Diferencialinių lygčių sprendimas

V praktikos užduotis

Paimkite dif. lygtį ir sprendimo metodus pagal savo eilės numerį. Koši uždavinį nurodytame intervale išspręsti reikia 3 būdais: 1) Tiksliai (ne skaitiškai), pritaikant tinkamą metodą; 2) ir 3) Nurodytais skaitiniais metodais. Jei panaudojus Eulerio metodą gaunama netiesinė lygtis, ją spręskite panaudoti metodą iš pirmos programavimo užduoties "Netiesinės lygtys". Vertinimas: 0,3 + 0,4 (už sunkesnį skaitinį metodą) + 0,3.

Imkite skirtingas h reikšmės, pvz. $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.01, ...$ ir abiems skaitiniams metodams sudarykite lentelę iš paklaidų nuo tikrojo sprendinio. Padarykite išvadas apie panaudotų skaitinių metodų tikslumą, t.y. kurios eilės jie yra.

Metodai

1. Išreikštinis Eulero
2. Simetrinis Eulerio (dar vad. Crank - Nickolson met.)
3. Neišreikštinis Eulerio
4. Tripakopis Rungės-Kuto (dar vad. Kutto met.)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

5. Dvipakopis Rungės-Kuto su $\sigma = 0.5$ (dar vad. simetriniu R-K met.)
6. Dvipakopis Rungės-Kuto su $\sigma = 1$ (dar vad. Heun met.)

Nr.	Lygtis	Pradinė sąlyga	Intervalas	Metodai
1	$yy' = xy^2 - 2x$	$y(1) = 1$	$x \in [1, 7]$	2, 3
2	$y' - y - xe^x \sin x = 0$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 10]$	1, 4
3	$xyy' = lnx + 1$	$y(1) = 1$	$x \in [1, 8]$	2, 5
4	$y' = -\frac{y^3}{2x}$	$y(1) = 4$	$x \in [1, 8]$	1, 6
5	$y' - 2y - x = 0$	$y(0) = 0$	$x \in [0, 8]$	1, 4
6	$y' = xy^2 + x$	$y(0) = 4$	$x \in [0, 8]$	2, 3
7	$y' = -\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$	$y(0) = -1$	$x \in [0, 1]$	2, 5
8	$ty' - 2y = t^5 \sin(2t)$	$y(\pi) = -0,5\pi^4$	$t \in [\pi, 4\pi]$	1, 6
9	$ty' + 2y + t = t^2$	$y(0.1) = 10$	$t \in [0.1, 10]$	1, 4
10	$y' = \frac{\sin t}{\sin y}$	$y(0) = \frac{\pi}{2}$	$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$	2, 3
11	$y' - y \tan x = \sin x$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 1.5]$	2, 6
12	$ty' + 2y - 1 = t^3$	$y(1) = 2$	$t \in [1, 8]$	1, 5
13	$y' = \cos xy^2 + \cos x$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 10]$	2, 6

Nr.	Lygtis	Pradinė sąlyga	Intervalas	Metodai
14	$(x^2+4)y' = 2xy$	$y(0) = 8$	$x \in [0, 8]$	1, 5
15	$y' = (2x^2+2)e^{-y}$	$y(1) = 0$	$x \in [1, 5]$	2, 4
16	$y' - y + 2t^2 = 0$	$y(1) = -1$	$t \in [1, 6]$	1, 3
17	$xy' + 3y = \frac{2+x^2}{x^3}$	$y(1) = 2$	$x \in [1, 10]$	1, 4
18	$y' = \frac{y^3}{x^2}$	$y(1) = 1$	$x \in [1, 5]$	2, 5
19	$y' - y - (t^3-1)e^t = 0$	$y(0) = -1$	$t \in [0, 10]$	1, 3
20	$ty' - 2y = t^4 - t^3$	$y(1) = 2$	$t \in [1, 6]$	2, 6
21	$y' = \frac{2x}{\sin y}$	$y(0) = \frac{\pi}{2}$	$x \in [0, 0.8]$	1, 3
22	$ty' - 2y = t^5 \cos(2t)$	$y(\pi) = 0$	$t \in [\pi, 6\pi]$	2, 4
23	$y' = x\sqrt{1-y^2}$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 5]$	2, 5
24	$xy' + 3y = x + \frac{2}{x}$	$y(1) = 2$	$x \in [1, 8]$	1, 6
25	$y' - y - xe^x \cos x = 0$	$y(1) = 2$	$x \in [1, 7]$	1, 4
26	$y' = (xy)^2 + x^2$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 10]$	2, 3
27	$y' = -\frac{y^3}{2x}$	$y(1) = 2$	$x \in [1, 6]$	2, 5
28	$ty' - 2y = t^5 \cos(2t)$	$y(\pi) = 1$	$t \in [\pi, 4\pi]$	1, 6
29	$y' = (2x-4)e^{-y}$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 6]$	1, 4
30	$xy' + 3y = \frac{1-x}{x^3}$	$y(1) = -1$	$x \in [1, 5]$	2, 3
31	$(x^2+2)y' = 2xy$	$y(0) = 4$	$x \in [0, 10]$	2, 5
32	$y' - 3y - x = 1$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 10]$	1, 6
33	$y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 5]$	1, 5
34	$ty' + 2y + t = t^3 - 2$	$y(0.1) = 5$	$t \in [0.1, 8]$	2, 6
35	$xy' = \frac{lnx-2}{y}$	$y(1) = 2$	$x \in [1, 9]$	2, 3
36	$xy' + 3y = 1 + \frac{2}{x}$	$y(1) = 1$	$x \in [1, 10]$	1, 4
37	$yy' = xy^2 + x$	$y(0) = 1$	$x \in [1, 8]$	2, 6
38	$y' - y\tan x = x - 1$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 1.5]$	1, 5
39	$ty' - 2y = t^4 \sin(2t)$	$y(\pi) = 0$	$t \in [\pi, 5\pi]$	1, 4
40	$y' = -\frac{y^3}{t+2}$	$y(0) = 1$	$t \in [0, 6]$	2, 3
41	$y' = \frac{\cos x}{\cos y}$	$y(\frac{\pi}{2}) = 0$	$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$	2, 5
42	$y' = e^{x-y}$	$y(0) = 0$	$x \in [0, 5]$	1, 6
43	$ty' - 2y = t^5 - t^3$	$y(2) = 3$	$t \in [2, 8]$	2, 3
44	$y' - y - (x^2-1)e^x = 0$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 6]$	1, 4
45	$y' = -\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 1]$	2, 4
46	$y' - y\tan x = x + 2$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 1.2]$	1, 3
47	$y' - 2y + t = 2$	$y(0) = 1$	$t \in [0, 5]$	1, 5
48	$(x^2-3)y' = 2xy$	$y(0) = 2$	$x \in [0, 8]$	2, 6
49	$yy' = y^2 \sin x - \sin x$	$y(0) = 4$	$x \in [0, 6]$	1, 4
50	$xy' + 3y = \frac{2+x}{x^3}$	$y(1) = 1$	$x \in [1, 7]$	2, 3
51	$y' = -\frac{y^3}{2x+1}$	$y(0) = 1$	$x \in [0, 10]$	1, 5

Sunkesnės užduotys

Išspręskite tiksliai aukščiau duotą lygtį. Vietoj jums paskirto sprendimo skaitiniu metodu, galite pasirinkti sunkesnę užduotį, kuriai reikia spręsti lygtis, modeliuojančias tam tikrą procesą. Galite gauti iki 1,5 taško gerai atlikus.

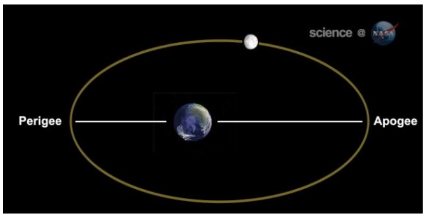
1. (Astronomija) Mėnulio, besisukančio aplink žemę, koordinatės $\mathbf{Y}(t) = (y_1(t),\ y_2(t))$ pagal laiką, gali būti apskaičiuotos iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_4, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}}, \\ \frac{dy_4}{dt} &= -\frac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}}, \\ y_1(0) &= 1-e,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0,\ y_4(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}. \end{cases}$$

Čia y_1 ir y_2 - orbitos x ir y koordinatės pagal laiką, y_3 ir y_4 - greitis pagal tą kryptį, e vadinamas ekcentricitetu ir, kai $0 < e < 1$ objektas juda elipse.

Išspręskite lygtį 2 būdais: pasirinktais pirmos ir antros eilės metodais. Nubraižykite orbitos grafiką (reiktų braižyti y_2 nuo y_1) parodydami, kaip rasta orbita priklauso nuo žingsnio τ pasirinkimo, palyginkite panaudotus skaitinius metodus. Išmėginkite, kaip orbita priklauso nuo ekcentriciteto e ir kaip tinkamai parinkti τ, kai e artėja prie 1 (turi būti vis sunkiau suskaičiuoti).

Suskaičiuokite orbitos ilgį naudodami parametrinės kreivės ilgio formulę (formulę susiraskite patys). Reikalingą integralą skaičiuokite patinkančiu skaitiniu metodu, išvestines - baigtiniais skirtumais.



1 pav.: Mėnulio orbitos aplink žemę trajektrija yra elipsė.

2. (Biologija) Dviejų konkuruojančių populiacijų dinamika, kur $y_1(t)$ – plėšrūnų populiacijos dydis, $y_2(t)$ – aukų, gali būti modeliuojama tokiu plėšrūnų-aukų modeliu:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1(g_1 - ay_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2(g_2 - py_1), \end{cases}$$

kur g_i yra populiacijos kitimas dėl gimimo/mirčių, a – plėšrūnų populiacijos augimas dėl medžiojamų aukų kiekio, b – aukų populiacijos mažėjimas dėl plėšrūnų. Pasirinkite įvarias parametrų reikšmes ir skirtingas pradinių populiacijų dydžius. Išspręskite lygtį 2 būdais: pasirinktais pirmos ir antros eilės metodais. Nubraižykite abiejų populiacijų kitimo grafikus.

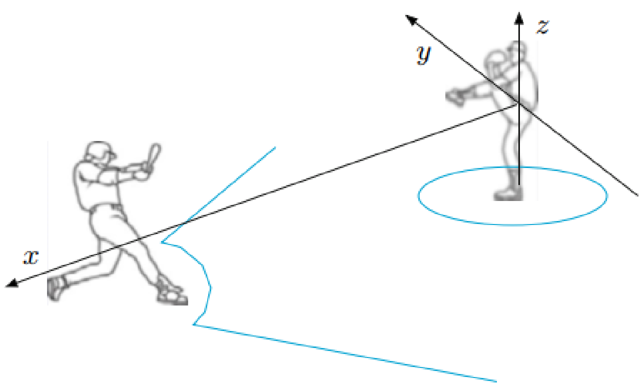
Pavaizduokite populiacijos dinamikos grafiką – plėšrūnų kiekio priklausomybę nuo aukų – skirtingiems pradinių populiacijų dydžiams. Eksperimentiškai raskite taip vadinamą ekvilibriumo tašką - pradinę populiaciją, su kuria plėšrūnų-aukų skaičius išlieka stabilus.

3. (Fizika, paimta iš Quarteroni et al knygos) Skaičiuosime beisbolo kamuoliuko, skriejančio tarp metiko ir gaudytojo, trajektoriją naudodami koordinačių sistemą pagal pav. 2. Trajektorija užrašoma lygtimis:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = v_x, \\ \frac{dy}{dt} & = v_y, \\ \frac{dz}{dt} & = v_z, \\ \frac{dv_x}{dt} & = -F(v)vv_x + B\omega(v_z \sin\phi - v_y \cos\phi), \\ \frac{dv_y}{dt} & = -F(v)vv_y + B\omega v_x \cos\phi, \\ \frac{dv_z}{dt} & = -g - F(v)vv_z - B\omega v_x \sin\phi, \\ x(0) & = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0, \\ v_x(0) & = v_0 \cos\phi,\ v_y(0) = 0,\ v_z(0) = v_0 \sin\phi, \end{cases}$$

kur $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ - kamuoliuko trajektorijos vektorius, $\mathbf{v}(t) = \big(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\big)$ - greičių kiekviena kryptimi vektorius, $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ - greičio modulis. Reikalingos konstantos: $B = 4.1 \cdot 10^{-4}$ - bedimensė konstanta, $\omega = 180 \cdot 1.047$ - kampinis greitis radianais, g - laisvojo kritimo pagreitis m/s^2, v_0 - išmesto kamuolio greitis m/s, ϕ - metimo kampas, $F(v) = 0.0039 + \frac{0.0058}{1+e^{(v-35)/5}}$ - trinties koefiecientas. Lygtis veikia iki laiko T - kol kamuoliukas paliečia žemę (aišku, tikrame žaidime jis atmušamas arba pagaunamas).

Išspręskite lygtis 2 būdais: pasirinktais pirmos ir antros eilės metodais. Pasirinkite kelis realius v_0 ir ϕ dydžius ir išmėginkite, kaip kamuoliuko kelias priklauso nuo šių parametrų. Ištirkite, kaip rasta trajektorija priklauso nuo pasirinkto laiko žingsnio τ. Nubraižykite trajektorijos kreivės trimatį grafiką.



2 pav.: Beisbolo kamuoliuko metimas ir koordinčių sistema, kurios pradžia - kamuoliukas metiko rankoje