représente ~~l'aire~~ un carré de côté 2

La probabilité de tomber dans le cercle unitaire est :

$$p = \frac{\text{Aire cercle}}{\text{Aire carré}} = \frac{\pi}{4}$$

la variable aleatoire Z qui est le premier succès ~~soit~~ de sampler V_1 V_2 qui sont dans le cercle unitaire suit une loi géométrique de probabilté p

ainsi $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi} \approx 1,273$

$\boxed{\text{Ainsi le nombre moyen de steps est } 2}$

c) * Montrons que $V = V_1^2 + V_2^2$ suit une loi uniforment. Regardons sa fonct° de répartit°

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(\underbrace{V_1^2 + V_2^2 \leq v})$$

l'évènement que (V_1, V_2) soit sur le disque de rayon $\sqrt{v}$

or $(V_1, V_2) \sim U[\{\text{disque unitaire}\}]$

d'où $\mathbb{P}(V_1^2 + V_2^2 \leq v) = \frac{\pi \sqrt{v}^2}{\pi} = v$

ainsi $\boxed{F_V(v) = v \text{ qui est la fonction de répartition d'une loi uniforme. or } V \in [0,1] \text{ d'où } V \sim U([0,1])}$

* Montrons que T_1 suit la même distribut° de $\cos(\Theta)$

Puisque $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ alors on peut écrire $V_1 = R\cos\Theta$, $V_2 = R\sin(\Theta)$

$$\boxed{T_1 = \frac{R\cos(\Theta)}{\sqrt{R^2(\cos^2(\Theta) + \sin^2\Theta)}} = \cos(\Theta)}$$

Puisque (V_1, V_2) uniforme sur disque pas de direction de predilection ainsi $\Theta \sim U([0, 2\pi])$

Ainsi
$T_1 = \cos(\Theta)$
$V = R^2 = R^2\cos^2(\Theta) + R^2\sin^2(\Theta) = V_1^2 + V_2^2$

Regardons la loi conjointe (R, Θ) appliquons un changement de variable avec V_1, V_2

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \overbrace{f_{V}(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{= \frac{1}{\pi} \text{ car uniform}} \times \overbrace{\det J_{g^{-1}}}^{= r} \quad \text{où } g^{-1}(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{r}{\pi}$$

Montrons que R et Θ sont independants. calculons les lois marginales de (R,Θ)

$$f_R(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\, d\theta = \frac{r}{\pi} \times 2\pi = 2r$$

$$f_\Theta(\theta) = \int_{r=0}^{1} f_{R,\Theta}(r,\theta)\, d\theta = \left[\frac{r^2}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}.$$

$$f_R(r) \times f_\Theta(\theta) = \frac{2r}{2\pi} = \frac{r}{\pi} = f_{R\times\Theta}(r,\theta)$$ ainsi R et Θ sont indep.

or $T_1 = \cos(\Theta)$, $V = R^2$ par le lemme de coalition son alors indep.

d) Nous savons que $V \sim U([0,1])$.

- ainsi par la question 2 nous savons que S et R suivent la même loi
- Par la question 3 c) T_1 et $\cos(\Theta)$ suivent la même loi

donc $\begin{cases} X = S \times T_1 = R\cos\Theta \\ \text{et } Y = S \times T_2 = R\sin\Theta \end{cases} \Rightarrow$ (X,Y) est une distribut°. indep. de Gaussian $N(0,1)$ par la question 1.