Rökfræði

Matthías Páll Gissurarson

26. nóvember 2014

2014-11-05

37

Dæmi. Sýnið að mengi allra rakinna falla er teljanlegt, en að upptalningin $f_0, f_1, f_2, \ldots$ á einstæðum röknum föllum er rekki rakin.

Lausn. Látum R_0 vera mengi þeirra rakinna falla sem fást með $R1$. Þ.e.as.

$$R_0 = \{I_i^n | n \in \mathbb{N}^* \text{ og ß} \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{Z, N\}$$

Þetta mengi er teljanlegt.

Látum $k \geq 1$ vera náttúrulega tölu.

(i) Látum R_{3k-2} vera mengið af þeim röktu föllum sem fást með því að beita $R2$ á föllin í R_{3k-3}, ásamt öllum föllum í R_{3k-3}.

R2 Segir: Ef $G, H_1, \ldots, H_n$ eru rakin föll, á er $G(H_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, H_n(x_1, \ldots, x_n))$ rakið fall.

Fyrir sérhvert endanlegt hlutmengi í R_{3k-3} fáum við endanlega mörg ný föll í R_{3k-2}. Ef R_{3k-3} er teljanlegt eru þessi hlutmengi teljanlega mörg, svo R_{3k-2} er líka teljanlegt.

(ii) Skgr. R_{3k-1} á sama hátt með R_3. Það verður líka teljanlegt ef R_{3k-2} er teljanlegt.

(iii) Skgr. R_{3k} á sama hátt með $R4$....

Það er því ljóst að R_n er teljanlegt f. öll $n \in \mathbb{N}$ og þar með er mengi allra rakinna falla

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

einnig teljanlegt.

Látum nú $f_0, f_1, \ldots$ vera upptaliningu á öllum einstæðum röktum föllum. og $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vera fallið þ.a.

$$F(x, y) = f_x(y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{N}$

Fallið $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(x) = F(x, x) + 1$$

er rakið ef F er rakið.

En fyrir $x \in \mathbb{N}$ er

$$f_x(x) < f_x(x) + 1 = F(x, x) + 1 = f(x)$$

svo F er ekkert fallana $f_0, f_1, \ldots$ og það með ekki rakið. □

38

Sýnið að eftirfarandi föll og venzl eru rakin:

(a)

$$F(n) := \lfloor \sqrt{n} \rfloor \text{ og } G(n) := \lfloor ne \rfloor$$
$$F(n) := \mu y_{y<n+1}(sg(n + 1 - y \cdot y) = 0) - 1$$

Sannað með upptalningu: $F(N)$ er $F(0), \ldots, F(9) = 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$ $H(N)$ er $H(0), \ldots, H(9) = 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$

(b) $\pi(n) =$ fjöldi prímtala $\leq n$

$$\pi(n) = \sum_{y \leq n} C_{\neg Pr}(y)$$

39

Dæmi.

$$F(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = N(x_1, \ldots, x_n, y, F(x_1, \ldots, x_n, y), G(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$G(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = P(x_1, \ldots, x_n, y, F(x_1, \ldots, x_n, y), G(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Lausn. Skrifum x í stað $(x_1, \ldots, x_n)$ og getum þá skrifað skilgreiningarnar á F, G þannig:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= L(x), \\ G(x,0) &= M(x), \\ F(x,y+1) &= N(x,y,F(x,y),G(x,y)) \\ G(x,y+1) &= P(x,y,F(x,y),G(x,y)) \end{aligned}$$

Viljum sjá að F, G rakin ef L, M, N, P eru rakin. Skilgreinum H með:

$$H(x,y) = 2^{F(x,y)} 3^{G(x,y)}$$

þá er

$$H(x,y+1) = 2^{N(x,y,v_0(H(x,y)),v_1(H(x,y))} 3^{P(x,y,v_0(H(x,y)),v_1(H(x,y))}$$

svo að H er [frumstætt] rakið og $F(x,y) = v_0(H(x,y)), G(x,y) = v_1(H(x,y))$; v_k rakni skv. fyrirlestri. $\square$

40

2014-11-19 Dæmablað 12

45

Dæmi. Skilgreinum tvístætt fall $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ með því að láta $f(x, y)$ ver töluna í menginu $\{0, \ldots, 9\}$ sem er táknuð með þeim tölustaf sem er y sætum til vinstri frá aftasta staf þegar við skrifum x í tugakerfi þannig er t.d.

$$\begin{aligned} f(6382, 0) &= 2, \\ f(6382, 1) &= 8, \\ f(6382, 3) &= 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lausn. [Áslaug] Sýnum fyrst að tvístæða fallið $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x^y$ sé frumstætt rakið:

$$g(x, 0) = 1, g(x, y + 1) = g(x, y)x.$$

þá er $f(x, y) = rm(qt(x, 10^y), 10)$ frumstætt rakið. □

46

47

Dæmi. Látum $\mathcal{L}$ vera mál kenningarinnar $\mathcal{N}$ og látum $\mathcal{T}(\mathbb{N})$ sem hefur sem senningar nkvl. þær yrðingar sem eru sannar í $\mathbb{N}$. Látum Q vera mengi af frumtölum. Sýnið að til er líkan M f. kenninguna $\mathcal{T}(\mathbb{N})$ ásamt staki a úr M þ.a. frumtala p gangi upp í a í líkaninu þþaa $p \in Q$

Lausn. [Tandri] Látum $\mathcal{L}^*$ vera málið sem fæst með því að bæta við málið $\mathcal{L}$ fasta $\mathbf{a}$ Fyrir náttúrulega tölu n látum við $\mathbf{A}_n$ vera

$$\exists x(x \cdot S \ldots S0 = \mathbf{a})$$

Þar sem S kemur fyrir n sinnum.

Látum $\mathcal{T}^+$ vera kenninguna á málinu $\mathcal{L}^*$ sem fæst með því að bæta við $\mathcal{T}(\mathbb{N})$ frumsenum $\mathbf{A}_p$ fyrir sérhvert p úr Q og frumsendunni $\neg\mathbf{A}_p$ fyrir sérhverja frumtölu $p \notin Q$. Ef $\mathcal{T}^*$ er endanlega frumsendaður hluti kenningarinnar $\mathcal{T}^*$, þá hefu hann endanlega margar frumsendur af gerðinni $\mathbf{A}_p$. Segjum $\mathbf{A}_{p_1}, \ldots, \mathbf{A}_{p_n}$ en þá er $\mathbb{N}$ líkan fyrir $\mathcal{T}^*$ með $(\mathbf{a})_{\mathbb{N}} = \prod_{j=1}^{k} p_j$.

Skv. þjöppunarsetn hefur $\mathcal{T}^*$ því líkan M, sem er þá sér í lagi líkan fyrir $\mathcal{T}(\mathbb{N})$. Það er þá ljóst að frumtala p gengur upp í $a := (\mathbf{a})_n$ þþaa $p \in Q$. □

48

Dæmi. Látum $\mathcal{L}$ vera málið sem hefur jafnaðarmerki, fastana $'0'$ og $'1'$, tvístæðu falltáknin $'+'$ og $'-'$ og tvístæða umsagnartáknið $'<'$; og bætum auk þess við einstæðu falltákni $'f'$. Við lítum á rauntölurnar $\mathbb{R}$ sem mynztur fyrir þetta mál með eðlilegum hætti, þar sem túlkun falltáknsins $'f'$ er gefin með einhverju gefnu falli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem er þannig að $f(0) = 0$. Bætum nú við málið föstum fyrir allar rauntölur og látum $\mathcal{T}$ vera mengi allra yrðinga á nýja málinu sem eru sannar í líkaninu. Bætum við nýjum fasta og frumsendum sem segja að nýi fastinn sé stærri en allar rauntölur og fáum þannig líkt og í fyrirlestrum líkan fyrir nýju kenninguna sem er óarkimedísktsvið ${}^*\mathbb{R}$; látum ${}^*f$ vera túlkun falltáknsins $'f'$ í þessu nýja líkani. Segjum að stak $x \in \mathbb{R}$ sé *óendanlega lítið* ef $-y < x < y$fyrir sérhvert jákvætt stak í $\mathbb{R}$.

Sýnið: Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er samfellt í punktinum 0 þá og því aðeins að stærðin ${}^*f(x)$ sé óendanlega lítil fyrir sérhverja óendanlega litla stærð x.

Lausn. [Áslaug] G.r.f. að f sé samfellt í 0. G.r.f að til sé óendanlega lítil stærð x þ.a. ${}^*f(x)$ sé ekki óendanlega líti. Þá er til

tala $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$ þ.a. $|{}^*f(x)| > \epsilon$. Þá er ekki

til $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ þ.a. $|{}^*f(y)| < \epsilon$ fyrir öll $|y| < \delta$, því $|x| < \delta$. Því er f ekki samfellt.

□

Dæmablað 13

52

[Reynir hefur ekki leyst það almennilega ennþá]

Dæmi. (a)

Fullyrðingin hér að neðan er ósönn
Fullyrðingin hér að ofan er sönn

Hvað er hæft í þessu?

(b) Látum $\mathcal{T}$ vera útvíkkun á $\mathcal{N}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ vera tvær yrðingar á máli $\mathcal{T}$. Sem hafa hvor um sig nákvæmlega eina frjálsa breytu $\mathbf{x}$. Til eru lokaðar yrðingar $\mathbf{E}$ og $\mathbf{T}$ þ.a.

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{F} \urcorner}] \text{ og } \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{E} \urcorner}]$$

Sönnun. Setjum

$$D(u,v) = sub(sub(v, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner, Num(v)), \ulcorner \mathbf{z} \urcorner, Num(u))$$

Þar sem $\mathbf{z}$ er ný breyta sem kemur hvergi fyrir í $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$. Ef $\mathbf{S}$ og $\mathbf{T}$ eru yrðingar er

$$D(\ulcorner \mathbf{S} \urcorner, \ulcorner \mathbf{T} \urcorner) = sub(\mathbf{T}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{T} \urcorner}], \ulcorner \mathbf{z} \urcorner, \mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{S} \urcorner}) = \ulcorner \mathbf{T}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{T} \urcorner}, \mathbf{k}_{\ulcorner \mathbf{S} \urcorner}] \urcorner.$$

Þar sem D er rakið fall, hefur það framsetningu $\mathbf{D}$ ásamt $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ og $\mathbf{y}$ í $\mathcal{T}$. Það þýðir að fyrir $n, m \in \mathbb{N}$ er

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_l$$

þar sem $l = D(n, m)$.

Látum $\mathbf{G}$ vera yrðinguna $\forall \mathbf{y}(\mathbf{D} \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}])$, og $\mathbf{H}$ vera $\forall \mathbf{y}(\mathbf{D} \to \mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}])$ og látum $m = \ulcorner \mathbf{G} \urcorner$ og $n = \ulcorner \mathbf{H} \urcorner$.

Látum einnig $\mathbf{E}$ vera $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_n]$ og $\mathbf{F}$ vera $\mathbf{H}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m]$. Setjum $p := \ulcorner\mathbf{E}\urcorner$ og $q := \ulcorner\mathbf{F}\urcorner$.

Þá fæst:

$$D(m,n) = D(\ulcorner\mathbf{G}\urcorner, \ulcorner\mathbf{H}\urcorner) = \ulcorner\mathbf{H}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m]\urcorner = \ulcorner\mathbf{F}\urcorner = q$$

og $D(n,m) = p$, svo

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_n] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_q \text{ og}$$
$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m] \leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{k}_p$$

Fáum nú

$$\begin{aligned}
&\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E} \\
\textbf{þþaa}\ & \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_n] \\
\textbf{þþaa}\ & \vdash_{\mathcal{T}} \forall \mathbf{y}(\mathbf{D}_{\mathbf{x},\mathbf{z}}[\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_n] \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \\
\textbf{þþaa}\ & \vdash_{\mathcal{T}} \forall(\mathbf{y} = \mathbf{k}_q \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}] \\
\textbf{þþaa}\ & \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_q] && \text{skv. afleiðslusetn.} \\
\textbf{þþaa}\ & \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner\mathbf{F}\urcorner}]
\end{aligned}$$

svo $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner\mathbf{F}\urcorner}]$. Á sama hátt fæst $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner\mathbf{E}\urcorner}]$.

(c) Látum $\mathcal{T}$ vera frumsendanlega útvíkkun á $\mathcal{N}$, þá eru venslin $Pr_{\mathcal{T}}$ rakin og því framsetjanleg. ($Pr_{\mathcal{T}}(a,b)$ þþaa b sé Gödel-tala sönnunar á yrðingu sem hefur Gödel-tölu a).

Látum $\mathbf{P}$ ásamt $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vera framsetningu á $Pr_{\mathcal{T}}$, látum $\mathbf{B}$ $\forall\mathbf{y}\neg\mathbf{P}$ og $\mathbf{C}$ vera $\exists\mathbf{y}\mathbf{P}$.

Skv. (b)-lið eru til lokaðar yrðingar $\mathbf{E}$ og $\mathbf{F}$ þ.a.

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E} \leftrightarrow \forall\mathbf{y}\neg\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner\mathbf{F}\urcorner}]$$

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F} \leftrightarrow \exists\mathbf{y}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_{\ulcorner\mathbf{E}\urcorner}]$$

Athugasemd. Að $\mathbf{E}$ er jafngilt þeirri fullyrðingu að $\mathbf{F}$ sé ekki sannanleg í $\mathcal{T}$ og $\mathbf{F}$ jafngilt fulllyrðingunni að $\mathbf{E}$ sé sannanlegt í $\mathcal{T}$

Við getum sýnt:

(1) Ef $\mathcal{T}$ er samvkæm, þá er $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E}$

(2) Ef $\mathcal{T}$ er samvkæm, þá er hvorki $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$, né $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$.

Gerum það í fjórum skrefum.

Látum fyrst $p := \ulcorner\mathbf{E}\urcorner, q := \ulcorner\mathbf{F}\urcorner$

(i) (Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E}$, þá $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$). G.r.f. að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E}$ og látum r vera Gödel-tölu sönnunar á $\mathbf{E}$ í $\mathbf{T}$. Þá er $Pr_{\mathcal{T}}(p, r,)$, svo $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_r]$ og því $\vdash_{\mathcal{T}} \exists\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_p]$ og þá $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$.

(ii) (Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$, þá $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$).

G.r.f. að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$, og látum s vera Gödel-tölu sönnunar á $\mathbf{F}$ í $\mathcal{T}$. Þá er $Pr_{\mathcal{T}}(q, s)$, svo $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{k}_q, \mathbf{k}_s$, og því $\vdash_{\mathcal{T}} \exists\mathbf{y}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_q]$ þ.e.a.s $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\forall\mathbf{y}\neg\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_q]$, svo $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$.

Af (i) og (ii) leiðir (1).

(iii) (Ef $\mathcal{T}$ ω-skv. og $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$, þá ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$) G.r.f. að $\mathcal{T}$ sé ω-skv. og $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$. Þá gildir ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{E}$, því $\mathcal{T}$ er sér í lagi samkvæm.

En þá er $\neg Pr_{\mathcal{T}}(p, n)$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$ og því $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_n]$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$. Því fæst að ekki gildir $\vdash_{\mathcal{T}} \exists\mathbf{y}P_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_p]$, þar sem $\mathcal{T}$ er ω-samvkvæm.

En þá gildir ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$.

(iv) (Ef $\mathcal{T}$ er ω-samkvæm. og ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$, þá er ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$) G.r.f. að $\mathcal{T}$ sé ω-samvkæm og ekki gildi $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$. Þá er $\neg Pr_{\mathcal{T}}(q, n)$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$, og því $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{k}_q, \mathbf{k}_y]$ fyrir öll n úr $\mathbb{N}$.

Því fæst með ω-samvkæmni að ekki gildi

$$\vdash_{\mathcal{T}} \exists\mathbf{y}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_q]$$

þ.e.a.s að ekki gildi

$$\vdash_{\mathcal{T}} \neg\forall\mathbf{y}\neg\mathbf{P}_{\mathbf{x}}[\mathbf{k}_q],$$

en þá gildir ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$ Fáum nú (2):

G.r.f að $\mathcal{T}$ sé ω-samkvæm:

- Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$, þá er ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$ skv. (iii) og þá ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$ skv. (iv). Mótsögn.
- Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$, þá er $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{E}$ skv. (iii) og þá ekki $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{F}$ skv. (iii). Mótsögn.

Niðurstaða: ω-samkvæm, frumsendanleg útvíkkun á $\mathcal{N}$ er ekki fullkomin.

$\square$