



基于 **ElegantBook \LaTeX** 模板的电子笔记

Stochastic Geometry for Wireless Networks

作者: authorPlaceholder

组织: authorPlaceholder \LaTeX Program

时间: June 14, 2025

版本: 3.141

邮箱: placeholder@example.com



$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\omicron\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega$

目录

第 1 章 引言	2
1.1 什么是随机几何?	2
1.2 无线网络空间模型的一种——点过程	2
第 2 章 点过程的描述	3
2.1 一维点过程的描述	3
第 3 章 点过程模型	5
3.1 引言	5
3.2 广义有限点过程	5
第 4 章 点过程上的和与积	7
4.1 引言	7
4.1.1 动机	7
4.1.2 记号	7
第 5 章 无线网络中的干扰和中断	8
5.1 对干扰进行特征化	8
5.1.1 将干扰看作一个散粒噪声	8
5.1.2 静态点过程的平均干扰	8
5.1.3 泊松网络中干扰的方差	9
5.1.4 泊松网络中附近发射机的干扰	9
5.1.5 没有衰落的泊松网络中, 干扰的分布	10
5.1.6 稳定分布	11
5.1.7 有衰落情形下的干扰分布	13
5.2 泊松网络中断的概率	14
5.3 泊松双极网络中的空间吞吐	14
5.3.1 空间吞吐	14
5.3.2 香农吞吐	15
5.4 传输容量	15
5.4.1 具有衰落的网络	16
5.5 干扰的时间相关性	16
5.6 中断概率的时间相关性	19
第 6 章 点过程的矩测度	22
第 7 章 标记点过程	23
第 8 章 Conditioning 和 Palm Theory	24
8.1 导论	24
8.1.1 Conditioning 和典型的点	24
第 9 章 渗流, 连通性, 覆盖的介绍	25
9.1 动机	25

9.2 什么是渗流?	25
第 10 章 Bond percolation 和 site percolation	26
10.1 随机树和分支过程	26
10.1.1 正则分支树的渗流	26
第 11 章 随机几何图和连续渗流	27
11.1 导论	27
第 12 章 连通性	29
12.1 导论	29
12.1.1 随机梯格的连通性	29
第 13 章 覆盖	31
13.1 导论	31
13.2 Germ-grain 模型和布尔模型	31
13.2.1 Germ-grain 模型	31
13.3 具备固定圆盘的布尔模型	33
13.3.1 单个覆盖	33
13.3.2 多覆盖	35
13.4 应用	35
13.4.1 无线网络中的 SINR 覆盖	35
13.4.2 最近邻发射机的 SIR 覆盖	36
13.4.3 隐私覆盖? 隐秘覆盖?	37
13.4.4 哨兵选择	38
第 14 章 占位章节	41
14.1 我也不想写啊, 只有个章节标题, 目录会把这一章忽略掉啊	41
14.1.1 用作 subsection 的占位符	41
14.2 用作 section 的占位符 1	41
14.2.1 用作 subsection 的占位符 1	41
第 15 章 Elegant\LaTeX 系列模板介绍	42
15.1 模板安装与更新	42
15.1.1 在线使用模板	42
15.1.2 本地免安装使用	42
15.1.3 发行版安装与更新	42
15.1.4 其他发行版本	43
15.2 关于提交	43
第 16 章 ElegantBook 设置说明	44
16.1 语言模式	44
16.2 设备选项	44
16.3 颜色主题	44
16.4 封面	45
16.4.1 封面个性化	45
16.4.2 封面图	45

16.4.3 徽标	46
16.4.4 自定义封面	46
16.5 章标标题	46
16.6 数学环境简介	46
16.6.1 定理类环境的使用	47
16.6.2 修改计数器	47
16.6.3 其他环境的使用	47
16.7 列表环境	48
16.8 参考文献	48
16.9 添加序章	48
16.10 目录选项与深度	48
16.11 章节摘要	49
16.12 章后习题	49
第 16 章 练习	49
16.13 旁注	50
第 17 章 字体选项	51
17.1 数学字体选项	51
17.2 使用 newtx 系列字体	51
17.2.1 连字符	51
17.2.2 宏包冲突	51
17.3 中文字体选项	52
17.3.1 方正字体选项	52
17.3.2 其他中文字体	52
第 18 章 ElegantBook 写作示例	54
18.1 Lebesgue 积分	54
18.1.1 积分的定义	54
第 18 章 练习	56
第 19 章 常见问题集	57
第 20 章 版本更新历史	58
附录 A 基本数学工具	61
A.1 求和算子与描述统计量	61

Introduction

this is introduction.

我为什么想写这本书：

- 1. 我想进一步学习 \LaTeX 的语法。
- 2. 这本书的部分内容对于我来说实在是太难了，我转而投向汉化而不是做我自己乱七八糟的笔记。
- 3. 我一直有写电子 \LaTeX 笔记的想法和翻译电子书的想法。
- 4. 我尝试使用 `\input` 命令来把一个长的 `tex` 文件分开
- 5. 我尝试使用 `\lstinline` 命令来处理代码风格化
- 6. 我希望这个模板最好是很容易跨平台的
- 7. 更新到最新版的模板后，不再缺少字体

第 1 章 引言

1.1 什么是随机几何?

1.2 无线网络空间模型的一种——点过程

练习题

练习 1.1 下面哪一个说法正确?

练习 1.2 让 X_1, X_2, \dots, X_k 是 iid. 的随机变量, 他们的 CDF 都是 $F(x)$ 。最小值 $\min_i \{X_i\}$ 的 cdf?

练习 1.3 让 X 是一个参数为 Y 的随机变量, 其中 Y 本身是一个参数为 μ 的泊松随机变量。说明 $X + Y$ 的生成函数是

$$G_{X+Y}(x) \triangleq \mathbb{E}(x^{X+Y}) = \exp\{\mu(xe^{x-1} - 1)\}$$

练习 1.4 让 X_1, \dots, X_N 是 N 个 iid. 的随机变量, 他们的 cdf 都是 $F(x)$, 其中 N 是均值为 μ 的泊松随机变量。计算这 N 个随机变量的最大值的 cdf $G(x)$

练习 1.5 让 Z 是在半径为 a 的圆盘随机独立选取 2 个点的距离。说明 $\mathbb{E}Z^2 = a^2$

练习 1.6 让 a, b, c 是 iid. 的指数分布变量。说明, 多项式 $ax^2 + bx + c$ 有实数根的概率是 $1/3$

练习 1.7 一只鹅下了 N 个蛋, 其中 N 是均值为 λ 的泊松随机变量。每一个蛋以概率 p 被孵化, 都是彼此独立的。让 K 是幼鹅的数量。计算 $\mathbb{E}(K|N), \mathbb{E}(K), \mathbb{E}(N|K)$

第2章 点过程的描述

2.1 一维点过程的描述

练习题

- 练习 2.1 对于 \mathbb{R} 上的强度为 λ 的均匀 PPP, 推导 interarrival interval 包括原点 o 的 pdf. 你观察了什么?
- 练习 2.2 让 X_m 是一个均值为 m 的泊松随机变量. 如果 M 是一个服从 Gamma 分布的随机变量, 说明 X_M 的分布是 negative binomial.
- 练习 2.3 让 Φ 是 \mathbb{R} 上一个强度为 λ 的均匀 PPP, 确定 $\mathbb{P}(\Phi(B_1) = n_1, \Phi(B_2) = n_2)$ for $B_1 = [0, 2]$ and $B_2 = [1, 3]$
- 练习 2.4 让 $(X_i), i \in \mathbb{N}$, 是一族独立的均值为 $1/\lambda$ 的指数分布的随机变量. 确定

$$\mathbb{P}(X_1 > t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k \leq s; X_1 + \cdots + X_{k+1} > t)$$

给出结果的解释, 作为一个特定的点过程的 void probability.

- 练习 2.5 结果空间 \mathcal{N} 可以定义为如下公式吗?

$$\mathcal{N} \triangleq \{\varphi \subset \mathbb{R}^d : |\varphi| = 0\}?$$

- 练习 2.6 径向仿真. 考虑正实数线上, 一个强度为 1 的一维 PPP $\Psi = \{y_i\} \subset \mathbb{R}^+$. 假定点是有序的, 即, $y_1 < y_2 < \cdots$. 考虑 Ψ , 我们想要产生 \mathbb{R}^2 上强度为 λ 的 HPPP $\Phi = \{(r_i, \phi_i)\}$ 的一个实现, 其中 (r_i, ϕ_i) 是点的极坐标表示. 振幅集合 $\{r_i\}$ 也应该是有序的. 从 y_i 到 r_i 找到函数, 可以将一维度的点映射到二维度的振幅, with the desired intensity.
- 练习 2.7 生成函数. 让 X_1, X_2, \cdots 是一系列 iid 的随机变量 $\Omega\mathbb{N}_0$ 的生成函数 G_X . 让 N 是一个随机变量, 和 X_i 独立, also taking values in \mathbb{N}_0 . 展示

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

S 具有生成函数 $F_S(s) = G_N(G_X(s))$ 以及导数 $G_S(s)$ 如果 N 是均值为 λ 的泊松随机变量.

- 练习 2.8 类比 (2.3), 找到一个表示, 来计数二维 ranomly translated lattice 的测度.
- 练习 2.9 确定 $\Lambda(\{x\})$ 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 对于例子 2.1 定义的点过程.
- 练习 2.10 写下 die point process 的显式分布
- 练习 2.11 例子 2.3 中的点过程, 是两个 (甚至更多) 的基础点过程的 “叠加” superpositionn. 找到他们, 并且验证 $P = P_1 * P_2$, 使用卷积的标准准则.
- 练习 2.12 考虑 Bernoulli die process, 定义如下: 从初始的 die process 开始, 接着独立地以概率 q 移走每一个点. 这样一个点过程也可以称为 a die process with erasures, with erasure probability q . 定义 $\Lambda(\{o\})$ 和 $\Lambda(\mathbb{R}^2)$
- 练习 2.13 让 $s\Phi_{\text{die}}$ 是 the die process Φ_{die} scaled by s . 让

$$\Phi' = \bigcup \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 : x + \frac{1}{3}\Phi_{\text{die}} \right\}$$

其中 $x + \frac{1}{3}\Phi_{\text{die}}$ 是 a translation of the (scaled) die process by x , 考虑静态点过程 $\Phi \triangleq \Phi'_Y$, 其中 Y 是 $[0, 1]^2$ 上的均匀分布. 找到 Φ 的强度.

- 练习 2.14 让 $\Phi \subset \mathbb{R}$ 是一个强度函数为 $\lambda(x) = \mathbf{1}(x \in [0, 1])$ 的均匀 PPP. 如果我们独立地对每一个点做 displacing by a random amount uniform on $[-1/2, 1/2]$, 得到的点过程的强度是多少?
- 练习 2.15 让 $\Phi = \{x_1, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ 是一个强度为 $\lambda(x) = \mathbf{1}(0 \leq x < 2\pi)$ 的均匀 PPP. 让 $\Phi' = \{\sin x_i\}$. 确定 Φ' 的强度 λ'
- 练习 2.16 让 Φ 是一个高斯泊松过程, $\sigma = 1, n = 1$, 让 B^- 是 \mathbb{R}^2 的左半平面. 对于 Φ 以及对于 $\Phi_{(1,0)}$ 确定 $\Lambda(B^-)$. 提示, 关联问题的第二部分和点对点问题的误比特率问题

练习 2.17 图 2.2 展示了确定的 non-HPPP 的实现。确定这个过程的强度测度 $\Lambda([0, 10]^2)$

练习 2.18 随机 traslated lattice (看定义 2.15) 是遍历的吗?

练习 2.19 让 Φ 是 \mathbb{R}^2 上一个强度 1 的 HPPP。计算满足 $NN(NN(x)) = x$ 的点的比例。这些是属于互相最近邻点对的节点。这个比例依赖强度吗? 同时计算, 对于 lattice, 这个比例是多少?

练习 2.20 让 Φ 指代 randomly translated square integer lattice

(a) 展示强度 $\lambda \equiv 1$ (b) 让 B_\diamond 是面积为 $A, 1 < A < 2$ 的方形区域, 旋转了 $\pi/4$, 使得相对的对角点, 他们的 x 坐标 (或者 y 坐标) 相等。找到 $P(\Phi(B_\diamond) = 0)$, 以及 $P(\Phi(B_\diamond) > 2)$, 都写成 A 的函数的形式。

练习 2.21 我们想要产生一个 isotropic PPP $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ 的实现, 此 PPP 的强度是

$$\lambda(x) = \frac{M}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Simulation 的区域是 $W = [-5, 5]^2$ 。(a) (b) (c)

练习 2.22 有向空空间函数。让 $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ 是一个强度为 1 的 PPP。让 $\{(r_i, \phi_i)\}$ 是点集的极坐标表示。让 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$R_k = \min \left\{ (r_i, \phi_i) \in \Phi, k \frac{2\pi}{n} < \phi_i \leq (k+1) \frac{2\pi}{n} : r_i \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

R_k 是最近邻节点和原点的距离, 在 k th sector of width $2\pi/n$

我们感兴趣 R_k 中最小值的 CDF。不计算, 你估计这个 CDF 有哪些性质?

为了验证你算出来的 CDF, 使用 Problem 1.2 中得到的结果。

练习 2.23 描述具有图 2.10 所示 Fry Plot 的 PPP。

第3章 点过程模型

3.1 引言

3.2 广义有限点过程

练习题

练习 3.1 对于例子 3.1 的 binomial 点过程，确定 Janossy 测度和 Janossy 密度。

练习 3.2 考虑有限点过程 $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ ，概率 $p_1 = 1/2, p_2 = 1/2$ ，以及

$$f_1(x) = 1_{W^+}(x) \\ f_2(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3} 1_{W^-}(x_1) + \frac{2}{3} 1_{W^+}(x_1) \right) \left(\frac{1}{3} 1_{W^-}(x_2) + \frac{2}{3} 1_{W^+}(x_2) \right)$$

对于 $W^+ = [0, 1]^2, W^- = [-1, 0] \times [0, 1]$ 。找到 Janossy 密度 j_1, j_2 ，计算 $\mathbb{E}u(\Phi)$ 对于 $u_1(\Phi) = \Phi(B)$ （对于一般的 $B \subset \mathbb{R}^2$ ）， $u_2(\Phi) = 2^{\Phi(\mathbb{R}^2)}$ ，使用公式 (3.3)

练习 3.3 找到一个广义的有限点过程的强度测度，写成 (p_k) 和 F_n 函数的形式，其中 (p_k) 和 F_n 的定义在 Definition 3.1 可以找到

练习 3.4 考虑一个一维的 Cox 过程，它是这么得到的：通过使用例子 3.6 中的 random thinning，其中基础的 PPP 是均匀的，强度为 λ_b ，随机场 T 由式子 $T(x) = e^{-L|x|}$ 给出， L 是一个随机变量。

(a) 让 $\mathbb{P}(L = 1) = 3/4$ 以及 $\mathbb{P}(L = 2) = 1/4$ 。确定 $\Lambda([0, y])$ ，对于所有的 $y \in \mathbb{R}$ ， $\lambda(\mathbb{R})$ ，以及强度函数在 $0, \lambda(0)$ 处的值。

(b) 让 L 的 pdf 是 $f_L(x) = 2x \mathbf{1}(0 \leq x \leq 1)$ 。再一次，确定 $\Lambda([0, y])$ ，对于所有的 $y \in \mathbb{R}$ ， $\lambda(\mathbb{R})$ ，以及强度函数在 $0, \lambda(0)$ 处的值。

练习 3.5 对于例子 3.7 中的 germ-grain 模型，考虑这样的 Cox 过程，它的强度场如下：

$$\zeta(x) = \lambda_a \mathbf{1}(x \in \Xi_r) + \lambda_b \mathbf{1}(x \notin \Xi_r) \cdot v$$

确定过程的强度，展示 Matern 聚簇过程可以使用这个强度场建模。

练习 3.6 考虑 Gauss-Poisson 过程， $p_2 = 1$ （所有的簇正好有 2 个点），parent intensity 是 λ 。我们想要计算零空间函数 $F(r)$ 。如果我们认为聚簇过程是【一系列簇中心 Φ_c 的过程】和【一系列其他点 Φ_1 的过程】的 superposition，都是强度为 λ 的均匀 PPP。他们是依赖的，因为每一个 Φ_c 中的点来说，都有 Φ_1 中一个点和它距离 1，随机朝向。说明零空间函数可以写成

$$1 - F(r) = \mathbb{P}(\Phi_c(b(o, r)) = 0, \Phi_1(b(o, r)) = 0) \\ = \mathbb{P}(\Phi_c(b(o, r)) = 0) \mathbb{P}(\Phi_1(b(o, r)) = 0 \mid \Phi_c(b(o, r)) = 0)$$

接着确定 $F(r)$ 对于 $r \leq 1/2$

对于 $r > 1/2$ ，说明

$$1 - F(r) = e^{-\lambda \pi r^2} \exp \left(-\lambda \int_r^{r+1} \frac{2 \arccos [(1 + y^2 - r^2)/(2y)]}{2\pi} 2\pi y \, dy \right).$$

练习 3.7 在 \mathbb{R} 中仿真泊松 hole process，验证强度。

练习 3.8 对于 Gibbs 过程，通过对 $P_\Phi(Y_k)$ 和 $P_\lambda(Y_K)$ 的显式的计算（见 3.9 式），说明两个过程的 void probability 一致。

练习 3.9 证明式子 3.22。提示：见例子 3.3

练习 3.10 找到和 Strauss hard-core 过程（点的数量固定为 n ）对应的 pair potential θ ，对于给定的 R 和 R'

练习 3.11 在图 3.8 中，我们观察到所有的簇都有 2 个或者 3 个点。解释这个现象。

练习 3.12 对于一般的 finite Gibbs process, 密度 $f(\varphi)$ 可以表示为

$$f(\varphi_n) = P(Y_n) f_n(x_1, \dots, x_n), n \in \mathbb{N}_0$$

吗? 其中 $Y_n = \{\varphi \in \mathcal{N} : \varphi(W) = n\}$, f_n 是已知过程有 n 个点, 算条件密度。

练习 3.13 描述和图 3.11 的 FryPlot 有关的点过程。

第 4 章 点过程上的和与积

4.1 引言

4.1.1 动机

4.1.2 记号

练习题

练习 4.1 使用显式的计算矩生成函数的导数的方法，完成引理 4.8 的证明。

练习 4.2 让 $v(x) = \min \{1, \frac{1}{2}\|x\|^2\}$ ，从例子 2.1 中确定 die process 的 the pgfl $G[v]$

练习 4.3 比较 $\mathbb{E}e^{-s[f]}$ 和 $\exp(-\mathbb{E}S[f])$

练习 4.4 展示泊松 hole 过程的 pgfl。例子 3.7 中介绍的那个 poisson hole process, 参数是 λ_1, λ_2, r

$$G[v] = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\lambda_2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Xi_r} (1 - v(x)) dx \right) \right].$$

如果 $v = 1 - \mathbf{1}_B(x)$, $\lambda_1 = 1$, and $r = 1$, 确定 $G[v]$ 。

这产生了 void probability.

练习 4.5 隐私图的定义如下。

练习 4.6 让 Φ 是一个泊松高斯过程，其中 representative cluster 是 $\Phi_0 = \{o\}$ with probability $1 - p$, $\Phi_0 = \{o, x\}$ with probability p . 其中 x 以密度 f 分布。假定我们选择的密度正好可以让 $\mathbb{P}(x = o) = 0$ 。展示 pgfl 是

$$G[v] = \exp \left(\lambda_p \int_{\mathbb{R}^d} \left((1 - p)v(x) + pv(x) \int_{\mathbb{R}^d} v(x + y)f(y)dy - 1 \right) dx \right).$$

所以 $v \in v$ 意味着 $1 - v(x)$ 在有界集外消失。

第 5 章 无线网络中的干扰和中断

在这一章，我们讨论无线网络中点过程的和以及其他函数的一些应用。其中点过程理论最著名的一个应用就是对干扰进行特征化。这里的干扰，我们通常指干扰功率。

5.1 对干扰进行特征化

5.1.1 将干扰看作一个散粒噪声

让 $\ell: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$ 是一个路径损耗函数。如果我们用一个点过程 Φ 对发送机的位置进行建模，所有的发送机都以单位功率发送，在位置 y 处测量到的总和功率是

$$I(y) = \sum_{x \in \Phi} \ell(y - x), \quad y \in \mathbb{R}^d \quad (5.1)$$

假设信道中没有衰落。通过和式子 (3.24) 进行比较，干扰 $sI(y)$ 是一个散粒噪声随机场。更精确地说，因为路径损失规律是典型的形式 $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ （或者它的一个有界的版本），它是一个功率律的散粒噪声随机场。一个例子在 Fig. 5.1 中展现，其中从一个 PPP 引起的干扰用平面上的一条线表示。

5.1.2 静态点过程的平均干扰

首先，我们对功率律 $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ 情形下，一个强度为 λ 的平稳的发射机点过程 $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ 的干扰的平均值，进行推导。因为期望是对所有的点过程进行考虑的，遵循平稳性 $\mathbb{E}I(y) = \mathbb{E}I(o)$ （事实上，对所有的 $y \in \mathbb{R}^d$ 都有 $I(y) \stackrel{d}{=} I(o)$ ），我们可以聚焦于原点，那里

$$\mathbb{E}I = \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} \|x\|^{-\alpha} \right) \quad (5.2)$$

利用 Campbell 的求和公式 (定理 4.1)

$$\mathbb{E}I = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{-\alpha} dx. \quad (5.3)$$

在 2 维的 case,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \|x\|^{-\alpha} dx = \lambda \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{-\alpha} r dr d\varphi = \begin{cases} 2\pi \frac{\lambda}{2-\alpha} r^{2-\alpha} \Big|_0^\infty, & \alpha \neq 2. \\ 2\pi \lambda \log r \Big|_0^\infty, & \alpha = 2. \end{cases} \quad (5.4)$$

当 $\alpha \neq 2$ 的时候，事实上积分并不收敛，当 $\alpha = 2$ 的时候，积分也并不收敛。所以对于满足功率路径损耗律的情形，2 维空间中的平均干扰是无穷的，对于所有的路径损失指数 α 都是如此

在 3 维中，我们发现

$$\mathbb{E}I = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^{-\alpha} dx = 4\pi \frac{\lambda}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \Big|_0^\infty, \quad \alpha \neq 3. \quad (5.5)$$

再一次，没有 α 取值可以让积分收敛。我们可能推断这个结论对任意的维度都成立。为了深入研究，我们关注均匀 PPP，应用映射定理 (Theorem 2.34) 将它投射到一维。

1. 使用函数 $f(x) = \|x\|$ 映射到一维。新的点过程 Φ' ，具有 intensity measure 为 $\Lambda'([0, r)) = \lambda c_d r^d$ 和 intensity function 为 $\lambda^{prime}(r) = \lambda_d dr^{d-1}$ ，其中 c_d 是 d 维单位球的体积。2. 应用 Campbell 定理得到【和的平均】

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I &= \mathbb{E} \left(\sum_{r \in \Phi'} r^{-\alpha} \right) = \int_0^\infty r^{-\alpha} \lambda'(r) dr \\ &= \lambda c_d \frac{d}{d-\alpha} r^{d-\alpha} \Big|_0^\infty, \quad \alpha \neq d. \end{aligned} \quad (5.6)$$

所以，对于所有的 d ，没有 d 可以让这个平均存在。如果 $\alpha \leq d$ ，原函数在 $\alpha = \infty$ 处为无穷，那意味着远处的所有的干扰器对干扰贡献了绝大部分。换言之，平均干扰变得无穷，因为节点的数量是无穷的。如果 $\alpha \geq d$ ，原函数在 $\alpha = 0$ 处为无穷，表明和原点非常近的那些节点对干扰贡献了大部分，因为路径损失律的奇异性。

尽管平均干扰在 $\alpha \leq d$ 和 $\alpha \geq d$ 的时候都发散，这两种分散在定性上是非常不同的。如果 $\alpha > d$ ，条件 (4.5) 满足，所以干扰是有限的，a.s. almost surely. 另一方面，如果 $\alpha \leq d$ ，条件 (4.5) 并不满足，表明干扰是无限的，a.s. 所以在第一个 case 里，我们可以期望干扰具有一个定义良好的分布 (尽管长尾导致均值发散)，而在第二种情况下，其分布不存在，因为我们不仅有 $\mathbb{E}I = \infty$ ，也有 $I = \infty$ a.s.

这个均值的发散性，明显是因为附近的干扰器明显是一个 modeling artifact，因为没有接收机获得比发射的功率更多的功率。如果路径损失函数被一个更加精确的函数替代，比如

$$\ell(x) = \min \{1, \|x\|^{-\alpha}\} \quad \text{or} \quad \ell(x) = (1 + \|x\|)^{-\alpha}, \quad (5.7)$$

这样在 $r \rightarrow 0$ 的 modeling artifact 就被改善了，条件 (4.5) 总是满足，只要 $\alpha > d$ 均值干扰就是有限的。

注

- 为什么我们不能使用 $\|x\|^{-\alpha}$ 直接作为映射函数？原因是，如果这样，得到的点过程将不会是局部有限的：我们将有 $\Lambda'([0, 1]) = \Lambda([1, \infty]) = \infty$ ，这违反了均值测度的有限性。
- 对于相同 intensity 的所有点过程，均值是完全相等的。以及，由于平稳性，干扰也是相同的，无论我们在 \mathbb{R}^d 的哪里测量。我们将会在后文的章节讨论：如何去确定过程中一个点或邻近一个点的干扰，而不是任意的位置。

在无线网络中的语境中，均匀 PPP 经常是一个泊松网络。

5.1.3 泊松网络中干扰的方差

在泊松网络的 case 中，我们使用 Corollarys 4.8 来找到干扰的方差。让 $\ell(x) = \min \{r_0^{-\alpha}, \|x\|^{-\alpha}\}$ for $r_0 > 0$ 。对于一个 \mathbb{R}^d 上的 homogeneous PPP，我们有

$$\begin{aligned} \text{var } I &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \ell^2(x) dx = \lambda c_d r_0^{d-2\alpha} + \frac{\lambda c_d d}{d-2\alpha} r^{d-2\alpha} \Big|_{r_0}^{\infty} \\ &= \lambda c_d r_0^{d-2\alpha} \left(\frac{2\alpha}{2\alpha-d} \right), \quad \text{for } 2\alpha > d \end{aligned} \quad (5.8)$$

条件 $2\alpha > d$ 经常是满足的。如果网络是有限的，我们让 $r_0 \rightarrow 0$ ，对于有限方差，我们需要 $\alpha < d/2$ ， α 的范围是非常不可能的。

5.1.4 泊松网络中附近发射机的干扰

在一些 case 中，我们可能对从仅仅单个附近发射机发出的干扰感兴趣。我们首先关注距离原点最近的发射机，标记它的干扰为 I_1 。事实上，这个信号功率可能事实上表示我们关心的信号，因为它来自一个邻近的节点；在这个 case 中， I_1 可能是关心的功率。

使用例子 2.11 中计算的距原点最近点的距离，我们发现

$$\mathbb{P}(I_1 \leq x) = \mathbb{P}(R^{-\alpha} \leq x) = \mathbb{P}(R > x^{-1/\alpha}) = \exp(-\lambda c_d x^{-\delta}) \quad (5.9)$$

其中 $\delta \triangleq d/\alpha$ 。均值是

$$\mathbb{E}I_1 = c^{1/\delta} \Gamma(1 - 1/\delta) \quad (5.10)$$

如果 $\delta < 1$ ，那么这根本不存在。所以，如果是奇异路径损失律的情形，来自唯一最近节点的平均干扰是无限的。这是由于对于小 δ 分布的长尾：

$$\mathbb{P}(I_1 > x) \sim \lambda c_d x^{-\delta}, x \rightarrow \infty. \quad (5.11)$$

如果 $\delta < 1$ ， $\int \mathbb{P}(I_1 > x) dx$ 发散，因此，平均值并不存在。广义上， $\mathbb{E}(I_1^p)$ 对于 $p < \delta$ 存在。

类比地，我们有 pdf 概率分布函数

$$f_{I_1}(x) \sim \lambda c_d \delta x^{-\delta-1}, x \rightarrow \infty \quad (5.12)$$

接下来我们把这个表达式推广到 n th 近邻干扰器的干扰 I_n 的情形。 n th 近邻 R_n 的距离的 the survivor function(和 cdf 互补) 可以从式子 (2.12) 得到

$$\mathbb{P}(R_n > r) = \frac{\Gamma_{ic}(n, \lambda c_d r^d)}{\Gamma(n)} \quad (5.13)$$

所以，对于 $n = 2$,

$$\mathbb{P}(I_2 < x) = \exp(-\lambda c_d x^{-\delta}) (1 + \lambda c_d x^{-\delta}) \quad (5.14)$$

以及

$$\mathbb{P}(I_2 > x) \sim \frac{1}{2} (\lambda c_d)^2 x^{-2\delta}. \quad (5.15)$$

所以我们需要 $2\delta > 1$ 来让 $\mathbb{E}I_2$ 存在。对于一般的 n ,

$$\mathbb{P}(I_n < x) = \exp(-\lambda c_d x^{-\delta}) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda c_d x^{-\delta})^i}{i!} \quad (5.16)$$

对于长尾概率，我们需要从 n 加到 ∞ ，所以主导项将会是当 $x \rightarrow \infty$ 有 $i = n$ 的那一个。因此

$$\mathbb{P}(I_n > x) \sim \frac{1}{n!} (\lambda c_d)^n x^{-n\delta} \quad (5.17)$$

这意味着 $\mathbb{E}(I_n^p)$ 存在，如果 $p < n\delta$ 。因此，如果干扰消除技术被使用来达到一个有限的 2nd moment, $k > \alpha$ 干扰器需要被消除，在二维的网络中。尽管我们可以找到对所有的 n, I_n 的分布，通过这种方式很难得到总共干扰的分布，因为 I_n 既不是独立也不是同分布的。我们换一种思路进行处理，分为考虑衰落和不考虑衰落两种情形来进行讨论。

5.1.5 没有衰落的泊松网络中，干扰的分布

在本小节中，我们关注二维网络的情况，并假设没有衰落。因为 $\ell(x)$ 假设是各向同性的，我们也使用它的一维版本 $\tilde{\ell}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ ，所以 $\tilde{\ell}(\|x\|) \equiv \ell(x)$ 。这里我们假定 $\ell(x)$ 是严格单调减的 (invertible)，以及 $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\ell}(r) = 0$

我们的目标是找到干扰的特征函数，进一步，如果可能，找到它的分布。我们遵循一种基本但强大的技术，使用 Sousa&Silvester(1990) 用到的技术，它包括以下 2 步：

- 1. 首先考虑一个有限的网络，假定半径为 a 的圆盘，中心在原点，对此有限区域中具有固定数量节点做 condition。节点的位置是 i.i.d. 的事件。
- 2. 接着 de-condition 作用在 (Poisson) 数量的节点，让圆盘半径趋向无穷。

Step 1. 考虑和原点相距 a 的节点发出的干扰：

$$I_a = \sum_{x \in \Phi \cap b(o, a)} \tilde{\ell}(\|x\|). \quad (5.18)$$

在 $a \rightarrow \infty$ 的极限下， $I_a \rightarrow I$ 。让 \mathcal{F}_{I_a} 是随机变量 I_a 的特征函数，即

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) \triangleq \mathbb{E}(e^{j\omega I_a}), j = \sqrt{-1}. \quad (5.19)$$

对半径 a 的具有 k 个节点的圆盘做 Condition，

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(e^{j\omega I_a} \mid \Phi(b(o, a)) = k \right) \right) \quad (5.20)$$

考虑到有 k 个点在 $b(o, a)$ ，这些圆盘上的点是 i.i.d. 的，具有径向密度

$$f_R(r) = \begin{cases} 2r/a^2 & \text{if } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.21)$$

特征函数是 k 个独立特征函数的乘积：

$$\mathbb{E}(e^{j\omega I_a} \mid \Phi(b(o, a)) = k) = \left(\int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \tilde{\ell}(r)) dr \right)^k \quad (5.22)$$

Step 2. 在 $b(o, a)$ 找到 k 个节点的概率由泊松分布给出, 因此

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda\pi a^2) (\lambda\pi a^2)^k}{k!} \mathbb{E}(e^{j\omega I_a} | \Phi(b(o, a)) = k) \quad (5.23)$$

将 (5.2) 式带入上式, 对 k 求和, 将和理解为指数函数的泰勒展开, 我们得到

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \exp\left(\lambda\pi a^2 \left(-1 + \int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \tilde{\ell}(r)) dr\right)\right). \quad (5.24)$$

做替换 $r \rightarrow \ell^{-1}(x)$, 其中 $\tilde{\ell}^{-1}$ 是 $\tilde{\ell}$ 的逆, 让 $a \rightarrow \infty$, 产生

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \left(-1 + \int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \tilde{\ell}(r)) dr\right) = \int_0^{\infty} (\tilde{\ell}^{-1}(x))^2 j\omega e^{j\omega x} dx \quad (5.25)$$

所以

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp\left(j\lambda\pi\omega \int_0^{\infty} (\tilde{\ell}^{-1}(x))^2 e^{j\omega x} dx\right). \quad (5.26)$$

为了得到更多正确的结果, 我们需要指定路径损失律。对于标准功率律 $\tilde{\ell}(r) = r^{-\alpha}$, 我们得到

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp\left(j\lambda\pi\omega \int_0^{\infty} x^{-2/\alpha} e^{j\omega x} dx\right) \quad (5.27)$$

对于 $\alpha \leq 2$, 积分发散, 表明干扰是无穷的 a.s. 对于 $\alpha > 2$,

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp\left(-\lambda\pi\Gamma(1 - 2/\alpha)\omega^{2/\alpha} e^{-j\pi/\alpha}\right), \quad \omega \geq 0. \quad (5.28)$$

对于负的 ω , 上式由对称条件 $\mathcal{F}_I^*(-\omega) = \mathcal{F}_I(\omega)$ 确定。对于 $\alpha = 4$,

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp\left(-\lambda\pi^{3/2} \exp(-j\pi/4) \sqrt{\omega}\right). \quad (5.29)$$

这个 case 引起了我们的兴趣, 因为它是唯一的 case 使得密度以闭形式的形式存在:

$$f_I(x) = \frac{\pi\lambda}{2x^{3/2}} \exp\left(-\frac{\pi^3\lambda^2}{4x}\right). \quad (5.30)$$

这就是所谓的 Lévy distribution, 也可以看成一个逆的 gamma distribution, 或者看成无限均值高斯分布的逆。对于其他的 α 值, 密度可能得用无穷级数的形式表示 (Sousa&Silvester 1990, Eqn.(22)).

5.1.6 稳定分布

为了解释式子 (5.5) 的特征函数, 我们简要地介绍 stable distributions 类族。

定义 5.1

(稳定分布) 一个随机变量 X 被称为具有稳定分布, 如果对于所有的 $a, b > 0$, 存在 $c > 0, d$, 满足

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad (5.31)$$

其中 X_1 和 X_2 是和 X 具有相同分布的 i.i.d. 的 r.v. 如果式子 (5.7) 对于 $d = 0$ 成立, 那么分布是严格稳定的。

定理 5.1

对于任意的稳定的随机变量 X , 有一个在 $0 < \delta \leq 2$ 范围的参数 δ , 让定义中的 c 满足 $c^\delta = a^\delta + b^\delta$.

参数 δ 是【指数特征】, 也称为【稳定性指数】。对于高斯随机变量, $\delta = 2$, 因为 $aX_1 + bX_2$ 是均值 $(a+b)\mu$ 且方差 $(a^2 + b^2)\sigma^2$ 的高斯随机变量, 即, 分布对于 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 和 $d = (a + b - c)\mu$ 成立。一般地, 一个稳定分布的特征函数是:

$$\mathbb{E}(e^{jtX}) = \begin{cases} \exp(jt\mu - \gamma|t|^\delta(1 - j\beta \operatorname{sgn}(t) \tan(\pi\delta/2))) & \delta \neq 1 \\ \exp(jt\mu - \gamma|t|(1 + j(2\beta/\pi) \operatorname{sgn}(t) \log(|t|))) & \delta = 1, \end{cases} \quad (5.32)$$

其中 $\text{sgn}(t)$ 是 t 的符号, $\beta \in [-1, 1]$ 是偏度参数, μ 是漂移, γ 是分散参数。比较式子 (5.8) 和式子 (5.5), 我们观察到式子 (5.5) 是一个随机变量的特征函数, 其中 $\delta = 2/\alpha, \beta = 1, \mu = 0$,

$$\gamma = \frac{\lambda \pi \Gamma(1 - 2/\alpha)}{\cos(\pi/\alpha)} = \frac{\lambda \pi \Gamma(1 - \delta)}{\cos(\pi\delta/2)}$$

尤其是, 对于 $\alpha = 4$, $\gamma = \lambda \pi^{3/2}/\sqrt{2}$ 。正如之前提到的, 这个 case 中, 其中 $\delta = 1/2$, 是唯一的 case 满足干扰功率的 pdf 存在。

偏度 $\beta = 1$ 意味着随机变量的支撑集限定为 \mathbb{R}^+ 。

一个偏度 $\beta = 1$ 且漂移 $\mu = 0$ 的稳定随机变量 X 的拉普拉斯变换, 具有如下的紧凑型:

$$E(e^{-sX}) = e^{-\kappa s^\delta} \quad (5.33)$$

参数 κ 和 k 相关, 关系是 $k = \kappa \cos(\pi/\alpha)$, 我们将 κ 称为 dispersion 参数或者 scale 参数。这并不违反公共术语, 因为不幸的是, 对于稳定分布, 存在非常多的不同的, 关于 dispersion 和 scale 的定义。在表格 (5.9) 中, 高斯随机变量的 dispersion 等于方差的一半。对于其他的稳定分布 ($\delta < 2$), 方差并不存在, 但是 dispersion 扮演一个相似的角色, 因为它表明此分布延展得多宽。

稳定分布的理论包括结果, 可以将 PPP 和稳定分布联系起来。

定理 5.2

(级数表示) 让 $\{\tau_i \subset \mathbb{R}\}$ 表示强度 λ 的 PPP 的到达时间, 让 (h_i) 是和 τ_i 独立的一族随机变量, 如果有限和

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-1/\delta} h_i \quad (5.34)$$

收敛 a.s., 那么这个级数和会收敛到一个稳定随机变量。

式子 (5.10) 被称为 LePage 级数表示/LePage series representation

这和我们已经发现的结果一致, 因为, 在我们的 case 中, 距离增长到 d th power, $r_i^d = \|x_i\|^d$, 包括一个强度为 λ_{c_d} 的 homogeneous PPP. 所以我们的和变成

$$\sum_{i=1}^{\infty} (r_i^{-d})^{-\alpha/d}$$

以及 $\delta = d/\alpha$.

定理 5.3 的一个结果如下所示

推论 5.1

(干扰的尺度变换) 让 $I(\lambda)$ 是强度为 λ 的单位 PPP $\Phi \subset \mathbb{R}^d$, 路径损失函数为 $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$. 那么

$$aI(\lambda) \stackrel{d}{=} I(a^\delta \lambda), \quad \forall a > 0, \text{ where } \delta = d/\alpha$$

这看起来可能有些反直觉, 但是它和 (5.7) 其实是一致的。因为 $I(\lambda_1 + \lambda_2) \stackrel{d}{=} I(\lambda_1) + I(\lambda_2)$, (利用 PPP 的 superposition 性质), 我们可以从推论中得到

$$aI_1(\lambda) + bI_2(\lambda) \stackrel{d}{=} I_1(a^\delta \lambda) + I_2(b^\delta \lambda) \stackrel{d}{=} I((a^\delta + b^\delta) \lambda) \stackrel{d}{=} cI(\lambda)$$

其中 $c = (a^\delta + b^\delta)^{1/\delta}$, I, I_1, I_2 来源于 3 个有各自强度的独立的 PPP。

从上面的推论中我们可以直接获得干扰的拉普拉斯变换, 如果功率放缩 P 倍。因为 $I \propto P$, 我们有 $PI(\lambda) = I(P^\delta \lambda)$, 即, 功率放缩 P 倍和密度放缩 P^δ 倍有着相同的效果。所以, 可能反直觉的, 如果稳定分布, 干扰和密度 λ 并不成比例。

$\delta < 1$ 的稳定分布变量具有性质: iid 的 X_n 的算术平均 $(X_1 + \dots + X_n)/n$ 随着 n 增长, 和 $X_k n^{1/\delta-1}$ 相等。n 个这样稳定的随机变量的总和和最大值以相同的方式缩放, i.e., 例如, 总和由偶尔的大值控制。

Figure 5.2 展示了对 power-law 路径损失的 PPP 的干扰建模的稳定随机变量的实现。对应的 survivor function 在 Figure 5.3 中给出。

对应的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp\left(-\lambda\pi\Gamma(1-2/\alpha)s^{2/\alpha}\right) \quad (5.35)$$

特征指数小于 1 的稳定分布没有任何有限矩。特别是，平均干扰发散，这是由于原点处路径损耗定律的奇异性。这也可以从 $\mathbb{E}(I) = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}s) \log(\mathcal{L}_I(s))|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} cs^{2/\alpha-1} = \infty$ 很容易得出。

使用节点位置的 iid 性质，对固定数量的节点进行 conditioning 处理，并对泊松分布进行条件处理的方法适用于许多其他问题。

5.1.7 有衰落情形下的干扰分布

有衰落的情形下，从每个发射机 x 发出的功率，会被乘上一个衰落系数 h_x ，假设 i.i.d.。因此干扰由下面的和式给出：

$$I = \sum_{x \in \Phi} h_x \ell(x),$$

我们的目标是计算拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}e^{-sI} = \mathbb{E}\left(\prod_{x \in \Phi} e^{-sh\ell(x)}\right)$$

因为衰落是 iid 的，所以

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}_{\Phi}\left(\prod_{x \in \Phi} \mathbb{E}_h\left(e^{-sh\ell(x)}\right)\right)$$

将此 PPP 映射到一维，我们知道 $\lambda(r) = \lambda c_d r^{d-1}$ 。再一次让 $\tilde{\ell}(\|x\|) \equiv \ell(x)$ 。现在我们对 $v(r) = \mathbb{E}_h(e^{-sh\tilde{\ell}(r)})$ 使用 pgfl，得到

$$\mathcal{L}(s) = \exp\left\{-\int_0^\infty \mathbb{E}_h\left[1 - e^{-sh\tilde{\ell}(r)}\right] \lambda(r) \mathrm{d}r\right\}$$

对于 1 维的 PPP，对 h 做 condition，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - \exp(-sh\tilde{\ell}(r))) \lambda(r) \mathrm{d}r &= \lambda c_d \int_0^\infty (1 - \exp(-shr^{-\alpha})) \mathrm{d}r^{d-1} \mathrm{d}r \\ &\stackrel{(a)}{=} \lambda c_d \int_0^\infty (1 - \exp(-sh/y)) \delta y^{\delta-1} \mathrm{d}y \\ &\stackrel{(b)}{=} \lambda c_d \int_0^\infty (1 - \exp(-shx)) \delta x^{-\delta-1} \mathrm{d}x \\ &\stackrel{(c)}{=} \lambda c_d \int_0^\infty x^{-\delta} sh \exp(-shx) \mathrm{d}x \\ &= \lambda c_d (hs)^\delta \Gamma(1-\delta), \quad 0 < \delta < 1 \end{aligned}$$

其中 (a) 是因为做了替换 $y \leftarrow r^{-1/\alpha}$ ，(b) 是因为 $x \leftarrow y^{-1}$ ，(c) 是因为积分改写。聚焦于对于 h 随机性求期望，我们得到

$$\mathcal{L}(s) = \exp(-\lambda c_d \mathbb{E}(h^\delta) \Gamma(1-\delta) s^\delta)$$

所以，有衰落的情形下，干扰也必须是一个指数特征为 δ 的稳定分布。分散系数 κ 从 $\mathbb{E}(h^\delta)$ 到 $\lambda c_d \mathbb{E}(h^\delta) \Gamma(1-\delta)$ 改变。

在瑞利衰落的 case 中，其中 h 是指数的， $\mathbb{E}(h^\delta) = \Gamma(1+\delta)$ ，所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s) &= \exp(-\lambda c_d \Gamma(1+\delta) \Gamma(1-\delta) s^\delta) \\ &= \exp\left(-\lambda c_d \frac{\pi\delta}{\sin(\pi\delta)} s^\delta\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda c_d}{\operatorname{sinc} \delta} s^\delta\right) \end{aligned}$$

当 $\delta \rightarrow 1$, $\sin(\pi\delta) \sim \pi(1 - \delta)$, 所以极限情形下我们有

$$\mathcal{L}(s) \approx \exp\left(-\lambda c_d s^\delta \frac{\delta}{1 - \delta}\right)$$

这表明：当路径损失指数接近网络维度时，分散锐利地增长。

5.2 泊松网络中中断的概率

定义 5.2

(定义 SINR) SINR 的定义是

$$\text{SINR} \triangleq \frac{S}{W + I} \quad (5.36)$$

其中 S 是我们关心的信号的功率， W 是噪声的功率， I 是干扰的功率。如果噪声被忽略 ($W = 0$)，SINR 退化为 SIR。

对于固定调制，固定编码制式，干扰被看作噪声对待，例如，使用一个简单线性接收机，一个公认的打包模型是：如果 SINR 超过某个阈值 θ ，则传输成功。所以我们如下定义成功概率。

定义 5.3

(定义传输成功概率) 传输成功概率 $p_s(\theta)$ 的定义是：

$$p_s(\theta) \triangleq \mathbb{P}(\text{SINR} > \theta) \quad (5.37)$$

而 $1 - p_s$ 就是中断概率。

阈值 θ 和 (物理层) (比特?) 传输率 R 相关。利用香农信道容量公式，他们由 $\theta = 2^R - 1$ 相关联；由于实际限制，阈值应该选取得略大，来给 R 提供容限。

5.3 泊松双极网络中的空间吞吐

定义 5.4

(泊松双极网络) 一个泊松双极网络包括由系列发射机 $\{x_i\} \subset \mathbb{R}^2$ 组成的 PPP, , 还包括系列接收机 $\{y_i\}$, 每个接收机均匀随机选择朝向进行接收。每一对接收机发射机满足 $\|x_i - y_i\| = r$ for all i .

使用 displacement theorem(Theorem 2.33), 接收机 $\{y_i\}$ 的点过程本身也是 PPP。所以泊松双极网络包括两个【有依赖关系的】PPP，即一个发射机 PPP 和一个接收机 PPP。

5.3.1 空间吞吐

成功概率 p_s 可以堪称对特定链路的一个吞吐度量。为了量化整个网络的性能，吞吐量需要在所有链路上平均。假设泊松双极网络的每一个发射机决定以概率 p 发射，以概率 $1 - p$ 静默。这是所谓的 ALOHA 信道接入制式。在一个强度为 λ 的泊松双极网络，空间吞吐可能定义为

$$T(p) \triangleq p\lambda p p_s(p, r) \quad (5.38)$$

其中 $p_s(p, r)$ 是发射机在距离 r 上，以概率 p 选择发射，通信的成功概率。对于一个给定的 r ，它在

$$p_{\text{opt}} = \frac{1}{\lambda \theta^\delta \pi \Gamma(1 - \delta) \Gamma(1 + \delta) r^2} \quad (5.39)$$

处取得最大值。当然， p_{opt} 不能超过 1。如果右侧的表达式产生一个大于 1 的值，那就表明网络密度 λ 可以增加来达到一个更高的吞吐。类似地，链路距离 r 可以包括在度量中，这将导致运输能力并且优化。

5.3.2 香农吞吐

空间吞吐量是基于中断的度量，因为某些传输不会成功。相反，如果发射机能够对 SINR 条件做出快速反应并调整其传输速率，另一个量可能是相关的，称为香农吞吐 (Baccelli & Blaszczyzyn (2009) 提出)。考虑 $p_s(\theta)$ 作为门限 θ 的函数，香农吞吐 (以 nats 的单位) 是：

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \log(1 + \text{SINR}) &= - \int_0^\infty \log(1 + \theta) dp_s(\theta) \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_0^\infty p_s(e^x - 1) dx\end{aligned}\quad (5.40)$$

这里 (a) 是因为一个随机变量 X 的期望可以用它的 survivor function 来表示。乘以当前发射机的密度，得到另一种类型的空间吞吐量——我们把干扰当做噪声可以期待的最好的吞吐。

5.4 传输容量

Weber 等人 (2005) 中引入的传输容量是无线网络的性能指标，用于测量成功传输的空间强度，受允许中断概率的限制（当接收器处的 SINR 低于阈值时发生中断）。限制停机概率的优点是这在许多应用中是必要的。相反，如 (5.15) 所示，最大化空间吞吐量可能会导致如下成功概率低为 e^{-1} ，这意味着每个数据包会多次重传，进而导致不可接受的延迟。此外，与其他指标相比，传输容量相对可控；在某些情况下，它会导致简单的闭式表达式，而在许多其他情况下，可以找到紧边界。

定义 5.5

(传输容量) 对于一个强度为 λ 的泊松双极网络，在原点添加参考接收机，在距离 r 处添加所需发射机，让 $p_s(\lambda)$ 指代：在存在来自双极网络中所有发射机的干扰的情况下，该接收机的成功概率。考虑到一个目标中断概率 $\epsilon \in (0, 1)$ ，传输容量 λ_{tc} 定义为

$$\lambda_{tc}(\epsilon) \triangleq (1 - \epsilon) \max \{ \lambda : p_s(\lambda) \geq 1 - \epsilon \} \quad (5.41)$$

因为成功概率 $p_s(\lambda)$ 对于 λ 是单调减的，传输容量可以写成

$$\lambda_{tc}(\epsilon) = (1 - \epsilon) p_s^{-1}(1 - \epsilon) \quad (5.42)$$

其中 $p_s^{-1}(1 - \epsilon)$ 产生【导致成功概率 $1 - \epsilon$ 的】强度 λ 。



例题 5.1 如果所有发射机都使用单位功率，所有链路都受到瑞利衰落影响，并且噪声被忽略，那么求出二维网络的传输容量。

解 从式子 (5.14)，我们知道

$$p_s(\lambda) = \exp(-\pi\lambda\theta^\delta r^2 \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta)) \quad (5.43)$$

其中 $\delta = 2/\alpha$. 定义 $\gamma \triangleq \pi\theta^\delta r^2 \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta)$ ，通过 inverting $p_s(\lambda)$ ，我们得到

$$\lambda_{tc}(\epsilon) = -\frac{1}{\gamma} (1 - \epsilon) \log(1 - \epsilon) \quad (5.44)$$

因为 ϵ 经常是非常小的，我们可能使用对数函数的 Taylor 展开，来得到

$$\begin{aligned}\lambda_{tc}(\epsilon) &= \frac{\epsilon - \epsilon^2/2}{\gamma} + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{\epsilon}{\gamma} + O(\epsilon^2),\end{aligned}\quad (5.45)$$

这给出了 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的上界。

上面 solution 中定义参数 γ 被 Haenggi(2009) 称为空间竞争参数 spatial contention parameter. 它通常被定义为作为发射器强度 λ 函数的成功概率 $p_s(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 位置的（负）斜率

$$\gamma \triangleq - \left. \frac{dp_s(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (5.46)$$

这个参数描述了：随着越来越多的链路加载在网络中，成功概率下降得有多快。所以，一般来说，传输容量的渐进行为，是

$$\lambda_{tc}(\epsilon) \sim \frac{\epsilon}{\gamma}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (5.47)$$

对于大 ϵ ，传输容量并不是随着 ϵ 单调增的，这是由于因子 $1 - \epsilon$ 的存在；它在 $\epsilon = 1 - 1/e$ 的时候达到最大值 $1/(e\gamma)$ 。

作为链路距离 r 的一个函数，很明显看到 $\lambda_{tc} \propto r^{-2}$ ，这表明一个事实：如果遵循中断限制，在 r 距离上传输，需要和 r^2 成比例的面积。

5.4.1 具有衰落的网络

对于独立瑞利衰落的 case，我们发现 Example 5.2 的闭形式的传输容量。对于一般的衰落，我们通过再一次聚焦在一个主导的干扰器上，取得了一个界。在这个 case 中，

$$\Phi_{\text{dom}} = \{x \in \Phi : hr^{-\alpha}/h_x \|x\|^{-\alpha} < \theta\} \quad (5.48)$$

其中， h 是关心的链路的衰落系数， h_x 是干扰器 x 的衰落系数。正如 2.9.2 节推导的那样，有衰落的路径损失过程 Ξ 的强度函数是：

$$\mu(x) = \lambda \pi \delta x^{\delta-1} \mathbb{E}(h^\delta). \quad (5.49)$$

因此，给定 h ，缺少任意主导干扰器的概率是【 Ξ 中没有点和原点距离在 $r^\alpha \theta / h$ 】的概率。即

$$\mathbb{P}(\Phi_{\text{dom}} = \emptyset | h) = \exp\left(-\int_0^{r^\alpha \theta / h} \mu(x) dx\right) = \exp(-\lambda \pi \mathbb{E}(h^\delta) r^2 \theta^\delta h^{-\delta}) \quad (5.50)$$

因此，

$$p_s(\lambda) < \mathbb{E}_h(\exp(-\lambda \pi \mathbb{E}(h^\delta) r^2 \theta^\delta h^{-\delta})) \quad (5.51)$$

应用如下形式的 Jensen 不等式：

$$\mathbb{E}_h(\exp(-\lambda \pi \mathbb{E}(h^\delta) r^2 \theta^\delta h^{-\delta})) > \exp(-\lambda \pi \mathbb{E}(h^\delta) r^2 \theta^\delta \mathbb{E}(h^{-\delta})) \quad (5.52)$$

并不产生想要的上界，因为不等式的方向错了。但是这表明，近似的，有

$$p_s(\lambda) \approx \exp(-\lambda \pi r^2 \theta^\delta \mathbb{E}(h^\delta) \mathbb{E}(h^{-\delta})) \quad (5.53)$$

结果是，

$$\lambda_{tc}(\epsilon) \approx \frac{-(1-\epsilon) \log(1-\epsilon)}{\pi r^2 \theta^\delta \mathbb{E}(h^\delta) \mathbb{E}(h^{-\delta})} \sim \frac{\epsilon}{\pi r^2 \theta^\delta \mathbb{E}(h^\delta) \mathbb{E}(h^{-\delta})} \quad (5.54)$$

强度，这是精确的表达式，对于瑞利衰落来说，即，在这种情况下，使用主导干扰的成功概率上限和使用 Jensen 不等式的成功概率下限的效果精确地相互抵消。

因为 $\mathbb{E}(h^\delta) \mathbb{E}(h^{-\delta}) > 1$ (除了没有衰落的 case)，衰落似乎对传输容量具有负面影响。

5.5 干扰的时间相关性

到目前为止，我们对干扰做特征化，仅仅是在平面上的单个位置，没有考虑时间这一要素。虽然干扰的分布不取决于平稳点过程中的位置，但在两个附近位置测量的干扰是相关的，因为它们取决于同一点过程，因此受到共同随机性的影响。所以，干扰是空间相关的。这在 Fig. 5.4 进行了展示，展现了 ALOHA 传输概率为 $p = 1/3$ 的泊松网络中的干扰场的 3 个快照。

以及，在一个静态网络中，信道接入或者 MAC 制式选择一变化的顶点子集作为发射机。例如，在时隙 $k, \Phi_k \subset \Phi$ 是发射机的集合，让 I_k 表示原点处在时刻 k 测量到的干扰。那么 I_k 和 I_j 是相关的，同样是由于共同的随机性 Φ 。因此在干扰场中也有时间相关性。

这两种类型的相关性（空间相关性和时间相关性）都值得探索，因为它们影响了多跳通信和基于重复的传输方案的联合成功概率，其中发射机重新发送未接收的消息。

我们关注在 \mathbb{R}^2 上由强度 λ 的潜在发射机的 PPP 引起的干扰场，这些发射机采用 ALOHA 作为 MAC 方案。路径损耗定律 $\ell(x)$ 假定具有以下性质。

- 它仅仅依赖 $\|x\|$.
- 它随着 $\|x\|$ 增加而单调减.
- 它是可积的，即， $\int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) dx < \infty$

例如，一个有效的路径损失模型是

$$\ell_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon + \|x\|^\alpha}, \epsilon \in (0, \infty), \alpha > 2 \quad (5.55)$$

标准奇异路径损失模型 $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ 可以由上式取极限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon(x)$ 得到。因为是在 ALOHA 中，每一个节点在每一个时隙进行一个独立决策来发送，在一个时隙发射机的集合是原始 PPP Φ 的 thinned 版本，导致在时隙 k 的得到的发射机过程 Φ_k ，也是一个 PPP。这很容易通过考虑 void 概率来进行验证。对于一个有界的集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ ，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_k(B) = 0) &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi \cap B} 1(x \text{ not a transmitter at time } k) \\ &\stackrel{(a)}{=} \prod_{x \in \Phi \cap B} \mathbb{P}(x \text{ not a transmitter at time } k) \\ &= \mathbb{E} \left[(1-p)^{\Phi(B)} \right] \\ &\stackrel{(b)}{=} \exp(-\lambda p |B|) \end{aligned} \quad (5.56)$$

这里 (a) 是因为：节点彼此独立地决定是否传输，由于 Φ 是 PPP， $\Phi(B)$ 是均值为 $\lambda|B|$ 的泊松随机变量；这里 (b) 是因为：泊松随机变量的 MGF 矩生成函数。

从上面我们可以看到，发射机在时刻 k 处理的 void probability 是 $\exp(-p\lambda|B|)$ ，其对应于 PPP。我们还观察到 Φ_k 具有密度 $p\lambda$ ，这是直观的。在时刻 k 在位置 z 的干扰是：

$$I_k(z) = \sum_{x \in \Phi} 1(x \in \Phi_k) h_{xz}(k) \ell(x-z) \quad (5.57)$$

其中， h_{xz} 是位置 x 和位置 z 之间的衰落，此衰落被假定时间上和空间上都是独立的。

针对具有传输概率 p 的 ALOHA，我们的目标是计算随机变量 $I_k(u), I_l(v)$ 的相关系数

注 对于 ALOHA，一个有限的 collection 或者向量 $v = (I_{k_1}(z), I_{k_2}(z), \dots, I_{k_n}(z))$ with $n \in \mathbb{N}, k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n, z \in \mathbb{R}^2$ ，是可交换的，或者对称性依赖的，因为 v 的联合分布并不随着它的成分做 permutation 而改变。可交换性的使用在 Kingman(1978) 中被研究。

为了计算随机变量的联合矩，我们使用联合拉普拉斯变换，作用于随机变量 $I_k(u)$ 和 $I_l(v)$

定理 5.3

(干扰的联合拉普拉斯变换) $I_k(u), I_l(v), k \neq l$ 的联合拉普拉斯变换，是

$$\mathcal{L}(s_1, s_2) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \xi(s_1, u-x) \xi(s_2, v-x)] dx \right) \quad (5.58)$$

其中

$$\xi(s, x) = 1 - p + p \mathcal{L}_h(s \ell(x)) \quad (5.59)$$

\mathcal{L}_h 表示对衰落分布做拉普拉斯变换

证明 在时刻 k 位置 $u \in \mathbb{R}^2$ 的干扰是

$$I_k(u) = \sum_{x \in \Phi_k} h_{xu}(k) \ell(x-u). \quad (5.60)$$

在时刻 l 位置 $v \in \mathbb{R}^2$ 的干扰是

$$I_l(v) = \sum_{y \in \Phi_l} h_{yv}(l) \ell(y - v). \quad (5.61)$$

所以, 联合拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}(s_1, s_2) = \mathbb{E} \exp \left[-s_1 \sum_{x \in \Phi_k} h_{xu}(k) \ell(x - u) - s_2 \sum_{y \in \Phi_l} h_{yv}(l) \ell(y - v) \right]. \quad (5.62)$$

将上式重写为乘积的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbb{E} \prod \exp(-s_1 1(x \in \Phi_k) h_{xu}(k) \ell(x - u)) \exp(-s_2 1(x \in \Phi_l) h_{xv}(l) \ell(x - v)) \end{aligned} \quad (5.63)$$

因为在 ALOHA 中, 每一个节点都是独立决策是否发送, 考虑 ALOHA 情形, 上式变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi} [1 - p + p \exp(-s_1 h_{xu}(k) \ell(x - u))] [1 - p + p \exp(-s_2 h_{xv}(l) \ell(x - v))] \end{aligned} \quad (5.64)$$

因为衰落被假定是空间时间独立的, 考虑到这一点, 上式变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi} [1 - p + p \mathcal{L}_h(s_1 \ell(x - u))] [1 - p + p \mathcal{L}_h(s_2 \ell(x - v))] \\ &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi} \xi(s_1, x - u) \xi(s_2, x - v) \\ &= \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \xi(s_1, x - u) \xi(s_2, x - v)] dx \right). \end{aligned} \quad (5.65)$$

最后一步是使用 PPP 的 pgfl。

使用上面定理中相似的方法, 相同时间 k , 不同位置 u, v , 随机变量 $I_k(u), I_k(v)$ 的联合拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}_{I(u)I(v)}(s_1, s_2) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \mathcal{L}_h(s_1 \ell(x - u)) \mathcal{L}_h(s_2 \ell(x - v))] dx \right) \quad (5.66)$$

要计算 $I_k(u)$ 和 $I_l(v)$ 的乘积的均值, 需要计算相关系数

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_k(u)I_l(v)] &= \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} \mathcal{L}(s_1, s_2) \Big|_{(s_1, s_2) = (0, 0)} \\ &= p^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x - u) \ell(x - v) dx + \lambda^2 p^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5.67)$$

引理 5.1

ALOHA 情形, 路径损失函数取式子 (5.17), 干扰 $I_k(u)$ 和干扰 $I_l(v)$ 的空时相关系数是

$$\zeta(u, v) = \frac{p \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) \ell(x - \|u - v\|) dx}{\mathbb{E}(h^2) \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x) dx}. \quad (5.68)$$



证明 因为 $I_k(u)$ 和 $I_k(v)$ 是独立分布的, 我们有

$$\zeta(u, v) = \frac{\mathbb{E}[I_k(u)I_l(v)] - \mathbb{E}[I_k(u)]^2}{\mathbb{E}[I_k(u)^2] - \mathbb{E}[I_k(u)]^2} \quad (5.69)$$

使用上面的定量关系替换, 我们有

$$\begin{aligned} \zeta(u, v) &= \frac{p \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x - u) \ell(x - v) dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x) dx} \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{p \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) \ell(x - \|u - v\|) dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x) dx}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

其中 (a) 是因为替换 $y = x - u$ 以及 $\ell(x)$ 仅仅依赖 $\|x\|$

我们观察到相关系数并不依赖于时刻 k 和时刻 l , 从式子 (5.20) 我们得到了如下关于空间相关性的 lemma。

引理 5.2

干扰的空间相关系数，即， $I_k(u), I_l(v)$ 的相关系数，是

$$\zeta_s(u, v) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) \ell(x - \|u - v\|) dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x) dx}. \quad (5.71)$$



通过在 lemma 5.11 中设置 $\|u - v\| = 0$ ，我们得到了时间相关系数。

引理 5.3

对于 ALOHA，时间相关系数，是

$$\zeta_t = \frac{p}{\mathbb{E}(h^2)} \quad (5.72)$$

和 $\ell(x)$ 独立。当衰落是 Nakagami-m，相关系数是 $\zeta_t = pm/(m+1)$ 。尤其是，对于 $m = 1$ （瑞利衰落），时间相关系数是 $p/2$ ，对于 $m \rightarrow \infty$ （无衰落），时间相关系数是 p



因此相关系数随着 m 增加而增加，即，衰落可以减小相关系数，这是符合我们直觉的。注意到上面的推导 $\int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x) dx$ 对于 $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ 没有很好的定义。我们可以使用这样的路径损耗来替代： $\epsilon \rightarrow 0, \ell_\epsilon(x)$

5.6 中断概率的时间相关性

我们使用和之前小节的同样的设置，额外地，我们假设在原点的发射机具备一个目的地 $z \in \mathbb{R}^2$ 。让 A_k 表示原点可以在时刻 k 连接到目的地 z 的事件。即，

$$\text{SIR} = \frac{h_{oz}(k)l(z)}{I_k(z)} > \theta. \quad (5.73)$$

我们假设所有的链路都服从瑞利衰落。我们想要找到 $P(A_k, A_l), k \neq l$ (这表明两个不同时隙中成功概率的相关性) 成功的联合概率。推导是基于【一个 pgfl 的一个良好的应用】进行的。让 $\theta_z = \theta/\ell(z)$ ，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k, A_l) &= \mathbb{P}(h_{oz}(k) > \theta_z I_k(z), h_{oz}(l) > \theta_z I_l(z)) \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}[\exp(-\theta_z I_k(z)) \exp(-\theta_z I_l(z))] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta_z \sum_{x \in \Phi} l(x) [1(x \in \Phi_k) h_{xz}(k) + 1(x \in \Phi_l) h_{xz}(l)]\right)\right] \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in \Phi} \left(\frac{p}{1 + \theta_z \ell(x)} + 1 - p\right)^2\right] \\ &\stackrel{(c)}{=} \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} 1 - \left(\frac{p}{1 + \theta_z \ell(x)} + 1 - p\right)^2 dx\right). \end{aligned} \quad (5.74)$$

其中 (a) 是因为 $h_{oz}(k), h_{oz}(l), k \neq l$ 的独立性；(b) 是因为考虑 $h_{xz}(k), h_{xz}(l)$ 和 ALOHA 后取的平均；(c) 是因为 PPP 的 pgfl。根据联合概率，条件概率（假设之前的传输成功或失败）可被得到。

供拓展阅读的参考书目

随机几何在无线网络分析中的应用始于 Musa & Wasylkiwskyj (1978) 和 Takagi & Kleinrock (1984) Sousa 和 Silvester (1990)、Sousa (1990) 和 Sousa 等人的 PPP 中的干扰特征，和 Ilow & Hatzinikos (1998)。Mathar 中考考虑了格点和购买力平价 & Mattfeldt (1995) 和 Haenggi (2009)。二项式点过程中的干扰在 Srinivasa 和 Haenggi (2010) 中进行了分析。

瑞利衰落中，干扰的拉普拉斯变换和成功概率的联系，第一次由 Linnartz (1992) and Zorzi & Pupolin (1995) 给出。这个结果被 Baccelli et al. (2006) 推广，Baccelli 他们也给出了干扰和中断对路由的影响的结果。

Baccelli & Blaszczyzyn (2009) 的两卷书, 卷 1 中对随机几何给出了介绍, 卷 2 中介绍了 MAC 设计自组网中路由的详细介绍。

Haenggi&Gant (2008) 的专著中详细讨论了作为点过程建模的无线网络中的干扰以及由此产生的中断概率, 该专著也包含了泊松模型之外的扩展。

传输容量在 Weber 等人 (2005 年) 中介绍, 是 Weber&Andrews (2012 年) 专著的主题, Ganti&Haenggi (2009 年 b) 分析了干扰相关性。

关于稳定分布的细节可以在 Samorodnitsky & Taqqu (1994) 找到。

练习题

- 练习 5.1 让 Φ 是一个均匀 PPP, 让 I_r 表示在原点 o 处测得的干扰, 此干扰源自干扰器 $\Phi \cap b(o, r)$, 证明如果路径损耗律是 $\bar{\ell}(r) = r^{-3}$, 那么

$$\mathbb{E}(I_{2r} - I_r) = \mathbb{E}(I_\infty - I_{2r}), \quad \forall r > 0 \quad (5.75)$$

- 练习 5.2 让路径损失函数是 $\ell(x) = \min\{\|x\|^{-\alpha}, 1\}$, 让 Φ 是 \mathbb{R}^2 上一个强度为 λ 的稳定的 PPP。干扰是

$$I = \sum_{x \in \Phi} h_x \ell(x) \quad (5.76)$$

对于 iid. 的 h_x 有分布函数 F_h 。

确定 $\text{var}(I)$ 和 $\mathbb{E}(I^2)$ 对于 $F_h(x) = \mathbf{1}\{x \geq 1\}$ 以及 $F_h(x) = 1 - \exp(-x)$. 这里的 α 要满足什么条件才能使方差是有限的?

使用涉及 1st moment 和 2nd moment 的不等式, 你可以对 I 的分布给出什么结论?

- 练习 5.3 考虑平面上强度为独立的 PPP。考虑路径损耗律为 $\ell(x) = \|x\|^{-4}$ 的情形, 将来自原点 o 的四个 PPP 的干扰记为 I, I_1, I_2, I_3 。找到常数 c 使满足

$$I_1 + I_2 + I_3 \stackrel{d}{=} cI. \quad (5.77)$$

试着从 3 的情形向 n 的情形做推广。

- 练习 5.4 设置一个模拟, 以验证 $\lambda = 1$ 的前一个问题, 对于相同的路径损耗函数但没有衰落。绘制 $\alpha \in \{2.1, 2.2, \dots, 5.0\}$ 情形下的平均值和方差, 理论曲线也要包括? 在这个过程中你遇到了什么困难?

- 练习 5.5 理论分析计算吞吐量。考虑一个密度为 λ 的 PPP $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ 。假设瑞利衰落, 概率为 p 的时隙 ALOHA 作为信道接入协议。定义吞吐量是

$$T = p(1 - p)p_s(p) \quad (5.78)$$

其中 $p_s(p)$ 是距离 r 上传输的成功概率, 当仅考虑干扰:

$$p_s = \mathbb{P}(\text{SIR} > \theta) \quad (5.79)$$

为什么这是一个有意义的吞吐指标?

找到最优的 θ, α, r 的函数形式的传输概率, 以及得到的 p_s, T

如果无线电具有全双工能力, 吞吐量定义将如何改变?


导出相应的最佳 p 并进行比较。

绘制 $r = 1, \lambda = 1, \theta = 1, \alpha = 4$ 情形的吞吐 T -概率 p 函数, 半双工和全双工的情形都要给出。

- 练习 5.6 模拟来计算吞吐量。对相同的场景写一个模拟, 其中 $r = 1, \lambda = 1, \theta = 1, \alpha = 4$ 。绘制模拟得到的吞吐 T -概率 p 曲线, 和理论分析的结果进行比较。

- 练习 5.7 再一次对于相同的场景, 假定干扰器并不会衰落 (但是来自关心的发射机的信道会) 你期待成功概率会怎么改变? 使用模拟仿真来进行验证。

- 练习 5.8 对于泊松网络, 瑞利衰落, ALOHA, Lemma 5.13 已经表示干扰的时间相关和传输概率 p 成比例。利用 Section 5.1.5 的方法推导同样的结果: 首先考虑一个有限的网络, 并以节点的数量为条件, 然后对节点的 (泊松) 数量解除条件, 让网络面积增长到无穷。从一个有限的 ϵ 开始, 让 $\epsilon \rightarrow 0$, 观察路径损失函数 ℓ_ϵ 的表现。

 **练习 5.9** 对于 Section 5.6 考虑的成功概率的时间相关，证明如下结论：

$$\frac{\mathbb{P}(A_k \mid A_l)}{\mathbb{P}(A_k)} > 1 \quad (5.80)$$

这表明成功事件是正相关的。

第 6 章 点过程的矩测度

练习题

练习 6.1 说明如下公式：

$$\text{var } \Phi(A) = \alpha^{(2)}(A \times A) + \Lambda(A) - (\Lambda(A))^2$$

练习 6.2 使用 R 语言验证例子 6.15 中所使用近似的准确性

练习 6.3 使用 R 中的 `x=clickppp(30)` 来手动进入 30 个点。尝试产生 $[0, 1]^2$ 上均匀 PPP 的一个典型实现。使用 `Kest` 函数和 `envelope` 函数来验证是否实际 K 函数和理论 K 函数匹配

练习 6.4 找到 Matérn 聚簇过程的 K 函数

练习 6.5 说明对于双泊松聚簇过程，

$$K(r) = \pi r^2 + \frac{F(r)}{\lambda_p}$$

其中 $F(r)$ 是簇中两个点的距离的分布

练习 6.6 考察例子 6.17 中的 Baddeley-Silverman process，设置区域为单位方，计算它的强度函数，方差 $\text{var}\Phi(B)$ 对于任意的 B ， K 函数。

练习 6.7 解释 2.8 节引入的 FryPlot 和 K 函数的联系。

练习 6.8 干扰。重复问题 5.2，使用你自己的关于二阶积密度的知识。显式地写出和的平方：

$$I^2 = \left(\sum_{x \in \Phi} h_x \ell(x) \right)^2, \quad \ell(x) = \min \{ \|x\|^{-\alpha}, 1 \},$$

练习 6.9 一维聚簇过程的二阶矩测度。(a) (b) (c)

第 7 章 标记点过程

默认中文字体 default english font

练习题

- 练习 7.1 (对于平稳过程) 定义 K 函数, 使用一般的记号 $m_x^{(\Phi)}$
- 练习 7.2 确定例子 7.8 中的标记点过程的 the mark distribution, 如果 Φ 是一个强度为 λ 的均匀 PPP。Repeat for the case where Φ is a perturbed square lattice (see Definition 2.16) with iid perturbation vectors that are uniform on $b(o, 1/2)$
- 练习 7.3 让 Φ 是一个强度为 λ 的 PPP, 用标记

$$m_x = \Phi(b(x, R)) - 1, \quad x \in \Phi$$

其中 $R > 0$ 。来得到一个标记点过程。展示 mark-correlation 函数是

$$k_{mm}(r) = 1 + \frac{|b(o, R) \cap b(r, R)|}{\pi r^2}$$

- 练习 7.4 对于式子 7.11 描述的标记过程, 描述 $\Phi_{[[0p] \times \{1\}]}$ 的性质。
如果基底过程 Φ 是一个强度 λ 的 PPP。什么 MAC 制式可以得到这个过程?
- 练习 7.5 给出 Campbell' s theorem 的形式证明。这里考察的对象是 (7.8) 中的稳定标记点过程。
- 练习 7.6 描述泊松双极网络模型中的发射机和接收机的叠加, 是一个聚簇过程。
- 练习 7.7 考虑一个无线网络, 其中发射机来自一个稳定的强度为 λ 的点过程。todo todo

第 8 章 Conditioning 和 Palm Theory

8.1 导论

8.1.1 Conditioning 和典型的点

点过程理论中的 Palm 概率或 Palm 测度是给定点过程在某个位置包含点的事件。它还将过程的“典型点”的概念形式化。非正式地，典型的点源于一个选择过程，其中每个点都有相同的机会选择。这个想法需要在数学上精确，尤其是在无限点过程。例如，根据某些采样选择的点程序，例如最接近原点的程序，不是典型的，因为它已经以特定的、确定的方式选择。直观地看，Palm 分布是条件点过程分布，给定一个点（典型点）存在于特定位置。

这种类型的 conditioning 有时指代 interior conditioning，因为 conditioning 作用在 $x \in \Phi$ ，问题是点过程在 x 之外表现如何？相形之下，Papangelou conditional intensity 是基于 exterior conditioning 的，因为 conditioning 作用在 $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ ，问题是有一个点在 x 的概率是多大。这两个概念相互对偶。

如果点过程是原子的，就像 die process 一样，在其中一个原子的位置上调节一个点不会造成任何困难。

例题 8.1 用 P_o 表示 Example 2.1 中 die process 的分布做原点 $o \in \mathbb{R}^2$ 的 condition. 让 E 是所有点 $\Phi(\mathbb{R}^2)$ 的数目是奇数这一事件。我们有 $P(E) = 1/2$ 但是 $P_o(E) = 1$. 相似地，用 \mathbb{E}_o 指代期望，我们有 $\mathbb{E}\Phi(b((1,1), \epsilon)) = 1/2$ and $\mathbb{E}_o\Phi(b((1,1), \epsilon)) = 1/3$ for $0 < \epsilon < 1$

当我们考虑扩散点过程时，(?? 括号里的谁爱翻译谁翻译，我看不懂??)，因为，在这个 case，我们做 condition 的事件具有概率 0. 甚至，这样的 conditioning 可以是非常直觉性的，正如下面这个例子所展示的。

例题 8.2 考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}^2, \nu_2)$

练习题

- 🔥 **练习 8.1** 让 Φ 是一个随机旋转的 die processs, 来自例子 2.1, 让 $B = [-1, 1]^2$. 确定 $\mathbb{E}\Phi(B)$, $\mathbb{E}_o\Phi(B)$, and $\mathbb{E}_{(-1,1)}\Phi(B)$
- 🔥 **练习 8.2** the die cluster process. 考虑一个 parent intensity 为 λ_p 的泊松聚簇过程，其中每个簇是一个独立且随机的旋转 die process. 再一次的，对于 $B = [-1, 1]^2$ ，找到 $\mathbb{E}\Phi(B)$, $\mathbb{E}_o\Phi(B)$, and $\mathbb{E}_{(-1,1)}\Phi(B)$ ，画出 K 函数 $K(r)$ 图像.
- 🔥 **练习 8.3** 考虑 \mathbb{R}^2 上的混合泊松点过程，其中 λ 是一个均值 p 的伯努利随机变量。确定 $\Lambda([0, 1]^2) = \mathbb{E}\Phi([0, 1]^2)$ 和 $\mathbb{E}_o\Phi([0, 1]^2)$
- 🔥 **练习 8.4** $\mathcal{K}(B) = \mathcal{K}(-B)$ 成立吗？给出证据或者给出反例。
- 🔥 **练习 8.5** 证明，对于一般的 PPP， $\lambda(x, \Phi) \equiv \lambda(x)$
- 🔥 **练习 8.6** 画出式子 (8.10) Georgii-Nguyen-Zessin formula 的稳定的 (形式/表格?)，
使用一个 hard-core process. 选择一个函数 h ，使得内部的左边的 conditioning 和 Scaling the intensity 有相同的效果
- 🔥 **练习 8.7** 找到 Neymann-Scott 聚簇过程的 J 函数，使用聚簇 Palm 测度 C_o 来表示。

第 9 章 渗流，连通性，覆盖的介绍

9.1 动机

在这部分，我们关心一个网络或者一个图的特定的全局性质，例如是否存在一个巨大的连通分量。我们将要用到的主要的新的数学工具是渗流理论。渗流理论开始于大约 50 年前，当时是作为一个数学的框架去研究孔状媒质的行为。它试图回答下面这些问题：- 如果一个石头变得潮湿了，水会渗过石头吗？- 如果一个材料包括 2 种成分，其中之一是完美绝缘体，**resistance** 是有限的概率是？- 一场森林大火蔓延到整个森林的概率？- 一种病毒全球传播的概率？- 大多数的网络连通的概率？

事实证明，当网络参数发生变化时，某些关键事件（如网络中存在巨大的连接组件）会突然出现。这种现象称为相变。在图形或网络的上下文中，渗流与连通性和覆盖率有关。这是本部分的其他两个主题。

9.2 什么是渗流？

渗流的基础模型是：二维的网格，即，图 $\mathbb{L}^2 \triangleq G(V, E)$ ，其中 $V = \mathbb{Z}^2, E = \{(x, y) \in V^2 : \|x - y\| = 1\}$ 。所以 $\deg v = 4 \quad v \in V$ 。现在，我们通过独立地以概率 $1 - p$ 移除每一条边，把格转为随机图。等价地，我们每条边保留下来的概率是 p 。这就是所谓的 **bond** 渗流模型。如果不是边而是顶点的情形，被称为 **site** 渗流模型。我们需要的其他的成分是连通分量。对于一般的图来说，连通分量的定义如下：

todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo

第 10 章 Bond percolation 和 site percolation

10.1 随机树和分支过程

在涉及到图和它们的性质的问题中，经常是有用的去首先考虑无环的图，即，树。

10.1.1 正则分支树的渗流

todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo

练习题

练习 10.1 考虑 2-branching 树（也被称为二叉树），具有二项分布的后代分布，确定 Percolation 的概率，并且画出来，找到 (10.4),(10.5),(10.6) 的临界指数 β, γ, δ

练习 10.2 展示二叉树的每一代中 (Z_n) 的成员数量的序列，从马尔可夫链条的角度去考虑，给出转移概率。

练习 10.3 对于【后代概率分布是均值为 λ 的 Poisson 分布】的分支过程，找到它灭绝的概率 η

练习 10.4 让 T 是分支过程的全体后代 (total progeny)，即，

$$T \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$$

让它的生成函数是 $G_T(s) = \mathbb{E}(s^T)$. 说明

$$G_T(s) = sG(G_T(s))$$

其中， $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$ 是后代分布的生成函数。

提示。首先建立，如果 $Z_1 = i$,

$$T \stackrel{d}{=} 1 + \sum_{k=1}^i T_k$$

其中， T_k 是 iid. 的随机变量，和 T 有相同的分布。

练习 10.5 对于一个平均后代为 $\mu < 1$ 的分支过程，说明，期望的总体后代是

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{1 - \mu}.$$

练习 10.6 使用随机游走解释递归公式 (10.3)

练习 10.7 确定 (渐进情形下)，图 10.17 中 lozenge lattice 的渗流阈值

练习 10.8 中枢边。考虑 \mathbb{L}^2 上一个 bond percolation 模型，事件 $A = \{o \leftrightarrow \partial B(1)\}$. 让四个边是 e_1, \dots, e_4 . 考虑一个显式的表达式，对于事件 W_i 使得：边 $e_i, i \in [4]$ 是中枢的，确定 $\mathbb{P}_p(W_i)$. 接着找到 $\mathbb{E}_p(N(A))$ 和 $\mathbb{E}_p(N(A) | A)$. 当 $p \rightarrow 0$ 的时候，这两个期望表现如何？这个行为是我们所预料到的吗？解释这个现象。

练习 10.9 Russo 公式。

练习 10.10 证明，对于 \mathbb{L}^2 上的 bond percolation， $p_c = p'_c$ 成立。其中，

$$p'_c = \sup\{p : \chi(p) < \infty\}$$

$\chi(p)$ 是原点处 component 的大小的期望值 (正如 10.1.4 节定义的那样)

练习 10.11 当证明 infinite components 数量不可能是无限的时候，我们使用了 trifurcations (三叉点) 的概念。对具有 three trifurcations 的 n ，在 diamond $S(n)$ 中画出一个 configuration. 指明这样的边界点，满足它们被假定认为和一个 infinite open cluster 连通。解释为什么 bifurcations (二叉) 不能得到这个结论。

第 11 章 随机几何图和连续渗流

11.1 导论

在这一章，我们介绍随机几何图（RGGs）作为之前章节考察过的 lattice model 的一般化。

RGG 的顶点嵌入在 \mathbb{R}^d ，边依赖于顶点的空间位置。

位置经常使用点过程建模，考虑顶点的位置确定性地或概率性地建立边。我们将会术语 vertex 和 point 作为等价术语。对于一个特定的图，我们将会限制渗流概率。因为顶点可以保证任意的位置在相同的空间（经常是 \mathbb{R}^d ，称为 continuum percolation。

定义 11.1

(基础随机几何图 RGG) 让 $\Phi = \{x_i\} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 (简单的) 点过程。对于每一个 (无序的) 点对 $\{x, y\} \subset \Phi$ ，独立地以概率 $\xi(x - y)$ 加入一条边，其中 $\xi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ 是 (translation-invariant) 连通函数。 ξ 的有效面积 (or volume) 是

$$A_\xi \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} \xi(y) dy$$

得到的图 $G = (\Phi, E)$ 是一个随机几何图。



因此在 RGG 里有两个随机因素，点的位置，以及边是否存在。点过程可以是 finite 或者 infinite。如果它是 finite，一个经常使用的模型是 (广义的) binomial 点过程，经常 on the unit cube $[0, 1]^d$ 。如果它是 infinite，典型的模型是 PPP (泊松点过程)。

todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo todo

练习题

🔴 练习 11.1 利用和 a Galton-Watson 分支过程的比较，找到 Gilbert 圆盘图的渗流概率 $\theta(r, \lambda)$ 的数值的界

🔴 练习 11.2 对于 Gilbert 随机图，说明 $p = n^{-1-1/k}$ 是出现 $k + 1$ 个节点的树的阈值函数

🔴 练习 11.3 在 Gilbert 随机图中，说明，如果 $np < 1$ ，包括顶点 1 的成分的期望大小的界是

$$\mathbb{E}|C(1)| \leq \frac{1}{1 - np}$$

🔴 练习 11.4 对于空时 SINR 图，找到一个顶点入度的上界，此上界仅依赖门限 θ

🔴 练习 11.5 确定空时圆盘干扰快照图中一个接收机的平均入度。一个发射机的出度由引理 11.19 确定。使相似的计算来找到一条“捷径”，这样你需要很少的计算来得到答案。

🔴 练习 11.6 对于 Poisson 隐私图，说明，入度 N_{in} 有矩生成函数 mgf

$$\mathbb{E}e^{tN_{in}} = \mathbb{E}(\exp(V(e^t - 1)/\lambda))$$

其中 V 是和强度为 1 的 PPP 典型点关联的 Voronoi cell 的体积。对于一维的例子，给出 mgf 的具体的表达式，并且确定 $\mathbb{P}(N_{in} = k)$

🔴 练习 11.7 对于 Poisson 隐私图上的 out-percolation，说明

$$\theta(\lambda) \leq \max\{0, 1 - \lambda\}$$

其中 $\theta(\lambda)$ 是 \vec{G}_λ 中原点属于一个无穷 out-component 的概率。

🔴 练习 11.8 对于无向 Poisson 隐私图 G_λ ，找到临界强度的上界。利用一个 face percolation argument。原点处的 component 是 finite 如果它被 circuit of closed faces 包围。定义 a face 是 closed，如果这个 configuration 包括监听

者, 满足 s it impossible for an edge to form from the inside of the circuit to the outside. 如果那个 configuration 以至少 $1/2$ 概率发生, o 处 component 是 finite a.s. 注意得到的界是相对弱的。

第 12 章 连通性

12.1 导论

在一些 case 中, percolation 渗流并不是充分的, 因为它仅仅保证无穷数量的节点在图或网络的某个地方连通。事实上, 连通节点的比例可能非常小; 很容易会出现: 大部分的节点和 the infinite component 不连通。连通性是一个更加严格的条件; 它要求所有节点都连接 almost surely。

因为连通性参数, 例如圆盘的半径, 经常是无穷的 (对于无穷图), 我们首先聚焦在 infinite graph, 比方说一个面积为 n 的方形区域, 接着研究图在 $n \rightarrow \infty$ 的连通性行为。

我们首先讨论的是随机梯格的连通性

12.1.1 随机梯格的连通性

我们也考虑网格 \mathbb{L}^2 上一个大小为 $n \times n$ 个顶点的盒子 $B(n)$ 。正如 bond percolation 中的那样, 每一条边以概率 p 发生。我们想要找到 p 要满足什么条件, 使得 $B(n)$ 的所有顶点是联通的, 在 $n \rightarrow \infty$ 的渐进情况下。我们建立了 \mathbb{L}^2 上 bond percolation 的临界概率 $p_c = 1/2$ 。会议 $\theta(p)$ 指代原点 o 属于 the infinite component 的概率。

如果 $p > 1/2$, 在网格上存在一个唯一的 infinite component, $B(n)$ 的每一个顶点以概率 $\theta(p)$ 连接上它。因此在 $B(n)$ 存在一个 component 具备 mean size $n^2\theta(p)$ 。事实上, 可以得到, 在极限 $n \rightarrow \infty$ 下, $\theta(p)$ 正好是 $B(n)$ 中连通节点的比例。

因此, 对于 full connectivity, 必须 $p \rightarrow 1$ 。问题是在 n 增长时, 大概要多大的 n 就基本满足。让 p 是 n 的函数, 平均孤立节点数量的渐进是

$$\mathbb{E}N_{\text{isol}}(n) \sim n^2(1-p(n))^4, \quad n \rightarrow \infty$$

因为每个 (内部的) 节点是以概率 $(1-p(n))^4$ 孤立的。边界节点是渐进可忽略的, 因为他们的数量是 $\Theta(n)$ 。选择

$$p(n) = 1 - \frac{c(n)}{\sqrt{n}}$$

导致 $\mathbb{E}N_{\text{isol}}(n) \sim c(n)^4$ 。所以对于连通性 $c(n) \rightarrow 0$ 是必须的。下面的定理给了一个更清晰的结果。

定理 12.1

(随机梯格中的孤立节点) 让 $\mathbb{E}N_{\text{isol}}(n)$ 是 $B(n)$ 中孤立节点的数量。那么 $\mathbb{E}N_{\text{isol}}(n)$ 收敛到一个均值为 M 的泊松随机变量, 当且仅当

$$n^2(1-p(n))^4 \rightarrow M, \quad n \rightarrow \infty$$



证明 我们使用所谓的 Chen-Stein 方法来展示孤立节点的数量在给定条件下收敛到一个泊松分布。我们要应用的特定结果如下

引理 12.1

(总共 variation distance 的 Chen-Stein 界) 让 $(A_i), i \in [n]$ 是指示随机变量的 collection。让 $S = \sum_{i=1}^n A_i$, 其中 $\mathbb{E}A_i = p_i$, 以及

$$M \triangleq \sum_{i=1}^n p_i$$

在 $M < \infty$ 的假设下。因此 $\mathbb{E}S = M$ 。那么, 如果 A_i 是随机变量 (X_k) 的增函数

$$\|S - \text{Poi}(M)\|_{\text{TV}} \leq \frac{1 - e^{-M}}{M} \left(\text{var } S - M + 2 \sum_{i=1}^n p_i^2 \right)$$

其中 $\text{Poi}(M)$ 是均值为 M 的泊松随机变量, $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ 是 total variation distance, 定义是

$$\|P - Q\|_{\text{TV}} \triangleq \sup\{Y \in \mathcal{F} : |\mathbb{P}(Q \in Y) - \mathbb{P}(P \in Y)|\}$$

对 2 个随机变量 P 和 Q 定义相同的概率空间 with σ -algebra \mathcal{F}



在我们的情况中, 潜在的独立随机变量 (X_k) 是

todo todo todo todo todo todo todo todo

练习题

练习 12.1 不使用本章的任何结果, 说明: 对于圆盘图,

$$\pi r^2(n) = 5\pi \log n$$

是 a.a.s. connectivity 的充分条件。

提示, 面积为 n 的方形区域的分拆为一些面积为 $\sqrt{\log n}$ 的方形区域。在每个方形上定义一个事件, 说明所有事件发生的概率趋于 1, 在 $n \rightarrow \infty$ 的条件下。接着证明这个联合事件表明: 在给定的 $r(n)$ 的条件下, 可以得到连通性。

练习 12.2 估计在定理 12.8 的下界的讨论中, "likely scenario for disconnectedness" 事件的概率。说明是 $k(n) > \log n/8$ 是必要的。

练习 12.3 考虑 1st 最近邻图, 顶点集为 Φ , 其中 Φ 是 \mathbb{R}^d 一个强度为 1 的 PPP。对于一般的维度数 d , 描述它的成分的性质。接管关注 $d = 1$ 的 case, 陈述典型成分的大小的分布。

练习 12.4 考虑一个 $\sigma^2 = 1/2$ 的高斯 PPP (见例子 2.2), 所以强度是 $(n/\pi)e^{-r^2}$ 。在原点加上一个点, 通过连接距离在 s 以内的 2 个点定义圆盘图。让 ρ 是最大的半径 u 使得所有的在 $b(o, u)$ 内部的点和 o 连接。说明, 假设 $Rs \ll 1$, 球 $b(o, R)$ 内的孤立节点数量可以近似为

$$\mathbb{E}N_{\text{isol}}(R) \approx \frac{\exp(-ns^2e^{-R^2}) - \exp(-ns^2)}{s^2}.$$

接着, 假设 $n \rightarrow \infty$ 以及 $n^{-1/2} \ll s \ll (\log n)^{-1/2}$, 说明

$$\rho \approx \log(ns^2/\log(1/s^2))$$

第 13 章 覆盖

13.1 导论

在几何的语境中和连通性相对的，是覆盖。这里我们假设一个随机集被附属到点过程的每一个点上，主要的问题是，是否所有这些随机集的并覆盖一个特定的目标区域（可能 \mathbb{R}^d ）。

在无线网路的上下文中，这样的问题在蜂窝系统中自然而然地被提出，那里的目标是：每个蜂窝基站或者传感器可以覆盖一定的区域（随机的），可能做到对我们感兴趣的区域的覆盖吗？

13.2 Germ-grain 模型和布尔模型

13.2.1 Germ-grain 模型

给出 germ-grain model 的定义。点过程的点 (germs) iid 的紧随机集 (grains) 每个点 (germ) 都有一个附属的区域 (grain)

定义 13.1

(Germ-grain 模型) 让 $\Phi = \{x_i\}$ 是 \mathbb{R}^d 上的点过程，称为 germs. (S_1, S_2, \dots) 是一系列随机非空集的 Collection，称为 grains。那么并

$$\Xi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} x_i + S_i$$

就是一个 germ-grain model。 $\Xi \subset \mathbb{R}^d$ 是占据区域， $\mathbb{R}^d \setminus \Xi$ 称为未占据区域，或者空区域。

$(x_i + S_i)$ 被称为覆盖过程。一块区域 S 附属在一个点 x 上，所以下标也可以写 x ，像下面这样：

$$\Xi = \bigcup_{x \in \Phi} x + S_x \subset \mathbb{R}^d$$

一个点 y 被称为被覆盖，如果 $y \in \Xi$ 。

如果集合 S_x 或者 S_i 是可数的， Ξ 是聚簇点过程，正如 3.4 节描述的那样， $|\mathcal{S}| = v_d(\mathcal{S}) = 0$ 。希望覆盖一个不可数的 \mathbb{R}^d 的子集，我们需要 $|\mathcal{S}| > 0$ 来取得正概率。

定义 13.2

(Vacancy) vacancy $V(\mathcal{R})$ 是未被覆盖区域 $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^d$ 的一部分的勒贝格测度

$$V(\mathcal{R}) \triangleq |\mathcal{R} \setminus \Xi| = \int_{\mathcal{R}} \chi(y) dy,$$


其他

$$\chi(y) = 1(y \notin \Xi) = \prod_i 1(y \notin S_i + x_i).$$

每个 Ξ 的联通子集形成了 component；在覆盖过程的语境中，components 也可以说成 clumps。

定义 13.3

我们说，一个集 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^d$ 被区域 Ξ 覆盖，如果 $\mathbb{P}(V = 0) = 1$

 **笔记** 条件 $\mathbb{P}(V = 0) = 1$ 并不指示 $\mathcal{R} \subset \Xi$ ，因为 \mathcal{R} 的一个低维度的子集可能被覆盖。所以，严格来说， $\mathbb{P}(V = 0) = 1$ 仅仅是 $\mathcal{R} \subset \Xi$ 的充分条件。然而，如果 grains S 是闭集，区域 \mathcal{R} 是一个有界开集，这两者是等价的，即， $\mathbb{P}(V = 0) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{R} \setminus \Xi = \emptyset$

除了覆盖的问题，一个重要的问题是：是否要去覆盖的区域包括一个无穷大小的 clump。如果确实如此，覆盖过程被称为 percolate。connectivity, coverage 和 percolation 的对应关系在 Box13.1 进行了总结。

大多数 tractable 的 germ-grain 模型是布尔模型，定义如下：

定义 13.4

(布尔模型) 一个布尔模型首先得是一个 germ-grain 模型，germ 点过程是 uniform PPP，grains S_i 是 iid. 的。

有时，germ-grain 模型中，germs 是来自 lattice 的，那么我们称这个模型是 lattice Boolean model。一个典型布尔模型的 case 是，grains 都是 iid. 的球。对此，重要的结果是：每一个位置被覆盖的次数是泊松随机变量。

定理 13.1

(布尔模型中的 vacancy and coverage) 在 PPP 具有强度 λ 的布尔模型中，一个位置没有被覆盖的概率是 $\exp(-\lambda\mathbb{E}|S|)$ ，它也是 \mathbb{R}^d 没有被占据的比例。紧接着，如果 $\mathbb{E}|S| < \infty$ ，那么 $\Xi \neq \mathbb{R}^d$ 。进一步，每一个 location 覆盖的次数是均值为 $\lambda\mathbb{E}|S|$ 的泊松随机变量。

证明 让 M 是原点被覆盖的次数

$$M = \sum_{x \in \Phi} 1(o \in x + S_x). \quad (13.1)$$

让 $F(y) = \mathbb{P}(y \in S)$ ，有 $\mathbb{E}|S| = \int_{\mathbb{R}^d} F(y)dy$ 。取期望，有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \Phi} \mathbb{E}(1(o \in x + S_x) \mid \Phi) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \Phi} F(-x) \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \lambda \int_{\mathbb{R}^d} F(-y)dy \\ &= \lambda \mathbb{E}|S| \end{aligned}$$

其中 (a) 是因为 Campbell 定理，定理 4.6；(b) 是因为如下的公式：

$$\mathbb{E}e^{t1(o \in x + S_x)} = 1 - F(-x) + e^t F(-x)$$

所以 M 的矩生成函数和泊松随机变量的矩生成函数形式一致，所以 M 服从泊松分布。这个定理的可以产生 the 1st and 2nd moments of the vacancy.

推论 13.1

(1st and 2nd moments of the vacancy) 对于布尔模型，vacancy 的前 2 个矩可以由下面给出

$$\mathbb{E}(V(\mathcal{R})) = |\mathcal{R}| \exp(-\lambda\mathbb{E}|S|)$$

以及

$$\mathbb{E}(V(\mathcal{R})^2) = \iint_{\mathcal{R}^2} \exp(-2\lambda\mathbb{E}|S| + \lambda\mathbb{E}(|(y_1 - y_2 + S) \cap S|)) dy_1 dy_2.$$

证明 均值的推导是

$$\mathbb{E}V = \int_{\mathcal{R}} \mathbb{P}(x \notin \Xi) dx = \int_{\mathcal{R}} \mathbb{E}\chi(x) dx = |\mathcal{R}| \exp(-\lambda\mathbb{E}|S|)$$

对于 2nd moment，推导是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V^2) &= \iint_{\mathcal{R}^2} \mathbb{P}(y_1 \notin \Xi, y_2 \notin \Xi) dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{\mathcal{R}^2} \mathbb{E}(\chi(y_1) \chi(y_2)) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\chi(y_1)\chi(y_2)) &= \mathbb{P}(\forall i: y_1 \notin x_i + S_i, y_2 \notin x_i + S_i) \\
&\stackrel{(a)}{=} \mathbb{P}(\forall i: x_i \notin y_1 - y_2 + S_i, x_i \notin S_i) \\
&= \mathbb{P}(\forall i: x_i \notin (y_1 - y_2 + S_i) \cup S_i) \\
&\stackrel{(b)}{=} \exp(-\lambda \mathbb{E}(|(y_1 - y_2 + S) \cup S|)) \\
&= \exp(-2\lambda \mathbb{E}|S| + \lambda \mathbb{E}(|(y_1 - y_2 + S) \cap S|))
\end{aligned} \tag{13.2}$$

其中 (a) 是因为平稳性, (b) 是因为定理 13.5

如果 $E(|S|) = \infty$, 那么: 如果 $\lambda > 0$, 即, 没有临界的密度, 那么每个 component 的 germ 数量是无穷的 a.s.。否则, 主要问题是: 是否 Ξ 中包括原点的 component, 无限的概率是正的。(假设原点是 PPP 的一部分); 以及, \mathbb{R}^d 是否被覆盖。对于圆盘图来说, 可以说明, the infinite component 是唯一的 a.s.。

13.3 具备固定圆盘的布尔模型

13.3.1 单个覆盖

研究最多的是: 把固定半径 r 的圆盘 (或者球) 当作 grain 的布尔模型。在这个 case 中, 我们写作 $\Xi = \Phi \oplus S$, 这个覆盖过程和 Gilbert 圆盘图等价。事实上, 从圆盘图, 我们立马可以得到 coverage percolation problem: 如果 $r > r_c/2$, 其中 r_c 是圆盘图上渗流的临界半径, 布尔模型有一个 infinite component, since then 覆盖过程的 2 个圆盘重叠如果他们的顶点在圆盘图中连通。

这个模型的一个基础的应用是, 传感器网络。如果传感器能够检测半径 r 以内的事件, Ξ 是传感器网络覆盖的区域。Figure 13.1 展示了这些布尔模型的 2 个例子。

我们关心于: 在半径为 r 的圆盘上, 面积为 a 的方形区域, 在 $n \rightarrow \infty$ 的时候被覆盖 a.s., 需要的条件是什么。我们通过三步来解决这个问题。首先我们找到一个仅仅依赖 mean vacancy 的必需的条件。第二步, 我们使用 vacancy 的方差来在必需条件的基础上进行改善。第三步, 我们展示这个第二必要条件也是必要的。

平面覆盖的第 1 必要条件

考虑 2 维的例子, 最基础的问题是, r 需要多大来为了保证整个平面被覆盖, 因为我们可能总是放缩 λ 和 r 同时保持 λr^2 为常数, 不失一般性, 我们固定 $\lambda = 1$ 。

原点没被覆盖的概率是 PPP 中没有点在距离 r 以内, 即,

$$\mathbb{E}_\chi(o) = \exp(-\pi r^2)$$

这对 \mathbb{R}^2 中的所有点都成立, 所以面积 n 的方形区域的期望 vacancy 是

$$\mathbb{E}V([0, \sqrt{n}]^2) = \mathbb{E}|[0, \sqrt{n}]^2 \setminus \Xi| = n \exp(-\pi r^2)$$

这也可以从 Corollary 13.6 得到。

覆盖的一个必要条件是: 当 $n \rightarrow \infty$ 的时候, $\mathbb{E}V([0, \sqrt{n}]^2) \rightarrow 0$. 这由下面这个式子保证:

$$\pi r^2 = \log n + \omega(1), \quad n \rightarrow \infty, \tag{13.3}$$

它也是连通性的相同的条件。然而, $\mathbb{E}V \rightarrow 0$ 对于覆盖来说并不充分, 因为它并没有保证 $\mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 1$. 这个 non-implication $\mathbb{E}V(n) \rightarrow 0 \not\Rightarrow \mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 1$ 为这个事实提供了例子: 均值的收敛并不能表明 a.s. 的收敛。

平面覆盖的第 2 必要条件

$\mathbb{P}(V = 0)$ 的边界可以得到, 如果 vacancy 的 2nd moment (或者方差) 也成为已知的。写 $V = V1(V > 0)$, 应用 Cauchy-Schwartz 不等式, 我们有

$$\mathbb{E}V = \mathbb{E}(V1(V > 0)) \leq (\mathbb{E}(V^2) \mathbb{P}(V > 0))^{1/2},$$

因此

$$\mathbb{P}(V > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}V)^2}{\mathbb{E}(V^2)} = 1 - \frac{\text{var } V}{\mathbb{E}(V^2)} \implies \mathbb{P}(V = 0) \leq \frac{\text{var } V}{\mathbb{E}(V^2)} \quad (13.4)$$

因此我们需要去计算方差，我们可以使用 Corollary 13.6 来计算方差，vacancy 的协方差可以从 (13.2) 算出，为

$$\text{cov}(\chi(y_1)\chi(y_2)) = \exp(-2\lambda\mathbb{E}|S|)(\exp(\lambda\mathbb{E}(|(y_1 - y_2 + S) \cap S|)) - 1)$$

因此，

$$\begin{aligned} \text{var } V(\mathcal{R}) &= \iint_{\mathcal{R}^2} \text{cov}(\chi(x_1), \chi(x_2)) dx_1 dx_2 \\ &= \exp(-2\pi r^2) \iint_{\mathcal{R}^2} (\exp(|b(o, r) \cap b(y_1 - y_2, r)|) - 1) dy_1 dy_2 \\ &\sim |\mathcal{R}| e^{-2\pi r^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\exp(|b(o, r) \cap b(y, r)|) - 1) dy \quad \text{as } |\mathcal{R}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

因为渐进地，边界影响消失了。2 个半径为 r 的圆盘在距离 h 的交区域，

$$A(h) = 2r^2 \arccos\left(\frac{h}{2r}\right) - \frac{h}{2} \sqrt{4r^2 - h^2}, \quad h < 2r.$$

因此

$$\text{var } V(\mathcal{R}) \sim |\mathcal{R}| e^{-2\pi r^2} 2\pi \int_0^{2r} h (e^{A(h)} - 1) dh$$

因为 $A(h) \geq \pi r^2 - 2rh$ ，积分是紧的下界，

$$\int_0^{2r} h (e^{A(h)} - 1) dh > \int_0^{\pi r/2} h (e^{\pi h^2 - 2hr} - 1) dh$$

因此，

$$\begin{aligned} \text{var } V(\mathcal{R}) &\gtrsim |\mathcal{R}| e^{-2\pi r^2} 2\pi \int_0^{2r} h (e^{\pi h^2 - 2hr} - 1) dh \\ &= |\mathcal{R}| \pi e^{-\pi r^2} \frac{2 - e^{-\pi r^2} (\pi^2 r^4 + 2\pi r^2 + 2)}{4r^2}, \end{aligned}$$

其中 \gtrsim 表示渐进意义下的不等关系。为了得到上界，我们注意到 $A(h) \leq \pi r^2 - \pi r h/2$ (for $h \leq 2r$)，这导致

$$\text{var } V(\mathcal{R}) \lesssim |\mathcal{R}| 4e^{-\pi r^2} \frac{2 - e^{-\pi r^2} (\pi^2 r^4 + 2\pi r^2 + 2)}{\pi r^2}$$

所以有一个常数因子 $16/\pi^2$ 在两个渐进的界之间，我们有

$$\text{var } V([0, \sqrt{n}]^2) = \Theta\left(n \frac{e^{-\pi r^2}}{r^2}\right), \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

当 $n \rightarrow \infty$ 的时候，必须地 $r \rightarrow \infty$ 来期望得到覆盖，因此我们已经丢弃了方差的界的所有小项。

结果是，(13.4) 中 $\mathbb{P}(V > 0)$ 的下界需要为 0，来保证收敛，即， $(\mathbb{E}V)^2/\mathbb{E}(V^2) \rightarrow 0$ 。因为 $(\mathbb{E}V)^2 = n^2 e^{-2\pi r^2}$ ，条件是

$$\frac{(\mathbb{E}V)^2}{\text{var } V + (\mathbb{E}V)^2} \rightarrow 0 \iff nr^2 e^{-\pi r^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

由于因子 r^2 的存在，有一个比 (13.3) 更加限制性的必要的条件。令 $\pi r^2 = \log n + \log \log n + c$ ，我们有 $nr^2 e^{-\pi r^2} \rightarrow e^{-c/\pi}$ ，所以我们需要将常数 c 替换为一个满足 $\omega(1)$ 的函数，即，对于平面被覆盖，我们的新的必须条件是

$$\pi r^2 = \log n + \log \log n + \omega(1) \quad (13.5)$$

平面被覆盖的充要条件

为了展示这个更加紧的必要条件 (1.35) 也是充分的，我们使用 Gilbert 对 open disk 这个 case 的一个观察：面积为 n 的方形区域被覆盖，如果圆盘边界的所有的交集被覆盖，磁盘边界和面积 n 的正方形区域边界之间的所有交点也是如此。

如果圆盘是 closed, 结果是相同的, 但是 Gilbert 条件的方程是很不优雅的, 因为圆盘的所有交, 现在不得被覆盖 3 次 (他们已经被 2 个形成交的圆盘覆盖过了, 但是还要被 another disk 覆盖), 而盘边界和边界之间的交点需要被覆盖两次 (它们已经被引起交点的盘覆盖了一次, 并且需要被另一个盘覆盖)。图 13.2 显示了购买力平价在单位正方形和半径为 r 的圆及其交点上的两种实现。

使用 Gilbert 的观察, 我们得到结论如下:

- 1. 对于一个半径为 r 的圆盘, 交的密度是 $4\pi r^2$, 因为盘边界在距离 $2r$ 内与每个盘边界相交
 - 2. 在面积 n 的方形区域的交的期望次数是 $4\pi r^2 n$
 - 3. 为了覆盖, 每一个交需要存在有一个 PPP 的点距离小于 r
 - 4. 交没有被覆盖的平均次数, 是 $4\pi r^2 n e^{-\pi r^2}$, 如果 (13.5) 成立, 它将会变成 0。所以这个条件也是充分的。
- 现在我们考虑多覆盖的 case。

13.3.2 多覆盖

这里我们需要平面的每个位置都被覆盖至少 k 次。Gilbert 的条件以一种直接的方式广义化到 k -coverage: 每一个圆盘边界的交必须被覆盖 k 次。

正如单覆盖的 case 里讨论的那样, 充要条件是: 交被覆盖 $k-1$ (或者更少) 次的个数的平均 I_{k-1} , 变为 0:

$$\mathbb{E}(I_{k-1}) \sim 4\pi r^2 n \exp(-\pi r^2) \frac{(\pi r^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

定理 13.2

(固定圆盘们的 k -coverage 的条件) 对于 $\mathbb{P}(V([0, \sqrt{n}]^2) = 0) \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$, 即, k -coverage, 它的充要条件是:

$$\pi r^2 = \log n + k \log \log n + \omega$$

证明 对于 $\pi r^2 = \log n + k \log \log n + c$, $\mathbb{E}(I_{k-1}) \rightarrow e^{-c} \pi^{-k}$

正如连通性问题那样, k -coverage 需要一个比 Single coverage 稍大的半径。

通过更多的努力, 可以得到, 对于 $\pi r^2 = \log n + k \log \log n + c$

$$\mathbb{P}(V([0, \sqrt{n}]^2) = 0) \rightarrow \exp\left(-\frac{e^{-c}}{\Gamma(k)}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

这个结果的证明背后的想法是: 观察到, 未覆盖区域基本上形成了它们自己的均值 $e^{-c}/\Gamma(k)$ 泊松过程。为了使得这些启发性的结果 (heuristics) 更加严格, 我们需要用到 the Chen-Stein 方法。

13.4 应用

覆盖过程在无线网络中的经典应用当然是传感器网络。对于这个问题, 之前节得到的结果是直接可应用的。这里我们讨论远在布尔模型之上的 3 个应用。

13.4.1 无线网络中的 SINR 覆盖

让 $\Phi = \{x_i\} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个点过程, 用 $I^x(y)$ 表示位置 y 处的干扰, 如果 $x \in \Phi$ 是关心的发射机, 即,

$$I^x(y) = \sum_{z \in \Phi \setminus \{x\}} h_{zy} \ell(\|z - y\|)$$

其中 h_{zy} 是 z 和 y 之间的衰落。我们定义位置 y 处的干扰:

$$\text{SINR}(x, y) = \frac{h_{xy} \ell(\|x - y\|)}{W + I^x(y)}$$

其中 W 是热力学噪声功率。发射机 x 的覆盖蜂窝包括所有这样的位置，在其中 x 为关心发射机的 SINR 等于或大于阈值 θ ：

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^2 : \text{SINR}(x, y) \geq \theta\}$$

由于衰落，蜂窝非常可能是 disconnected 的。SINR 覆盖过程是

$$\Xi_{\text{SINR}} = \bigcup_{x \in \Phi} S_x$$

如果 $\theta \geq 1$ ，每一个位置不能被超过一个发射机覆盖，当然并不能是最近的那个。

无噪声覆盖

如果 Φ 是一个强度为 λ 的 uniform PPP，衰落是 iid. 的瑞利衰落，路径损失指数是 α ， $W = 0$ ，那么位置 y 被发射机 x 覆盖的概率 $p_x(y)$ ，可以从 Section 5.2 中成功概率推导出：

$$p_x(y) = \exp(-\lambda\pi\theta^\delta\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\|x-y\|^2)$$

其中 $\delta = 2/\alpha$ 。如果 $\theta \geq 1$ ， $p_x(y)$ 是被覆盖的区域部分，我们得到了平均的覆盖蜂窝大小

$$\mathbb{E}|S| = \int_{\mathbb{R}^2} p_o(y) dy = \frac{1}{\lambda\theta^\delta\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)}.$$

没有干扰和噪声，当路径损失指数 α 增加的时候，覆盖蜂窝收敛到 Voronoi 蜂窝图

无干扰的覆盖没有 interference，所以现在就是 SNR 覆盖过程，它是一个布尔模型 (如果 Φ 是一个 PPP 的话)。没有衰落，SNR cell 仅仅是一个半径为 $(\theta W)^{-1/\alpha}$ 的圆盘，因为

$$\frac{\|x-y\|^{-\alpha}}{W} \geq \theta \iff \|x-y\| < \frac{1}{(\theta W)^{1/\alpha}}.$$

所以 $|S| = \pi(\theta W)^{-\delta}$ 。噪声功率和 SNR 门限应该被单个参数替代。使用发射功率 P 和【将噪声功率从 W 改成 $W' = W/P$ 】等价。在这个 case 中，我们可以使用 Section 13.3 的结果，来找到关于 P 的条件，来使一个大的区域被覆盖。由于瑞利衰落，我们有

$$\mathbb{P}(\text{SNR} \geq \theta) = \mathbb{P}\left(\frac{h\|x-y\|^{-\alpha}}{W}\right) = \exp(-\theta W\|x-y\|^\alpha)$$

以及

$$\mathbb{E}|S| = \frac{\pi\Gamma(1+\delta)}{(\theta W)^\delta}$$

在非衰落情况下按小区大小归一化：

$$\frac{\mathbb{E}|S|}{\pi(\theta W)^{-\delta}} = \Gamma(1+\delta)$$

这表明了瑞利衰落会减少平均蜂窝大小，如果 $\alpha > 2$ ，因为： $\Gamma(1+\delta) < 1$ 如果 $\delta < 1$ 。

噪声和干扰都考虑，计算覆盖

瑞利衰落下，噪声和衰落都考虑，覆盖概率是

$$p_o(y) = \exp(-\theta W\|y\|^\alpha - \lambda\pi\theta^\delta\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\|y\|^2).$$

对于 $\delta = 1/2$ 这是可积的，但是得到的结果是很丑陋的 unwieldy。

13.4.2 最近邻发射机的 SIR 覆盖

这里我们考虑一个之前模型的轻微改动版本，其中关心的发射机并没有确定性给出，而是选择为最近的一个发射机，这里假设在距离 R 处。假设接收机在原点 o ，因为现在圆盘 $b(o, R)$ 被保证没有干扰器，这将导致干扰引起很大的改变。所以，对于 iid 的随机变量 h_x ，干扰是：

$$I = \sum_{x \in \Phi \setminus b(o, R)} h_x \ell(x)$$

再一次我们关注这样的 case，强度为 λ 的 PPP 的发射机在平面上，对于关心的信号和干扰，衰落都是瑞利衰落。噪声被忽略。

为了找到干扰 R 的拉普拉斯变换，我们可以遵循 Section 5.1.7 的步骤，只不过现在 $b(o, R)$ 是空的。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I(s | R) &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi \setminus b(o, R)} \mathbb{E}_h \left(e^{-sh\ell(x)} \right) \\
&= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi \setminus b(o, R)} \frac{s\ell(x)}{1 + s\ell(x)} \\
&\stackrel{(a)}{=} \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2 \setminus b(o, R)} \frac{1}{1 + s\ell(x)} dx \right) \\
&= \exp \left(-2\pi\lambda \int_R^\infty \frac{rs}{s + r^\alpha} dr \right) \\
&= \exp \left(\pi s^\delta \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta) - \pi R^2 H_\delta(R^\alpha/s) \right),
\end{aligned}$$

其中 (a) 是因为 pgfl, $\delta = 2/\alpha$, H_δ 是高斯双曲函数

$$H_\delta(x) \triangleq {}_2F_1(1, \delta; 1 + \delta; -x)$$

利用 H_δ , 从 0 到 R 的 “complementary integral” 可以表示成

$$\int_0^R \frac{rs}{s + r^\alpha} dr = \frac{R^2}{2} H_\delta(R^\alpha/s).$$

o 被最近邻发射机 (距离 R 处) 覆盖的概率因此是

$$\begin{aligned}
p_o(R) &= \mathbb{P}(hR^{-\alpha} > \theta I) \\
&= \mathcal{L}_I(\theta R^\alpha) \\
&= \exp \left(-\lambda \pi R^2 (\theta^\delta \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta) - H_\delta(1/\theta)) \right).
\end{aligned}$$

因为 R 是 PPP 中最近邻的距离，它的概率分布是 $f_R(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}$ ，覆盖的概率是

$$\begin{aligned}
p_o &= \mathbb{E}(p_o(R)) \\
&= \frac{1}{1 + \theta^\delta \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta) - H_\delta(1/\theta)}
\end{aligned}$$

对于 $\alpha = 4$, 因为 $H_{1/2}(1/\theta) = \sqrt{\theta}$, 我们得到覆盖概率 p_o 的简单的闭形式

$$p_o = \frac{1}{1 + \sqrt{\theta}(\pi/2 - \arctan(1/\sqrt{\theta}))}. \quad (13.6)$$

13.4.3 隐私覆盖？隐秘覆盖？

隐私图，（包括一些边，在那些边上安全通信是可行的），首次在 11.4.3 节提出。这里我们研究对应的覆盖问题。

基站和窃听器在平面上随机分布，基站可以覆盖蜂窝区域，并且基站可以覆盖半径由到最近的窃听者的距离确定的圆形区域。虽然这些假设导致了分析上的可处理性模型，它们非常逼真。事实上，蜂窝网络正在经历从精心规划的基站部署到不定期部署的重大转变包括微型基站和毫微微小区的异构基础设施。即使如果没有这样小的基站，可以认为从随机模型的精度与基于晶格的模型相同或更好基站模型，见图. 7.1 和 7.2。

虽然这些假设导致了分析上的可处理性模型，它们非常逼真。事实上，蜂窝网络正在经历从精心规划的基站部署到不定期部署的重大转变包括微型基站和毫微微小区的异构基础设施。即使如果没有这样小的基站，可以认为从随机模型的精度与基于晶格的模型相同或更好基站模型，见图. 7.1 和 7.2。

我们假定基站和窃听器来自独立的强度为 1 和 λ 的 PPP，对应地，在 \mathbb{R}^d 中，它们分别是 Φ 和 Ψ 。一个 $\lambda = 0.1$ 的例子在图 13.3 中展示。

该覆盖率模型的行为与相应的（具有相同分布的独立盘半径）的模型完全不同，如果 radii 是独立的，我们从式子 (13.5) 中知道

$$\mathbb{E}(\pi R^2) = (1 + \epsilon) \log n$$

是【渐进覆盖一个面积为 n 的方形】充分条件（对于任意 $\epsilon > 0$ ）。在隐私覆盖的 case 中， $\mathbb{E}(\pi R^2) = 1/\lambda$ ，所以 the radii 是独立的，

$$\lambda = [(1 + \epsilon) \log n]^{-1}$$

是充分的，为了覆盖， λ 随着 n 对数趋势减少。由于依赖性（一个监听者可能确定一些近邻的覆盖圆盘的半径）， λ 下降得如此之快，大概是一个 $n^{-1/d}$ 的趋势。

一维中的隐私覆盖

我们确定线段的覆盖比例 $\mathbb{P}(o \in \Xi) = 1 - \mathbb{E}\chi(o)$

定理 13.3

（一维中的隐私覆盖）覆盖的线段的比例是

$$\mathbb{P}(o \in \Xi) = \frac{1 + 4\lambda}{(1 + 2\lambda)^2}$$



证明 让 L 是【 o 被一个 o 左侧的点覆盖】事件。让 R 是【 o 被一个 o 右侧的点覆盖】事件。事件 L 和 R 是独立的，

$$\mathbb{P}(o \in \Xi) = 1 - (1 - \mathbb{P}(L))(1 - \mathbb{P}(R)) = 1 - (1 - \mathbb{P}(R))^2 = 2\mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(R)^2$$

具有对称性。事件 R 发生，如果，对于某个 $t > 0$ ， Φ 中最近的点 (a legitimate node) 在距离 t ，没有 Ψ (监听者) 中的点在 $[0, 2t]$ 。因此

$$\mathbb{P}(R) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-2\lambda t} dt = \frac{1}{2\lambda + 1}$$

所以长度为 n 的区间的期望的 vacancy，是

$$\mathbb{E}V([0, n]) = n\mathbb{E}\chi(o) = n(1 - \mathbb{P}(o \in \Xi)) = \frac{4\lambda^2 n}{(1 + 2\lambda)^2}$$

为了达成对实线的覆盖 ($n \rightarrow \infty$)，我们因此需要 $\lambda^2 n \rightarrow 0$ 。一个更加细节化的分析展示出，如果 $n \rightarrow \infty$ ， $\mathbb{P}(V = 0) \sim e^{-4n\lambda^2}$ 。所以，对于覆盖，尺度缩放条件事实上是 $\lambda = \lambda(n^{-1/2})$ 。如果 $n\lambda^2 \rightarrow \infty$ ， $\mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 0$ ；如果 $n\lambda^2 \rightarrow 0$ ， $\mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 1$ 。

2 维中的隐私覆盖

2 维的 case 要更加复杂。自然的推论是：关键缩放是 $\lambda = \lambda(n^{-1/3})$ 。事实上，可以发现，如果 $n\lambda^3 \rightarrow \infty$ ， $\mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 0$ 。传统上，最著名的结果是

$$n(\log n)^3 \lambda^3 \rightarrow \infty \implies \mathbb{P}(V = 0) \rightarrow 1$$

和 $\lambda = o(n^{-1/3}(\log n)^{-1})$ ，所以有一个对数 gap。

13.4.4 哨兵选择

哨兵选择问题是从能量有效传感器网络中一个实用 issue 抽象出来的。一个感兴趣的区域 \mathcal{R} 被认为是 k -covered (每个 $k \in \mathcal{R}$ 被至少 k 个传感器覆盖)，这 k 个传感器可以被 k 种颜色以某种方式染色，使得 \mathcal{R} 被指定颜色的传感器子集所覆盖吗？如果是这种情况，那么可以将时间划分为帧，使得在帧 i 中，只有颜色 $1 + \text{mod}(i, k)$ 的节点处于活动状态，而其他节点可以休眠以节省能量，同时仍然保证始终覆盖。

因为 k -coverage 是可以以一些小代价达成的（传感器感知半径 r 的略微增长——看定理 13.7），可以预期显著的能量增益 & 前提是提供 k 覆盖的传感器可以被划分为 k 个单个覆盖。

明显地，这一般是不可能的，很容易构造一个 k -cover 的反例，其中 k -cover 并不是可分的。

例题 13.1 让 $n = 4, k = 2, \{1, 2, 3, 4\}$ 的大小为 2 的子集构成的集合有 6 个元素，

$$\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

那么让

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}, \\ S_2 &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ S_3 &= \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}, \\ S_4 &= \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}. \end{aligned}$$

S 的每一个元素在 S_1, S_2, S_3, S_4 只出现 2 次, 但是不能将 S_i 分割成 2 个单独的覆盖。

具体的设置是: 一个强度为 1 的传感器节点的 PPP, 一个感兴趣的区域 $\mathcal{R} = [0, \sqrt{n}]^2$ 。假设每个传感器可以覆盖一个半径为 r 的圆盘, 让 Ξ 是得到的布尔模型。让 C_k 标示 \mathcal{R} 被 k -覆盖的事件。我们知道, k -覆盖可以渐进得到, 如果 $\pi r^2 = \log k \log \log n + \omega(1)$ 。让 P_k 是 Ξ 是 k -partitionable 的事件。那么

$$\mathbb{P}(C_k \setminus P_k) \leq \frac{c_k}{\log n}$$

因此, 如果 $\mathbb{P}(C_k) = \Theta(1)$, 那么当 $n \rightarrow \infty$ 的时候, 条件概率 $\mathbb{P}(P_k | C_k) = 1 - o(1)$ 。严格的证明是很长的。已经被知道: k -partitionability 的“障碍”, 正如图 13.4 中展示的那样, 当 $n \rightarrow \infty$ 的时候以接近 0 的概率发生。所以渐进上, k -覆盖可以被分拆 almost surely. 提出的哨兵选择方案是可以 work 的。

一个更加简单的方式是: 验证一个随机染色是否可以以正概率达到 partition. 这是“概率方法”的一个应用。这个方法, 和 Lovasz 局部定理一样, 产生想要的结果如果每处覆盖的等级是 $3k \log \log n$ 的。

这个证明方法并不是构造的, 即, 如果找到这样的染色仍然是开放问题。事实上, 传感器节点应该通过使用单独局部知识来选择一个颜色。对于覆盖过程更具体的介绍可以在 Hall(1985) 的著作中找到。在第 4 章 Stoyan et al.(1995) 的部分, 以及第 3 章到第 5 章的 Meester&Roy(1996) 的部分, 我们介绍了他们是怎么研究布尔模型的。概率方法是 Alon&Spencer(2008) 的研究对象。

SINR 覆盖在第二部分的 Baccelli & Blaszczyzyn (2009) 被讨论。最近邻发射机覆盖的 case 在 Andrews et al. (2011) 得到了详细分析。拓展到 multi-tier 异构网络的 case 在 Dhillon et al. (2012) 被研究。

在 Sarkar & Haenggi (2012) 中, 隐私覆盖的问题被引入和研究关于哨兵选择的主要的结果由 Balister et al. (2010). 给出。

练习题

练习 13.1 让 Φ_1, Φ_2, \dots 是 \mathbb{R} 上的独立的强度为 λ 的均匀 PPP, 让 $1 \geq t_1 \geq t_2, \dots$ 是收敛到 0 的正数序列。

$$\Xi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in \Phi_i} (x, x + t_i),$$

其中 $(x, x + t_i) \subset \mathbb{R}$ 是从 x 到 $x + t_i$ 的开区间, 让 $V = V(\mathbb{R}) = |\mathbb{R} \setminus \Xi|$ 是这个模型的 vacancy. 未覆盖的集合 $\mathbb{R} \setminus \Xi$ 被称作随机康托集。找到位置 $y \in \mathbb{R}$ 没有被 Ξ 覆盖的概率, 给出要使 $\mathbb{P}(V = 0)$ 成立, 关于序列 (t_i) 的充分条件和必要条件。

练习 13.2 对于具有半径 r 的固定圆盘的布尔模型的单个覆盖, 找到关于 $r(n)$ 需要满足的条件, 可以使得, vacancy $V = V([0, \sqrt{n}]^2)$, 平均趋于 0, 但是 $V = 0$ 的概率并不是 1。即,


$$\mathbb{E}(V) \rightarrow 0 \text{ but } \mathbb{P}(V = 0) \not\rightarrow 1$$

有一个 $r(n)$ 可以使得 $\mathbb{E}(V) \rightarrow 0$ 并且 $\mathbb{P}(V = 0) = 0$ 吗?

练习 13.3 Stienen 模型是一个二维的覆盖过程, 其中 germs 来自均匀 PPP, grains 是半径是【最近邻距离一般】的圆盘。给出 Stienen 模型的一个在 $[0, 5]^2$ 的实现, 其中 PPP 的强度是 1。确定模型的覆盖面积比例。

练习 13.4 在标准布尔模型 (germs 来自 PPP) 中, 巨大成分是唯一的如果它存在。通过反例表明, 在顶点形成固定晶格的模型中, 这并不一定正确。

练习 13.5 对于在 13.4.2 节讨论的最近邻发射机覆盖问题, 找到 $\alpha = 4$ 时的覆盖概率。正如 (13.6) 那样, 但是考虑噪声。

 **练习 13.6** 一维中的隐私覆盖。考虑两个窃听者之间的典型到达间隔。根据窃听者 PPP 的强度，找出该间隔被覆盖的概率。提示：首先说明间隔的覆盖范围仅取决于间隔中点附近两点的位置。

todo todo todo todo todo todo todo

第 14 章 占位章节

14.1 我也不想写啊，只有个章节标题，目录会把这一章忽略掉啊

为什么啊

为什么有时候我要 XeLaTeX 编译两次才能显示正确的目录???

14.1.1 用作 subsection 的占位符

爷的目录为什么显示不全？

14.2 用作 section 的占位符 1

爷的目录为什么显示不全？

14.2.1 用作 subsection 的占位符 1

爷的目录为什么显示不全？你到底会不会做 L^AT_EX 模板啊，\section*在章节里看没有序号，但是在目录中是有序号的啊，书签中也是有序号的啊???

测试代码环境

```
## 练习使用collections模块的Counter

from collections import Counter
class Solution:
    def findJudge(self, n: int, trust: List[List[int]]) -> int:
        tmp1=map(lambda x:x[0],trust)
        outDgree=Counter(tmp1)
        tmp2=map(lambda x:x[1],trust)
        inDgree=Counter(tmp2)
        for i in range(1,n+1,1):
            if inDgree[i]==n-1 and outDgree[i]==0:
                return i
        return -1
```

第 15 章 Elegant \LaTeX 系列模板介绍

Elegant \LaTeX 项目组致力于打造一系列美观、优雅、简便的模板方便用户使用。目前由 **ElegantNote**, **Elegant-Book**, **ElegantPaper** 组成, 分别用于排版笔记, 书籍和工作论文。强烈推荐使用最新正式版本! 本文将介绍本模板的一些设置内容以及基本使用方法。如果您有其他问题, 建议或者意见, 欢迎在 **GitHub** 上给我们提交 **issues** 或者邮件联系我们。

我们的联系方式如下, 建议加入用户 **QQ** 群提问, 这样能更快获得准确的反馈, 加群时请备注 \LaTeX 或者 Elegant \LaTeX 相关内容。

- 官网: <https://elegantlatex.org/> (暂时歇业)
- GitHub 地址: <https://github.com/ElegantLaTeX/>
- Gitee 地址: <https://gitee.com/ElegantLaTeX>
- CTAN 地址: <https://ctan.org/pkg/elegantbook>
- 下载地址: 正式发行版, 最新版
- 微博: Elegant \LaTeX (密码有点忘了)
- 微信公众号: Elegant \LaTeX (不定期更新)
- 用户 **QQ** 群: 692108391 (建议加群)
- 邮件: elegantlatex2e@gmail.com

15.1 模板安装与更新

你可以通过免安装的方式使用本模板, 包括在线使用和本地(文件夹内)使用两种方式, 也可以通过 \TeX 发行版安装使用。

15.1.1 在线使用模板

我们把三套模板全部上传到 **Overleaf** 上了, 网络便利的用户可以直接通过 **Overleaf** 在线使用我们的模板。使用 **Overleaf** 的好处是无需安装 \TeX Live, 可以随时随地访问自己的文件。查找模板, 请在 **Overleaf** 模板库里面搜索 **elegantlatex** 即可, 你也可以直接访问[搜索结果](#)。选择适当的模板之后, 将其 **Open as Template**, 即可把模板存到自己账户下, 然后可以自由编辑以及与他人一起协作。更多关于 **Overleaf** 的介绍和使用, 请参考 **Overleaf** 的[官方文档](#)。

15.1.2 本地免安装使用

免安装使用方法如下: 从 **GitHub** 或者 **CTAN** 下载最新版, 严格意义上只需要类文件 **elegantbook.cls**。然后将模板文件放在你的工作目录下即可使用。这样使用的好处是, 无需安装, 简便; 缺点是, 当模板更新之后, 你需要手动替换 **cls** 文件。

15.1.3 发行版安装与更新

本模板测试环境为

1. Win10 + \TeX Live 2022;
2. Ubuntu 20.04 + \TeX Live 2022;
3. macOS Monterey + Mac \TeX 2022。

\TeX Live/Mac \TeX 的安装请参考[啸行的一份简短的关于安装 \$\text{\LaTeX}\$ 安装的介绍](#)。

安装 \TeX Live 之后，安装后建议升级全部宏包，升级方法：使用 `cmd` 或 `terminal` 运行 `tlmgr update --all`，如果 `tlmgr` 需要更新，请使用 `cmd` 运行 `tlmgr update --self`，如果更新过程中出现了中断，请改用 `tlmgr update --self --all --reinstall-forcibly-removed` 更新，也即

```
tlmgr update --self
tlmgr update --all
tlmgr update --self --all --reinstall-forcibly-removed
```

更多的内容请参考 [How do I update my \$\text{\TeX}\$ distribution?](#)

15.1.4 其他发行版本

由于宏包版本问题，本模板不支持 $\text{CT}_{\text{E}}\text{X}$ 套装，请务必安装 TeX Live / MacTeX 。更多关于 \TeX Live 的安装使用以及 $\text{CT}_{\text{E}}\text{X}$ 与 \TeX Live 的兼容、系统路径问题，请参考官方文档以及嘨行的一份简短的[关于安装 \$\text{\LaTeX}\$ 安装的介绍](#)。

15.2 关于提交

出于某些因素的考虑， $\text{Elegant}\text{\LaTeX}$ 项目自 2019 年 5 月 20 日开始，不再接受任何非作者预约性质的提交（pull request）！如果你想改进模板，你可以给我们提交 issues，或者可以在遵循协议（LPPL-1.3c）的情况下，克隆到自己仓库下进行修改。

第 16 章 ElegantBook 设置说明

本模板基于基础的 book 文类，所以 book 的选项对于本模板也是有效的（纸张无效，因为模板有设备选项）。默认编码为 UTF-8，推荐使用 TeX Live 编译。

16.1 语言模式

本模板内含两套基础语言环境 `lang=cn`、`lang=en`。改变语言环境会改变图表标题的引导词（图，表），文章结构词（比如目录，参考文献等），以及定理环境中的引导词（比如定理，引理等）。不同语言模式的启用如下：

```
\documentclass[cn]{elegantbook}
\documentclass[lang=cn]{elegantbook}
```

除模板自带的两套语言设定之外，由网友提供的其他语言环境设置如下：

- 由 VincentMVV 提供的意大利语翻译 `lang=it`，相关讨论见 [Italian translation](#)；
- 由 abfek66 提供的法语翻译 `lang=fr`，相关讨论见 [Italian translation](#)；
- 由 inktvis75 提供的荷兰语翻译 `lang=nl`，相关讨论见 [Dutch Translation](#)；
- 由 palkotamas 提供的匈牙利语翻译 `lang=hu`，相关讨论见 [Hungarian translation](#)；
- 由 Lisa 提供的德语翻译 `lang=de`，相关讨论见 [Deutsch translation](#)；
- 由 Gustavo A. Corradi 提供的西班牙语的翻译 `lang=es`，相关讨论见 [Spanish translation](#)；
- 由 Altantsooj 提供的蒙古语的翻译 `lang=mn`，相关讨论见 [Mongolian translation](#)；
- 由 inusturbo 提供的日语的翻译 `lang=jp`，相关讨论见 [Japanese Translation](#)。

注 以上各个语言的设定均为网友设定，我们未对上述翻译进行过校对，如果有问题，请在对应的 issue 下评论。并且，只有中文环境（`lang=cn`）才可以输入中文。

16.2 设备选项

最早我们在 ElegantNote 模板中加入了设备选项（`device`），后来，我们觉得这个设备选项的设置可以应用到 ElegantBook 中¹，而且 Book 一般内容比较多，如果在 iPad 上看无需切边，放大，那用户的阅读体验将会得到巨大提升。你可以使用下面的选项将版面设置为 iPad 设备模式²

```
\documentclass[pad]{elegantbook} %or
\documentclass[device=pad]{elegantbook}
```

16.3 颜色主题

本模板内置 5 组颜色主题，分别为 `green`³、`cyan`、`blue`（默认）、`gray`、`black`。另外还有一个自定义的选项 `nocolor`。调用颜色主题 `green` 的方法为





















```
\documentclass[green]{elegantbook} %or
\documentclass[color=green]{elegantbook}
```

¹不过因为 ElegantBook 模板封面图片的存在，在修改页面设计时，需要对图片进行裁剪。

²默认为 normal 模式，也即 A4 纸张大小。

³为原先默认主题。

表 16.1: ElegantBook 模板中的颜色主题

	green	cyan	blue	gray	black	主要使用的环境
structure						chapter section subsection
main						definition exercise problem
second						theorem lemma corollary
third						proposition

如果需要自定义颜色的话请选择 `nocolor` 选项或者使用 `color=none`, 然后在导言区定义 `structurecolor`、`main`、`second`、`third` 颜色, 具体方法如下:

```
\definecolor{structurecolor}{RGB}{0,0,0}
\definecolor{main}{RGB}{70,70,70}
\definecolor{second}{RGB}{115,45,2}
\definecolor{third}{RGB}{0,80,80}
```

16.4 封面

16.4.1 封面个性化

从 3.10 版本开始, 封面更加弹性化, 用户可以自行选择输出的内容, 包括 `\title` 在内的所有封面元素都可为空。目前封面的元素有

表 16.2: 封面元素信息

信息	命令	信息	命令	信息	命令
标题	<code>\title</code>	副标题	<code>\subtitle</code>	作者	<code>\author</code>
机构	<code>\institute</code>	日期	<code>\date</code>	版本	<code>\version</code>
箴言	<code>\extrainfo</code>	封面图	<code>\cover</code>	徽标	<code>\logo</code>

另外, 额外增加一个 `\bioinfo` 命令, 有两个选项, 分别是信息标题以及信息内容。比如需要显示 User Name: 111520, 则可以使用

```
\bioinfo{User Name}{111520}
```

封面中间位置的色块的颜色可以使用下面命令进行修改:

```
\definecolor{customcolor}{RGB}{32,178,170}
\colorlet{coverlinecolor}{customcolor}
```

16.4.2 封面图

本模板使用的封面图片来源于 pixabay.com⁴, 图片完全免费, 可用于任何场景。封面图片的尺寸为 1280×1024, 更换图片的时候请严格按照封面图片尺寸进行裁剪。推荐一个免费的在线图片裁剪网站 fotor.com。用户 QQ 群

⁴感谢 ChinaTeX 提供免费图源网站, 另外还推荐 pexels.com。

内有一些合适尺寸的封面，欢迎取用。

16.4.3 徽标

本文用到的 Logo 比例为 1:1，也即正方形图片，在更换图片的时候请选择合适的图片进行替换。

16.4.4 自定义封面

另外，如果使用自定义的封面，比如 Adobe illustrator 或者其他软件制作的 A4 PDF 文档，请把 `\maketitle` 注释掉，然后借助 `pdfpages` 宏包将自制封面插入即可。如果使用 `titlepage` 环境，也是类似。如果需要 2.x 版本的封面，请参考 `ctitlepage`。

16.5 章标标题

本模板内置 2 套章标题显示风格，包含 `hang`（默认）与 `display` 两种风格，区别在于章标题单行显示（`hang`）与双行显示（`display`），本说明使用了 `hang`。调用方式为

```
\documentclass[hang]{elegantbook} %or
\documentclass[titlestyle=hang]{elegantbook}
```

在章标题内，章节编号默认是以数字显示，也即第 1 章，第 2 章等等，如果想要把数字改为中文，可以使用

```
\documentclass[chinese]{elegantbook} %or
\documentclass[scheme=chinese]{elegantbook}
```

16.6 数学环境简介

在我们这个模板中，我们定义了两种不同的定理模式 `mode`，包括简单模式（`simple`）和炫彩模式（`fancy`），默认为 `fancy` 模式，不同模式的选择为

```
\documentclass[simple]{elegantbook} %or
\documentclass[mode=simple]{elegantbook}
```

本模板定义了四大类环境

- 定理类环境，包含标题和内容两部分，全部定理类环境的编号均以章节编号。根据格式的不同分为 3 种
 - `definition` 环境，颜色为 `main`;
 - `theorem`、`lemma`、`corollary` 环境，颜色为 `second`;
 - `proposition` 环境，颜色为 `third`。
- 示例类环境，有 `example`、`problem`、`exercise` 环境（对应于例、例题、练习），自动编号，编号以章节为单位，其中 `exercise` 有提示符。
- 提示类环境，有 `note` 环境，特点是：无编号，有引导符。
- 结论类环境，有 `conclusion`、`assumption`、`property`、`remark`、`solution` 环境⁵，三者均以粗体的引导词为开头，和普通段落格式一致。

⁵本模板还添加了一个 `result` 选项，用于隐藏 `solution` 和 `proof` 环境，默认为显示（`result=answer`），隐藏使用 `result=noanswer`。

16.6.1 定理类环境的使用

由于本模板使用了 `tcolorbox` 宏包来定制定理类环境，所以和普通的定理环境的使用有些许区别，定理的使用方法如下：

```
\begin{theorem}{theorem name}{label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
```

第一个必选项 `theorem name` 是定理的名字，第二个必选项 `label` 是交叉引用时所用到的标签，交叉引用的方法为 `\ref{thm:label}`。请注意，交叉引用时必须加上前缀 `thm:`。

在用户多次反馈下，4.x 之后，引入了原生定理的支持方式，也就是使用可选项方式：

```
\begin{theorem}[theorem name] \label{thm:theorem-label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
% or
\begin{theorem} \label{thm:theorem-withou-name}
  The content of theorem without name.
\end{theorem}
```

其他相同用法的定理类环境有：

表 16.3: 定理类环境

环境名	标签名	前缀	交叉引用
definition	label	def	<code>\ref{def:label}</code>
theorem	label	thm	<code>\ref{thm:label}</code>
lemma	label	lem	<code>\ref{lem:label}</code>
corollary	label	cor	<code>\ref{cor:label}</code>
proposition	label	pro	<code>\ref{pro:label}</code>

16.6.2 修改计数器

当前定理等环境计数器按章计数，如果想修改定理类环境按节计数，可以修改计数器选项 `thmcnt`：

```
\documentclass[section]{elegantbook} %or
\documentclass[thmcnt=section]{elegantbook}
```

16.6.3 其他环境的使用

其他三种环境没有选项，可以直接使用，比如 `example` 环境的使用方法与效果：

```
\begin{example}
  This is the content of example environment.
\end{example}
```

这几个都是同一类环境，区别在于

- 示例环境（`example`）、练习（`exercise`）与例题（`problem`）章节自动编号；
- 注意（`note`），练习（`exercise`）环境有提醒引导符；
- 结论（`conclusion`）等环境都是普通段落环境，引导词加粗。

16.7 列表环境

本模板借助于 `tikz` 定制了 `itemize` 和 `enumerate` 环境，其中 `itemize` 环境修改了 3 层嵌套，而 `enumerate` 环境修改了 4 层嵌套（仅改变颜色）。示例如下

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • first item of nesti; • second item of nesti; <ul style="list-style-type: none"> • first item of nestii; • second item of nestii; <ul style="list-style-type: none"> • first item of nestiii; • second item of nestiii. | <ol style="list-style-type: none"> 1. first item of nesti; 2. second item of nesti; <ol style="list-style-type: none"> (a). first item of nestii; (b). second item of nestii; <ol style="list-style-type: none"> I. first item of nestiii; II. second item of nestiii. |
|---|--|

16.8 参考文献

文献部分，本模板调用了 `biblatex` 宏包，并提供了 `biber`（默认）和 `bibtex` 两个后端选项，可以使用 `bibend` 进行修改：

```
\documentclass[bibtex]{elegantbook}
\documentclass[bibend=bibtex]{elegantbook}
```

关于文献条目（`bib item`），你可以在谷歌学术，Mendeley，Endnote 中取，然后把它们添加到 `reference.bib` 中。在文中引用的时候，引用它们的键值（`bib key`）即可。

为了方便文献样式修改，模板引入了 `bibstyle` 和 `citestyle` 选项，默认均为数字格式（`numeric`），参考文献示例：`[cn1, en2, en3]` 使用了中国一个大型的 P2P 平台（人人贷）的数据来检验男性投资者和女性投资者在投资表现上是否有显著差异。

如果需要设置为国标 GB7714-2015，需要使用：

```
\documentclass[citestyle=gb7714-2015, bibstyle=gb7714-2015]{elegantbook}
```

如果需要添加排序方式，可以在导言区加入

```
\ExecuteBibliographyOptions{sorting=ynt}
```

启用国标之后，可以加入 `sorting=gb7714-2015`。

16.9 添加序章

如果你想在第一章前面添序章，不改变原本章节序号，可以在第一章内容前面使用

```
\chapter*{Introduction}
\markboth{Introduction}{Introduction}
The content of introduction.
```

16.10 目录选项与深度

本模板添加了一个目录选项 `toc`，可以设置目录为单栏（`onecol`）和双栏（`twocol`）显示，比如双栏显示可以使用

```
\documentclass[twocol]{elegantbook}
\documentclass[toc=twocol]{elegantbook}
```

默认本模板目录深度为 1，你可以在导言区使用

```
\setcounter{tocdepth}{2}
```

将其修改为 2 级目录（章与节）显示。

16.11 章节摘要

模板新增了一个章节摘要环境（introduction），使用示例

```
\begin{introduction}
  \item Definition of Theorem
  \item Ask for help
  \item Optimization Problem
  \item Property of Cauchy Series
  \item Angle of Corner
\end{introduction}
```

效果如下：

内容提要

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Definition of Theorem | <input type="checkbox"/> Property of Cauchy Series |
| <input type="checkbox"/> Ask for help | <input type="checkbox"/> Angle of Corner |
| <input type="checkbox"/> Optimization Problem | |

环境的标题文字可以通过这个环境的可选参数进行修改，修改方法为：

```
\begin{introduction}[Brief Introduction]
...
\end{introduction}
```

16.12 章后习题

前面我们介绍了例题和练习两个环境，这里我们再加一个，章后习题（problemset）环境，用于在每一章结尾，显示本章的练习。使用方法如下

```
\begin{problemset}
  \item exercise 1
  \item exercise 2
  \item exercise 3
\end{problemset}
```

效果如下：

第 16 章 练习

1. exercise 1
2. exercise 2
3. exercise 3

4. 测试数学公式

$$a^2 + b^2 = c_{2_i}(1, 2)[1, 23] \quad (16.1)$$

注 如果你想把 `problemset` 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 `introduction` 环境修改 `problemset` 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

解 如果你想把 `problemset` 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 `introduction` 环境修改 `problemset` 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

16.13 旁注

在 3.08 版本中，我们引入了旁注设置选项 `marginpar=margintrue` 以及测试命令 `\elegantpar`，但是由此带来一堆问题。我们决定在 3.09 版本中将其删除，并且，在旁注命令得到大幅度优化之前，不会将此命令再次引入书籍模板中。对此造成各位用户的不方便，非常抱歉！不过我们保留了 `marginpar` 这个选项，你可以使用 `marginpar=margintrue` 获得保留右侧旁注的版面设计。然后使用系统自带的 `\marginpar` 或者 `marginnote` 宏包的 `\marginnote` 命令。

注 在使用旁注的时候，需要注意的是，文本和公式可以直接在旁注中使用。

```
% text
\marginpar{margin paragraph text}

% equation
\marginpar{
  \begin{equation}
    a^2 + b^2 = c^2
  \end{equation}
}
```

但是浮动体（表格、图片）需要注意，不能用浮动体环境，需要使用直接插图命令或者表格命令环境。然后使用 `\captionof` 为其设置标题。为了得到居中的图表，可以使用 `\centerline` 命令或者 `center` 环境。更多详情请参考：Caption of Figure in Marginpar。

```
% graph with centerline command
\marginpar{
  \centerline{
    \includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
  }
  \captionof{figure}{your figure caption}
}

% graph with center environment
\marginpar{
  \begin{center}
    \includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
    \captionof{figure}{your figure caption}
  \end{center}
}
```

第 17 章 字体选项

字体选项独立成章的原因是，我们希望本模板的用户关心模板使用的字体，知晓自己使用的字体以及遇到字体相关的问题能更加便捷地找到答案。

重要提示：从 3.10 版本更新之后，沿用至今的 `newtx` 系列字体被重新更改为 `cm` 字体。并且新增中文字体（`chinesefont`）选项。

17.1 数学字体选项

本模板定义了一个数学字体选项（`math`），可选项有三个：

1. `math=cm`（默认），使用 L^AT_EX 默认数学字体（推荐，无需声明）；
2. `math=newtx`，使用 `newtxmath` 设置数学字体（潜在问题比较多）。
3. `math=mtpro2`，使用 `mtpro2` 宏包设置数学字体，要求用户已经成功安装此宏包。

17.2 使用 `newtx` 系列字体

如果需要使用原先版本的 `newtx` 系列字体，可以通过显示声明数学字体：

```
\documentclass[math=newtx]{elegantbook}
```

17.2.1 连字符

如果使用 `newtx` 系列字体宏包，需要注意下连字符的问题。

$$\int_{R^q} f(x,y)dy.off \quad (17.1)$$

的代码为

```
\begin{equation}
\int_{R^q} f(x,y) dy.\emph{of \kern0pt f}
\end{equation}
```

17.2.2 宏包冲突

另外在 3.08 版本中，有用户反馈模板在和 `yhmath` 以及 `esvect` 等宏包搭配使用的时候会出现报错：

```
LaTeX Error:
Too many symbol fonts declared.
```

原因是在使用 `newtxmath` 宏包时，重新定义了数学字体用于大型操作符，达到了最多 16 个数学字体的上限，在调用其他宏包的时候，无法新增数学字体。为了减少调用非常用宏包，在此给出如何调用 `yhmath` 以及 `esvect` 宏包的方法。

请在 `elegantbook.cls` 内搜索 `yhmath` 或者 `esvect`，将你所需要的宏包加载语句取消注释即可。

```
%% use yhmath pkg, uncomment following code
% \let\oldwidering\widering
% \let\widering\undefined
% \RequirePackage{yhmath}
```

```
% \let\widering\oldwidering

%%% use esvect pkg, uncomment following code
% \RequirePackage{esvect}
```

17.3 中文字体选项

模板从 3.10 版本提供中文字体选项 `chinesefont`，可选项有

1. `ctexfont`: 默认选项，使用 `ctex` 宏包根据系统自行选择字体，可能存在字体缺失的问题，更多内容参考 `ctex` 宏包[官方文档](#)¹。
2. `founder`: 方正字体选项（需要安装方正字体），后台调用 `ctex` 宏包并且使用 `fontset=none` 选项，然后设置字体为方正四款免费字体，方正字体下载注意事项见后文，用户只需要安装方正字体即可使用该选项。
3. `nofont`: 后台会调用 `ctex` 宏包并且使用 `fontset=none` 选项，不设定中文字体，用户可以自行设置中文字体，具体见后文。

注 使用 `founder` 选项或者 `nofont` 时，必须使用 Xe_{La}TeX 进行编译。

17.3.1 方正字体选项

由于使用 `ctex` 宏包默认调用系统已有的字体，部分系统字体缺失严重，因此，用户希望能够使用其它字体，我们推荐使用方正字体。方正的方正书宋、方正黑体、方正楷体、方正仿宋四款字体均可免费试用，且可用于商业用途。用户可以自行从[方正字体官网](#)下载此四款字体，在下载的时候请务必注意选择 GBK 字符集，也可以使用 [L^AT_EX 工作室](#)提供的方正字体，提取码为：njy9 进行安装。安装时，Win 10 用户请右键选择为全部用户安装，否则会找不到字体。

全部字体订单

待付款

已完成

字体/订单号

搜索

如果订单中包含方正黑体、方正书宋、方正仿宋、方正楷体这四款字体，针对“商业发布”使用方式免费，其它字体仅用于“个人非商业”使用

字体名称	编码	单价	实付价	交易状态	操作
订单号：C20200204164821OW1F			2020-02-04 16:48:21		
方正仿宋_GBK	简繁扩展(GBK)	¥ 0.00	免费	已完成	下载字体
方正黑体_GBK	简繁扩展(GBK)	¥ 0.00			
方正书宋_GBK	简繁扩展(GBK)	¥ 0.00			
方正楷体_GBK	简繁扩展(GBK)	¥ 0.00			

17.3.2 其他中文字体

如果你想完全自定义字体²，你可以选择 `chinesefont=nofont`，然后在导言区设置

```
\setCJKmainfont[BoldFont={FZHei-B01},ItalicFont={FZKai-Z03}]{FZShuSong-Z01}
```

¹可以使用命令提示符，输入 `texdoc ctex` 调出本地 `ctex` 宏包文档

²这里仍然以方正字体为例。

```
\setCJKsansfont[BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}  
\setCJKmonofont[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}  
\setCJKfamilyfont{zh song}{FZShuSong-Z01}  
\setCJKfamilyfont{zh hei}{FZHei-B01}  
\setCJKfamilyfont{zh kai}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}  
\setCJKfamilyfont{zh fs}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}  
\newcommand*{\songti}{\CJKfamily{zh song}}  
\newcommand*{\heiti}{\CJKfamily{zh hei}}  
\newcommand*{\kaishu}{\CJKfamily{zh kai}}  
\newcommand*{\fangsong}{\CJKfamily{zh fs}}
```

第 18 章 ElegantBook 写作示例

内容提要

□ 积分定义 18.1

□ Fubini 定理 18.1

□ 最优性原理 18.1

□ 柯西列性质 18.1.1

□ 韦达定理

18.1 Lebesgue 积分

在前面各章做了必要的准备后,本章开始介绍新的积分。在 Lebesgue 测度理论的基础上建立了 Lebesgue 积分,其被积函数和积分域更一般,可以对有界函数和无界函数统一处理。正是由于 Lebesgue 积分的这些特点,使得 Lebesgue 积分比 Riemann 积分具有在更一般条件下的极限定理和累次积分交换积分顺序的定理,这使得 Lebesgue 积分不仅在理论上更完善,而且在计算上更灵活有效。

Lebesgue 积分有几种不同的定义方式。我们将采用逐步定义非负简单函数,非负可测函数和一般可测函数积分的方式。

由于现代数学的许多分支如概率论、泛函分析、调和分析等常常用到一般空间上的测度与积分理论,在本章最后一节将介绍一般的测度空间上的积分。

18.1.1 积分的定义

我们将通过三个步骤定义可测函数的积分。首先定义非负简单函数的积分。以下设 E 是 \mathcal{R}^n 中的可测集。

定义 18.1 (可积性)

设 $f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}(x)$ 是 E 上的非负简单函数,其中 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是 E 上的一个可测分割, a_1, a_2, \dots, a_k 是非负实数。定义 f 在 E 上的积分为 $\int_a^b f(x)$

$$\int_E f dx = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \pi \alpha \beta \sigma \gamma \nu \xi \epsilon \epsilon. \oint_a^b \oint_a^b \prod_{i=1}^n \quad (18.1)$$

一般情况下 $0 \leq \int_E f dx \leq \infty$ 。若 $\int_E f dx < \infty$, 则称 f 在 E 上可积。



一个自然的问题是, Lebesgue 积分与我们所熟悉的 Riemann 积分有什么联系和区别? 在 4.4 我们将详细讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系。这里只看一个简单的例子。设 $D(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数。即 $D(x) = \chi_{Q_0}(x)$, 其中 Q_0 表示 $[0, 1]$ 中的有理数的全体。根据非负简单函数积分的定义, $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_0^1 D(x) dx = \int_0^1 \chi_{Q_0}(x) dx = m(Q_0) = 0 \quad (18.2)$$

即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

有界变差函数是与单调函数有密切联系的一类函数。有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差。与单调函数一样,有界变差函数几乎处处可导。与单调函数不同,有界变差函数类对线性运算是封闭的,它们构成一线空间。练习题 18.1 是一个性质的证明。

 **练习 18.1** 设 $f \notin L(\mathcal{R}^1)$, g 是 \mathcal{R}^1 上的有界可测函数。证明函数

$$I(t) = \int_{\mathcal{R}^1} f(x+t)g(x)dx \quad t \in \mathcal{R}^1 \quad (18.3)$$

是 \mathcal{R}^1 上的连续函数。

解 即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

证明 即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

定理 18.1 (Fubini 定理)

(1) 若 $f(x, y)$ 是 $\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q$ 上的非负可测函数, 则对几乎处处的 $x \in \mathcal{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数是 \mathcal{R}^q 上的非负可测函数, $g(x) = \int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy$ 是 \mathcal{R}^p 上的非负可测函数。并且

$$\int_{\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q} f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{R}^p} \left(\int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy \right) dx. \quad (18.4)$$

(2) 若 $f(x, y)$ 是 $\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q$ 上的可积函数, 则对几乎处处的 $x \in \mathcal{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数是 \mathcal{R}^q 上的可积函数, 并且 $g(x) = \int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy$ 是 \mathcal{R}^p 上的可积函数。而且 18.4 成立。



18.1



笔记 在本模板中, 引理 (lemma), 推论 (corollary) 的样式和定理 18.1 的样式一致, 包括颜色, 仅仅只有计数器的设置不一样。

我们说一个实变或者复变量的实值或者复值函数是在区间上平方可积的, 如果其绝对值的平方在该区间上的积分是有限的。所有在勒贝格积分意义下平方可积的可测函数构成一个希尔伯特空间, 也就是所谓的 L^2 空间, 几乎处处相等的函数归为同一等价类。形式上, L^2 是平方可积函数的空间和几乎处处为 0 的函数空间的商空间。

命题 18.1 (最优性原理)

如果 u^* 在 $[s, T]$ 上为最优解, 则 u^* 在 $[s, T]$ 任意子区间都是最优解, 假设区间为 $[t_0, t_1]$ 的最优解为 u^* , 则 $u(t_0) = u^*(t_0)$, 即初始条件必须还是在 u^* 上。



我们知道最小二乘法可以用来处理一组数据, 可以从一组测定的数据中寻求变量之间的依赖关系, 这种函数关系称为经验公式。本课题将介绍最小二乘法的精确定义及如何寻求点与点之间近似成线性关系时的经验公式。假定实验测得变量之间的 n 个数据, 则在平面上, 可以得到 n 个点, 这种图形称为“散点图”, 从图中可以粗略看出这些点大致散落在某直线近旁, 我们认为其近似为一线性函数, 下面介绍求解步骤。

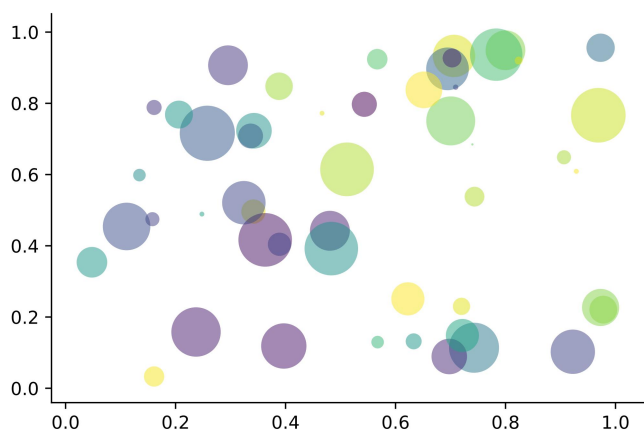


图 18.1: 散点图示例 $\hat{y} = a + bx$

以最简单的一元线性模型来解释最小二乘法。什么是一元线性模型呢? 监督学习中, 如果预测的变量是离散的, 我们称其为分类 (如决策树, 支持向量机等), 如果预测的变量是连续的, 我们称其为回归。回归分析中, 如果只包括一个自变量和一个因变量, 且二者的关系可用一条直线近似表示, 这种回归分析称为一元线性回归分析。如果回归分析中包括两个或两个以上的自变量, 且因变量和自变量之间是线性关系, 则称为多元线性回

归分析。对于二维空间线性是一条直线；对于三维空间线性是一个平面，对于多维空间线性是一个超平面。

性质 柯西列的性质

1. $\{x_k\}$ 是柯西列，则其子列 $\{x_k^i\}$ 也是柯西列。
2. $x_k \in \mathcal{R}^n$, $\rho(x, y)$ 是欧几里得空间，则柯西列收敛， (\mathcal{R}^n, ρ) 空间是完备的。

结论 回归分析 (regression analysis) 是确定两种或两种以上变量间相互依赖的定量关系的一种统计分析方法。运用十分广泛，回归分析按照涉及的变量的多少，分为一元回归和多元回归分析；按照因变量的多少，可分为简单回归分析和多重回归分析；按照自变量和因变量之间的关系类型，可分为线性回归分析和非线性回归分析。

第 18 章 练习

1. 设 A 为数域 K 上的 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，则 A 一定是数量矩阵。
2. 证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化。
3. 设 $A = (a_{ij})$ 是数域 K 上的一个 n 级上三角矩阵，证明：如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ ，并且至少有一个 $a_{kl} \neq 0 (k < l)$ ，则 A 一定不能对角化。

第 19 章 常见问题集

我们根据用户社区反馈整理了下面一些常见的问题，用户在遇到问题时，应当首先查阅本手册和本部分的常见的问题。

1. 有没有办法章节用“第一章，第一节，(一)”这种？
见前文介绍，可以使用 `scheme=chinese` 设置。
2. 大佬，我想把正文字体改为亮色，背景色改为黑灰色。
页面颜色可以使用 `\pagecolor` 命令设置，文本命令可以参考[这里](#)进行设置。
3. Package `ctex` Error: CTeX fontset 'Mac' is unavailable.
在 Mac 系统下，中文编译请使用 Xe_{La}TeX。
4. ! LaTeX Error: Unknown option '`scheme=plain`' for package '`ctex`'.
你用的 C_TE_X 套装吧？这个里面的 `ctex` 宏包已经是已经是 10 年前的了，与本模板使用的 `ctex` 宏集有很大区别。不建议 C_TE_X 套装了，请卸载并安装 T_EX Live 2022。
5. 我该使用什么版本？
请务必使用[最新正式发行版](#)，发行版间不定期可能会有更新（修复 bug 或者改进之类），如果你在使用过程中没有遇到问题，不需要每次更新[最新版](#)，但是在发行版更新之后，请尽可能使用最新版（发行版）！最新发行版可以在 GitHub 或者 T_EX Live 2021 内获取。
6. 我该使用什么编辑器？
你可以使用 T_EX Live 2021 自带的编辑器 T_EXworks 或者使用 T_EXstudio，T_EXworks 的自动补全，你可以参考我们的总结[T_EXworks 自动补全](#)。推荐使用 T_EX Live 2021 + T_EXstudio。我自己用 VS Code 和 Sublime Text，相关的配置说明，请参考[L^AT_EX 编译环境配置：Visual Studio Code 配置简介](#)和[Sublime Text 搭建 L^AT_EX 编写环境](#)。
7. 您好，我们想用您的 ElegantBook 模板写一本书。关于机器学习的教材，希望获得您的授权，谢谢您的宝贵时间。
模板的使用修改都是自由的，你们声明模板来源以及模板地址（GitHub 地址）即可，其他未尽事宜按照开源协议 LPPL-1.3c。做好之后，如果方便的话，可以给我们一个链接，我把你们的教材放在 ElegantL^AT_EX 用户作品集里。
8. 请问交叉引用是什么？
本群和本模板适合有一定 L^AT_EX 基础的用户使用，新手请先学习 L^AT_EX 的基础，理解各种概念，否则你将寸步难行。
9. 代码高亮环境能用其他语言吗？
可以的，ElegantBook 模板用的是 `listings` 宏包，你可以在环境 (`lstlisting`) 之后加上语言（比如 Python 使用 `language=Python` 选项），全局语言修改请使用 `lsset` 命令，更多信息请参考宏包文档。
10. 群主，什么时候出 Beamer 的模板（主题），ElegantSlide 或者 ElegantBeamer？
由于 Beamer 中有一个很优秀的主题 `Metropolis`。后续确定不会再出任何主题/模板，请大家根据需要修改已有主题。

第 20 章 版本更新历史

根据用户的反馈，我们不断修正和完善模板。由于 3.00 之前版本与现在版本差异非常大，在此不列出 3.00 之前的更新内容。

2022/04/09 更新：版本 4.3 正式发布。

- ① 放弃 newtx 系列宏包的设置，改用 TeX Gyre Terms，并设置其他字体；
- ② 修改定理类环境内部字体设置，修复环境内部中文无法加粗问题；
- ③ 增加定理类环境的计数器选项 thmcnt，可选 chapter 和 section；
- ④ 增加 bibend 选项，可选 bibend=biber（默认）和 bibend=bibtex。

2022/03/08 更新：版本 4.2 正式发布。

- ① 对于 newtx 系列宏包更新导致的字体 bug 的修复；
- ② 修缮目录格式，为了达到这个目的，重新改写 \chaptername 的重定义语句；
- ③ 增加日语 lang=jp 设定。
- ④ 这个版本为一个临时性版本，在 T_EXLive 2022 发布之后，将尽快发布 4.3 版本，由于对于中文的改动比较大，可能会出现预期之外的 bug，有问题可以在 QQ 群或者 Github 反馈。

2021/05/02 更新：版本 4.1 正式发布。

- ① **重要改动**：由原先的 BibT_EX 改为 biblatex 编译方式（后端为 biber），请注意两者之间的差异；
- ② **重要改进**：修改对于定理写法兼容方式，提高数学公式代码的兼容性；
- ③ 页面设置改动，默认页面更宽；方便书写和阅读；
- ④ 支持目录文字以及页码跳转；
- ⑤ 不再维护 pdfL_TE_X 中文支持方式，请务必使用 X_LL_TE_X 编译中文文稿。
- ⑥ 增加多个语言选项，法语 lang=fr、荷兰语 lang=nl、匈牙利语 lang=hu、西班牙语 lang=es、蒙古语 lang=mn 等。

2020/04/12 更新：版本 3.11 正式发布，**此版本为 3.x 最后版本**。

- ① **重要修正**：修复因为 gbt7714 宏包更新导致的 natbib option clash 错误；
- ② 由于 pgfornament 宏包未被 T_EX Live 2020 收录，因此删除 base 相关的内容；
- ③ 修复部分环境的空格问题；
- ④ 增加了意大利语言选项 lang=it。

2020/02/10 更新：版本 3.10 正式发布

- ① 增加数学字体选项 math，可选项为 newtx 和 cm。
重要提示：原先通过 newtxmath 宏包设置的数学字体改为 L_TE_X 默认数学字体，如果保持原来的字体，需要显式声明数学字体（math=newtx）；
- ② 新增中文字体选项 chinese-font，可选项为 ctexfont、founder 和 nofont。
- ③ 将封面作者信息设置为可选，并且增加自定义信息命令 \bioinfo；
- ④ 在说明文档中增加版本历史，新增 \datechange 命令和 change 环境；
- ⑤ 增加汉化章节选项 scheme，可选项为汉化 chinese；
- ⑥ 由于 \lvert 问题已经修复，重新调整 ctex 宏包和 amsmath 宏包位置。
- ⑦ 修改页眉设置，去除了 \lastpage 以避免 page anchor 问题，加入 \frontmatter。
- ⑧ 修改参考文献选项 cite，可选项为数字 numbers、作者-年份 authoryear 以及上标 super。

-
- ⑨ 新增参考文献样式选项 `bibstyle`，并将英文模式下参考文献样式 `apalike` 设置为默认值，中文仍然使用 `gbt7714` 宏包设置。
-

2019/08/18 更新：版本 3.09 正式发布

- ① `\elegantpar` 存在 bug，删除 `\elegantpar` 命令，建议用户改用 `\marginnote` 和 `\marginpar` 旁注命令。
 - ② 积分操作符统一更改为 `esint` 宏包设置；
 - ③ 新增目录选项 `toc`，可选项为单栏 `onecol` 和双栏 `twocol`；
 - ④ 手动增加参考文献选项 `cite`，可选项为上标形式 `super`；
 - ⑤ 修正章节习题（`problemset`）环境。
-

2019/05/28 更新：版本 3.08 正式发布

- ① 修复 `\part` 命令。
 - ② 引入 Note 模板中的 `pad` 选项 `device=pad`。
 - ③ 数学字体加入 `mtpro2` 可选项 `math=mtpro2`，使用免费的 `lite` 子集。
 - ④ 将参考文献默认显示方式 `authyear` 改为 `numbers`。
 - ⑤ 引入旁注命令 `\marginpar`（测试）。
 - ⑥ 新增章节摘要环境 `introduction`。
 - ⑦ 新增章节习题环境 `problemset`。
 - ⑧ 将 `\equote` 重命名为 `\extrainfo`。
 - ⑨ 完善说明文档，增加致谢部分。
-

2019/04/15 更新：版本 3.07 正式发布

- ① 删除中英文自定义字体总设置。
 - ② 新增颜色主题，并将原绿色默认主题设置为蓝色 `color=blue`。
 - ③ 引入隐藏装饰图案选项 `base`，可选项有显示 `show` 和隐藏 `hide`。
 - ④ 新增定理模式 `mode`，可选项有简单模式 `simple` 和炫彩模式 `fancy`。
 - ⑤ 新增隐藏证明、答案等环境的选项 `result=noanswer`。
-

2019/02/25 更新：版本 3.06 正式发布

- ① 删除水印。
 - ② 新封面，新装饰图案。
 - ③ 添加引言使用说明。
 - ④ 修复双面 `twoside`。
 - ⑤ 美化列表环境。
 - ⑥ 增加 `\subsubsection` 的设置。
 - ⑦ 将模板拆分成中英文语言模式。
 - ⑧ 使用 `lstlisting` 添加代码高亮。
 - ⑨ 增加定理类环境使用说明。
-

2019/01/22 更新：版本 3.05 正式发布

- ① 添加 `xeCJK` 宏包中文支持方案。
 - ② 修复模板之前对 `TikZ` 单位的改动。
 - ③ 更新 logo 图。
-

2019/01/15 更新：版本 3.04 正式发布

-
- ① 格式化模板代码。
 - ② 增加 `\equote` 命令。
 - ③ 修改 `\date`。
-

2019/01/08 更新：版本 3.03 正式发布

- ① 修复附录章节显示问题。
 - ② 小幅优化封面代码。
-

2018/12/31 更新：版本 3.02 正式发布

- ① 修复名字系列命令自定义格式时出现的空格问题，比如 `\listfigurename`。
 - ② 英文定理类名字改为中文名。
 - ③ 英文结构名改为中文。
-

2018/12/16 更新：版本 3.01 正式发布

- ① 调整 `ctex` 宏包。
 - ② 说明文档增加更新内容。
-

2018/12/06 更新：版本 3.00 正式发布

- ① 删除 `mathpazo` 数学字体选项。
- ② 添加邮箱命令 `\mailto`。
- ③ 修改英文字体为 `newtx` 系列，另外大型操作符号维持 `cm` 字体。
- ④ 中文字体改用 `ctex` 宏包自动设置。
- ⑤ 删除 `xeCJK` 字体设置，原因是不同系统字体不方便统一。
- ⑥ 定理换用 `tcolobox` 宏包定义，并基本维持原有的定理样式，优化显示效果，支持跨页；定理类名字重命名，如 `etheorem` 改为 `theorem` 等等。
- ⑦ 删去自定义的缩进命令 `\Eindent`。
- ⑧ 添加参考文献宏包 `natbib`。
- ⑨ 颜色名字重命名。

附录 A 基本数学工具

本附录包括了计量经济学中用到的一些基本数学，我们扼要论述了求和算子的各种性质，研究了线性和某些非线性方程的性质，并复习了比例和百分数。我们还介绍了一些在应用计量经济学中常见的特殊函数，包括二次函数和自然对数，前 4 节只要求基本的代数技巧，第 5 节则对微分学进行了简要回顾；虽然要理解本书的大部分内容，微积分并非必需，但在一些章末附录和第 3 篇某些高深专题中，我们还是用到了微积分。

A.1 求和算子与描述统计量

求和算子是用以表达多个数求和运算的一个缩略符号，它在统计学和计量经济学分析中扮演着重要作用。如果 $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 表示 n 个数的一个序列，那么我们就把这 n 个数的和写为：

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (\text{A.1})$$