Бакалавриат ЭМИТ, 2024/2025

Случайные процессы в экономике

Домашнее задание-1

20 сентября 2024 г.

Задача 1.

Два игрока по очереди подбрасывают монетку; каждый из них видит только результат своего броска. Постройте сигма-алгебры случайных событий, соответствующие случайным экспериментам, в которых экспериментатор имеет доступ к информации о результатах:

a) Известных первому игроку;

b) Известных второму игроку;

c) Известных обоим игрокам одновременно;

d) Известных хотя бы одному из игроков.

Задача 2.

Пусть A – некоторое множество и $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – некоторая система множеств. Докажите следующее равенство:

$$A \bigcup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(A \bigcup B_\lambda \right). \tag{1}$$

Подсказка: самый простой способ доказательства в задачах такого типа – это показать два отношения включения: любой элемент, содержащийся в левой части выражения должен принадлежать множеству в правой части и наоборот.

Задача 3.

Покажите, что $\mathcal{F}$ – минимальная σ-алгебра на $\mathbb{R}$, содержащая все отрезки, совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Задача 4.

Пусть даны множества A, B и C. Выразите следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup, \cap, \setminus$ и $\triangle$:

a) Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам;

b) Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C;

c) Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C;

d) Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

Задача 5.

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторый (счётный) набор множеств, являющихся подмножествами Ω. Выразите при помощи операций $\cup$ и $\cap$ с множествами A_i следующие элементы $\omega \in \Omega$:

a) Элементы, общие для всех A_i в наборе;

b) Элементы, являющиеся общими для всех $A_{i \geq n}$ (номер n не известен заранее);

c) Элементы, являющиеся общими для бесконечного количества A_i (например, повторяющиеся в каждом A_i с чётным номером).

Задача 6.

Монетка подкидывается бесконечное количество раз: X_n равно 1, если при n-ом подбрасывании выпадает орел и 0, если решка. Определим набор σ-алгебр: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathcal{H}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.[1] Приведите по два нетривиальных (отличных от Ω и $\emptyset$) примера такого события A, что:

- $A \in \mathcal{F}_{2021}$;
- $A \notin \mathcal{F}_{2021}$;
- A лежит в каждой $\mathcal{H}_n$.

В какие из упомянутых σ-алгебр входят события:

- $X_{37} > 0$;
- $X_{37} > X_{2021}$;
- $X_{37} > X_{2021} > X_1$.

[1] Также см. параграф 2.1 в учебнике Клебанера.