26 октября 2024 г.

Винеровский процесс. Метод Монте-Карло

Задача 1.

Предположим, что доходность r_t к моменту t некоторого финансового актива описывается с помощью винеровского процесса W_t, $t \in [0, 1]$. Начальная цена актива $P_0 = 100$, для вычисления доходности используем непрерывное начисление процентов: $r_t = \ln \frac{P_t}{P_0}$. Ставка по безрисковому активу на рынке $r = 0\%$.

a) Сделайте Монте-Карло симуляцию 10000 траекторий независимых винеровских процессов $W_t^{(k)}$ на отрезке $[0, 1]$ и вычислите среднее и выборочную дисперсию значений процессов в конце временного интервала $W_1^{(k)}$. Постройте на одном графике 5 произвольных реализовавшихся траекторий.

b) Для построенных траекторий посчитайте среднее число изменений знака. После этого повторите 10000 симуляций траектории и расчёт этого параметра для других диаметров разбиения отрезка $[0, 1]$. Отличаются ли найденные значения друг от друга?

c) Как называется распределение P_1? Вычислите его математическое ожидание и дисперсию.

d) С помощью метода Монте-Карло сгенерируйте 10000 траекторий P_t и найдите среднее значение P_1 и его выборочную дисперсию.

e) Вычислите среднее значение значение прибыли, получаемой владельцем европейского колл-опциона к заданному финансовому активу, если его цена исполнения (страйк) $K = 102$ и срок экспирации $t = 1$. Сравните полученный результат с значением, полученным по формуле Блэка-Шоулса:

$$C(P_0) = P_0 \Phi\left(d_1\right) - K e^{-r} \Phi\left(d_2\right),$$

где $d_1 = \ln\left({}^{P_0}/_{K}\right) + {}^1/_2$, $d_2 = \ln\left({}^{P_0}/_{K}\right) - {}^1/_2$, $C(P_0)$ – текущая стоимость колл-опциона; $\Phi(x)$ – кумулятивная функция стандартного нормального распределения.

Мартингалы, связанные с винеровским процессом

Используйте метод Монте-Карло для генерации 10000 траекторий следующих процессов на $t \in [0, 1]$ и постройте на одном графике по 5 произвольных траекторий для полученных процессов:

1. $X_t = W_t^2 - t$;
2. $X_t = e^{W_t - \frac{t}{2}}$;
3. $X_t = e^{\frac{t}{2}} \sin W_t$;
4. $X_t = (W_t + t) e^{-W_t - \frac{t}{2}}$.

В каждом из случаев по полученной выборке проверьте мартингальность X_t : выберите произвольный $t_0 \in (0, 1)$, и вычислите среднее (по всем полученным выборкам) значение $X_1 - X_{t_0}$. Каким оно должно быть для мартингалов?

Интегралы от винеровского процесса

Задача 3.

Схожим образом с самим винеровским процессом строятся интегралы от него. Интеграл Ито от функции g определён следующим образом:

$$\int_0^T g(t, W_t)\, dW_t := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_i=0}^{t_n=T} g(t_i, W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad T \in [0, 1],$$

где $\Delta t = \max_i\{t_{i+1} - t_i\}$ – диаметр разбиения.

Используйте метод Монте-Карло для построения 10000 траекторий процессов, заданных интегралами Ито и постройте на одном графике по 5 произвольных траекторий для полученных процессов.[1]

a) $X_T = \int_0^T t^2\, dW_t$, $T \in [0, 1]$,

b) $X_T = (1 - T) \int_0^T \frac{1}{1-t}\, dW_t$, $T \in [0, 1]$,

c) $X_T = \int_0^T W_t^2\, dW_t$, $T \in [0, 1]$.

В каждом из случаев по полученной выборке значений $X_{0.5}$ постройте гистограмму и сделайте тест на нормальность распределения этой случайной величины (тут подходит, например, тест Колмогорова-Смирнова).

[1] Приближенно, то есть, используя фиксированное разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.