Бакалавриат ЭМИТ, 2024/2025
Случайные процессы в экономике
Домашнее задание-2. Решение

21 октября 2024 г.

Задача 1.

Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ и

$$\mathcal{F} := \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$
$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$
$$\mathcal{H} := \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

a) Определите, какие из семейств множеств $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и/или $\mathcal{H}$ являются σ-алгебрами, а какие нет.

b) Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ определена следующим образом: $f(n) := (-1)^n$. Проверьте измеримость f по отношению к σ-алгебрами, определённым в п. a).

Решение

a) $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ являются σ-алгебрами, а $\mathcal{G}$ – нет.

b) f измерима по $\mathcal{F}$, но не по $\mathcal{H}$.

Задача 2.

Пусть X – стандартная нормальная случайная величина, $\mathcal{N}(0,1)$. Случайная величина Y задается на том же вероятностном пространстве, что и X, следующим образом:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{для } \omega : |X(\omega)| < 0.5 \\ -X(\omega) & \text{для } \omega : |X(\omega)| \geq 0.5. \end{cases}$$

a) Найдите маржинальную плотность $f_Y(y)$ распределения Y.

b) Является ли $X + Y$ нормальной случайной величиной?

Решение

a) Рассмотрим $\Pr(Y \leq y)$ для разных значений y.

- Для $y \geq 0.5$: $\Pr(Y \leq y) = \Pr(X \geq -y) = \Pr(X \leq y) = \Phi(y)$.
  Равенство $\Pr(X \geq -y) = \Pr(X \leq y)$ выполняется в силу симметрии стандартного нормального распределения относительно нуля, см. рис. 1.
- Для $y \in (-0.5,\, 0.5) : \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \geq 0.5) + \Pr\big(X \in (-0.5, y]\big) = \Phi(-0.5) + \Phi(y) - \Phi(-0.5) = \Phi(y)$, см. рис. 2.
- Для $y \leq -0.5$: $\Pr(Y \leq y) = \Pr(X \geq -y) = \Pr(X \leq y) = \Phi(y)$, см. рис. 3.

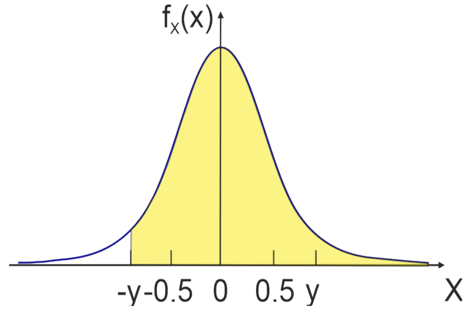

Рис. 1: $y \geq 0.5$; жёлтым цветом отмечены области значений X, для которых $Y \leq y$

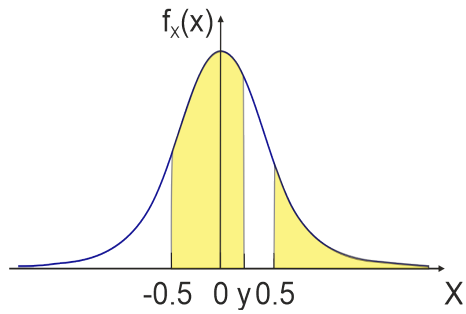

Рис. 2: $y \in (-0.5,\, 0.5)$; жёлтым цветом отмечены области значений X, для которых $Y \leq y$

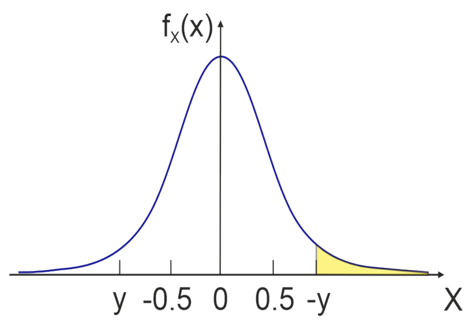

Рис. 3: $y \leq -0.5$; жёлтым цветом отмечены области значений X, для которых $Y \leq y$

При всех возможных значениях y, численное значение кумулятивной функции распределения $F_Y(y)$ равно $\Phi(y)$, следовательно маржинальное распределение Y является стандартным нормальным, а его плотность равна $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}$.

b) По построению, $|X+Y| \leq 1$, следовательно $X+Y$ не может являться нормальной случайной величиной. Сконструированные в этом примере случайные величины X и Y не являются совместно нормальными.

Задача 3.

Фирма A на собеседовании нанимает работника с вероятностью p, и платит трудоустроенным сотрудникам вознаграждение $Y \sim Exp(\lambda)$, а в случае отказа в приёме на работу, её расходы на организацию одного собеседования составляют a. Найдите среднее значение и дисперсию общих затрат, если планируется провести собеседования с k кандидатами, и решения о приёме на работу и размере оплаты каждого работника принимаются независимо.

Решение

Используем обозначения: X_i – расходы фирмы на i-го кандидата; $\mathbb{1}_i$ – индикатор, что i-го кандидата взяли на работу. Тогда общие затраты фирмы равны $S = \sum_{i=1}^k X_i$, и для нахождения $\mathbb{E}S$ и $\mathbb{V}S$ удобно использовать закон повторных матожиданий:

$$\mathbb{E}S = k\mathbb{E}(X_i) = k\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X_i \mid \mathbb{1}_i)\big] = k\left[\mathbb{E}(X_i \mid \mathbb{1}_i = 1)\cdot \Pr(\mathbb{1}_i = 1) + \mathbb{E}(X_i \mid \mathbb{1}_i = 0)\cdot \Pr(\mathbb{1}_i = 0)\right] =$$

$$= k\left[\frac{p}{\lambda} + a(1-p)\right].$$

$$\mathbb{V}S = k\mathbb{V}X_i, \quad \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X_i^2 \mid \mathbb{1}_i)\big] = \mathbb{E}(X_i^2 \mid \mathbb{1}_i = 1)\cdot \Pr(\mathbb{1}_i = 1) + \mathbb{E}(X_i^2 \mid \mathbb{1}_i = 0)\cdot \Pr(\mathbb{1}_i = 0) =$$

$$= \frac{2p}{\lambda^2} + a^2(1-p) \Rightarrow \mathbb{V}X_i = \frac{2p}{\lambda^2} + a^2(1-p) - \left(\frac{p}{\lambda} + a(1-p)\right)^2, \quad \mathbb{V}S = k\left[\frac{2p}{\lambda^2} + a^2(1-p) - \left(\frac{p}{\lambda} + a(1-p)\right)^2\right].$$

Задача 4.

Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Вычислите $\mathbb{E}\left(X \mid X^2\right)$.

Решение

Можно ввести случайную величину $\xi = \operatorname{sign}(X)$ и воспользоваться расширенной версией закона повторного матожидания:

$$\mathbb{E}(X \mid X^2) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid X^2, \xi) \mid X^2\right] = \mathbb{E}\left[\sqrt{X^2}\xi \mid X^2\right] = \sqrt{X^2}\mathbb{E}(\xi \mid X^2) = \sqrt{X^2}\mathbb{E}\xi = 0. \tag{1}$$

Переход от $\mathbb{E}(X \mid X^2, \xi)$ к $\sqrt{X^2}\xi$ объясняется тем, что если мы знаем значение квадрата и знак случайной величины, то этой информации достаточно, чтобы восстановить её точное значение. При этом, условное матожидание $\mathbb{E}(X \mid X^2, \xi)$ является случайной величиной, измеримой по $\sigma(X^2, \xi)$ – то есть, фактически, должно выражаться как функция от X^2 и ξ, – поэтому X здесь записана как $\sqrt{X^2}\xi$. Переход в (1) от условного матожидания $\mathbb{E}(\xi \mid X^2)$ к безусловному $\mathbb{E}\xi$ объясняется независимостью ξ и X^2, – для доказательства независимости рассмотрим совместную функцию распределения:[1]

$$\forall x \in [0, 1],\ \Pr(\{\xi = 1\} \cap \{X^2 \le x\}) = \Pr(X \in [0, \sqrt{x}]) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \Pr(\xi = 1)\Pr(X^2 \le x).$$

Рассуждения, подобные вышеприведённому, часто называют формулой полного матожидания (по аналогии с формулой полной вероятности). Сравните (1) со следующей записью:

$$\mathbb{E}\left(X \mid X^2\right) = \mathbb{E}\left(X \mid X^2, X \ge 0\right)\cdot \Pr(X \ge 0 \mid X^2) + \mathbb{E}\left(X \mid X^2, X < 0\right)\cdot \Pr(X < 0 \mid X^2) = \frac{X}{2} + \frac{-X}{2} = 0.$$

[1] Поскольку ξ – дискретная, её распределение удобнее описывать с помощью функции масс $p_\xi(z) = \Pr(\xi = z)$, а её совместное распределение с непрерывной X^2 – с помощью функции распределения $p_{\xi, X^2}(z, x) = \Pr(\{\xi = z\} \cap \{X^2 \le x\})$. В этом случае условие $\forall x, z \in \mathbb{R}\ p_{\xi, X^2}(z, x) = p_\xi(z)F_{X^2}(x)$ является необходимым и достаточным для независимости ξ и X^2.