

动态规划 OJ problem C

杰哥的选择

郑奘巍

zzw@smail.nju.edu.cn

2019 年 3 月 15 日

问题

现在轮到杰哥选择游戏来玩啦！杰哥共有 n 种游戏，他准备从中选 m 个与阿伟彬彬一起玩。但是阿伟和彬彬喜欢的游戏不一样，他们对每种游戏都有一个开心度 x 。为了让阿伟和彬彬能玩得同样开心，杰哥希望选出的游戏能够使阿伟的开心度与彬彬的开心度差的绝对值最小。如果有多种方案的话，杰哥同时希望阿伟和彬彬开心度之和最大。

杰哥想知道阿伟和彬彬能玩得多开心。他希望你能帮他计算出上述方案下阿伟和彬彬能够获得的开心度。

问题

共 n 件物品，每个物品有两个值 $a[i]$ 与 $b[i]$ ，从中挑 m 个，在 $|\sum(a[i] - b[i])|$ 最小的情况下最大化 $\sum(a[i] + b[i])$

注意数据量很小： $1 \leq n \leq 200, 1 \leq m \leq 20, 0 \leq a[i], b[i] \leq 20$
(却给了 5s)

Hint 中说明了此题为背包问题，考察大家的转化能力

继续简化问题： $a[i], b[i]$ 与最后的答案没有直接关系，每个物品只需保存 $v[i] = a[i] - b[i]$ 和 $s[i] = a[i] + b[i]$.

我们先考虑没有挑 m 个限制的问题

问题

共 n 件物品，每个物品有花费 $v[i]$ 和价值 $s[i]$ ，求在 $|\sum v[i]|$ 最小的情况下 $\sum s[i]$ 的最大值

如果没有绝对值，就是一个朴素的 01 背包问题

01 背包:

$$f[i][j] = \max(f[i-1][j-v[i]]+s[i] : i-v[i] \geq 0, f[i-1][j-v[i]] \geq 0)$$

中, 最后我们可以得到 $f[i][k], k = 0, 1, \dots, V$ 的所有最优情况, 如果某情况无法完成, $f[i][k] = -1$. 本题中, $|\sum v[i]| \leq 20 * m$.

使用同样的转移方程让背包容量为 $2 * 20 * m$, 最后可以得到 $f[i][k], k = -20, \dots, 0, \dots, 20$ 的所有状态的值。

从 $f[i][0]$ 向两边找到第一个 $f[i][k] \geq 0$ 的值, 便符合题意。

二维费用的背包问题：

$$f[i][v][u] = \max\{f[i-1][v][u], f[i-1][v-a[i]][u-b[i]] + w[i]\}$$

再看原问题，有限制需要选满 m 个人。将人数也作为一个背包，即每个人的大小为 1（一个人就是一个人），背包大小为 m 。得到如下二维费用 01 背包递推式：

$$\begin{aligned} f[i][j][k] &= \max(f[i][j-v[i]][k-1] + s[i] \\ &: j-v[i] \geq 0, k-1 \geq 0, f[i-1][j-v[i]][k-1] \geq 0) \end{aligned}$$

初始状态为 $f[0][*][*] = -1, f[0][0][0] = 0$ 。由于负数不方便索引，可以整体平移，初始状态为 $f[0][0][20 * m] = 0$ 。

- ▶ 可以使用 01 背包的空间优化, 只使用 $f[j][k]$.
- ▶ 理解还有困难的同学可以看看背包九讲第一讲和第五讲
- ▶ 题目来源: UVA323/POJ1015/ZOJ1303
- ▶ 原题还需要打印路径 + 输入输出格式都有点繁琐, 这里改简单了
- ▶ **标程总行数 ≤ 40**

Thank
You!