Бакалавриат ЭМИТ, 2024/2025
Случайные процессы в экономике
Домашнее задание-4. Решение

23 ноября 2024 г.

Задача 1.

Пусть $X_t = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + 3\mathbb{1}_{(1,3]}(t) - 5\mathbb{1}_{(3,4]}(t)$. Выразите интеграл Ито $\int_0^4 X_t\,dW_t$ в виде суммы случайных величин; найдите его распределение и дисперсию. Покажите, что случайный процесс $M_t = \int_0^t X_s\,dW_s$, $0 \le t \le 4$ – гауссовский, и найдите его ковариационную функцию.

Решение

Поскольку X_t – простой процесс, принимающий одинаковые значения на промежутках $[0,1], (1,3]$ и $(3,4]$, то $\int_0^4 X_t\,dW_t = X_0(W_1-W_0)+X_{1+}(W_3-W_1)+X_{3+}(W_4-W_3) = 2(W_1-W_0)+3(W_3-W_1)-5(W_4-W_3) \sim \mathcal{N}(0,47)$. Процесс M_t является гауссовским, поскольку X_t – детерминистический. Пусть $t_1 < t_2$, тогда

$$cov(M_{t_1}, M_{t_2}) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} X_s\,dW_s \int_0^{t_2} X_s\,dW_s\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} X_s\,dW_s\right]\mathbb{E}\left[\int_0^{t_2} X_s\,dW_s\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} X_s\,dW_s\left(\int_0^{t_1} X_s\,dW_s + \int_{t_1}^{t_2} X_s\,dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^{t_1} X_s\,dW_s\right)^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} X_s\,dW_s \int_{t_1}^{t_2} X_s\,dW_s\right] =$$

$$= \int_0^{t_1} X_s^2\,ds. \tag{1}$$

Здесь в последнем переходе используется свойство изометрии Ито, а также то, что приросты винеровского процесса на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_1,t_2]$ независимы. Далее, поскольку $X_s^2 = 4\mathbb{1}_{[0,1]}(s) + 9\mathbb{1}_{(1,3]}(s) + 25\mathbb{1}_{(3,4]}(s)$, то, вычисляя интеграл Римана (1), можно получить (также подразумевая $t_1 < t_2$)

$$cov(M_{t_1}, M_{t_2}) = \begin{cases} 4t_1 & t_1 \le 1 \\ 4 + 9(t_1 - 1) & t_1 \in (1,3] \\ 22 + 25(t_1 - 3) & t_1 \in (3,4]. \end{cases}$$

Задача 2.

Пусть $X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s}$, где $0 \le t < 1$. Найдите ковариационную функцию $\mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Решение

Поскольку $\forall t\ \mathbb{E}X_t = 0$, нам нужно найти матожидание $X_{t_1}X_{t_2}$. Чтобы не рассматривать произведение интегральных сумм с разными разбиениями, удобнее воспользоваться линейностью интеграла Ито. Пусть $t_1 < t_2$, тогда

$$\int_0^{t_2} \frac{dW_s}{1-s} = \int_0^{t_1} \frac{dW_s}{1-s} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW_s}{1-s} \Rightarrow \mathbb{E}(X_{t_1}, X_{t_2}) =$$

$$= (1-t_1)(1-t_2)\mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} \frac{dW_s}{1-s}\left(\int_0^{t_1} \frac{dW_s}{1-s} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW_s}{1-s}\right)\right] =$$

$$= (1-t_1)(1-t_2)\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}\frac{dW_s}{1-s}\right)^2 + (1-t_1)(1-t_2)\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}\frac{dW_s}{1-s}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dW_s}{1-s}\right) \tag{2}$$

Второе слагаемое в (2) равно нулю, поскольку приращения броуновского движения на отрезках $[0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$ – независимые и имеют нулевое матожидание. Первое слагаемое в (2) по свойству изометрии Ито равно $\int_0^{t_1}\frac{ds}{(1-s)^2}$. Тогда осталось посчитать интеграл Римана:

$$cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = (1-t_1)(1-t_2)\int_0^{t_1}\frac{1}{(1-s)^2}ds \xrightarrow[ds=-dv]{v=1-s} -(1-t_1)(1-t_2)\int_1^{1-t_1}\frac{1}{v^2}dv =$$

$$= -\frac{(1-t_1)(1-t_2)}{v}\Big|_{1-t_1}^{1} = -1 + t_1 + t_2 - t_1t_2 + 1 - t_2 = t_1 - t_1t_2.$$

Поскольку X_t – гауссовский процесс, по ковариационной функции видим, что это броуновский мост.

Задача 3.

Пусть $X_t,\ t \geq 0$ – процесс Орнштейна-Уленбека, описываемый уравнением $dX_t = -\frac{X_t}{\theta}\,dt + \sigma\,dW_t$, где $\theta > 0$.

a) Примените лемму Ито к $Z_t = X_t e^{\frac{t}{\theta}}$ и решите получившееся СДУ относительно Z_t. После этого найдите стационарное распределение процесса X_t – то есть, подберите начальное условие X_0 так, что распределение X_t не меняется во времени.

b) Найдите СДУ для процесса $Y_t = |X_t|$.

Решение

a) По лемме Ито

$$dZ_t = \frac{\partial Z_t}{\partial X_t}\,dX_t + \frac{\partial Z_t}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z_t}{\partial X_t^2}\,d[X_t] = e^{\frac{t}{\theta}}\,dX_t + \frac{X_t}{\theta}e^{\frac{t}{\theta}}\,dt =$$

$$= e^{\frac{t}{\theta}}\left(-\frac{X_t}{\theta}\,dt + \sigma\,dW_t\right) + \frac{X_t}{\theta}e^{\frac{t}{\theta}}\,dt = \sigma e^{\frac{t}{\theta}}\,dW_t.$$

Интегрируя полученное СДУ по отрезку $[0, T]$, получаем

$$Z_T = Z_0 + \int_0^T \sigma e^{\frac{t}{\theta}}\,dW_t,$$

и поскольку подынтегральная функция – детерминистическая, то интеграл Ито – это нормальная случайная величина I_T с нулевым матожиданием и дисперсией, равной

$$= \mathbb{V}(I_T) = \int_0^T \sigma^2 e^{\frac{2t}{\theta}}\,dt = \frac{\sigma^2\theta}{2}e^{\frac{2t}{\theta}}\Big|_0^T = \frac{\sigma^2\theta}{2}\left(e^{\frac{2T}{\theta}} - 1\right).$$

Переходя обратно к X_t, имеем $X_T = Z_T e^{-\frac{T}{\theta}}$, то есть $X_T = e^{-\frac{T}{\theta}}Z_0 + e^{-\frac{T}{\theta}}I_T$. Для стационарности X_T требуется, чтобы его дисперсия была одинаковой в каждый момент времени T, то есть

$$e^{-\frac{2T}{\theta}}\mathbb{V}Z_0 + e^{-\frac{2T}{\theta}}\frac{\sigma^2\theta}{2}\left(e^{\frac{2T}{\theta}} - 1\right) = \frac{\sigma^2\theta}{2} + e^{-\frac{2T}{\theta}}(\mathbb{V}Z_0 - 1).$$

Полученная дисперсия не зависит от T при $\mathbb{V}Z_0 = 1$.

Примечание: таким образом найдено слабое решение СДУ; его можно представить как функцию от некоторого (не обязательно того же самого, с которым связан процесс X_t) винеровского процесса $\hat{W}_t$ так, что полученное выражение будет иметь все нужные вероятностные характеристики; в частности, условно на X_0 процесс должен иметь нормальное распределение $\mathcal{N}\left(X_0, \frac{\sigma^2\theta}{2}\left(e^{\frac{2T}{\theta}}-1\right)\right)$. Оказывается, что $X_t = e^{-\frac{t}{\theta}}\sqrt{\frac{\theta\sigma^2}{2}}\hat{W}_{\exp\left(\frac{2t}{\theta}\right)}$ удовлетворяет всем этим соотношениям и является стационарным гауссовским процессом.

b) Чтобы избежать концептуальных сложностей, можно выразить $Y_t = \sqrt{X_t^2}$, и использовать лемму Ито сначала, чтобы получить СДУ для $U_t = X_t^2$, а потом для $Y_t = \sqrt{U_t}$.

$$dU_t = \frac{\partial U_t}{\partial X_t}\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_t}{\partial X_t^2}\,d[X_t] = 2X_t\left(-\frac{X_t}{\theta}\,dt + \sigma\,dW_t\right) + \sigma^2\,dt = \left(-\frac{2X_t^2}{\theta} + \sigma^2\right)\,dt + 2\sigma X_t\,dW_t.$$

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial U_t}\,dU_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial U_t^2}\,d[U_t] = \frac{1}{2}U_t^{-\frac{1}{2}}\left(\left(-\frac{2X_t^2}{\theta} + \sigma^2\right)\,dt + 2\sigma X_t\,dW_t\right) - \frac{1}{8}U_t^{-\frac{3}{2}}4\sigma^2 X_t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}Y_t^{-1}\left(\left(-\frac{2X_t^2}{\theta} + \sigma^2\right)\,dt + 2\sigma X_t\,dW_t\right) - \frac{1}{2}Y_t^{-3}\sigma^2 Y_t^2\,dt = -\frac{|X|_t}{\theta}\,dt + \operatorname{sign}(X_t)\,dW_t, \tag{3}$$

где при выводе (3) использовалось $X_t^2 = Y_t^2$ и $Y_t^{-1}X_t = \frac{X_t}{|X_t|} = \operatorname{sign}(X_t)$.

Задача 4.

Интеграл Стратоновича для процесса X_t, измеримого по фильтрации, порождённой стандартным винеровским процессом W_t, очень похож на интеграл Ито, и определяется как предел сумм

$$\int_{T_0}^{T_1} X_t\,dW_t = \lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Найдите интеграл Стратоновича $\int_0^T W_t\,dW_t$.

Решение

$$\int_0^T W_t\,dW_t = \lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(W_{t_{i+1}} + W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) = \lim_{\Delta t_i \to 0}\frac{W_T^2 - W_0^2}{2} = \frac{W_T^2}{2}.$$