Inngangur
að
stærðfræðilegri rökfræði

Uppkast að fyrstu tveimur köflunum og upphafi þess þriðja

Reynir Axelsson

Reykjavík, 2014

Efnisyfirlit

Kafli I

Yrðingarökfræði

§1. Í staðinn fyrir inngang

Stærðfræði er eitt helzta hjálparmeðal raunvísinda, en sjálf getur hún ekki talizt til þeirra. Það er vegna þess að niðurstöður hennar eru studdar allt öðrum rökum en niðurstöður raunvísinda. Raunvísindi styðjast, eins og nafnið gefur til kynna, við *reynslu*, og meginprófsteinn þeirra á niðurstöðu er hvort hún kemur heim við veruleikann. Raunvísindamenn nota því mikið af tíma sínum og atorku til að búa til ýmiskonar reynslupróf eða *tilraunir* til að prófa tilgátur sínar. Ef tilgátan stenzt ekki prófið, þá er henni kastað á glæ; ef hún hins vegar stenzt það, þá er hún viðurkennd sem sannindi, en einungis til bráðabirgða: hún fær gálgafrest þangað til einhverjum tekst að búa til nýtt og strangara reynslupróf til að láta hana gangast undir.

Í stærðfræði eru engin slík reynslupróf hugsanleg. Engin reynsla getur haft áhrif á þau sannindi að $2 + 2$ sé talan 4. Gerum okkur í hugarlund að við settum tvö epli í tóma körfu, bættum síðan öðrum tveimur við, teldum síðan eplin í körfunni og kæmumst að því að eplin væru nákvæmlega fimm, þá yrðu viðbrögð okkar ekki þau að draga þá ályktun að tveir plús tveir væru eftir allt saman fimm en ekki fjórir, heldur myndum við spyrja: „Hvaðan kom fimmta eplið?“ Hér er freistandi að vitna í þýzka heimspekinginn Gottlob Frege, einn helzta upphafsmann stærðfræðilegrar rökfræði:

> „2 sinnum 2 eru 4“ er satt og heldur áfram að vera það jafnvel þótt mannverur eigi eftir að breytast þannig fyrir Darwinska þróun að þær fullyrði að 2 sinnum 2 séu 5. Sérhver sannleikur er eilífur og óháður því hvort einhver er að hugsa um hann, eða þá sálarástandi þess sem er að hugsa um hann.

Stærðfræðingar þurfa ekki á reynzluprófum að halda, þeir hafa miklu öruggari prófstein á sínar niðurstöður, nefnilega *sannanir*, og ólíkt tilraunum raunvísindanna eru þær *óyggjandi*. Ef niðurstaða hefur verið sönnuð, þá fær ekkert haggað henni. Við getum þá verið fullviss um að hún sé rétt, og það er þá algjör óþarfi, og raunar fullkomlega fánýtt, að reyna að láta hana gangast undir einhver ný og strangari próf. Niðurstöður raunvísindanna eru einungis vonarpeningur sem getur hrokkið upp af hvenær sem vera skal, en niðurstöður stærðfræðinnar öðlast eilíft líf.

„En," heyri ég einhvern segja[1], „getum við nokkurntíma verið alveg viss? Eru mennirnir ekki skeikulir? Gæti ekki ævinlega einhver villa leynzt í stærðfræðilegri sönnun, þannig að við þyrftum sí og æ að endurmeta niðurstöður stærðfræðinnar rétt eins og í raunvísindum?" Bíðum nú við, segi ég þá: Það sem ég sagði var að niðurstaða sem *búið væri að sanna* væri óhagganleg. Ef villa kemur í ljós í sönnun, þá sýnir það ekki að sönnuð niðurstaða sé allt í einu orðin ósönn eða að minnsta kosti óviss, heldur að hún hafi raunar aldrei verið sönnuð! „En kemur það ekki í sama stað niður? Hvernig getum við nokkurn tíma verið viss um að niðurstaða hafi verið sönnuð og að engin villa leynist einhversstaðar í sönnuninni?" Lítum aðeins á það mál.

Við getum auðvitað aldrei svarað fullkomnum efahyggjumanni sem efast um hvað sem vera skal. Ef ég sýni slíkum manni sönnun þess að tveir plús tveir séu fjórir, þá getur hann efast um fjölmargt. Hann getur til dæmis dregið í efa að sönnunin sé í raun og veru til, vegna þess að allt sem fyrir hann kemur gæti verið hrein ímyndun og að ekkert þyrfti að vera til nema hugsun hans sjálfs. Við þessu ætti ég ekkert skynsamlegt svar. Hann gæti líka sagt, jafnvel þótt ég fullvissaði hann um að hundruð stærðfræðinga hafi lesið sönnunina án þess að finna í henni nokkra villu, að það sé lítið að marka, því að hugsanlegt sé að allir þessir stærðfræðingar hafi gert sömu mistökin, og jafnvel þótt hann sjálfur læsi sönnunina yfir án þess að finna neitt athugavert, þá gæti hann líka gert sömu mistökin og allir hinir. Við þessu ætti ég heldur ekkert skynsamlegt svar. En ég gæti þó ekki stillt mig um að halda því fram að einmitt vegna þess að ekkert skynsamlegt svar er til við slíkum efasemdum og því engin leið að rökræða þær af nokkru viti, hvorki með eða móti, þá séu þær í raun fullkomlega innihaldslausar og ekki þess virði að eyða á þær orðum.

En gerum ráð fyrir að efahyggjumaðurinn segði eitthvað á þessa leið: „Hvernig á ég svo sem að ganga úr skugga um að þetta sé sönnun? Nákvæmlega hvað það er sem við kjósum að kalla sönnun er háð stað og stund, eins og margir hafa bent á; til dæmis hefur Imre Latakos gefið snilldarlega lýsingu[2] á hvernig menn voru öldum saman að fálma sig áfram eftir sönnun á „margflötungaformúlu" Eulers (sem segir að summan af fjölda hliðarflata og fjölda hornpunkta í margflötungi að frádregnum fjölda brúna hans sé ávallt talan 2). Sönnun er einfaldlega það sem sannfærir fólk á hverjum tíma, og nákvæmlega hvað telst vera fullnægjandi sönnun hefur tekið miklum breytingum í tímanna rás. Þótt mér kunni að sýnast þetta vera fullnægjandi sönnun nú í dag, þá er alls ekki víst að ég verði sömu skoðunar á morgun, og eins er alls ekki víst að næsti maður, svo ég tali nú ekki um seinni tíma menn, muni viðurkenna að þetta sé raunveruleg sönnun." Ég tel mig eiga svar við þessari mótbáru:

Auðvitað er rétt að komið hafa tímabil þegar menn lögðu ekki ýkja mikla áherzlu á strangar sannanir og töldu oft duga röksemdafærslur sem okkur þættu ekki fullnægjandi nú á dögum. Dæmi er tímabilið sem hófst þegar örsmæðareikningurinn — öðru nafni deilda- og heildareikningurinn — var fundinn upp á seinni hluta sautjándu aldar þar til honum var komið fyrir á fastri undirstöðu á þeirri nítjándu; menn undrast gjarnan hvernig hinir fremstu stærðfræðingar gátu komizt að fjöldanum öllum af réttum og mikilvægum niðurstöðum með þeim losaralegu aðferðum sem tíðkuðust á þessum tíma;

[1] Kannski einhvern sem hefur verið að lesa bókina „What Is Mathematics, *Really*" eftir Reuben Hersh eða einhverja aðra bók þar sem svipuðum skoðunum er haldið fram.

[2] Í bókinni „Proofs and Refutations".

og þá gleymast gjarnan allar röngu niðurstöðurnar sem þeir þóttust líka komast að, en hefur skiljanlega ekki verið haldið jafnvel til haga.

En því má ekki gleyma að þeir sem fundu upp örsmæðareikninginn og gerðu hann að öflugri fræðigrein urðu að berjast við þann vanda að hafa ekki *skýra skilgreiningu* á rauntalnakerfinu, og án skýrra skilgreininga á grundvallarhugtökum er erfitt að setja fram skýrar sannanir. Vandinn var ekki fyrst og fremst sá að skilningi á röksemdafærslum væri ábótavant, heldur vantaði skýr hugtök. Frásögn Lakatosar um margflötungaformúlu Evklíðs þarf ekki heldur að lesa sem baráttu manna til að gera sér grein fyrir hvað þurfi til að *sanna* formúluna, heldur gengur hún miklu betur upp ef við lítum á hana sem leit að *réttri skilgreiningu* hugtaksins „margflötungur".

Hugmyndin um sönnun, sem virðist fyrst hafa komið fram í Grikklandi fyrir um það bil tvö þúsund og fimm hundruð árum, var þegar orðin fastmótuð í fornöld, til dæmis í verkum Evklíðs og Arkimedesar, og hefur ekki tekið ýkja miklum breytingum síðan, þótt við sjáum hana að vísu í öðru og skýrara ljósi núna. Oft er frá því sagt að í bókum Evklíðs megi finna margt sem við nú á dögum teljum rökfræðilegar gloppur, en það er ekki endilega vegna þess að það sem kallast sönnun sé eitthvað allt annað nú til dags en þá; í fyrsta lagi eru frásagnir um gloppur Evklíðs einatt dálítið ýktar og kannski stundum dálítið ósanngjarnar, og í öðru lagi eru þær gloppur sem þó má finna ekki endilega nýuppgötvaðar, heldur voru margar hverjar þekktar, gagnrýndar og ræddar þegar í fornöld.

Það sem Grikkir fundu upp var *frumsenduaðferðin*; nefnilega sú aðferð að gefa sér einfaldar *frumforsendur* — eða *frumsendur*, eins og við segjum til styttingar, — og leiða allar aðrar niðurstöður útfrá þeim með *röksemdafærslum*. Þetta er sú aðferð sem enn er notuð og öll stærðfræði byggist á. Ef við berum saman frumsendukerfi Evklíðs og frumsendukerfi Hilberts fyrir rúmfræði, þá er mikilvægasti munurinn sá að Evklíð notar frjálslega ýmis hugtök úr hversdagslegu máli án þess að gera grein fyrir þeim, — hugtök eins og að vera *innaní* einhverju eða *utanvið* það, eða að tveir hlutir séu annaðhvort *sömum megin* eða *hvor sínum megin* við annan hlut, — en Hilbert telur sér skylt, meira en tvö þúsund árum seinna, að setja einnig fram sérstakar frumsendur fyrir notkun slíkra orða; með öðrum orðum *að skilja tungutak stærðfræðinnar fullkomlega að frá daglegu máli.* Krafa hans var sú að gera þyrfti grein fyrir leyfilegri notkun *bókstaflega allra* orða sem notuð eru í stærðfræðilegum texta með sérstökum frumsendum.

Annar mikilvægur munur á frumsenduaðferð Grikkja til forna og okkar nú á dögum er sá, að til forna litu menn á frumsendurnar sem *augljós sannindi*; en nú á dögum líta flestir svo á að þær séu *skilyrði* sem einhverjir hlutir geti fullnægt eða ekki. Þar með hefur sannleikshugtak stærðfræðinnar breytzt: Áður fyrr var litið á sannindi hennar sem *algild.* Nú á dögum lítum við gjarnan á þau sem *afstæð*, en á móti finnst okkur að afstæður sannleikur sé kannski engu ómerkilegri en hinn.

Þrátt fyrir þennan mun má örugglega segja að við höfum svona í stórum dráttum ennþá sömu *tilfinninguna* fyrir því hvað telst vera sönnun og menn höfðu í Grikklandi til forna. Hitt er svo annað mál að *skilningur* okkar á sönnunum hefur tekið miklum breytingum, vegna þess að *stærðfræðilegri rökfræði* hefur fleygt fram á síðustu hálfri annarri öld eða svo. Rökfræði átti einnig upphaf sitt í Grikklandi til forna og fékk skýra mynd í ritum Aristótelesar. En sú rökfræði nægði aldrei til að gera fullkomna grein fyrir öllum stærðfræðilegum röksemdafærslum. Þótt stærðfræðileg rökfræði nútímans eigi sér kannski ekki stóran lesendahóp — jafnvel stærðfræðingar koma sér flestir hjá að hafa af henni miklu meira en dálitla nasasjón — þá eru sumar niðurstöður hennar, eins og til dæmis *ófullkomleikasetning Gödels*, víðfrægar og það jafnvel langt út fyrir raðir stærðfræðinga. En kannski er samt mikilvægasta afrek hennar nokkuð sem hefur alls ekki farið jafnhátt, og það er að henni hefur tekizt að *gefa fullkomna skilgreiningu á því hvað stærðfræðileg sönnun er.* Sú skilgreining leyfir okkur að *ganga úr skugga um hvort tiltekin röksemdafærsla sé stærðfræðileg sönnun eða ekki*, og það með óyggjandi hætti.

Sumir mundu að vísu segja að þetta sé ekki allskostar rétt og jafnvel að það sé kolrangt; því að þetta eigi nefnilega aðeins við um *formlegar sannanir* í skilningi rökfræðinnar, en ekki um *raunverulegar sannanir* eins og þær er að finna í ritum stærðfræðinga. Formlegar sannanir séu ósköp einfaldlega alltof langar til að nokkru sinni sé unnt að skrifa þær niður, nema kannski allraeinföldustu dæmi. Þessi mótbára tel ég að sé á misskilningi byggð. Það er að vísu rétt að stærðfræðingar skrifa venjulega ekki niður hvert eitt einasta skref í röksemdafærslum sínum, heldur láta þeir lesandanum oft eftir að fylla upp augljósa hluti; annað þætti kannski móðgun við lesandann, og ekki vilja höfundarnir heldur að lesandinn fari að geispa vegna einhverra óþarfra málalenginga; nóg er hættan á að þeir fari að geispa án þeirra. Hve nákvæmlega sönnun er skrifuð niður fer oftast dálítið eftir hverjir það eru sem höfundurinn gerir ráð fyrir að lesi hana.[3] En sú trú að formlegar sannanir þurfi að vera óheyrilega langar er held ég til komin af eftirfarandi ástæðu: Þegar formleg kerfi eru athuguð frá sjónarmiði rökfræðinnar, þá reyna rökfræðingar að gera sér lífið auðveldara með því að nota afar fá undirstöðuhugtök og afar fáar undirstöðureglur; annars verða sannanir *rökfræðinganna* óþarflega langar. Önnur hugtök eru síðan skilgreind sem *skammstafanir* fyrir eitthvað sem er ritað á máli sem notar ekkert nema undirstöðuhugtökin, og aðrar reglur eru sannaðar útfrá undirstöðureglunum. Það virðist vera útbreidd skoðun að sönnun geti ekki orðið að „formlegri sönnun“ nema með því að leysa upp úr öllum skammstöfunum og skrifa þannig alla sönnunina á máli sem notar einungis grunnhugtökin, og að ekki megi nota aðrar reglur en grunnreglurnar. En þetta virðist út í hött: Það þarf alls ekki að líta á skilgreiningu sem skammstöfun í þessum skilningi, heldur má líta svo á að með skilgreiningunni bætum við nýju undirstöðuhugtaki við formlega kerfið okkar, og að skilgreiningin sjálf sé ný frumsenda. Þannig útvíkkum við í sífellu formlega kerfið, bæði með nýjum grunnhugtökum og nýjum frumsendum, en sannanir í þessu útvíkkaða kerfi eru ekkert síður „formlegar sannanir“ en í fátæklegra kerfinu. Ef við lítum þessum augum á málið, þá held ég megi sannreyna að venjulegar, hversdagslegar sannanir eins og þær birtast í stærðfræðritum séu miklu nær því að vera „formlegar sannanir“ en margir vilja vera láta, og að það sé í raun og veru gerlegt í flestum tilvikum (að minnsta kosti ef höfundurinn hefur ekki skilið eftir alltof stórar gloppur) að ganga úr skugga um með tiltölulega vélrænum hætti hvort sönnun er rétt eða ekki.

Stöldrum þá aðeins við til að gera okkur betri grein fyrir hvað í þessu felst. Til að forða öllum misskilningi skulum við byrja á að taka skýrt fram að í því felst *alls*

[3] Í fyrirlestri sem heitir „How to write mathematics badly“ og er þegar þetta er ritað aðgengilegur sem myndband á netinu gerir franski stærðfræðingurinn Jean-Pierre Serre greinarmun á „(venjulegri) sönnun“, sem er viðurkennd af sérfræðingum, og „Bourbaki-sönnun“, sem er líka viðurkennd af þeim sem eru ekki sérfræðingar.

ekki að rökfræðin segi okkur *hvernig eigi að búa til stærðfræðilegar sannanir.* Það er kannski auðveldast að skýra með samlíkingum: Skákmaður þarf að fara eftir ákveðnum ströngum reglum; hann verður með öðrum orðum að kunna mannganginn. En þótt hann kunni allar þessar reglur út í yztu æsar er það engin trygging fyrir að henn geti teflt almennilega. Reglurnar segja aðeins hvernig tefla skuli *rétt*, ekki hvernig tefla skuli *vel.* Sérhvert barn sem kann mannganginn getur gengið úr skugga um hvort skák milli stórmeistara sé rétt tefld, þótt það geti ekki gert sér nokkrar vonir um að geta sigrað þá. Með sama hætti verður skáld að kunna skil á lögmálum bragfræðinnar, hvort sem það er meðvitað eða ómeðvitað; en hversu staðgóð sem þekking hans á bragfræði kann að vera þarf hann alls ekki að geta komið saman sómasamlegri vísu. Bragfræðin leyfir okkur aðeins að ganga úr skugga um *hvenær* rétt er ort, en gefur engar leiðbeiningar um *hvernig* á að yrkja gott kvæði. Reglum rökfræðinnar má líkja við reglur um manngang í skák eða hljóðstafareglur bragfræðinnar; þær leyfa okkur að ganga úr skugga um hvenær röksemdafærslur eru réttar og hvenær þær eru rangar, en alls ekki hvernig við getum búið réttar röksemdafærslur til. Það er engin aðferð til sem segir okkur hvernig eigi að búa til sönnun á einhverri tiltekinni stærðfræðilegri niðurstöðu; ein af frægari niðurstöðum nútímarökfræði er raunar að slík aðferð *geti ekki* verið til. Stærðfræðingur þarf ávallt á hugkvæmni og hugmyndaflugi að halda, rétt eins og skákmaður eða skáld. Sá sem vill verða góður skákmaður þarf að kynna sér vel hvernig eldri skákmeistarar hafa teflt, og sá sem vill verða gott skáld þarf að læra af verkum eldri skálda. Eins verður stærðfræðingur að kynna sér vel verk eldri stærðfræðinga til að læra sína íþrótt. En hann verður að halda sig við reglur rökfræðinnar ef útkoman á að vera óaðfinnanleg.

Tökum líka annað skýrt fram: Þótt við höfum reglur sem leyfa okkur að ganga úr skugga um hvort stærðfræðileg *sönnun* sé rétt eða röng, þá höfum við engar reglur sem leyfa okkur að ganga úr skugga um hvort stærðfræðileg *fullyrðing* sé rétt eða röng. Ef slík fullyrðing hefur verið *sönnuð* þannig að við höfum getað gengið úr skugga um að *sönnunin* sé rétt, þá vitum við að vísu að *fullyrðingin* er örugglega rétt; en ef við finnum villu í sönnuninni, þannig að í raun sé ekki um neina sönnun að ræða, þá getum við ekki ályktað að upphaflega fullyrðingin sé röng; við vitum aðeins að hún hefur ekki verið sönnuð í þetta skiptið, en við höfum engin ráð í höndunum til að úrskurða hvort einhver önnur sönnun (eða þá einhver afsönnun) sé til eða ekki; og meðan það er ekki ljóst getum við ekkert sagt til um hvort fullyrðingin sé rétt eða röng.

Rökfræðin leyfir okkur því stundum að öðlast fullkomna vissu, en það er hins vegar langt frá því að hún geri okkur alvitur.

En hlutverk stærðfræðilegrar rökfræði er ekki einungis að setja fram þær reglur sem fylgt er í stærðfræðilegum röksemdafærslum; hún er löngu orðin að sjálfstæðri grein innan stærðfræðinnar. Rökfræðingar láta sér ekki nægja að gera setja fram skilgreiningu á hvað telst vera stærðfræðilega sönnun, heldur vilja þeir líka *sanna* að skilgreiningin sé fullnægjandi; það er kannski megininntak *fullkomleikasetningar Gödels.* Í stærðfræðilegri rökfræði er einnig leitazt við að kanna hvaða takmörkunum stærðfræðilegar röksemdafærslur eru háðar; mikilvæg niðurstaða í þá veru er *(fyrri) ófullkomleikasetning Gödels.* Hér hefa verið nefndar tvær af þeim meginniðurstöðum sem við ætlum að fjalla um í þessu riti. En þær eru fleiri, og margar hverjar óvæntar og sérkennilegar, og þær geta veitt okkur djúpa innsýn í eðli stærðfræðinnar og stærðfræðilegar hugsunar.

§2. Breytur, rökbreytur og stæður

Orðasambandið „stærðfræðileg rökfræði“ má skilja á tvo vegu, og báðir eru réttir: Við tölum um stærðfræðilega rökfræði bæði vegna þess að hún fjallar um þær röksemdafærslur sem stærðfræðingar beita dags daglega, en líka vegna þess að hún notar til þess stærðfræðilegar aðferðir og þar með stærðfræðilegar röksemdafærslur. Við þurfum að vanda okkur talsvert til að halda aðgreindum stærðfræðilegu röksemdafærslunum sem við erum að tala um og stærðfræðilegu röksemdafærslunum sem við notum.

Stærðfræðilegar röksemdafærslur eru skrifaðar á sérstöku tungumáli, og þegar við rökræðum þessar röksemdafærslur, þá erum við jafnframt að ræða um *sjálft tungumálið sem röksemdafærslurnar eru skrifaðar á*. Við þurfum að gera skýran greinarmun á málinu sem við erum að tala um og málinu sem við notum sjálf þegar við erum að tala um það. Málið sem við tölum um köllum við ***viðfangsmálið***, en málið sem við notum þegar við tölum um viðfangsmálið köllum við ***yfirmálið***.

Þegar stærðfræðingar tala um einhverja hluti, þá vilja þeir geta skilgreint nákvæmlega hvað það er sem um er að ræða. Nú er það ekki ýkja vel skilgreint hvað „venjulegt tungumál“ er, og því er viðfangsmálið sem verið er að fjalla um í stærðfræðilegri rökfræði venjulega það sem kallað er ***formlegt mál***, en það er mál sem er búið til samkvæmt skýrt tilteknum reglum. Yfirmálið er hins vegar að jafnaði *okkar eigin venjulega, óformlega tungumál*, sem í okkar tilviki er íslenzka, en að vísu auðguð með töluverðum orðaforða úr „venjulegu, hversdaglegu stærðfræðimáli“, og þar er einkum átt við hugtök úr *mengjafræði*. Þannig munum við síðar meir ekki hika við að tala um „mengi af bókstöfum“, eða að segja hluti á borð við þá að tíu stafa orð sé „endanleg runa af bókstöfum, tölusett með fyrstu tíu jákvæðu náttúrlegu tölunum“. Ef við viljum líka tala um yfirmálið, eins og við erum raunar að gera einmitt þessa stundina, þá ættum við eflaust strangt tekið að tala um það á þriðja máli, einhverju „yfiryfirmáli“; en þetta kemur svo sjaldan fyrir, og við erum líka svo vön því að leyfa okkur að tala um íslenzku á íslenzku, að venjulega er engin þörf fyrir að gera þennan greinarmun, þótt að vísu megi hugsa sér aðstæður þar sem slíkt væri skynsamlegt.

Í venjulegri stærðfræði er talað um ýmsa hluti, svo sem tölur, föll, mengi, vigra og ótal margt fleira. Til að geta talað um þessa hluti þurfum við að gefa þeim nöfn eða ***heiti***, og þar sem hlutirnir sem við tölum um eru óskaplega margir, en heitin sem við höfum til umráða tiltölulega fá, þá björgum við okkur með því að nota *bókstafi* sem heiti fyrir alla hugsanlega hluti. Raunar förum við líka afar sparlega með bókstafina: Ef við eigum í einhverju reikningsdæmi að finna einhverja stærð sem hefur tiltekna eiginleika, þá er eins víst að við segjum að það sé stærðin x, og leyfum okkur það jafnvel þótt við höfum verið að tala um allt aðra óþekkta stærð x í síðasta dæmi, og komum til með að tala um þriðju óþekktu stærðina x í þarnæsta dæmi, sem verður allt önnur stærð en hinar báðar. Með öðrum orðum gefum við tilteknum hlut bókstaf sem heiti *til bráðabirgða* og *í tilteknu samhengi*, og teljum okkur frjálst að nota sama bókstaf aftur í allt annarri merkingu í einhverju öðru samhengi. Og við þurfum ekki að nota bókstafi til að tala um einhverja *tiltekna* hluti, eins og þegar við segjum að x sé talan sem lögð við töluna 2 gefur okkur töluna 4, eða með öðrum orðum að x sé talan þannig að $2+x=4$, heldur getum við notað bókstafi til að tala um *hvaða tölur (eða almennar hvaða hluti) sem vera skal*, eins og þegar við segjum að fyrir *sérhverja* rauntölu x getum við fundið rauntölu y þannig að summan af x og y sé talan 4. Bókstafur sem er notaður sem heiti á einhverjum hlut er kallaður ***breytistærð*** eða einfaldlega ***breyta***. Það er almenn venja að *latneskir* bókstafir sem eru notaðir sem breytur í prentuðum texta séu *skáletraðir*.

Í stærðfræðilegri rökfræði þurfum við meðal annars að tala heilmikið um þessa notkun bókstafa, og því eru bókstafir meðal þeirra hluta sem við þurfum að tala um. En til að við getum talað um bókstafi verða þeir líka að hafa heiti. Tökum nú eftir að bókstafur getur ekki verið heiti sjálfs sín. Það væri fráleitt að segja bæði að x sé rauntalan þannig að $2 + x = 4$ og líka að x sé þriðji síðasti stafur í latneska stafrófinu; ef hvort tveggja væri rétt, þá gætum við til dæmis dregið þá ályktun að rauntalan 2 sé þriðji síðasti stafurinn í latneska stafrófinu, og það er augljóslega fráleitt.

Til að geta talað um *tiltekna bókstafi* skulum við koma okkur saman um að *heiti bókstafs fáist með því að skrifa þann bókstaf innan einfaldra enskra gæsalappa.* Þegar við segjum að x sé talan þannig að $2 + x = 4$, þá er 'x' heitið sem við gefum óþekktu stærðinni x í dæminu; og það er líka 'x', en ekki x, sem er þriðji síðasti bókstafurinn í latneska stafrófinu. Og við getum bætt við að 'a' sé fyrsti lágstafurinn, en 'A' sé fyrsti hástafurinn í því stafrófi.

Við skulum strax útvíkka þetta samkomulag talsvert: Við þurfum nefnilega ekki einungis heiti fyrir bókstafi á viðfangsmálinu, heldur líka ýmis sérstök tákn, svo sem samlagningarmerki, samasemmerki og margt fleira, og auk þess þurfum við ekki einungis að tala um bókstafina og táknin, heldur *táknasamstæður* eins og heil orð og heilar fullyrðingar. Með „táknasamstæðu" meinum við það sem kemur út ef við skrifum endanlega mörg tákn (annaðhvort bókstafi eða sérstök tákn) á viðfangsmálinu hvert á eftir öðru; og þar sem við ætlum að tala dálítið mikið um táknasamstæður komum við okkur saman um að nota styttinguna „***stæða***" í sömu merkingu og orðið „táknasamstæða". Við skulum koma okkur saman um að heiti á yfirmálinu yfir tákn eða stæður á viðfangsmálinu fáist með því að setja einfaldar enskar gæsalappir utanum táknið eða stæðuna sem um er að ræða. Sem dæmi um þetta segjum við að orðið '*tala*' sé stæða sem hefur nákvæmlega fjóra bókstafi, fyrsti stafurinn er bókstafurinn 't', annar stafurinn er bókstafurinn 'a', þriðji stafurinn er bókstafurinn 'l', og fjórði stafurinn er bókstafurinn 'a'; og þetta dæmi sýnir að sami bókstafur getur verið bæði annar og fjórði bókstafurinn í sömu stæðunni. Eins getum við sagt að bókstafurinn 'x' sé heiti óþekktu stærðarinnar í jöfnunni '$2 + x = 4$', og að í þeirri jöfnu séu notuð tvö sérstök tákn, samlagningarmerkið '$+$' og samasemmerkið '$=$'; og að í jöfnunni '$4 - (3 - 1) = 2$' komi fyrir frádráttarmerkið '$-$', vinstri sviginn '(' og hægri sviginn ')'. Við getum líka sagt að stæðan '$))2) + + - -)()$' sé óskiljanlega mynduð og merkingarlaus.

Við leyfum okkur að nota *íslenzkar* gæsalappir áfram eins og venjulega, svona þegar okkur „dettur í hug", oft með tiltölulega óformlegum hætti; en þó notum við þær sérstaklega þegar við tölum á yfirmálinu um *fullyrðingar á yfirmálinu.*

Heitin sem við vorum að koma okkur saman um að nota fyrir *tiltekna* bókstafi og *tilteknar* stæður í viðfangsmálinu eru heiti á yfirmálinu. Bókstafirnir sjálfir eru venjulega heiti einhverra allt annarra hluta á viðfangsmálinu. En við þurfum einnig að tala um *ótiltekna* bókstafi og *ótilteknar* stæður. Til dæmis þurfum við að geta sett fram reglur á yfirmálinu sem eiga að gilda fyrir notkun bókstafa í viðfangsmálinu, og þá er átt við *hvaða bókstafi sem vera skal*, eins og til dæmis ef við vildum segja að við getum skrifað hvaða bókstaf sem vera skal næst á eftir hvaða öðrum bókstaf sem vera skal. Til að setja fram slíkar reglur þufum við að nota *breytur í yfirmálinu*; við köllum þær ***málskipanarbreytur*** til aðgreiningar frá breytunum í viðfangsmálinu. Við skulum koma okkur saman um að *málskipanarbreytur skuli vera feitletraðir bókstafir*. Og við notum málskipanarbreytur ekki einungis til að tala um ótiltekna bókstafi, heldur líka til að tala um önnur ótiltekin tákn eða stæður. Það er þægilegast að skýra þessa notkun málskipanarbreytna með dæmum:

Gerum til dæmis ráð fyrir að **a** og **b** séu bókstafir. Við komum okkur þá saman um að **ab** sé stæðan sem hefur nákvæmlega tvo bókstafi og fæst með því að skrifa fyrst bókstafinn **a** og síðan bókstafinn **b** strax fyrir aftan hann. Þetta þýðir meðal annars eftirfarandi: Ef **a** er bókstafurinn 'a' og **b** er bókstafurinn 'b', þá er **ab** stæðan 'ab'. Ef hins vegar **a** er bókstafurinn 'x' og **b** er bókstafurinn 'm', þá er **ab** stæðan 'xm'. Ef **a** er bókstafurinn 'b' og **b** er bókstafurinn 'a', þá er **ab** stæðan 'ba'. Og ef **a** er bókstafurinn 'z' og **b** er bókstafurinn 'z', þá er **ab** stæðan 'zz'. Þannig mætti lengi telja.

Látum **A** og **B** vera stæður. Við skulum þá koma okkur saman um að **AB** sé stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst stæðuna **A** og strax fyrir aftan hana stæðuna **B**. Ef til dæmis **A** er stæðan '*skot*' og **B** er stæðan '*turnar*', þá er **AB** stæðan '*skotturnar*'. Tökum eftir: Ef **A**, **B** og **C** eru stæður, þá er ljóst að stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst stæðuna **A** og næst á eftir henni stæðuna **BC** er nákvæmlega sama stæðan og sú sem fæst með því að skrifa fyrst stæðuna **AB** og næst á eftir henni stæðuna **C**; og þetta segjum við að sé stæðan **ABC**. Bætum einnig við að í þessu samhengi leyfum við okkur að tala um stæður sem hafa einungis eitt tákn, og við leyfum okkur einnig að nefna hana með sama heiti og táknið sem hún hefur. Ef til dæmis **a** er bókstafur (eða tákn) og **B** er stæða, þá er **aB** stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst bókstafinn (eða táknið) **a** og strax á eftir honum stæðuna **B**, en **Ba** er stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst stæðuna **B** og strax á eftir henni bókstafinn (eða táknið) **a**. Sömuleiðis er **BaC** stæðan sem fæst með því að skrifa fyrist stæðuna **B**, strax á eftir bókstafinn (eða táknið) **a** og svo strax þar á eftir stæðuna **C**, o. s. frv.

Við höfum þá komið okkur saman um að nota tilteknar *stæður á yfirmálinu* til að tákna *stæður á viðfangsmálinu* sem eru settar saman með svipuðum hætti.

Í þessu samhengi leyfum við okkur venjulega að gera samkomulag um ritháttt sem er kannski ekki allskostar rökrétt, en samt sem áður þægilegt: Ef **a** er *tiltekinn* bókstafur eða *tiltekið* tákn þá leyfum við okkur að nota þann bókstaf eða það tákn í heiti stæðunnar **aB** í stað rétta heitisins fyrir **a** á yfirmálinu. Til dæmis segjum við að a**B** sé stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst bókstafinn 'a' og strax á eftir honum stæðuna **B**, í stað þess (sem væri kannski rökréttara) að segja að það sem þannig er myndað sé stæðan 'a'**B**. Þetta á einnig að gilda um allar svipaðar samsetningar þar sem bæði tilteknir bókstafir (eða tiltekin tákn) *og* málskipanarbreytur koma fyrir. Ef til dæmis **a** og **b** eru bókstafir, þá segjum við að $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ sé stæðan sem fæst með því að skrifa fyrst bókstafinn **a**, næst á eftir honum samasammerkið '=' og þar næst á eftir bókstafinn **b** (í stað þess að segja að þessi stæða sé **a**'='**b**, eins og kannski væri rökréttara). Við getum lauslega orðað þessa reglu þannig: Meðan að minnsta kosti ein málskipanarbreyta kemur fyrir í samsettri stæðu *á yfirmálinu*, þá sleppum við því að nota enskar gæsalappir. Þetta kemur þá til dæmis þannig út að við getum sagt að stæðan '$2 + x = 4$' sé eitt tiltekið dæmi um stæðu af gerðinni $2 + \mathbf{x} = 4$, þar sem $\mathbf{x}$ má vera hvaða bókstafur sem vera skal, til dæmis 'x', og að önnur slík dæmi séu stæðurnar '$2 + y = 4$' og '$2 + k = 4$'; og allar þessar stæður eru dæmi um stæður af gerðinni $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, þar sem $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ eru bókstafir eða tölustafir.

§3. Neitun og samtengingar

Við byrjum á að athuga mjög einfalda grein stærðfræðilegrar rökfræði, svokallaða ***yrðingarökfræði***. Í grófum dráttum má segja að það sé sá hluti rökfræðinnar sem fjallar um notkun *neitunar* og *samtenginga* í röksemdafærslum. Neitunin er í venjulegu máli gefin til kynna með orðinu „ekki", og mikilvægustu samtengingarnar í rökfræði eru

... og ... ,
... eða ... .
ef ..., þá ... ,
... þá og því aðeins að ... .

Hér standa úrfellingarpunktarnir „ ... " fyrir einhverjar fullyrðingar.

Það kann að virðast að við höfum valið hér heldur fáar samtengingar; en það er af því að við höfum einungis áhuga á þeim samtengingum sem notaðar eru í röksemdafærslum. Til dæmis kemur samtengingin „þegar" í tímamerkingu ekki við sögu í stærðfræðilegum sönnunum, og þess vegna ætlum við ekki að fjalla um hana. Algenga samtengingin „en" er ekki með á listanum af því að frá sjónarmiði rökfræðinnar er hún nákvæmlega sömu merkingar og samtengingin „og". Fullyrðingin „Jón fékk sér kaffi en Gunna fékk sér te" segir nákvæmlega hið sama og fullyrðingin „Jón fékk sér kaffi og Gunna fék sér te"; á þessum fullyrðingum er aðeins blæbrigðamunur en ekki merkingarmunur. Við sjáum fljótlega að á listanum okkar eru jafnvel óþarflega margar samtengingar, ef nokkuð er.

Tökum líka eftir að við ætlum okkur ekki að gera grein fyrir allri notkun þessara samtenginga í daglegu máli, heldur einungis hvernig notkun þeirra er háttað þegar þær tengja saman heilar fullyrðingar og mynda þannig samsetta fullyrðingu. Til dæmis getum við notað samtenginguna „og" til að tengja saman fullyrðingarnar „Jón er kvæntur Gunnu" og „Gunna er gift Jóni" og myndað þannig samsettu fullyrðinguna „Jón er kvæntur Gunnu og Gunna er gift Jóni"; en við ætlum ekki að velta fyrir okkur notkun samtengingarnar „og" í fullyrðingunni „Jón og Gunna eru hjón", því að í henni eru ekki tengdar saman tvær heilar fullyrðingar.

Við ætlum okkur ekki heldur að gera grein fyrir því hér og nú hvað við eigum við með orðinu „fullyrðing"; síðar meir munum við tala um sérstök mál þar sem nákvæm grein er gerð fyrir hvað átt er við með fullyrðingu á því máli. Yrðingarökfræði er ætlað að fjalla um ótilteknar fullyrðingar, sem geta svo sem verið á hvaða tungumáli sem vera skal, nema hvað við setjum það skilyrði að við getum sagt að fullyrðingarnar sem við fáumst við séu annaðhvort sannar eða ósannar[4]; við komum okkur saman um að fást

[4] Gefa má dæmi um fullyrðingar á íslenzku sem geta hvorki verið sannar né ósannar. Eitt slíkt dæmi er gefið í „lygaraþversögninni": Maður sem fullyrðir „Nú er ég að segja ósatt" getur ekki verið að segja satt, því að þá væri hann að segja ósatt. Eins getur hann ekki verið að segja ósatt, því að þá væri hann að segja satt. Í báðum tilvikum væri hann að segja satt og ósatt samtímis, sem getur ekki staðizt.

ekki við aðrar tegundir fullyrðinga. Við skulum líka koma okkur saman um að nota til þæginda styttinguna „***yrðing***“ í staðinn fyrir orðið „fullyrðing“.

Það sem er eftirtektarverðast frá okkar sjónarmiði nú er að við getum sagt hvort yrðing sem er sett saman úr styttri yrðingum með neitun og samtengingunum sem við töldum upp hér að framan er sönn eða ósönn ef við bara vitum um hverja yrðingu sem hún er sett saman úr hvort hún er sönn eða ósönn. Ef við til dæmis vitum að fullyrðingin „Jón fékk sér kaffi“ er sönn og að fullyrðingin „Gunna fékk sér te“ er sönn, þá getum við ályktað að fullyrðingin „Jón fékk sér kaffi og Gunna fékk sér te“ sé sönn. (Við getum hins vega ekki ályktað neitt um hvort fullyrðingin „Jón fékk sér kaffi þegar Gunna fékk sér te“ sé sönn eða ekki; og það er ein ástæða fyrir að samtengingin „þegar“ kemur lítið við sögu í stærðfræðilegum röksemdafærslum.)

Við viljum nú setja fram þær reglur sem gilda um sannleika fullyrðinga sem eru settar fram með neitun og samtengingunum sem við töldum upp. Auðveldast er að setja fram slíkar reglur fyrir neitun. Látum **A** vera einhverja yrðingu og látum til bráðabirgða „ekki **A**“ standa fyrir neitun yrðingarinnar **A**. Þá er ljóst að eftirfarandi gildir:

> Ef yrðingin **A** er sönn, þá er yrðingin „ekki **A**“ ósönn; en ef yrðingin **A** er ósönn, þá er yrðingin „ekki **A**“ sönn.

Um samtenginguna „og“ gildir einnig einföld regla:

> Ef yrðingarnar **A** og **B** eru báðar sannar, þá er yrðingin „**A** og **B**“ sönn; að öðrum kosti er hún ósönn.

Aðeins erfiðara er að gera grein fyrir samtengingunni „eða“, því að í venjulegu máli getur hún haft tvær alveg ólíkar merkingar. Setjum svo að **A** og **B** séu yrðingar. Yrðingin „**A** eða **B**“ merkir stundum „**A** eða **B** eða hvort tveggja“, en stundum „**A** eða **B** en ekki hvort tveggja“. Ef ég segi „annaðhvort leiðist Pétri svona eða hann er með tannpínu“, þá er ég engan veginn að útiloka að Pétri geti bæði leiðzt og auk þess verið með tannpínu; en ef ég segi „Páll getur valið hvort hann fær greitt í peningum eða hvort hann fær bílinn“, þá er ég örugglega að útiloka að hann geti fengið hvort tveggja. *Það er viðtekin hefð að í stærðfræði og rökfræði er samtengingin „eða“ einungis og ævinlega notuð í fyrri merkingunni.*

Ef við höldum því fram að yrðingin „**A** eða **B**“ sé sönn, þá erum við með því að segja að einn af þremur eftirtöldun kostum sé fyrir hendi:

(1) Yrðingin **A** er sönn og yrðingin **B** er ósönn;
(2) yrðingin **A** er ósönn og yrðingin **B** er sönn;
(3) yrðingin **A** er sönn og yrðingin **B** er sönn;

og það þýðir að við erum að neita fjórða kostinum, nefnilega

(4) yrðingin **A** er ósönn og yrðingin **B** er ósönn.

Með öðrum orðum er yrðingin „**A** eða **B**“ *ósönn* þá og því aðeins að yrðingarnar **A** og **B** séu báðar ósannar.

Berum þetta nú saman við samtenginguna „og“: Látum „(ekki **A**) eða (ekki **B**)“ vera yrðinguna sem fæst með því að tengja saman *neitanir* yrðinganna **A** og **B** með samtengingunni „eða“. Samkvæmt því sem við vorum að enda við að segja er yrðingin „(ekki **A**) eða (ekki **B**)“ *ósönn* þá og því aðeina að yrðingarnar „ekki **A**“ og „ekki **B**“ séu báðar *ósannar*, en það þýðir augljóslega ekkert annað en að yrðingarnar **A** og **B** séu báðar *sannar*, og það þýðir svo aftur að samsetta yrðingin „**A** og **B**“ sé sönn! Við höfum því rökstutt eftirfarandi staðreynd:

> Yrðingin „**A** og **B**“ er sönn þá og því aðeins að yrðingin „(ekki **A**) eða (ekki **B**)“ sé ósönn.

Þetta má einnig orða þannig:

> Yrðingin „**A** og **B**“ er sönn þá og því aðeins að yrðingin „ekki((ekki **A**) eða (ekki **B**))“ sé sönn.

Athugum líka eftirfarandi: Þá staðreynd að yrðingin „**A** eða **B**“ er ósönn þá og því aðeins að yrðingarnar **A** og **B** séu báðar ósannar má líka orða þannig að yrðingin „**A** eða **B**“ sé ósönn þá og því aðeins að yrðingarnar „ekki **A**“ og „ekki **B**“ séu báðar sannar, og það þýðir aftur að yrðingin „(ekki **A**) og (ekki **B**)“ sé sönn. Af þvi leiðir svo eftirfarandi:

> Yrðingin „**A** eða **B**“ er sönn þá og því aðeins að yrðingin „ekki((ekki **A**) og (ekki **B**))“ sé sönn.

Hvað höfum við nú unnið með þessu annað en búa til dálítið tyrfnar samsetningar af yrðingum? Við höfum séð: Ef við höfum neitunina „ekki“ þá þurfum við ekki á nema annarri af samtengingunum „og“ og „eða“ að halda; því að við getum skilgreint hvora um sig útfrá neituninni og hinni.

Lítum nú á samtenginguna „ef . . . , þá . . . “. Látum **A** og **B** vera yrðingar. Við getum þá myndað samsettu yrðinguna „ef **A**, þá **B**“. Samsett yrðing af þessu tagi kallast ***skilyrðing***. Tökum vel eftir að við getum myndað skilyrðinguna „ef **A**, þá **B**“ hverjar svo sem yrðingarnar **A** og **B** eru; þær þurfa ekki að eiga neitt sameiginlegt. Því er eðlilegt, eins og við höfum gert, að líta á orðasambandið „ef . . . , þá . . . “ sem samtengingu í sama skilningi og samtengingarnar „og“ og „eða“.

[Sumir höfundar kalla skilyrðingar „leiðingar“, en það er einkar óheppileg nafngift, því að hún virðist gefa til kynna að yrðingin „ef **A**, þá **B**“ þýði að yrðingin **B** sé með einhverjum hætti *afleiðing* af yrðingunni **A**; en svo þarf alls ekki að vera; skilyrðingin getur verið sönn þótt ekkert röksamhengi sé milli yrðinganna **A** og **B**. Ef til dæmis **A** er yrðingin „Sókrates er maður“ og **B** er yrðingin „Sókrates er dauðlegur“, þá er skilyrðingin „ef **A**, þá **B**“ (ef við leyfum okkur að skipta um röð tveggja orða til að gera útkomuna íslenzkulegri) fullyrðingin „ef Sókrates er maður, þá er Sókrates dauðlegur“. Þetta getur verið satt þó svo að í þessu tilviki sé augljóst að fullyrðingin **B** er ekki í neinum skilningi *rökfræðileg* afleiðing af fullyrðingunni **A**. Það fer betur á að nota orðið „leiðing“ um allt annað fyrirbæri[5].]

Hvenær er skilyrðing sönn? Það er kannski einfaldara að átta sig á hvenær hún er *ósönn*. Fullyrðingin „ef Sókrates er maður, þá er Sókrates dauðlegur“ er aðeins ósönn

[5] Það er samt náið samband milli skilyrðinga og leiðinga sem er ekki allskostar augljóst; við gerum grein fyrir því í svokölluðum *afleiðslusetningum* síðar í þessu riti.

ef Sókrates er maður og ekki dauðlegur; í öllum öðrum tilvikum er hún sönn. En það þýðir að hún sé sönn þá og því aðeins að Sókrates sé annaðhvort ekki maður eða hann sé dauðlegur, nema hvort tveggja sé. Við sjáum þvi:

> Skilyrðingin „ef **A**, þá **B**“ er sönn þá og því aðeins að yrðingin „(ekki **A**) eða **B**“ sé sönn.

Lítum til glöggvunar á annað dæmi: Segjum sem svo að ég segi einhvern daginn. „Ef ekki rignir á morgun, þá kem ég í vinnuna“. Hvenær mætti segja að ég hafi verið að skrökva? Aðeins ef ekki rignir á morgu og ég fer samt ekki í vinnuna. Í öllum öðrum tilvikum hef ég sagt satt; ég hef nefnilega ekki sagt neitt um hvað ég muni gera ef það rignir á morgun; ef það rignir á morgun, þá hef ég þess vegna verið að segja satt hvort sem ég fer í vinnuna eða ekki.

Þetta sýnir að við þurfum ekki á samteningunni „ef ... , þá ... “ að halda; í stað skilyrðingar „ef **A**, þá **B**“ get ég alltaf notað yrðinguna „(ekki **A**) eða **B**“.

Að lokum er næsta ljóst að samsetta yrðingin „**A** þá og því aðeins að **B**“ er sönn þá og því aðeins að samsetta yrðingin „(ef **A**, þá **B**) og (ef **B**, þá **A**)“ sé sönn, og þessa seinni yrðingu getum við samkvæmt ofansögðu umritað með því að nota einungis neitun og samtenginguna „eða“.

Drögum nú saman það sem við höfum komizt að: Við getum alveg sleppt samtengingunun „... og ... “, „ef ..., þá ... “ og „... þá og því aðeins að ... “, og látið okkur þess í stað nægja neitunina og samtenginguna „... eða ... “; því að í stað „**A** og **B**“ getum við alltaf skrifað „ekki((ekki **A**) eða (ekki **B**))“, í stað „ef **A**, þá **B**“ getum við alltaf skrifað „(ekki **A**) eða **B**“; og við eftirlátum lesanda að sjá hvað við getum skrifað í stað „**A** þá og því aðeins að **B**“.

Við fyrstu sýn virðist þetta ekki vera mikill ávinningur. Við gætum að vísu sleppt öllum samtengingunum nema „eða“ og notað hana eina ásamt neituninni „ekki“, en texti sem er þannig ritaður yrði nánast ólæsilegur. Það hefur þó þann mikla kost að því færri sem samtengingarnar eru, því færri rökreglum þurfum við á að halda, og því einfaldari verður rökfræðin okkar. Hvorn kostinn eigun við þá að taka, að sleppa öllum samtengingunum nema „eða“ og gera textann verulega torlesinn, eða hafa þær allar með og gera rökfræðina flóknari? Svo vel vill til að við getum með dálitlu kænskubragði komizt hjá þessum vanda: við notum einfaldlega allar samtengingarnar, en lítum svo á að þær séu (að samtengingunni „eða“ undanskilinni) *skammstafanir*, þannig að yrðingin „**A** og **B**“ sé ekki sjálfstæð, heldur skammstöfun fyrir „ekki((ekki **A**) eða (ekki **B**))“. Þetta hefur það í för með sér að við getum notað allar samtengingarnar, en þurfum samt á færri rökreglum að halda.

§4. Formlegt mál fyrir yrðingarökfræði

Við ætlum nú að búa til það sem kallast *formlegt mál* fyrir yrðingarökfræði.

Byrjum á að gefa mjög almenna og dálítið óformlega skilgreiningu á hvað formlegt mál er:

(4.1) Skilgreining. ***Formlegt mál*** $\mathcal{L}$ *er gefið með eftirfarandi hætti:*

A. *Gefið er* ***stafróf*** *fyrir málið; en það er eitthvert mengi $\mathcal{A}$ af táknum, sem geta verið bæði sérstök tákn eða bókstafir. Endanleg runa (hugsanlega tóm) af táknum í menginu $\mathcal{A}$ er kölluð* ***stæða*** *í málinu $\mathcal{L}$, og fjöldi tákna í slíkri runu kallast* ***lengd*** *stæðunnar.*

B. *Gefið er tiltekið mengi $\mathcal{S}$ af stæðum í málinu $\mathcal{L}$, sem við köllum* ***segðir*** *málsins $\mathcal{L}$. Venjulega er þess krafizt við getum fyrir sérhverja stæðu í málinu $\mathcal{L}$ gengið úr skugga um í endanlega mörgum skrefum hvort hún er segð eða ekki.*

Fjöldi staka í endanlegri runu er talinn með endurtekningum; runa þar sem aðeins eitt tákn kemur fyrir, en n sinnum, hefur til dæmis lengdina n. Frá mengjafræðilegu sjónarmiði má líta á stæðu í formlegu máli $\mathcal{L}$ sem vörpun $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathcal{A}$, þar sem $\mathcal{A}$ er stafróf málsins og n er náttúrleg tala; talan n er þá lengd stæðunnar.

Í skilgreiningunni er ekkert sagt um hvernig segðir málsins eru gefnar; en í öllum þeim formlegu málum sem við ætlum að fást við eru segðirnar tilteknar með því að segja hvernig búa má þær til með því að byggja þær smátt og smátt upp úr styttri stæðum samkvæmt tilteknum föstum reglum, sem við köllum ***myndunarreglur***.

Formlega málið sem við ætlum að búa til fyrir yrðingarökfræði á að hafa breytur sem við hugsum okkur að geti staðið fyrir ótilteknar fullyrðingar, og úr þessum breytum getum við búið til samsetningar með því að beita á þær neitun og tengja þær saman með samtengingum. Við viljum að því séu engin takmörk sett hve margar breytur eru í einni slíkri samsetningu, og þess vegna þurfum við að hafa stafróf með *óendanlega mörgum* bókstöfum. Það getum við gert með því að leyfa *tölusetta bókstafi* sem breytur; þannig lítum við á táknin 'p', 'p_1', 'p_7' og 'p_{2011}' sem ólíka bókstafi. Við ætlum líka að nota táknið '$\neg$' til að tákna neitun og táknið '$\vee$' til að standa fyrir samtenginguna „eða". Aðrar samtengingar verða síðan skilgreindar sem skammstafanir. Að lokum þurfum við sviga til að tryggja að rétt sé lesið úr samsetningunum.

(4.2) Skilgreining. *Við skilgreinum mál $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ fyrir yrðingarökfræði sem hér segir:*

A. *Táknin í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ eru*

(i) *fjögur sérstök tákn, nefnilega* ***vinstri sviginn*** '(', ***hægri sviginn*** ')', ***neitunartáknið*** '$\neg$' *og* ***eðunartáknið*** '$\vee$';

(ii) *bókstafirnir*

$$`p', `q', `r', `s', `p_1', `q_1', `r_1', `s_1', `p_2', `q_2', `r_2', `s_2', \ldots;$$

við leyfum alla litla bókstafi latneska stafrófsins (þótt við reynum helzt að nota bókstafina 'p', 'q', 'r' og 's', eða stafi nálægt þeim í stafrófinu), og bókstafina má tölusetja með lágvísi, sem er náttúrleg tala rituð í tugakerfi; og þessa bókstafi og tölusettu bókstafi köllum við ***yrðingabreytur***.

B. *Úr táknunum má setja saman leyfilegar samsetningar, sem við köllum* ***yrðingasnið*** *og eru segðir formlega málsins $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, en yrðingasnið er stæða búin til úr táknum málsins $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ með því að nota eftirfarandi þrjár* ***myndunarreglur*** *endanlega oft:*

(i) *Ef* $\mathbf{x}$ *er yrðingabreyta, þá er stæðan* $\mathbf{x}$*, sem hefur aðeins einn bókstaf, yrðingasnið.*

(ii) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðingasnið, þá er* $(\neg\mathbf{A})$ *yrðingasnið.*
(iii) *Ef* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *eru yrðingasnið, þá er* $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ *yrðingasnið.*

Við köllum stæðuna $(\neg\mathbf{A})$ ***neitun*** *yrðingasniðsins* $\mathbf{A}$ *og lesum hana gjarnan „ekki* $\mathbf{A}$*“ í töluðu máli; við köllum stæðuna* $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ ***eðun*** *yrðingasniðanna* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *og lesum hana gjarnan „*$\mathbf{A}$ *eða* $\mathbf{B}$*“ í töluðu máli.*

(4.3) Dæmi. Við getum búið til yrðingasnið með því að nota myndunarreglurnar aftur og aftur. Stæðurnar ‘p’ og ‘q’, sem hafa hvor um sig aðeins einn bókstaf, eru yrðingasnið samkvæmt myndunarreglu (i). Við getum notað á þær myndunarreglu (ii) og fáum yrðingasniðin ‘$(\neg p)$’ og ‘$(\neg q)$’. Á þessar stæður getum við svo notað myndunarreglu (iii) og fáum yrðingasniðið ‘$((\neg p) \vee (\neg q))$’; notum svo myndunarreglu (ii) á það yrðingasnið og fáum yrðingasniðið ‘$(\neg((\neg p) \vee (\neg q)))$’. Eins getum við notað reglu (iii) á yrðingasniðin ‘$(\neg p)$’ og ‘q’ og fáum þá yrðingasniðið ‘$((\neg p) \vee q)$’.

Með sama hætti sjáum við að stæðan ‘$((\neg q) \vee p)$’ er yrðingasnið. Nú getum við notað myndunarreglu (ii) á yrðingasniðin ‘$((\neg p) \vee q)$’ og ‘$((\neg q) \vee p)$’ og fáum yrðingasniðin ‘$(\neg((\neg p) \vee q))$’ og ‘$(\neg((\neg q) \vee p))$’. Með því að nota myndunarreglu (iii) á þessi yrðingasnið fáum við yrðingasniðið ‘$((\neg((\neg p) \vee q)) \vee (\neg((\neg q) \vee p)))$’. Notum loks myndunarreglu (ii) á þetta yrðingasnið og fáum yrðingasniðið ‘$(\neg((\neg((\neg p) \vee q)) \vee (\neg((\neg q) \vee p))))$’.

(4.4) Athugasemd. Svigarnir eru, eins og áður sagði, til að tryggja að rétt sé lesið úr segðum málsins $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Eins og málið er skilgreint verður hins vegar óhóflega mikið af svigum í yrðingasniðum. Við getum lagað það dálítið með því að taka upp reglur sem leyfa okkur að sleppa svigum þannig að eftir sem áður sé ljóst hvernig lesa skal úr segðunum; við setjum brátt fram slíkar reglur.

(4.5) Skilgreining. *Við komum okkur saman um eftirfarandi* ***skammstafanir*** *á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$*: Ef* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *eru yrðingasnið, þá skrifum við*

(i) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ *í stað* $(\neg((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B})))$*;*
(ii) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ *í stað* $((\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B})$*;*
(iii) $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ *í stað* $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))$.

Við köllum stæðuna $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ ***ogun*** *yrðingasniðanna* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *og lesum hana gjarnan „*$\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$*“ í talmáli. Við köllum stæðuna* $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ ***skilyrðingu*** *yrðingasniðanna* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *og lesum hana gjarnan „ef* $\mathbf{A}$*, þá* $\mathbf{B}$*“ í talmáli. Við köllum stæðuna* $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ ***jafngildingu*** *yrðingasniðanna* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *og lesum hana gjarnan „*$\mathbf{A}$ *þá og því aðeins að* $\mathbf{B}$*“ eða „*$\mathbf{A}$ *ef og aðeins ef* $\mathbf{B}$*“ í talmáli.*

Við fáum nú:

(4.6) Afleiddar myndunarreglur. *Ef* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *eru yrðingasnið á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$*, þá eru stæðurnar* $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$*,* $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ *og* $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ *einnig yrðingasnið á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$*.*

Sönnun: Lesandinn getur búið til sönnun með því að skrifa upp dæmi (4.3), setja allsstaðar stæðuna $\mathbf{A}$ í stað bókstafsins ‘p’ og stæðuna $\mathbf{B}$ í stað bókstafsins ‘q’ (en sleppa ensku gæsalöppunum). □

Hugmyndin í síðustu sönnun er athyglisverð: Við getum búin til nýja sönnun með því að taka gamla sönnun og setja nýjar stæður inn í stað breytistærðanna í gömlu sönnuninni. Það borgar sig að hafa fastan rithátt til að tákna stæður sem fást með því að setja stæður inn í stað breytistærða í gefinni stæðu.

(4.7) Skilgreining. *Látum* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur og látum* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ *vera stæður í málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. *Við táknum með*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$$

og stundum einnig með

$$\mathbf{I}^{\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\dots,\mathbf{B}_n}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$$

stæðuna sem fæst úr stæðunni $\mathbf{A}$ *með því að setja stæðuna* $\mathbf{B}_k$ *inn í stað yrðingarbreytunnar* $\mathbf{x}_k$ *á hverjum þeim stað sem breytan* $\mathbf{x}_k$ *kemur fyrir í stæðunni* $\mathbf{A}$ *fyrir öll* $k = 1, \dots, n$

(4.8) Viðvörun. Takið eftir að við þurfum að setja stæðurnar $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ inn í stað yrðingarbreytnanna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *allar samtímis.* Við getum fengið allt aðra útkomu ef við setjum fyrst $\mathbf{B}_1$ í stað $\mathbf{x}_1$, svo $\mathbf{B}_2$ í stað $\mathbf{x}_2$ o. s. frv., eða ef við setjum inn fyrir breyturnar í einhverri annarri röð. Útkomurnar geta orðið gerólíkar, af því að breyturnar $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ geta komið fyrir í stæðunum $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$.

Ef til dæmis $\mathbf{A}$ er yrðingasniðið '$((p \to q) \vee p)$', $\mathbf{x}$ er breytan 'p', $\mathbf{y}$ er breytan 'q', $\mathbf{B}$ er yrðingasniðið '$(q \to p)$' og $\mathbf{C}$ er yrðingasniðið '$(q \wedge p)$', þá er stæðan $\mathbf{I}^{\mathbf{B},\mathbf{C}}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{A}$ yrðingasniðið '$(((q \to p) \to (q \wedge p)) \vee (q \to p))$'. Stæðan $\mathbf{I}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}}\mathbf{I}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{y}}\mathbf{A}$ er hins vegar yrðingasniðið '$(((q \to p) \to (q \wedge (q \to p))) \vee (q \to p))$', og stæðan $\mathbf{I}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{y}}\mathbf{I}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}$ er yrðingasniðið '$((((q \wedge p) \to p) \to (q \wedge p)) \vee ((q \vee p) \to p))$'.

(4.9) Setning. *Látum* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur og gerum ráð fyrir að stæðurnar* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ *séu yrðingasnið. Þá er stæðan* $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ *líka yrðingasnið.*

Sönnun: Við sönnum setninguna með þrepun yfir lengd stæðunnar $\mathbf{A}$:

(1) Niðurstaðan er augljós ef lengdin er 1, því að þá er stæðan $\mathbf{A}$ yrðingabreyta $\mathbf{x}$, og í því tilviki er stæðan $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ yrðingasniðið $\mathbf{B}_k$ ef $\mathbf{x}_k$ er breytan $\mathbf{x}$, en yrðingasniðið $\mathbf{x}$ ef engin af breytunum $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ er breytan $\mathbf{x}$.

(2) Gerum næst ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé af gerðinni $(\neg\mathbf{C})$, þar sem $\mathbf{C}$ er yrðingasnið. Stæðan $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ er þá stæðan $(\neg\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n])$. Nú er stæðan $\mathbf{C}$ styttri en stæðan $\mathbf{A}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er stæðan $\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ yrðingasnið; og samkvæmt myndunarreglu (ii) er þá stæðan $(\neg\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n])$ einnig yrðingasnið.

(3) Gerum að lokum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé af gerðinni $(\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$, þar sem stæðurnar $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$ eru báðar yrðingasnið. Stæðan $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ er þá stæðan $(\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \vee \mathbf{D}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n])$. Stæðurnar $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$ eru styttri en $\mathbf{A}$; samkvæmt þrepunarforsendu eru stæðurnar $\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ og $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n]$ yrðingasnið; samkvæmt myndunarreglu (iii) er stæðan $(\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \vee \mathbf{D}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n])$ einnig yrðingasnið. □

Þrepunarsannanir á borð við sönnun setningar (4.9) eru það algengar að það borgar sig að setja fram um þær sérstakt lögmál. Sönnun þess fæst auðveldlega með þrepun efir lengd stæðna, alveg eins og sönnun setningar (4.9):

(4.10) Þrepunarlögmál fyrir yrðingasnið. *Gerum ráð fyrir að $\mathfrak{E}$ sé einhver eiginleiki sem stæður í formlega málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ geta haft eða ekki haft. Gerum ráð fyrir að eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Ef* $\mathbf{x}$ *er yrðingarbreyta, þá hefur stæðan* $\mathbf{x}$ *eiginleikann* $\mathfrak{E}$.
(ii) *Ef stæðan* $\mathbf{A}$ *er yrðingasnið sem hefur eiginleikann* $\mathfrak{E}$, *þá hefur stæðan* $(\neg\mathbf{A})$ *eiginleikann* $\mathfrak{E}$.
(iii) *Ef stæðurnar* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *eru yrðingasnið sem hafa bæði eiginleikann* $\mathfrak{E}$, *þá hefur stæðan* $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ *líka eiginleikann* $\mathfrak{E}$.

Að þessu gefnu hefur sérhvert yrðingasnið eiginleikann $\mathfrak{E}$. □

(4.11) Athugasemd. Í síðustu sönnun byrjar að sjást hvers vegna við reynum að hafa sem fæstar samtengingar í formlega málinu og skilgreina hinar sem skammstafanir. Ef við hefðum haft fleiri samtengingar, þá hefðum við þurft að hafa sérstaka myndunarreglu fyrir hverja þeirra. Þá hefðum við í sönnun setningar (4.9) þurft að fara í gegnum hverja þessara myndunarreglna með sama hætti og myndunarreglurnar sem við höfum sett fram; en ekki bara í þeirri sönnun, heldur þyrftum við að endurtaka það í *sérhverri* slíkri þrepunarsönnun fyrir yrðingasnið.

(4.12) Reglur um svigasetningu. Eins og þegar hefur verið minnzt á er óþarflega mikið af svigum í yrðingasniðum. Það er ljóst að ekki má alltaf sleppa svigum; yrðingasniðið ‘$((p \vee q) \wedge r)$’ segir eitthvað allt annað en yrðingasniðið ‘$(p \vee (q \wedge r))$’ (ef við setjum einhverjar raunverulegar yrðingar inn í staðinn fyrir breyturnar); og eins segir yrðingasniðið ‘$((p \to q) \to r)$’ eitthvað allt annað en yrðingasniðið ‘$(p \to (q \to r))$’.

Hins vegar er til dæmis ljóst að standi yrðingasnið eitt sér, þá er óhætt að sleppa yztu svigunum; við verðum bara að setja þá aftur, ef við ætlun að nota yrðingasniðið til að mynda stærra yrðingasnið með myndunarreglu. Og við getum fækkað svigum enn frekar ef við komum okkur saman um eftirfarandi: Við röðum neitun og samtengingunum í röð þannig:

$$‘\neg’,\quad ‘\wedge’,\quad ‘\vee’,\quad ‘\to’,\quad ‘\leftrightarrow’.$$

Við komum okkur svo saman um að svigum úr tilteknu yrðingasniði megi sleppa ef unnt er að setja þá aftur inn í stæðuna sem þannig fæst samkvæmt eftirfarandi reglum og fá þannig upphaflega yrðingasniðið til baka:

Við byrjum á að setja sviga utanum neitunartáknið ‘$\neg$’ og stytzta yrðingasniðið sem kemur næst á eftir því í stæðunni sem við erum að athuga. Ef neitunartáknið kemur oftar en einu sinni fyrir í stæðunni, þá byrjum við á því sem er lengst til hægri og rekjum okkur til vinstri.

Næst byrjum við á að setja sviga utanum eðunartáknið ‘$\vee$’ og styztu yrðingasniðin sem eru hvort sínum megin við það í stæðunni sem við erum að athuga. Ef það kemur oftar en einu sinni fyrir í stæðunni, þá byrjum við á þvi sem er lengst til hægri og rekjum okkur til vinstri.

Við göngun nú á röðina og gerum sama fyrir ogunartáknið ‘$\wedge$’, þar næst fyrir skilyrðingartáknið ‘$\to$’, og að lokum fyrir jafngildingartáknið ‘$\leftrightarrow$’.

Þetta er bezt að skýra með dæmi: Við lítum á stæðuna

$$‘p \wedge q \wedge r \to \neg p \to r \leftrightarrow \neg\neg q’.$$

Stytzta yrðingasnið sem kemur næst á eftir því neitunartákni sem er lengst til vinstri í stæðunni hefur aðeins eitt tákn, yrðingarbreytuna 'q'; við setjum sviga utanum neitunartáknið og breytuna og fáum stæðuna

$$`p \wedge q \wedge r \to \neg p \to r \leftrightarrow \neg(\neg q)'.$$

Styzta yrðingasniðið sem kemur næst á eftir neitunartákninu sem er næstlengst til hægri er nú stæðan '$(\neg q)$'; við setjum sviga utanum neitunartáknið og hana og fáum

$$`p \wedge q \wedge r \to \neg p \to r \leftrightarrow (\neg(\neg q))'.$$

Þá er aðeins eftir eitt neitunartákn, og styzta yrðingasnið sem kemur næst á eftir því hefur aðeins eitt tákn, yrðingarbreytuna 'p', og við setjum því sviga þannig:

$$`p \wedge q \wedge r \to (\neg p) \to r \leftrightarrow (\neg(\neg q))'.$$

Táknið '$\vee$' kemur ekki fyrir í stæðunni, svo að við snúum okkur að tákninu „$\wedge$', sem kemur tvisvar sinnum fyrir; við byrjum á því sem er lengst til hægri og tökum svo hitt; við fáum þá

$$`(p \wedge (q \wedge r)) \to (\neg p) \to r \leftrightarrow (\neg(\neg q))'.$$

Táknið '$\to$' kemur líka tvisvar sinnum fyrir, og við förum eins að; við fáum þá

$$`((p \wedge (q \wedge r)) \to ((\neg p) \to r)) \leftrightarrow (\neg(\neg q))'.$$

Að lokum lítum við á táknið '$\leftrightarrow$'. Allt sem vinstra megin við það stendur er yrðingasnið, og ekkert styttra yrðingasnið kemur næst á undan því til vinstri; sömu sögu er að segja um það sem hægra megin stendur. Því er aðeins eftir að setja sviga utanum allt saman; við fáum að lokum

$$`(((p \wedge (q \wedge r)) \to ((\neg p) \to r)) \leftrightarrow (\neg(\neg q)))'.$$

Þetta er rétt myndað yrðingasnið með öllum svigum sem eiga að vera, því að við teljum okkur aldrei skylt að leysa upp úr skammstöfununum sem við komum okkur saman um í skilgreiningu (4.5), því að við ætlum í raun að meðhöndla samtengingarnar „$\wedge$', '$\to$' og '$\leftrightarrow$' sem jafnrétthááar samtengingunni '$\vee$'; það að skilgreina þær sem skammstafanir var einungis herbragð til að spara okkur vinnu.

Það er rétt að taka fram að það er alls ekki skylt að sleppa öllum svigum sem leyfilegt er samkvæmt þessum reglum; við reynum að hafa nægilega marga sviga til að gera yrðingasniðin sæmilega læsileg eftir því sem kostur er.

Rétt er að leggja sérstaka áherzlu á að fyrir yrðingasnið $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ stendur stæðan $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ ávallt fyrir yrðingasniðið $(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}))$, sem er samkvæmt svigareglum hið sama og $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$; og við getum því alls ekki sleppt öllum svigunum í $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{C})$; við verðum að láta nægja að sleppa þeim yztu og skrifa $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{C}$.

(4.13) Athugasemd um pólskan ritþátt. Hér er kannski rétti staðurinn til að skýra frá að til er ritháttur fyrir yrðingarökfræði sem er þannig að engin þörf er fyrir sviga. Við skulum skilgreina annað mál $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ fyrir yrðingarökfræði sem hefur sama stafróf og málið $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, nema hvað það hefur enga sviga, en aðrar myndunarreglur fyrir segðir, nefnilega þessar:

(i) Ef $\mathbf{x}$ er yrðingabreyta, þá er stæðan $\mathbf{x}$, sem hefur aðeins einn bókstaf, segð í $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$.
(ii) Ef $\mathbf{A}$ er segð í $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$, þá er $\neg\mathbf{A}$ segð í $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$
(iii) Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru segðir í $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$, þá er $\vee\mathbf{AB}$ segð í $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$.

Til að sjá að ávallt megi lesa ótvírætt úr segðum málsins $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ þótt engir svigar séu notaðir þarf að sýna eftirfarandi: Ef $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ eru segðir á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ og $\vee\mathbf{AB}$ er sama segðin og $\vee\mathbf{CD}$, þá er $\mathbf{A}$ sama segðin og $\mathbf{C}$, og $\mathbf{B}$ er sama segðin og $\mathbf{D}$. Tökum þá fyrst eftir: Ef $\vee\mathbf{AB}$ og $\vee\mathbf{CD}$ eru sama segðin, þá er önnur af segðunum $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ upphafskafli hinnar. Okkur nægir því að sýna:

> *Ef* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{C}$ *eru segðir á málinu* $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ *og önnur þeirra er upphafskafli hinnar, þá eru þær sama segðin.*

Við sönnum þetta með þrepun yfir lengd styttri segðarinnar. Ef sú lengd er 1, þá er styttri segðin breyta, og hin segðin byrjar þá á breytu; en í málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ byrjar engin segð á breytu nema hún hafi bara eitt tákn og sé breyta; og þá er ljóst að segðirnar eru sama segðin. Ef lengdin er stærri en 1, þá byrja báðar segðirnar á '$\neg$' eða báðar á '$\vee$'. Í fyrra tilvikinu má skrifa $\mathbf{A}$ sem $\neg\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{C}$ sem $\neg\mathbf{C}_1$, þar sem $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{C}_1$ eru segðir á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$, önnur af segðunum $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{C}_1$ er upphafskafli hinnar og sú styttri er eiginlega styttri en sú styttri af segðunum $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$; því eru $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{C}_1$ sama segðin samkvæmt þrepunarforsendu, og þá eru $\mathbf{A}$ og $\mathbf{C}$ líka sama segðin. Í seinna tilvikinu er $\mathbf{A}$ segð af gerðinni $\vee\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ og $\mathbf{C}$ af gerðinni $\vee\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2$, þar sem $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ eru segðir á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$. Sú styttri af segðunum $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{C}_1$ er upphafskafli hinnar og eiginlega styttri en sú styttri af segðunum $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$. Samkvæmt þrepunarforsendu eru því $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{C}_1$ sama segðin. En þá er ljóst að sú styttri af segðunum $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{C}_2$ er upphafskafli hinnar og eiginlega styttri en sú styttri af segðunum $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu eru $\mathbf{A}_2$ og $\mathbf{C}_2$ sama segðin. En þá eru $\mathbf{A}$ og $\mathbf{C}$ sama segðin.

Látum nú $\mathcal{S}$ vera mengi allra segða á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ og $\mathcal{S}'$ vera mengi allra segða á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$. Við getum nú þýtt segðir frá öðru málinu yfir á hitt sem hér segir: Við skilgreinum vörpun („þýðingu") $\theta : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}, \mathbf{A} \mapsto \theta[\mathbf{A}]$ með þrepun þannig að $\theta[\mathbf{x}]$ sé $\mathbf{x}$ ef $\mathbf{x}$ er breyta, $\theta[\neg\mathbf{A}]$ sé $(\neg\theta[\mathbf{A}])$ og $\theta[\vee\mathbf{AB}]$ sé $(\theta[\mathbf{A}] \vee \theta[\mathbf{B}])$. Samkvæmt ofansögðu er þessi vörpun vel skilgreind, því að við getum ekki skrifað segð á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ sem $\vee\mathbf{AB}$ nema með einum hætti. Sömuleiðis getum við skilgreint vörpun („þýðingu") $\eta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}', \mathbf{A} \mapsto \eta[\mathbf{A}]$ með þrepun þannig að $\eta[\mathbf{x}]$ sé $\mathbf{x}$ ef $\mathbf{x}$ er breyta, $\eta[(\neg\mathbf{A})]$ sé $\neg\eta[\mathbf{A}]$ og $\eta[(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})]$ sé $\vee\eta[\mathbf{A}]\eta[\mathbf{B}]$.

Nú er auðséð með þrepun að $\theta[\eta[\mathbf{A}]]$ er $\mathbf{A}$ fyrir sérhverja segð $\mathbf{A}$ úr $\mathcal{S}$, og að $\eta[\theta[\mathbf{A}]]$ er $\mathbf{A}$ fyrir sérhverja segð $\mathbf{A}$ úr $\mathcal{S}'$.

Við getum líka skilgreint ogun, skilyrðingu og jafngildingu sem skammstafanir á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ þannig: Við látum $\wedge\mathbf{AB}$ vera skammstöfun fyrir $\neg\vee\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$, látum $\to\mathbf{AB}$ vera skammstöfun fyrir $\vee\neg\mathbf{AB}$ og $\leftrightarrow\mathbf{AB}$ vera skammstöfun fyrir $\wedge{\to}\mathbf{AB}{\to}\mathbf{BA}$, sem aftur er skammstöfun fyrir $\neg\vee\neg\vee\neg\mathbf{AB}\neg\vee\neg\mathbf{BA}$. Þýðingarnar θ og η virða þessar skammstafanir í þeim skilningi að fyrir allar segðir $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ í $\mathcal{S}'$ er $\theta[(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})]$ segðin $\wedge\mathbf{AB}$, segðin $\theta[(\mathbf{A} \to \mathbf{B})]$ er segðin $\to\mathbf{AB}$ og segðin $\theta[(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})]$ er segðin $\leftrightarrow\mathbf{AB}$; og sömuleiðis höfum við að fyrir allar segðir $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ í $\mathcal{S}$ er $\eta[\wedge\mathbf{AB}]$ segðin $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, segðin $\eta[\to\mathbf{AB}]$ er segðin $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ og segðin $\eta[\leftrightarrow\mathbf{AB}]$ er segðin $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$.

Einn kosturinn við pólska ritháttinn er að hann er miklu knappari. Þannig sjáum við að segðin '$\leftrightarrow pq$' á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$ er skammstöfun fyrir segðina '$\neg\vee\neg\vee\neg pq\neg\vee\neg qp$', sem hefur 12 tákn, en segðin '$(p \leftrightarrow q)$' á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ er skammstöfun fyrir yrðingasniðið '$(\neg((\neg((\neg p) \vee q)) \vee (\neg((\neg q) \vee p))))$', sem hefur 28 tákn. Á hinn bóginn verða langar segðir í pólskum rithætti yfirleitt afar torlesnar, jafnvel þótt skammstafanir séu notaðar, en skammstafanirnar og sviganiðurfellingarreglurnar gera yrðingasnið á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ auðlesnari en ella. Við munum því ekki nota pólskan ritthátt í venjulegri umfjöllun um yrðingasnið, en það er heppilegt að geta gripið til hans. Oft er jafnvel þægilegt að hugsa sér að yrðingasniðin á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ séu „skammstafanir“ fyrir samsvarandi segðir á málinu $\mathcal{L}'(\mathcal{P})$, og það munum við raunar gera í seinni köflum þessara fyrirlestra; þess ber þá að gæta að „skammstafanirnar“ eru að jafnaði lengri en það sem þær standa fyrir og væru því réttnefndari „langstafanir“, þótt við notum frekar hitt orðið af því að það skilst þrátt fyrir allt betur.

(4.14) Athugasemd. Eins og við sögðum áður gerum við ráð fyrir að yrðingar séu annaðhvort sannar eða ósannar. Það er þægilegt að geta talað um „sanngildi“ yrðinga: Við skulum koma okkur saman um að kalla tölurnar 0 og 1 ***sanngildi***, og við segjum að yrðing „hafi sanngildið 1“ ef hún er sönn, en að hún „hafi sanngildið 0“ ef hún er ósönn.

(4.15) Skilgreining. (1) *Látum n vera náttúrlega tölu þannig að $n \geq 1$. Vörpun*

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\},$$

*kallast n-**stætt sannfall**. Sannföll eru líka stundum kölluð **Boole-föll**.*

(2) *Látum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera ólíkar yrðingabreytur og látum $\mathcal{S}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ vera mengi allra yrðingasniða $\mathbf{A}$ í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ þannig að engar yrðingabreytur nema breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ komi fyrir í yrðingasniðinu $\mathbf{A}$. Með þrepun skilgreinum við fyrir sérhvert yrðingasnið $\mathbf{A}$ úr menginu $\mathcal{S}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ n-stætt sannfall*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

þannig að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt fyrir sérhvert stak $t = (t_1, \ldots, t_n)$ úr $\{0,1\}^n$:

(i) *Ef $\mathbf{A}$ er yrðingabreytan $\mathbf{x}_k$, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := t_k.$$

(ii) *Ef $\mathbf{A}$ er yrðingasnið $(\neg\mathbf{C})$, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{ef } f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(iii) *Ef $\mathbf{A}$ er yrðingasnið $(\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := \begin{cases} 0 & \text{ef } f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0, \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Við köllum fallið $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$ ***sannfall yrðingasniðsins*** $\mathbf{A}$ ***með tilliti til yrðingabreytnanna*** $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$.

(4.16) Fylgisetning. *Látum* $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur og* $\mathcal{S}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ *vera eins og í síðustu setningu.*

(1) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðingasnið* $(\mathbf{C}\wedge\mathbf{D})$*, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{ef } f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(2) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðingasnið* $(\mathbf{C}\to\mathbf{D})$*, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := \begin{cases} 0 & \text{ef } f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1 \text{ og } f^{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0, \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

(3) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðingasnið* $(\mathbf{C}\leftrightarrow\mathbf{D})$*, þá er*

$$f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{ef } f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Sönnun: Við látum nægja að sanna fyrsta liðinn, því að hinir fást með svipuðum hætti. Athugum að '$\wedge$' er skilgreint tákn og $(\mathbf{C}\wedge\mathbf{D})$ er samkvæmt skilgreiningu yrðingasniðið $\neg(\neg\mathbf{C}\vee\neg\mathbf{D})$. Samkvæmt lið (i) í skilgreiningu (4.15) er $f^{\neg(\neg\mathbf{C}\vee\neg\mathbf{D})}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$ þá og því aðeins að $f^{\neg\mathbf{C}\vee\neg\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$; en samkvæmt lið (ii) gerist það þá og því aðeins að $f^{\neg\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\neg\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$, og samkvæmt lið (i) er það aftur jafngilt $f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$; og það var einmitt það sem sýna átti. □

(4.17) Athugasemd. Síðasta skilgreining leyfir okkur að reikna út sannföllin $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$ fyrir sérhvert yrðingasnið í $\mathcal{S}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$, og fylgisetning (4.16) hjálpar til, ef í yrðingasniðinu $\mathbf{A}$ koma fyrir skilgreindu táknin '$\wedge$', '$\to$' og '$\leftrightarrow$'.

Tökum eftir að liður (i) í skilgreiningu (4.15) jafngildir því að fyrir öll yrðingasnið $\mathbf{A}$ gildi

$$f^{\neg\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} = 1 - f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$$

og að liður (iii) í (4.15) og liður (1) í (4.16) jafngilda því að

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{A}\vee\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) &= \max\{f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t), f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t)\} \quad \text{og} \\ f^{\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) &= \min\{f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t), f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t)\}. \end{aligned}$$

Ef við skilgreinum, eins og oft er gert, fyrir raunföll $f, g : X \to \mathbb{R}$ á mengi X raunföllin $f\vee g : X\to\mathbb{R}$ og $f\wedge g : X\to\mathbb{R}$ með því að setja

$$(f\vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{og} \quad (f\wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

fyrir sérhvert stak x úr menginu X, þá getum við skrifað

$$f^{\mathbf{A}\vee\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} = f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} \vee f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} \quad \text{og} \quad f^{\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} = f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} \wedge f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}.$$

(4.18) Sanntöflur. Við hugsum okkur að yrðingabreyta geti tekið sanngildin 0 eða 1 eftir því hvort yrðingin sem hún stendur fyrir er sönn eða ósönn. Sannföllum yrðingasniða má lýsa með töflum, svokölluðum „sanntöflum“. Hentugt er að segja að yrðingasnið sé n-***stætt*** ef það hefur nákvæmlega n ólíkar breytur; fyrir slíkt yrðingasnið getum við búið til n-stætt sannfall. Látum $\mathbf{A}$ vera n-stætt yrðingasnið og $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera upptalningu allra breytnanna sem koma fyrir í yrðingasniðinu $\mathbf{A}$. Við getum þá útbúið töflu sem hefur $n+1$ dálk; yfir fyrstu n dálkunum standa breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, en yfir síðasta dálkinum yrðingasniðið $\mathbf{A}$; þar fyrir neðan koma svo 2^n línur sem sýna í fyrstu n dálkunum alla möguleika á sanngildunum sem breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ geta haft, en í síðasta dálki er gildið $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t_1, \ldots, t_n)$, þar sem t_k er það gildi breytunnar $\mathbf{x}_k$ sem sýnt er í sömu línu. Svona töflu köllum við ***sanntöflu yrðingasniðsins*** $\mathbf{A}$. Útlit sanntöflunnar er háð því í hvaða röð við höfum breyturnar; einnig er okkur í sjálfsvald sett í hvaða röð við höfum línurnar, en þægilegt er að velja ávallt einhverja kerfisbundna röð, til dæmis þá sem samsvarar „stafrófsröð“ gildanna $t_1, \ldots, t_n$ sem breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ geta tekið.

Einföldustu sanntöflurnar eru fyrir yrðingasniðin sem hafa aðeins eina breytu, svo sem yrðingasniðin ‘p’ og ‘$\neg p$’; þau eru 1-stæð og sanntöflurnar eru svona:

p	p
0	0
1	1

p	$\neg p$
0	1
1	0

En við höfum einnig fleiri 1-stæð yrðingasnið, svo sem yrðingasniðin‘$p \vee \neg p$’ og ‘$p \wedge \neg p$’, en sanntöflur þeirra eru svona:

p	$p \vee \neg p$
0	1
1	1

p	$p \wedge \neg p$
0	0
1	0

Sérlega mikilvægar eru sanntöflurnar fyrir tvístæðu yrðingasniðin ‘$p \vee q$’, ‘$p \wedge q$’, ‘$p \to q$’ og ‘$p \leftrightarrow q$’, en þær eru svona:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Útfrá þessum töflum getum við fundið sanntöflur allra samsettra yrðingasniða: Til að finna sanntöflu margsamsetts yrðingasniðs getur verið hentugt að bæta við dálkum fyrir styttri yrðingasniðin sem það er sett saman úr; til dæmis er hentugt að reikna út sanntöflu fyrir yrðingasniðið ‘$((p \to q) \wedge p) \to q$’ með því að reikna fyrst út sanngildi yrðingasniðanna ‘$p \to q$’ og ‘$p \wedge (p \to q)$’; alla reikningana má sýna í eftirfarandi töflu:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Ljóst ætti að vera að þessi aðferð leyfir okkur að reikna út sanntöflur fyrir hvaða yrðingasnið sem vera skal; en töflurnar sem á þarf að halda verða fljótt afar stórar ef breyturnar eru margar og samsetning yrðingasniðsins flókin: Ef til dæmis breyturnar eru sex, þá þarf taflan að hafa 64 línur.

Síðasta taflan í síðustu athugasemd sýnir okkur þá athyglisverðu niðurstöðu að sannfall yrðingasniðsins ‘$((p \to q) \wedge p) \to q$’ er fastafallið sem tekur ávallt gildið 1. Slík yrðingasnið eru merkileg, því að þau gefa okkur ávallt sannar fullyrðingar ef við setjum einhverjar tilteknar fullyrðingar (úr einhverju tilteknu máli, til dæmis íslenzku) inn í stað yrðingabreytnanna, hvort sem fullyrðingarnar sem við setjum inn fyrir breyturnar eru sannar eða ósannar.

Tökum eftir að sá eiginleiki að sannfall yrðingasniðs með tilliti til einhverrar upptalningar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ á breytunum sem koma fyrir í yrðingasniðinu sé fasti er óháð röðinna á breytunum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$; sannfall yrðingasniðsins með tilliti til breytnanna í einhverri annarri röð verður áfram sami fastinn. Þetta leyfir okkur að skilgreina:

(4.19) Skilgreining. (1) *Við segjum að yrðingasnið* $\mathbf{A}$ *sé* ***sísanna*** *ef sannfall þess* $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$ *með tilliti til einhverrar (og þar með sérhverrar) upptalningar* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *yrðingarbreytnanna sem koma fyrir í* $\mathbf{A}$ *er fastafallið* 1.

Við segjum að yrðingasnið $\mathbf{A}$ *sé* ***mótsögn*** *ef sannfall þess* $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$ *með tilliti til einhverrar (og þar með sérhverrar) upptalningar* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *yrðingarbreytnanna sem koma fyrir í* $\mathbf{A}$ *er fastafallið* 0.

(2) *Við segjum að yrðingasnið* $\mathbf{B}$ *sé* ***rökafleiðing*** *af yrðingasniði* $\mathbf{A}$ *ef yrðingasniðið* $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ *er sísanna*

(3) *Við segjum að yrðingasnið* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *séu* ***rökfræðilega jafngild*** *ef yrðingasniðið* $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ *er sísanna.*

(4.20) Dæmi. (1) yrðingasniðið ‘$p \vee \neg p$’ er sísanna, eins og sést á töflu í (4.18). Hún er einatt kölluð *tertium non datur* upp á latínu; það þýðir „hið þriðja er ekki gefið (ekki fyrir hendi)“. Hún segir að sérhver yrðing sé annaðhvort sönn eða ósönn; það sé enginn þriðji kostur. Á íslenzku hefur þessi regla verið kölluð „lögmálið um annað tveggja“.

(2) Lesandinn getur auðveldlega sannfært sig um að eftirfarandi þrjú yrðingasnið

eru sísönnur:

$$\text{‘}p \vee p \to p\text{’},$$
$$\text{‘}p \to p \vee q\text{’},$$
$$\text{‘}(p \to q) \to (r \vee p \to q \vee r)\text{’}.$$

(3) yrðingasniðin ‘$p \wedge \neg p$’ og ‘$p \leftrightarrow \neg p$’ eru dæmi um mótsagnir.

(4) yrðingasniðið ‘p’ er rökafleiðing af yrðingasniðinu ‘$p \wedge q$’. yrðingasniðið ‘q’ er rökafleiðing af yrðingasniðinu ‘$p \wedge (p \to q)$’.

(5) yrðingasniðin ‘p’ og ‘$\neg\neg p$’ eru rökfræðilega jafngild. yrðingasniðin ‘$p \to q$’ og ‘$\neg q \to \neg p$’ eru rökfræðilega jafngild.

(4.21) Setning. *Ef yrðingasniðin* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *eru sísönnur, þá er yrðingasniðið* $\mathbf{B}$ *sísanna.*

Sönnun: Látum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera upptalningu yrðingabreytnanna sem koma fyrir annaðhvort í $\mathbf{A}$ eða í $\mathbf{B}$. Gerum ráð fyrir að yrðingasniðið $\mathbf{B}$ sé ekki sísanna. Þá er til stak $t = (t_1, \ldots, t_n)$ í $\{0,1\}^n$ þannig að $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. Nú er $\mathbf{A}$ sísanna, svo að $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$, og því er $f^{\neg\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. En þá er líka $f^{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{(\neg\mathbf{A})\vee\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$ í mótsögn við þá forsendu að $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sé sísanna. □

(4.22) Setning. *Gerum ráð fyrir að yrðingasniðið* $\mathbf{A}$ *sé sísanna, látum* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur og látum* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *vera yrðingasnið. Þá er yrðingasniðið* $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$ *líka sísanna.*

Sönnun: Látum f vera sannfall fyrir yrðingasniðið $\mathbf{A}$ og g vera sannfall fyrir yrðingasniðið $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$. Ljóst er að gildi fallsins g er jafnt gildi fallsins f í einhverjum punkti t þannig að sum hnit punktsins t séu hugsanlega gefin með gildum sannfalla fyrir yrðingasniðin $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$, en önnur ekki; við þurfum ekki að skrifa nákvæmlega upp hvernig þessi punktur er gefinn (þótt það sé gerlegt), því að það nægir að vita að fallið f tekur aðeins gildið 1, og því getur fallið g ekki tekið neitt annað gildi en 1. □

(4.23) Setning. *Látum* f *vera eitthvert* n*-stætt sannfall. Þá er til yrðingasnið* $\mathbf{A}$ *ásamt* n *ólíkum breytum* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *þannig að* $f = f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$.

Sönnun: Við getum lýst fallinu f með töflu

t_1	$\cdots$	t_n	$f(t_1, \ldots, t_n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

sem hefur 2^n línur og er þannig að sérhver möguleg samsetning á gildum breytistærðanna $t_1, \ldots, t_n$ kemur fyrir í einhverri línu og í aftasta dálki sömu línu standi samsvarandi gildi fallins f. Fyrir sérhvert $i = 1, \ldots, 2^n$ og $j = 1, \ldots, n$ látum við $\mathbf{P}_{ij}$

vera yrðingarbreytuna $\mathbf{x}_j$ ef talan 1 stendur í j-ta dálki i-tu línu, en látum $\mathbf{P}_{ij}$ vera yrðingasniðið $(\neg\mathbf{x}_j)$ ef þar stendur talan 0. Látum svo $\mathbf{A}_i$ vera yrðingasniðið

$$\mathbf{P}_{i1} \wedge \mathbf{P}_{i2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}_{in}$$

fyrir $i = 1, \ldots, 2^n$ og $\mathbf{A}$ vera yrðingasniðið

$$\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2} \vee \cdots \vee \mathbf{A}_{i_r},$$

þar sem $i_1, \ldots, i_r$ eru númerin á línunum þar sem talan 1 stendur í lokadálkinum (þar sem gildi fallsins f standa), að því gefnu að slíkar línur séu til. Ef engar slíkar línur eru til (með öðrum orðum ef f er núllfallið), þá látum við $\mathbf{A}$ vera yrðingasniðið

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n \wedge \neg\mathbf{x}_1 \wedge \neg\mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \neg\mathbf{x}_n.$$

Lesandinn ætti auðveldlega að geta sannfært sig um að í báðum tilvikum hefur yrðingasniðið $\mathbf{A}$ sannfallið f með tilliti til yrðingarbreytnanna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. $\square$

(4.24) Athugasemd. Við höfum þegar reynt að rökstyðja að við megum skilgreina samtengingarnar „ ... og ... “, „ef ..., þá ...“ og „ ... þá og því aðeins að ...“ útfrá neituninni „ekki“ og samtengingunni „ ... eða ...“. Þar sem öll yrðingasnið voru mynduð með því að nota einungis neitunina „ekki“ og samtenginguna „ ... eða ...“ er freistandi að líta svo á að setning (4.23) segi okkur meðal annars að útfrá þeim megi skilgreina *allar* samtengingar sem eru þannig að sanngildi fullyrðingar sem er sett saman með þeim sé aðeins háð sanngildi fullyrðinganna sem hún er sett saman úr.

Ljóst er að fjöldi n-stæðra sannfalla er 2^{2^n}, og sér í lagi eru tvístæð sannföll 16 talsins. Nú getum við búið til tungumál $\mathcal{L}^*$ sem er „stærra“ en málið $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ með því að hafa í því eitt sérstakt tákn fyrir sérhvert tvístætt sannfall: Við höfum svigana og neitunartáknið '$\neg$' með í málinu $\mathcal{L}^*$. Auk þess höfum við 16 önnur tákn, sem við getum kallað ***tvístæð***. Við látum gömlu táknin okkar '$\vee$', '$\wedge$', '$\rightarrow$' og '$\leftrightarrow$' teljast áfram vera tákn í málinu $\mathcal{L}^*$ og úthlutum þeim sannföllum með sömu töflum og áður; en þó er sá munur á að við lítum ekki á táknin '$\wedge$', '$\rightarrow$' og '$\leftrightarrow$' sem skammstafanir, heldur sem raunveruleg tákn í málinu. Við þurfum því að hafa myndunarreglu fyrir *sérhvert* tvístætt tákn $\mathbf{s}$ sem leyfir okkur að mynda nýja segð $(\mathbf{AsB})$ fyrir allar segðir $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ í $\mathcal{L}^*$. Við tilgreinum aðeins tvö af táknunum 12 sem ekki hafa verið nefnd, nefnilega táknin '$\downarrow$' og '$|$', og látum lesandanum eftir að nota hugmyndaflugið til að smíða hin. Við hugsum okkur að örin '$\downarrow$' eigi að standa fyrir „hvorki ... né ... “, en að strikið '$|$' eigi að standa fyrir „ekki bæði ... og ... “. Sanntöflur þessara tákna eiga að vera þessar:

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Með sama hætti og fyrir málið $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ getum við skilgreint sannfall fyrir sérhvert yrðingasnið (með tilliti til ólíkra breytna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ þannig að sérhver breyta sem kemur fyrir í yrðingasniðinu sé ein af breytunum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$; við skilgreinum það með þrepun líkt og áður, nema nú þurfum við að tilgreina hvernig sannfall segðar $(\mathbf{AsB})$ reiknast útfrá sannföllum segðanna $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ fyrir *sérhvert* tvístætt tákn $\mathbf{s}$; það nægir ekki að hafa bara regluna fyrir táknið '$\vee$'. Við getum þá talað um sísönnur í málinu $\mathcal{L}^*$, um rökfræðilega jafngildar segðir o. s. frv., rétt eins og í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.

Segjum nú að mengi af sérstökum táknum (en þó ekki svigum) sé ***nægjanlegt*** ef sérhver segð í $\mathcal{L}^*$ er rökfræðilega jafngild segð sem notar einungis tákn úr menginu (auk sviga). Það jafngildir því að sérhvert sannfall megi búa til útfrá sannföllum táknanna í menginu. Ef við lítum aftur á sönnunina á setningu (4.23), þá sýnir hún beint að mengið {'$\neg$','$\vee$','$\wedge$'} er nægjanlegt; en við vitum að segðin '$p\wedge q$'er rökfræðilega jafngild segðinni '$(\neg((\neg p)\vee(\neg q)))$', og því er mengið {'$\neg$','$\vee$'} nægjanlegt. En nú er líka segðin '$p\vee q$' rökfræðilega jafngild segðinni '$(\neg((\neg p)\wedge(\neg q)))$, og því er mengið {'$\neg$','$\wedge$'} einnig nægjanlegt. Tökum einnig eftir að segðin '$p\vee q$' er rökfræðilega jafngild segðinni $((\neg p) \to q)$', og það leyfir okkur að álykta að mengið {'$\neg$','$\to$'} sé nægjanlegt.

Athugum nú að

$$\text{segðin '}(\neg p)\text{' er rökfræðilega jafngild segðinni '}(p \downarrow p)\text{'}$$

og að

$$\text{segðin '}(p \wedge q)\text{' er rökfræðilega jafngild segðinni '}((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))\text{',}$$

og af því leiðir að mengið {'$\downarrow$'} er nægjanlegt. Eins má sjá að

$$\text{segðin '}(\neg p)\text{' er rökfræðilega jafngild segðinni '}(p \mid p)\text{'}$$

og að

$$\text{segðin '}(p \vee q)\text{' er rökfræðilega jafngild segðinni '}((p \mid p) \mid (q \mid q))\text{',}$$

svo að mengið {'$|$'} er líka nægjanlegt.

Við höfum kosið að skilgreina mál fyrir yrðingarökfræði útfrá táknunum '$\neg$' og '$\vee$' og skilgreina önnur tákn útfrá þeim. En ljóst ætti að vera að við gætum alveg eins byggt upp yrðingarökfræði útfrá hvaða nægjanlegu mengi af táknum í málinu $\mathcal{L}^*$ sem vera skal. Við getum valið eitthvert slíkt nægjanlegt mengi af táknum, kallað tákn þess „undirstöðutákn“ og skilgreint önnur tákn útfrá þeim. Við þyrftum að nota myndunarreglur aðeins fyrir undirstöðutáknin. (Við myndum líka þurfa að velja okkur frumsendur fyrir yrðingarökfræði eftir því hvaða undirstöðutákn við notum; en um frumsendur fjöllum við í næstu grein.)

Sér í lagi gætum við komizt af með eitt tákn ásamt svigum, nefnilega annaðhvort táknanna '$\downarrow$' eða '$|$'. Við gætum raunar líka sleppt svigunum með því að nota pólskan ritháátt. Sá sparnaður sem hlytist af að nota einungis eitt tákn yrði hins vegar dýru verði keyptur, því að læsileiki textans mundi hrapa niður úr öllu valdi. Segjum svo að við vildum einungis nota táknið '$\downarrow$' og reynum að skilgreina '$(p \to q)$' útfrá því. Nú er einfalt að sjá að segðin '$(p \to q)$' er rökfræðilega jafngild segðinni '$(\neg(p \wedge (\neg q)))$' (í málinu $\mathcal{L}^*$) og því einnig segðinni '$(\neg(p \wedge (q \downarrow q)))$', sem aftur er rökfræðilega jafngild segðinni '$(\neg((p \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))))$', og hún er að lokum jafngild segðinni

$$\text{'}(((p \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))))\text{',}$$

sem í pólskum ritHætti yrði

$$\text{‘} \downarrow\downarrow\downarrow pp \downarrow\downarrow qq \downarrow qq \downarrow\downarrow pp \downarrow\downarrow qq \downarrow qq\text{’},$$

Það þarf glöggt auga til að sjá á svipstundu að þetta standi fyrir „ef p, þá q“.

Sýnum að lokum til gamans eftirfarandi staðreynd, sem er dálítið skemmtileg, en að því bezt verður séð vitagagnslaus:

(4.25) Setning. *Látum* $\mathbf{s}$ *vera tvístætt tákn í málinu* $\mathcal{L}^*$ *þannig að mengið* $\{\mathbf{s}\}$ *sé nægjanlegt. Þá er* $\mathbf{s}$ *annaðhvort táknið ‘*$\downarrow$*’ eða táknið ‘*$|$*’.*

Sönnun: Látum $\mathbf{A}$ vera segðina $p\,\mathbf{s}\,q$ og $f := f^{\mathbf{A}}_{\text{‘}p\text{’},\text{‘}q\text{’}}$ vera sannfall segðarinnar $\mathbf{A}$ með tilliti til breytnanna ‘p’ og ‘q’. Ef $f(1,1) = 1$, þá tæki sannfall sem er byggt á tákninu $\mathbf{s}$ einu saman alltaf gildið 1 ef allar breytur þess taka gildið 1. En þá er ljóst að segðin ‘$(\neg p)$’ er ekki skilgreinanleg útfrá táknninu $\mathbf{s}$, því að hún tekur gildið 0 ef ‘p’ tekur gildið 1. Því er $f(1,1) = 0$. Með nákvæmlega sama hætti sést að $f(0,0) = 1$. Sanntaflan fyrir $\mathbf{s}$ er því

p	q	$p\,\mathbf{s}\,q$
0	0	1
0	1	x
1	0	y
1	1	0

þar sem $x, y \in \{0,1\}$. Ef $x = 0$ og $y = 1$, þá væri segðin $p\,\mathbf{s}\,q$ rökfræðilega jafngild segðinni ‘$\neg q$’, en ef $x = 1$ og $y = 0$, þá væri segðin $p\,\mathbf{s}\,q$ rökfræðilega jafngild segðinni ‘$\neg p$’. Í báðum tilvikum fengist að táknið $\mathbf{s}$ væri skilgeinanlegt útfrá tákninu ‘$\neg$’, og því væri mengið $\{\text{‘}\neg\text{’}\}$ nægjanlegt. En það er fráleitt, því að með neitunartákninu ‘$\neg$’ einu saman getum við einungis búið til stæður með einni breytu og þar með aðeins einstæð sannföll. Því er annaðhvort $x = y = 0$, og þá er $\mathbf{s}$ táknið ‘$\downarrow$’, eða $x = y = 1$, og þá er $\mathbf{s}$ táknið ‘$|$’. $\square$

§5. Frumsendur fyrir yrðingarökfræði

(5.1) Skilgreining. ***Formleg kenning*** $\mathcal{T}$ *er gefin með eftirfarandi hætti:*

A. *Gefið er formlegt mál* $\mathcal{L}(\mathcal{T})$*, sem við köllum* ***mál kenningarinnar*** $\mathcal{T}$*.*
B. *Gefið er tiltekið mengi* $\mathcal{A}$ *af segðum á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{T})$*; segðirnar í menginu* $\mathcal{A}$ *kallast* ***frumsendur kenningarinnar*** $\mathcal{T}$*.*
C. *Gefnar eru endanlega margar* ***rökreglur****. Sérhver rökregla segir að segðir af tiltekinni gerð hafi einhverja segð af tiltekinni gerð sem* ***afleiðingu****.*

Venjulega er þess krafizt að fyrir gefna segð á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ *megi í endanlega mörgum skrefum ganga úr skugga um hvort hún er frumsenda kenningarinnar* $\mathcal{T}$ *eða ekki. Regla sem leyfir okkur að búa til frumsendur í kenningunni* $\mathcal{T}$ *er kölluð* ***frumsendugrip****.*

Sönnun *í formlegri kenningu* $\mathcal{T}$ *er endanleg runa* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *af segðum á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ *þannig að fyrir sérhvert* $k = 1, \ldots, n$ *sé segðin* $\mathbf{A}_k$ *annaðhvort frumsenda eða* *afleiðing einhverra af segðunum* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ *framar í rununni samkvæmt einhverri rökreglu kenningarinnar. Við segjum að segð* $\mathbf{A}$ *sé* ***setning*** *í kenningunni* $\mathcal{T}$ *og skrifum*

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$$

ef til er sönnun $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *í kenningunni* $\mathcal{T}$ *þannig að* $\mathbf{A}_n$ *sé segðin* $\mathbf{A}$*. Við skrifum líka „*$\vdash \mathbf{A}$*“ í stað „*$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$*“ ef ljóst er af samhenginu um hvaða kenningu er verið að tala.*

Látum $\mathcal{T}$ *vera formlega kenningu með frumsendumengi* $\mathcal{A}$ *og* $\mathcal{H}$ *vera mengi af segðum á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{T})$*. Við táknum með* $\mathcal{T}[\mathcal{H}]$ *kenninguna sem fæst með því að bæta öllum segðunum í menginu* $\mathcal{H}$ *við frumsendur kenningarinnar* $\mathcal{T}$*; með öðrum orðum hefur kenningin* $\mathcal{T}[\mathcal{H}]$ *frumendumengi* $\mathcal{A} \cup \mathcal{H}$*, en sama mál og sömu rökreglur og formlega kenningin* $\mathcal{T}$*. Við skrifum*

$$\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$$

til að gefa til kynna að segð $\mathbf{A}$ *sé setning í kenningunni* $\mathcal{T}[\mathcal{H}]$ *og skrifum líka „*$\mathcal{H} \vdash \mathbf{A}$*“ ef ljóst er af samhenginu hver kenningin* $\mathcal{T}$ *á að vera. Ef mengið* $\mathcal{H}$ *hefur aðeins endanlega mörg yrðingasnið* $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_m$*, þá skrifum við líka „*$\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_m \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$*“ í stað „*$\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$*“.*

Formleg kenning ákvarðast af máli sínu, frumsendum og rökreglum.

(5.2) Athugasemdir. (1) Ef $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ er sönnun í formlegri kenningu $\mathcal{T}$, þá er *sérhver* af segðunum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ setning í kenningunni $\mathcal{T}$.

(2) Látum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ vera endanlega runu af segðum á máli formlegar kenningar $\mathcal{T}$ þannig að fyrir sérhvert $k = 1, \ldots, n$ sé segðin $\mathbf{A}_k$ frumsenda, *setning í* $\mathcal{T}$ eða afleiðing einhverra af segðunum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ framar í rununni samkvæmt einhverri rökreglu kenningarinnar. Þá er $\mathbf{A}_n$ setning í kenningunni $\mathcal{T}$, því að fyrir hverja segð $\mathbf{A}_k$ í rununni sem er setning í $\mathcal{T}$ en hvorki frumsenda né bein afleiðing af segðum framar í röðinni má bæta sönnun hennar inn í rununa fyrir framan $\mathbf{A}_k$ og fá þannig sönnun segðarinnar $\mathbf{A}_n$. Við leyfum okkur þá að segja að runan $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ sé einnig sönnun í kenningunni $\mathcal{T}$. Þetta er í samræmi við venjulega notkun setninga í stærðfræði og þýðir að við þurfum ekki að sanna sérhverja setningu upp á nýtt í hvert skipti sem við notum hana; það mundi vissulega gera formlegar sannanir óttalega langar.

(3) Takið vel eftir að táknið „$\vdash$“ eða „$\vdash_{\mathcal{T}}$“ er tákn *á yfirmálinu*, og að fullyrðing af gerðinni „$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$“ er *fullyrðing á yfirmálinu*, en ekki í kenningunni $\mathcal{T}$.

(5.3) Skilgreining. *Tilgreinum formlega kenningu* $\mathcal{P}$ *fyrir yrðingarökfræði þannig:*

A. *Mál kenningarinnar* $\mathcal{P}$ *er formlega málið* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ *úr skilgreiningu* (4.2).
B. *Frumsendur kenningarinnar* $\mathcal{P}$ *eru gefnar með þremur frumsendugripum;*

   F1. $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.
   F2. $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$.
   F3. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C})$.

   Þetta ber að skilja svo að fyrir öll yrðingasnið $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *og* $\mathbf{C}$ *séu yrðingasniðin í frumsendugripunum* **F1**, **F2** *og* **F3** *frumsendur í kenningunni* $\mathcal{P}$*.*
C. *Kenningin* $\mathcal{P}$ *hefur aðeins eina rökreglu, sem kallast* ***modus ponens*** *og er þannig:*

MP. *Af* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *og* $\mathbf{A}$ *leiðir* $\mathbf{B}$.

(5.4) Athugasemdir. (1) Kenningin $\mathcal{P}$ hefur *óendanlega margar* frumsendur.

(2) Þar sem formlega kenningin $\mathcal{P}$ er eina kenningin sem við ætlum að fást alvarlega við í þessari grein látum við nægja að skrifa „$\vdash \mathbf{A}$“ í stað „$\vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{A}$“. Rökreglan **MP** segir þá að fyrir öll yrðingasnið $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ gildi:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}.$$

Af því leiðir svo að fyrir sérhvert mengi $\mathcal{H}$ af yrðingasniðum (hugsanlega tómt) gildir:

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B}.$$

(3) Fjölmörg frumsendukerfi eru til fyrir yrðingarökfræði, eins og lesandinn getur fundið með því að blaða í ólíkum kennslubókum. Þau gefa þó öll af sér sömu setningarnar. Frumsendukerfið sem hér er notað er valið vegna þess að það er einfalt og auðvelt að átta sig á því, þótt sumum kunni kannski að finnast að röðin á bókstöfunum í **Fr3** skrýtin. En það á sér skýringu sem helgast af sögu þessa kerfis: Það á sér uppruna í hinu mikla ritverki *Principia mathematica* eftir Bertrand Russell og Alfred North Whitehead. Þar voru frumsendugripin svona (með okkar rithætti):

$$\begin{gathered}
\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A}, \\
\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \\
\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}, \\
\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}, \\
(\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{C}).
\end{gathered}$$

Rökfræðingurinn Paul Bernays kom auga á að fjórða frumsendugripið í þessu kerfi er óþarft, því að það má sanna það útfrá hinum. Í ritinu *Grundzüge der theoretischen Logik* eftir David Hilbert og Wilhelm Ackermann er því sleppt, og hjá þeim er frumsendukerfið orðið svona (aftur með okkar rithætti):

$$\begin{gathered}
\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A}, \\
\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \\
\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}, \\
(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{B}).
\end{gathered}$$

Ég veit ekki hver kom auga á að við getum líka sleppt þriðja frumsendugripinu með því að skrifa „$\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$“ í stað „$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$“ í öðru frumsendugripinu hjá Hilbert-Ackermann og „$\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$“ í stað „$\mathbf{C} \vee \mathbf{B}$“ í því síðasta.

(4) Þótt kenningin $\mathcal{P}$ hafi einungis eina rökreglu, þá nægir hún ásamt frumsendugripunum til að *sanna* ýmsar fleiri rökreglur; við köllum þær ***afleiddar rökreglur***. Þá fyrstu sem við sönnum köllum við *Innsetningarreglu*, en hinar tölusetjum við **R1**, **R2**, **R3** o. s. frv. Eftir að við höfum sannað afleidda rökreglu, þá leyfum við okkur að nota hana í sönnunum í kenningunni $\mathcal{P}$.

(5.5) Afleidd rökregla Inn (Innsetningarregla). *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingasnið, látum* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar breytur og* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *vera yrðingasnið. Ef* $\vdash \mathbf{A}$*, þá er* $\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$.

Sönnun: Látum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ vera sönnun yrðingasniðsins $\mathbf{A}$ í kenningunni $\mathcal{P}$. Þá er ljóst að $\mathbf{A}_{1,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n], \ldots, \mathbf{A}_{m,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$ er sönnun yrðingasniðsins $\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$ í $\mathcal{P}$. □

(5.6) Athugasemd. Við höfum ávallt val um hvernig formleg kenning er tilgreind. Við segjum að tvær formlegar kenningar séu ***jafngildar*** ef þær hafa sama mál og sömu setningar. Ljóst er að það er jafngilt því að þær hafi sama mál, að við getum sannað frumsendur hvorrar kenningarinnar um sig í hinni og sýnt fram á að rökreglur hvorrar um sig gildi (hugsanlega sem afleiddar rökreglur) í hinni. Af síðustu setningu er ljóst að við fáum kenningu $\mathcal{P}_1$ jafngilda kenningunni $\mathcal{P}$ þannig: Kenningin $\mathcal{P}_1$ hefur aðeins þrjár frumsendur, nefnilega '$p \vee p \to p$', '$p \vee p \to p$' og '$(p \to q) \to (r \vee p \to q \vee r)$'. Í staðinn hefur hún tvær rökreglur, nefnilega *modus ponens* **MP** og innsetningarregluna **Inn**. Við fáum nefnilega frumsendugripin í kenningunni $\mathcal{P}$ með innsetningu í frumsendurnar í kenningunni $\mathcal{P}_1$, og frumsendurnar í kenningunni $\mathcal{P}_1$ eru sértilvik af frumsendugripunum í kenningunni $\mathcal{P}$.

Sumir höfundar um rökfræði gera mikinn greinarmun á frumsendum eða frumsendugripum og rökreglum. En meðan við fáumst aðeins við kenningar um rökfræði (eins og $\mathcal{P}$ eða $\mathcal{P}_1$) má líta svo á að frumsendugrip sé einfaldlega „rökregla án forsendna“.

(5.7) Afleidd rökregla R1. *Látum* $\mathcal{H}$ *vera mengi af yrðingasniðum og* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *vera yrðingasnið.*

$$\textit{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \textit{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A}\textit{, þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}.$$

Sönnun: Samkvæmt frumsendugripi **F3** er $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. Af $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ leiðir $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ samkvæmt **MP**, og af $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A}$ og $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ leiðir $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ samkvæmt **MP**. □

Til þessa hafa allar setningar okkar og sannanir verið í yfirmálinu, en ekki í viðfangsmáli. Nú viljum við sanna nokkrar setningar í kenningunni $\mathcal{P}$. Til að auðvelda lesandanum lesturinn tölusetjum við yrðingasniðin í sönnuninni og sýnum reglurnar sem við notum til fá hvert yrðingasnið.

(5.8) Setning S1 í $\mathcal{P}$. $p \vee \neg p$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $(p \vee p \to p) \to (\neg p \vee (p \vee p) \to p \vee \neg p)$	**F3**
2. $p \vee p \to p$	**F1**
3. $\neg p \vee (p \vee p) \to p \vee \neg p$	Línur 2, 1 og **MP**
4. $\neg p \vee (p \vee p)$	**F2**, leyst úr skammstöfun
5. $p \vee \neg p$	Línur 4, 3 og **MP**

□

(5.9) Afleidd rökregla R2 (*Tertium non datur*)**.** *Fyrir sérhvert yrðingasnið* $\mathbf{A}$ *er*

$$\vdash \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A},$$

Sönnun: Þetta er afleiðing af $\vdash$ '$p \vee \neg p$' og **Inn**. □

(5.10) Setning S2 í $\mathcal{P}$. $p \to \neg\neg p$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $p \vee \neg p$	**S1**
2. $\neg p \vee \neg\neg p$	Lína 1 og **Inn**
2′. $p \to \neg\neg p$	Skammstöfun fyrir línu 2

□

(5.11) Setning S3 í $\mathcal{P}$. $\neg\neg p \to p$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (p \vee \neg p \to \neg\neg\neg p \vee p)$	**F3**
2. $\neg p \to \neg\neg\neg p$	**S2** og **Inn**
3. $p \vee \neg p \to \neg\neg\neg p \vee p$	Línur 2, 1 og **MP**
4. $p \vee \neg p$	**S1**
5. $\neg\neg\neg p \vee p$	Línur 4, 3 og **MP**
5′. $\neg\neg p \to p$	Skammstöfun fyrir línu 5.

□

(5.12) Setning S4 í $\mathcal{P}$. $p \to p$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $(p \to \neg\neg p) \to (p \vee p \to \neg\neg p \vee p)$	**F3**
2. $p \to \neg\neg p$	**S2**
3. $p \vee p \to \neg\neg p \vee p$	Línur 2, 1 og **MP**
4. $(p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \vee p \to \neg\neg p \vee \neg\neg p)$	F3
5. $\neg\neg p \vee p \to \neg\neg p \vee \neg\neg p$	Línur 2 og 4 og **MP**
6. $\neg p \vee (p \vee p)$	**F2**
7. $(\neg\neg p \vee p) \vee \neg p$	Línur 3, 6 og **R1**
8. $\neg p \to \neg\neg\neg p$	**S2** og **Inn**
9. $\neg\neg\neg p \vee (\neg\neg p \vee p)$	Línur 8, 7 og **R1**
10. $(\neg\neg p \vee \neg\neg p) \vee \neg\neg\neg p$	Línur 5, 9 og **R1**
11. $\neg\neg\neg p \to \neg p$	**S3** og **Inn**
12. $\neg p \vee (\neg\neg p \vee \neg\neg p)$	Línur 11, 10 og **R1**
13. $\neg\neg p \vee \neg\neg p \to \neg\neg p$	**F1**
14. $\neg\neg p \vee \neg p$	Línur 13, 12 og **R1**
15. $\neg\neg\neg p \vee \neg\neg p$	Lína 14 og **Inn**
16. $\neg\neg p \to p$	**S3**
17. $p \vee \neg\neg\neg p$	Línur 16, 15 og **R1**
18. $\neg\neg\neg p \to \neg p$	**S3** og **Inns**
19. $\neg p \vee p$	Línur 18, 17 og **R1**
19′. $p \to p$	Skammstöfun fyrir línu 19

□

(5.13) Setning S5 í $\mathcal{P}$. $q \vee p \to p \vee q$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $(p \to p) \to (q \vee p \to p \vee q)$ **F3**
2. $p \to p$ **S4**
3. $q \vee p \to p \vee q$ Línur 1, 2 og **MP**

$\square$

(5.14) Afleidd rökregla R3. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{A}.$$

Sönnun: Samkvæmt setningu **S5** í $\mathcal{P}$ og innsetningu er $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$. Af $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ og $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ leiðir svo $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ samkvæmt **MP**. $\square$

(5.15) Afleidd rökregla R4 (*Gegnvirkni*)**.** *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}.$$

Sönnun: Nú er $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ skammstöfun fyrir $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Við höfum því gefið að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ og $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Af afleiddri rökreglu **R1** leiðir þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A}$. Samkvæmt afleiddri rökreglu **R3** fæst $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$, og það er einmitt það sem $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ þýðir. $\square$

(5.16) Afleidd rökregla R5. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}.$$

Sönnun: Gefið er að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, og samkvæmt frumsendu **F3** er $\vdash (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{A})$, svo að **MP** gefur $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{A}$. Eins er gefið að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, og samkvæmt frumsendu **F3** er $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{C})$, svo að **MP** gefur $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{C}$. Samkvæmt frumsendu **F1** er $\vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Við höfum því $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{A}$, $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{C}$ og $\vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Með því að nota afleidda rökreglu **R4** (gegnvirkni) tvisvar sinnum fæst $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}$. $\square$

(5.17) Afleidd rökregla R6. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \to \mathbf{C}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{C}.$$

Sönnun: Af $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ og $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ leiðir samkvæmt afleiddri rökreglu **R5** að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A} \to \mathbf{C}$. En samkæmt afleiddri rökfeglu **R2** (*Tertium non datur*) er $\vdash \mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$, og **MP** gefur þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C}$. $\square$

(5.18) Afleidd rökregla R7. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}.$$

Sönnun: Gefið er að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og samkvæmt frumsendu **F2** er $\vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{B}$, og gegnvirkni geur $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C} \vee \mathbf{B}$. En nú er einnig $\vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ samkvæmt **S5** og **Inn**, og þá gefur gegnvirkni að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$. $\square$

(5.19) Setning S6 í $\mathcal{P}$. $(p \vee q) \vee r \to p \vee (q \vee r)$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $p \to p$	**S4**
2. $p \to p \vee (q \vee r)$	Lína 1 og **R7**
3. $q \to q$	**S4** og **Inn**
4. $q \to q \vee r$	Lína 3 og **R7**
5. $q \to p \vee (q \vee r)$	Lína 4 og **R7**
6. $p \vee q \to p \vee (q \vee r)$	Línur 2, 5 og **R5**
7. $r \to r$	**S4** og **Inn**
8. $r \to q \vee r$	Lína 7 og **R7**
9. $r \to p \vee (q \vee r)$	Lína 8 og **R7**
10. $(p \vee q) \vee r \to p \vee (q \vee r)$	Línur 6, 9 og **R5**

□

(5.20) Afleidd rökregla R8. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}).$$

Sönnun: Gefið er að $\mathcal{H} \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$. Með **S5** og innsetningu fæst $\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \to \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. Með **MP** fæst þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. □

(5.21) Setning S7 í $\mathcal{P}$. $\neg p \to (\neg q \to \neg(p \vee q))$.

Sönnun: Eftirfarandi er sönnun í $\mathcal{P}$:

1. $p \to \neg\neg p$	**S2**
2. $p \to \neg\neg p \vee \neg\neg q$	Lína 1 og **R7**
3. $q \to \neg\neg q$	**S2** og **Inn**
4. $q \to \neg\neg p \vee \neg\neg q$	Lína 3 og **R7**
5. $p \vee q \to \neg\neg p \vee \neg\neg q$	Línur 2, 4 og **R5**
5′. $\neg(p \vee q) \vee (\neg\neg p \vee \neg\neg q)$	Lína 5, leyst úr skammstöfun
6. $(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg(p \vee q)$	Lína 5′ og **R3**
7. $\neg\neg p \vee (\neg\neg q \vee \neg(p \vee q))$	Lína 6 og **R8**
7′. $\neg p \to (\neg q \to \neg(p \vee q))$	Skammstöfun fyrir línu 7

□

(5.22) Afleidd rökregla R9. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}.$$

Sönnun: Samkvæmt **S2** og **Inn** er $\vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B}$. Af $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og $\vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B}$ leiðir $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{B}$ samkvæmt rökreglu **R4** (gegnvirkni), og það er skammstöfun fyrir $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$. Af því leiðir svo með afleiddri rökreglu **R3** að $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$, og það má svo rita $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$. □

(5.23) Afleidd rökregla R10. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vera yrðingasnið.*

$$\text{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \text{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{B}, \text{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}.$$

Sönnun: Samkvæmt **S2** og **Inn** er $\vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B}$ og samkvæmt afleiddri rökreglu **R7** er þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$. Nú er gefið að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B}$; af því og $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$ leiðir með **MP** að $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$, sem má skrifa sem $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$. Samkvæmt **S4** og **Inn** er $\vdash \neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$. Af $\vdash \neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$ og $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$ leiðir svo með afleiddri rökreglu **R5** að $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$, og af rökreglu **R9** leiðir þá að $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{A} \to \neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$. En nú er gefið að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A}$, og samkvæmt **S2** og **Inn** er $\vdash \mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$, og **MP** gefur þá $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{A}$. Af $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{A}$ og $\mathcal{H} \vdash \neg\neg\mathbf{A} \to \neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ leiðir svo með **MP** að $\mathcal{H} \vdash \neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$, en það má svo umskrifa sem $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. □

(5.24) Afleidd rökregla R11. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingasnið.*

$$\textit{Ef } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \textit{ og } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}), \textit{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}.$$

Sönnun: Gefið er að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$, sem er skammstöfun fyrir $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. Samkvæmt afleiddri rökreglu **R3** fæst $\mathcal{H} \vdash (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vee \neg\mathbf{A}$, og afleidd rökregla **R8** gefur þá $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{B} \vee (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$, en það má skrifa $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$. Einnig er gefið að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$; af því og $\mathcal{H} \vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$ leiðir með **R4** (gegnvirkni) að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$, sem er skammstöfun fyrir $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$; en það leiðir til $\mathcal{H} \vdash (\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A}) \vee \neg\mathbf{A}$ samkvæmt afleiddri rökreglu **R3**, og afleidd rökregla **R8** gefur þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C} \vee (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A})$. Af **F1** leiðir $\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$, og afleidd rökregla **R1** gefur þá $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$, sem má skrifa $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$. □

Næstu setningu má einnig líta á sem afleidda rökreglu; en í stað þess að gefa henni númer gefum við henni nafn:

(5.25) Afleiðslusetning fyrir yrðingarökfræði. *Látum $\mathcal{H}$ vera mengi af yrðingasniðum og $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vera yrðingasnið.*

$$\textit{Ef } \mathcal{H} \cup \{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}, \textit{ þá } \mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Sönnun: Látum $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m$ vera sönnun yrðingasniðsins $\mathbf{B}$ útfrá $\mathcal{H} \cup \{\mathbf{A}\}$. Við sönnum með þrepun yfir i að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$ fyrir sérhvert $i = 1, \ldots, m$. Við skiptum sönnuninni í þrjú tilvik:

Fyrsta tilvik; yrðingasniðið $\mathbf{C}_i$ er annaðhvort frumsenda eða stak í $\mathcal{H}$: Við höfum þá $\mathcal{H} \vdash \mathbf{C}_i$. Samkvæmt frumsendugripi **F2** er $\vdash \mathbf{C}_i \to (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}_i)$, svo að **MP** gefur $\mathcal{H} \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}_i$, og það má aftur rita $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$.

Annað tilvik; yrðingasniðið $\mathbf{C}_i$ er yrðingasniðið $\mathbf{A}$: Samkvæmt setningu **S4** í $\mathcal{P}$ og innsetningu er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{A}$; en þar sem $\mathbf{C}_i$ er ekkert annað en yrðingasniðið $\mathbf{A}$ segir þetta einmit að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$, og þá enn frekar að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$.

Þriðja tilvik; yrðingasniðið $\mathbf{C}_i$ er afleiðing samkvæmt **MP** af yrðingasniðum $\mathbf{C}_j$ og $\mathbf{C}_k$ þannig að $j < i$, $k < i$ og $\mathbf{C}_k$ er yrðingasniðið $\mathbf{C}_j \to \mathbf{C}_i$: Samkvæmt þrepunarforsendu er bæði $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_j$ og $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to (\mathbf{C}_j \to \mathbf{C}_i)$; en þá segir afleidd rökregla **R11** að $\mathcal{H} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$. □

(5.26) Fylgisetning. *Fyrir yrðingasnið $\mathbf{A}$ gildir*

$$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \quad \textit{þá og því aðeins að} \quad \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Sönnun: Með því að láta $\mathcal{H}$ vera tóma mengið í afleiðslusetningunni (5.25) fæst: Ef $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, þá er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Gerum á hinn bóginn ráð fyrir að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, og gefum okkur $\mathbf{A}$ sem forsendu. Þá er $\vdash \mathbf{B}$ samkvæmt **MP**. En það segir einmitt að $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ sé afleiðin af $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. □

(5.27) Viðvörun. Við getum lesið fullyrðinguna „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ á yfirmálinu okkar þannig að hún segi að yrðingasniðið $\mathbf{B}$ sé *afleiðing* af yrðingasniðinu $\mathbf{A}$ (að frumsendunum og rökreglunum í kenningunni $\mathcal{P}$ gefnum). Það væri því ekki fráleitt að kalla fullyrðinguna „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ „leiðingu“. Við ætlum að vísu ekki að flíka því orði mikið, en bendum á að það hefur stundum verið notað um *skilyrðingu*, nefnilega yrðingasnið af gerðinni $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, en það er afar villandi.

Því er sérstök ástæða til að vara við að skilja fylgisetningu (5.26) þannig að „leiðingin“ „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ segi sama hlutinn og skilyrðingin $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og að þannig séu leiðing og skilyrðing sama fyrirbærið. Því fer víðs fjarri: Tökum þá fyrst eftir að leiðingin „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ er fullyrðing á yfirmálinu, en skilyrðingin $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ er segð í viðfangsmálinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Fylgisetningin segir ekki að „leiðingin“ „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ sé jafngild skilyrðingunni $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, heldur að hún sé jafngild fullyrðingunni „$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$“, en það er fullyrðing *á yfirmálinu* og segir að skilyrðingin $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sé *setning* í kenningunni $\mathcal{P}$.

Tökum líka eftir að við höfum aðeins sannað jafngildi fullyrðinganna „$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$“ og „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ fyrir kenninguna $\mathcal{P}$ fyrir yrðingarökfræði. Slíkt gildir almennt ekki án takmarkana í öðrum kenningum sem við eigum eftir að fást við. Við sönnum síðar afleiðslusetningu fyrir umsagnarökfræði; það er setning sem þarf að umgangast með eilítið meiri gætni en afleiðslusetninguna fyrir yrðingarökfræði.

Enn mætti setja fram fjölmargar setningar í kenningunni $\mathcal{P}$ og afleiddar rökreglur fyrir $\mathcal{P}$, en við látum hér staðar numið að svo stöddu. Við snúum okkur þess í staðinn að því að kanna samband setninganna í $\mathcal{P}$ við sísönnur. Við sýnum fyrst einfalda niðurstöðu:

(5.28) Setning. *Sérhver setning í kenningunni $\mathcal{P}$ er sísanna.*

Sönnun: yrðingasniðin ‘$p \vee p \to p$’, ‘$p \to p \vee q$’ og ‘$(p \to q) \to (r \vee p \to q \vee r)$’ eru sísönnur, eins og auðvelt er að ganga úr skugga um með sanntöflum. Af því leiðir með setningu (4.22) að allar frumsendurnar í kenningunni $\mathcal{P}$ eru sísönnur. Samkvæmt setningu (4.21) kemur sísanna út hvenær sem við notum rökregluna **MP** á sísönnur. En þá er ljóst að sérhver setning í kenningunni $\mathcal{P}$ er sísanna. □

(5.29) Skilgreining. *Við segjum að formleg kenning $\mathcal{T}$ sé* **samkvæm** *ef til er segð í $\mathcal{T}$ sem er ekki setning í $\mathcal{T}$.*

(5.30) Fylgisetning. *Kenningin $\mathcal{P}$ um yrðingarökfræði er samkvæm.*

Sönnun: Þetta er augljós afleiðing af setningu (5.28), því að auðvelt er að benda á fjölmörg yrðingasnið sem eru ekki sísönnur, til dæmis yrðingasniðin ‘p’ eða ‘$p \wedge \neg p$’, og þau geta ekki verið setningar í kenningunni $\mathcal{P}$. □

Stundum er notuð sterkari skilgreining á samkvæmni kenninga sem hafa neitunartákn, eins og kenningin $\mathcal{P}$ hefur:

(5.31) Skilgreining. *Formleg kenning $\mathcal{T}$ með neitunartákni '$\neg$' og myndunarreglu (hugsanlega afleiddri) sem leyfir að mynda segð $\neg\mathbf{A}$ úr segð $\mathbf{A}$ kallast **samkvæm með tilliti til neitunar** ef ekki er til segð $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ þannig segðirnar $\mathbf{A}$ og $\neg\mathbf{A}$ séu báðar setningar í $\mathcal{T}$.*

Formleg kenning sem er samkvæm með tilliti til neitunar er augljóslega samkvæm, því að fyrir sérhverja segð $\mathbf{A}$ í kenningunni gildir um aðra af setningunum $\mathbf{A}$ eða $\neg\mathbf{A}$ að hún er ekki setning í kenningunni, og því getur ekki sérhver segð verið setning. Hins vegar þarf samkvæm kenning ekki að vera samkvæm með tilliti til neitunar. Við sýnum þó til gamans að kenningin $\mathcal{P}$ er líka samkvæm í þessum sterkara skilningi. Við sýnum dálítið almennari niðurstöðu og byrjum á hjálparsetningu:

(5.32) Hjálparsetning. *Fyrir öll yrðingasnið $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ í $\mathcal{P}$ er $\vdash \mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})$.*

Sönnun: Samkvæmt **S2** og **Inn** er $\vdash \mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$, og samkvæmt afleiddri rökreglu **R7** er þá $\vdash \mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, en það má umskrifa sem $\vdash \mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})$. □

(5.33) Setning. *Látum $\mathcal{T}$ vera formlega kenningu með neitunartákni '$\neg$', skilyrðingartákni '$\to$' og með myndunarreglum (hugsanlega afleiddum) sem leyfa að mynda segðir $\neg\mathbf{A}$ og $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ úr segðum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Gerum ráð fyrir að í $\mathcal{T}$ sé modus ponens* **MP** *rökregla (hugsanleg afleidd). Gerum auk þess ráð fyrir að fyrir allar segðir $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ gildi $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})$. Ef kenningin $\mathcal{T}$ er samkvæm, þá er hún samkvæm með tilliti til neitunar.*

Sönnun: Annars væri til segð $\mathbf{A}$ í $\mathcal{T}$ þannig að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{A}$. Látum $\mathbf{B}$ vera einhverja segð í $\mathcal{T}$; við höfum þá $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})$. Af $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ leiðir $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ með **MP**. Af $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{A}$. og $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ leiðir $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$ með **MP**. Þar með er sérhver segð í $\mathcal{T}$ setning í $\mathcal{T}$, svo að $\mathcal{T}$ er ósamkvæm í mótsögn við forsendu.□

(5.34) Hjálparsetning. *Látum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera ólíkar yrðingabreytur og $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið þannig að engar yrðingabreytur nema $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ komi fyrir í $\mathbf{A}$. Látum $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \{0,1\}^n$. Fyrir sérhvert yrðingasnið $\mathbf{B}$ þannig að engar yrðingabreytur nema $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ komi yfir í $\mathbf{B}$ skilgreinum við yrðingasnið $\mathbf{B}^t$ með því að láta $\mathbf{B}^t$ vera $\mathbf{B}$ ef $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$ og láta $\mathbf{B}^t$ vera $\neg\mathbf{B}$ ef $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. Við höfum þá*

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash_{\mathcal{P}} \mathbf{A}^t.$$

Sönnun: Við sönnum setninguna með því að nota þrepunarlögmál fyrir yrðingasnið í samræmi við setningu (4.10).

(1) Ef $\mathbf{A}$ er yrðingasniðið $\mathbf{x}_k$ sem hefur aðeins eitt tákn, breytuna $\mathbf{x}_k$, þá er ljóst að $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{x}_k^t$.

(2a) Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið $\neg\mathbf{B}$ og gerum ráð fyrir að $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$. Þá er $\mathbf{B}^t$ yrðingasniðið $\mathbf{B}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{B}$. Nú er $\vdash \mathbf{B} \to \neg\neg\mathbf{B}$ samkvæmt **S2** og **Inn**, svo að afleidd rökregla **R4** (gegnvirkni) gefur $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \neg\neg\mathbf{B}$. En það er einmitt það sem sanna þarf, því að $\mathbf{A}^t$ er yrðingasniðið $\neg\neg\mathbf{B}$ vegna $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\neg\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$.

(2b) Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið $\neg\mathbf{B}$ og gerum ráð fyrir að $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. Þá er $\mathbf{B}^t$ yrðingasniðið $\neg\mathbf{B}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \neg\mathbf{B}$. En það er einmitt það sem sanna þarf, því að $\mathbf{A}^t$ er yrðingasniðið $\neg\mathbf{B}$ vegna $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\neg\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$.

(3a) Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ og gerum ráð fyrir að $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$. Þá er $\mathbf{B}^t$ yrðingasniðið $\mathbf{B}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{B}$. Nú er $\vdash \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ samkvæmt **S4** og **Inn**, svo að afleidd rökregla **R7** gefur $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, og **MP** gefur þá $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ En þetta er einmitt það sem sanna þarf, því að $\mathbf{A}^t$ er yrðingasniðið $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ vegna $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$.

(3b) Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ og gerum ráð fyrir að $f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$. Þá er $\mathbf{C}^t$ yrðingasniðið $\mathbf{C}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{C}$. Nú er $\vdash \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ samkvæmt **S4** og **Inn**, svo að afleidd rökregla **R7** gefur $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{C} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, og **MP** gefur þá $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ En þetta er einmitt það sem sanna þarf, því að $\mathbf{A}^t$ er yrðingasniðið $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ vegna $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 1$.

(3c) Látum að lokum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ og gerum ráð fyrir að $f^{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = f^{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. Þá er $\mathbf{B}^t$ yrðingasniðið $\neg\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}^t$ er yrðingasniðið $\neg\mathbf{C}$, svo að samkvæmt þrepunarforsendu er $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \neg\mathbf{B}$ og $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \neg\mathbf{C}$. En samkvæmt **S7** og **Inn** er $\vdash \neg\mathbf{B} \to (\neg\mathbf{C} \to \neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$, og með því að nota **MP** tvisvar sinnum fáum við $\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t$
vdash$\neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. En það er eimnitt það sem við þurftum að sýna, því að $\mathbf{A}^t$ er yrðingasniðið $\neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ vegna $f^{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(t) = 0$. □

Nú getum við sýnt:

(5.35) Fullkomleikasetning fyrir yrðingarökfræði. *yrðingasnið er setning í kenningunni $\mathcal{P}$ þá og því aðeins að það sé sísanna.*

Sönnun: Við höfum þegar séð í setningu (5.28) að sérhver setning í $\mathcal{P}$ er sísanna. Því nægir að sýna: Sérhver sísanna er setning í formlegu kenningunni $\mathcal{P}$.

Látum $\mathbf{A}$ vera sísönnu og $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera upptalningu yrðingabreytnanna sem koma fyrir í $\mathbf{A}$. Þar sem $\mathbf{A}$ er sísanna er $\mathbf{A}^t$ yrðingasniðið $\mathbf{A}$ fyrir *sérhvert* $t = (t_1, \ldots, t_n)$ úr $\{0,1\}^n$, svo að samkvæmt hjálparsetningu (5.34) er

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_n^t \vdash \mathbf{A}.$$

Athugum nú að fyrir $k < n$ er breytist $\mathbf{x}_k^t$ ekki þótt við breytum síðasta hnitinu t_n í stakinu t. Við getum því, ef þörf er á, breytt t þannig að $t_n = 1$ og fáum

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^t, \mathbf{x}_n \vdash \mathbf{A}.$$

En eins getum við, ef þörf er á, breytt t þannig að $t_n = 0$ og fáum

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^t, \neg\mathbf{x}_n \vdash \mathbf{A}.$$

Samkvæmt afleiðslusetningunni er þá

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^t \vdash \mathbf{x}_n \to \mathbf{A} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^t \vdash \neg\mathbf{x}_n \to \mathbf{A}.$$

Af afleiddri rökreglu **R6** leiðir þá að

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^t \vdash \mathbf{A}.$$

Þetta má nú endurtaka, og við fáum næst

$$\mathbf{x}_1^t, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}^t \vdash \mathbf{A}$$

og svo koll af kolli. Að lokum fáum við $\vdash \mathbf{A}$, eins og sýna átti. $\square$

(5.36) Athugasemd. Megintilgangur okkar með þessari grein var að finna frumsendukerfi sem má nota til að sanna allar sísönnur og engin önnur yrðingasnið. Fullkomleikasetningin segir að okkur hafi tekizt það ætlunarverk: Kenningin $\mathcal{P}$ er *fullomin* í þeim skilningi að hún nægir til að sanna allar sísönnur, og engin önnur yrðingasnið er unnt að sanna innan hennar.

Fullkomleikasetningin sýnir okkur líka að við getum ákvarðað í endanlega mörgum skrefum hvort yrðingasnið er setning í kenningunni $\mathcal{P}$ eða ekki: Við þurfum einfaldlega að útbúa sanntöflu fyrir yrðingasniðið, og þannig getum við gengið úr skugga um hvort það sé sísanna. Hitt er svo annað mál að það getur kostað verulega reikninga að útbúa sanntöfluna, og oft er einfaldara að sanna yrðingu í kenningunni $\mathcal{P}$ en að sýna með sanntöflu að hún sé sísanna.

Það er líka freistandi að halda því fram að í einhverjum skilningi sýni fullkomleikasetningin að okkur hafi tekizt að lýsa fullkomlega hvað felst í neituninni og samtengingunum sem við skrifum með táknunum '$\vee$', '$\wedge$', '$\rightarrow$' og '$\leftrightarrow$'.

Í næsta kafla ætlum við að athuga flóknari rökfræði, svokallaða *umsagnarökfræði.* Í henni er ekkert til sem samsvarar sanntöflum, og við getum ekki gengið úr skugga um í endanlega mörgum skrefum hvort segð í þeim formlegu kenningum sem við athugum þar sé setning í kenningunni eða ekki. Það eina sem við höfum í höndunum þar eru frumsendur og rökreglur. Neitunin og samtengingarnar koma þar mjög við sögu, og það er því mikilvægt að vita að við höfum að minnsta kost náð tangarhaldi á þeim með frumsendukerfinu í formlegu kenningunni $\mathcal{P}$.

(5.37) Athugasemdir. (1) Við getum litið svo á að setning í $\mathcal{P}$ gefi ævinlega af sér afleidda rökreglu í $\mathcal{P}$ með hjálp innsetningarreglunnar **Inn**. Þannig sáum við í setningum (5.8) og (5.9) að setningin **S1** í $\mathcal{P}$, nefnilega fullyrðingin '$p \vee \neg p$', hefur í för með sér afleiddu rökregluna *tertium non datur* **R2**, sem segir að fyrir sérhvert yrðingasnið $\mathbf{A}$ sé $\vdash \mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$. Samkvæmt fullkomleikasetningunni (5.35) er sérhver sísanna setning í $\mathcal{P}$ og gefur því af sér rökreglu með nákvæmlega sama hætti. Vegna sambandsins milli skilyrðinga og „leiðinga" sem sett var fram í fylgisetningu (5.26) má stundum skrifa slíkar reglur á fleiri vegu en einn.

Tökum sem dæmi yrðingasniðið '$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$', sem við megum einnig skrifa '$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$' samkvæmt svigareglum. Við sýndum í (4.18) með sanntöflu að þetta yrðingasnið er sísanna. Samkvæmt fullkomleikasetningunni er $\vdash$'$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$'. Af því leiðir með innsetningarreglunni **Inn** að $\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ fyrir öll yrðingasnið $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, og það jafngildir $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ samkvæmt fylgisetningu (5.26). En samkvæmt afleiddri rökreglu **R10** í (5.23) er $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{A} \vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A}$, og því fáum við að lokum $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, sem er ekkert annað en hin góða regla *modus ponens.* Við getum því sagt að sísannan '$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$' sé einskonar „sísönnuútgáfa" af rökreglunni *modus ponens.*

(2) Heiti rökreglunnar *modus ponens* er stytting lengra heitis, nefnilega ***modus ponendo ponens***. Hún var ein af þeim aðferðum (rökreglum) eða *háttum* í rökfræði

sem notaðar voru þegar í fornöld, og nafnið mætti þýða „háttur sem játar (staðfestir) með því að játa (staðfesta)“, sem við skulum stytta í „háttur sem játandi játar“. Til að átta sig á nafngiftinni er bezt að huga að hinum þremur algengustu „háttunum“:

Með sísönnunni '$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$' fæst hátturinn ***modus tollendo tollens***, eða „háttur sem neitandi neitar“, venjulega stytt í ***modus tollens***, sem með okkar rithætti verður

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \neg\mathbf{B} \vdash \neg\mathbf{A}.$$

Með sísönnunni '$(p \vee q) \wedge \neg p \to q$' fæst hátturinn ***modus tollendo ponens***, eða „háttur sem neitandi játar“, sem með okkar rithætti verður

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$$

Og með sísönnunni '$\neg(p \wedge q) \wedge p \to \neg q$' fæst loks hátturinn ***modus ponendo tollens*** eða „háttur sem játandi neitar“, sem með okkar rithætti er nú oft sett fram sem

$$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}), \mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{B};$$

en nafnið mun í upphafi (ef ég skil rétt) hafa verið notað um veikari regluna

$$\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}, \mathbf{A} \vdash \neg\mathbf{B},$$

þar sem táknið „$\veebar$“ stendur fyrir ***útilokandi eðun***; með öðrum orðum er $\mathbf{A} \veebar \mathbf{B}$ skammstöfun fyrir $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$. Að nýrri gerð reglunnar sé sterkari en sú eldri er augljóst.

Lesandinn getur auðveldlega gengið úr skugga um að yrðingasniðin sem hér voru kölluð sísönnur séu það í raun og veru, og að þessar rökreglur fáist úr þeim með sama hætti og *modus ponens*.

Til gamans tökum við að lokum saman nokkrar forvitnilegar sísönnur, og úr þeim má síðan búa til afleiddar rökreglur sem koma sér einatt vel í röksemdafærslum. Sumum af þessum sísönnum (eða samsvarandi rökreglum) höfum við áður kynnzt, en öðrum ekki. Lesandinn getur spreytt sig á að ganga úr skugga um að um sísönnur sé að ræða, að reyna að finna sannanir þeirra í kenningunni $\mathcal{P}$ og að setja þær fram sem rökreglur.

(5.38) Setning. (1) (*Sjálfvaldareglur*)

$$\vdash `p \vee p \leftrightarrow p' \quad og \quad \vdash `p \wedge p \leftrightarrow p'.$$

(2) (*Tvöföld neitun*)

$$\vdash `\neg\neg p \leftrightarrow p'.$$

(3) (*Tertium non datur*)

$$\vdash `p \vee \neg p'.$$

(4) (*Tengireglur*)

$$\vdash `p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r' \quad og \quad \vdash `p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r'.$$

(5) (*Víxlreglur*)

$$\vdash\text{`}p \vee q \leftrightarrow q \vee p\text{'} \quad \text{og} \quad \vdash\text{`}p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p\text{'}.$$

(6) (*Dreifireglur*)

$$\vdash\text{`}p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\text{'} \quad \text{og} \quad \vdash\text{`}p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)\text{'}.$$

(7) (*Reglur de Morgans*)

$$\vdash\text{`}\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q\text{'} \quad \text{og} \quad \vdash\text{`}\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q\text{'}.$$

(8) (*Gegnvirkni*)

$$\vdash\text{`}(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)\text{'}.$$

(9) (*Mótskilyrðing*)

$$\vdash\text{`}(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)\text{'}.$$

(10) (*Modus (ponendo) ponens*)

$$\vdash\text{`}(p \to q) \wedge p \to q\text{'}.$$

(11) (*Modus (tollendo) tollens*)

$$\vdash\text{`}(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p\text{'}.$$

(12) (*Modus tollendo ponens*)

$$\vdash\text{`}(p \vee q) \wedge \neg p \to q\text{'}.$$

(13) (*Modus ponendo tollens*)

$$\vdash\text{`}\neg(p \wedge q) \wedge p \to \neg\, q\text{'}.$$

(14) (*Reductio ad absurdum*)

$$\vdash\text{`}(\neg p \to q \wedge \neg q) \to p\text{'}.$$

(15) (*Neitun skilyrðingar*)

$$\vdash\text{`}\neg(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \neg\, q\text{'}.$$

(16)

$$\vdash\text{`}(p \wedge q \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))\text{'}.$$

(17)

$$\vdash\text{`}p \to p \vee q\text{'}.$$

(18)

$$\vdash\text{`}p \wedge q \to p\text{'}.$$

(19)
$$\vdash `\neg p \to (p \to q)\text{'}.$$

(20)
$$\vdash `(p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r) \to q \lor s\text{'}.$$

(21)
$$\vdash `(p \to q) \land (r \to s) \land (p \land r) \to q \land s\text{'}.$$

(22)
$$\vdash `(p \to q) \land (p \to r) \to (p \to q \land r)\text{'}.$$

(23)
$$\vdash `(p \to r) \land (q \to r) \to (p \lor q \to r)\text{'}.$$

(24)
$$\vdash `(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)\text{'}.$$

(25)
$$\vdash `(p \land q \to r) \land (p \to q) \to (p \to r)\text{'}. \qquad \square$$

(5.39) Athugasemd. Skilyrðingin $\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$ hefur verið kölluð ***mótskilyrðing*** skilyrðingarinnar $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Samkvæmt lið (8) í síðustu setningu sést (með innsetningarreglu) að mótskilyrðing skilyrðingar er rökfræðilega jafngild upphaflegu skilyrðingunni. Af því leiðir svo að

$$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}.$$

Skilyrðingin $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ hefur verið kölluð ***andhverfing*** skilyrðingarinnar $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Skilyrðingin $\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}$ hefur verið kölluð ***umhverfing*** skilyrðingarinnar $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Þessi orð eru óþægilega lík og því auðvelt að rugla þeim saman; en það kemur kannski ekki alltof mikið að sök, því að umhverfing skilyrðingar er rökfræðilega jafngild andhverfingunni, af því að hún er mótskilyrðing andhverfingarinnar.

Gerum ráð fyrir að við viljum sýna fyrir tvö yrðingasnið $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ að þau séu rökfræðilega jafngild; með öðrum orðum að $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ sé sísanna. Samkvæmt fylgisetningu (5.26) við afleiðslusetninguna er það jafngilt því að $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$. Við getum þá byrjað á að sýna að *annaðhvort* sé skilyrðingin $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *eða* mótskilyrðingin $\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$ setning í $\mathcal{P}$, og síðan nægir okkur að sýna að *annaðhvort* sé andhverfingin $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *eða* umhverfingin $\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}$ setning í $\mathcal{P}$.

Kafli II

Umsagnarökfræði

§1. Mál og kenningar fyrstu stéttar

Í þessum kafla ætlum við að athuga nokkuð flóknari formlegar kenningar en í fyrsta kaflanum. Þær eru einnig ritaðar á formlegu máli af þeirri tegund sem kallast *formlegt mál fyrstu stéttar*. Við byrjum á að gera grein fyrir á hvers konar máli slíkar kenningar eru ritaðar. Það eru mál sem hafa breytistærðir eins og málið $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, sem við athuguðum í síðasta kafla; en breyturnar gegna nú allt öðru hlutverki: Í yrðingarökfræði stóðu breytingarnar fyrir einhverjar *ótilteknar fullyrðingar*, en nú eiga breyturnar að standa fyrir einhverja *ótiltekna hluti* sem eru viðfangsefni stærðfræðinnar, svo sem tölur, mengi, föll, varpanir, grúpur, línuleg rúm og hvaðeina. Við byrjum á að skilgreina slík mál og gefum síðan dæmi til að auðveldara sé að átta sig á skilgreiningunni. Öfugt við það sem við gerðum í fyrsta kaflanum fyrir málið fyrir yrðingarökfræði leggjum við pólskan ritthátt til grundvallar í skilgreiningunni á máli fyrstu stéttar, en notum samt aðallega venjulega svigarithættinn, sem við getum gert með því að taka upp „skammstafanir“(og höfum þá engar áhyggjur af að skammstafanirnar séu yfirleitt lengri en það sem þær standa fyrir).

(1.1) Skilgreining. ***Mál fyrstu stéttar*** *$\mathcal{L}$ er formlegt mál sem er tilgreint með eftirfarandi hætti:*

A. *Tákn málsins $\mathcal{L}$ eru gefin með eftirfarandi upptalningu:*

   (a) *Sérstöku rökfræðilegu táknin*

   $$`\neg\text{'},\quad `\vee\text{'},\quad \textit{og}\quad `\forall\text{'}.$$

   (b) *Óendanlega margir bókstafir; við komum okkur hér saman um að nota bókstafina*

   $$`a\text{'}, `b\text{'}, `c\text{'}, \ldots, `z\text{'}, `a_1\text{'}, `b_1\text{'}, `c_1\text{'}, \ldots, `z_1\text{'}, `a_2\text{'}, `b_2\text{'}, `c_2\text{'}, \ldots, `s_2\text{'}, \ldots;$$

   og leyfum, nema annað sé tekið fram, alla bókstafi latnesku, gotnesku og grísku stafrófanna, bæði hástafi og lágstafi, hugsanlega með lágvísi sem er náttúrleg tala skrifuð í tugakerfi. Við köllum bókstafina ***breytur****.*

(c) Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n tiltekin n-**stæð falltákn**. Fyrir hvert n getur fjöldi n-stæðra falltákna verið núll, endanlegur eða óendanlgeur eftir því hvert formlega málið er; formlegt mál þarf ekki að hafa neitt falltákn. Núllstætt falltákn nefnist **fasti**.

(d) Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n þannig að $n \geq 1$ tiltekin n-**stæð umsagnartákn**. Fyrir hvert n getur fjöldi n-stæðra umsagnartákna verið núll, endanlegur eða óendanlegur eftir því hvert formlega málið er, en venjulega er þess þó krafizt að málið hafi að minnsta kosti eitt umsagnartákn. Í flestum formlegum málum fyrstu stéttar er **samasemmerkið** '$=$' meðal tvístæðu umsagnartáknanna.

Formlegt mál fyrstu stéttar ákvarðast ótvírætt af (óendanlega) listanum af breytunum og af því hvaða umsagnartákn og hvaða falltákn það hefur.

B. ***Heiti*** í máli fyrstu stéttar eru skilgreind með eftirfarandi **myndunarreglum fyrir heiti**:

(H1) Breyta er heiti.

(H2) Ef $\mathbf{f}$ er n-stætt falltákn og $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ eru heiti, þá er stæðan $\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$ heiti.

Sér í lagi eru allir fastar heiti.

C. Segðir formlega málsins $\mathcal{L}$ kallast **fullyrðingar** eða (oftar) bara **yrðingar**. Við byrjum á að tiltaka að **grunnyrðing** er stæða af gerðinni $\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$, þar sem $\mathbf{p}$ er n-stætt umsagnartákn og $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ eru heiti. Yrðingar málsins $\mathcal{L}$ eru svo skilgreindar með eftirfarandi **myndunarreglum fyrir yrðingar**:

(Y1) Grunnyrðing er yrðing.

(Y2) Ef $\mathbf{A}$ er yrðing, þá er $\neg\mathbf{A}$ yrðing.

(Y3) Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru yrðingar, þá er $\vee\mathbf{A}\mathbf{B}$ yrðing.

(Y4) Ef $\mathbf{A}$ er yrðing og $\mathbf{x}$ er breyta, þá er $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ yrðing.

D. Fyrir öll mál fyrstu stéttar tökum við upp eftirfarandi **skammstafanir**:

(1) Stæðan $(\neg\mathbf{A})$ stendur fyrir stæðuna $\neg\mathbf{A}$.

(2) Stæðan $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ stendur fyrir stæðuna $\vee\mathbf{A}\mathbf{B}$.

(3) Stæðan $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ og stæðan $\wedge\mathbf{A}\mathbf{B}$ standa fyrir stæðuna $\neg \vee \neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$.

(4) Stæðan $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ og stæðan $\to\mathbf{A}\mathbf{B}$ standa fyrir stæðuna $\vee\neg\mathbf{A}\mathbf{B}$.

(5) Stæðan $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ og stæðan $\leftrightarrow\mathbf{A}\mathbf{B}$ standa fyrir stæðuna

$$\neg \vee \neg \vee \neg\mathbf{A}\mathbf{B}\neg \vee \neg\mathbf{B}\mathbf{A}.$$

(6) Stæðan $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ stendur fyrir stæðuna $\neg\forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}$.

(7) Fyrir tvístætt falltákn eða umsagnartákn $\mathbf{q}$ stendur stæðan $(\mathbf{u}\mathbf{q}\mathbf{v})$ fyrir stæðuna $\mathbf{q}\mathbf{u}\mathbf{v}$.

(6) Fyrir tvístætt umsagnartákn $\mathbf{q}$ stendur stæðan $(\mathbf{u} \not\mathbf{q}\ \mathbf{v})$ fyrir stæðuna $(\neg(\mathbf{u}\mathbf{q}\mathbf{v}))$.

Hér höfum við notað táknin

$$\text{`('}, \quad \text{`)'}, \quad \text{og} \quad \text{`}\exists\text{'},$$

sem koma einungis fyrir í skammstöfunum og ávallt má losna við með því að leysa upp úr skammstöfununum. — Táknin '$\forall$' og '$\exists$' kallast ***magnarar****; nánar tiltekið kallast táknið '$\forall$'* ***allherjarmagnari****, og táknið '$\exists$' kallast* ***tilvistarmagnari****. Yrðingin $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ er gjarnan lesin „fyrir öll **x** er **A**“ eða „fyrir sérhvert **x** er **A**“, en yrðingin $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ er gjarnan lesin „til er **x** þannig að **A**“.*

E *Auk þess tökum við upp sömu* ***svigareglur*** *og í yrðingarökfræði með þeirri viðbót að magnararnir '$\forall$' og '$\exists$' koma í röðinni á milli táknanna '$\neg$', '$\vee$', '$\wedge$' annarsvegar og táknanna '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' hins vegar þegar svigar eru settir.*

(1.2) Athugasemdir. (1) Til að réttlæta pólskan ritháttt þyrftum við að sýna að lesa megi úr heiti og úr grunnyrðingu með nákvæmlega einum hætti; en sönnun þess er nánast sú sama og fyrir yrðingasnið í athugasemd (I.4.13), svo að við látum lesandanum eftir sönnunina.

(2) Þótt við leggjum pólskan ritháttt til grundvallar notum við hann sárasjaldan í raun. Við hugsum okkur venjulega að við höfum fyrst þýtt pólska ritháttinn yfir í venjulega svigarithháttinn og notað síðan svigareglurnar til að fækka svigum.

Svigareglur eru nauðsynlegar — án þeirra verður óþarflega mikið af svigum, og það svo mjög að yrðingar verða einatt illlæsilegar, jafnvel illlæsilegri en pólski rithátturinn — en það er dálítið óþægilegt að leggja svigareglurnar á minnið og nota þær út í yztu æsar. Það hentar stundum betur að skilja eftir einhverja sviga, þótt svigareglur leyfi að þeim sé sleppt, ef það gerir þægilegra að lesa úr stæðunni. Venjulega er óhætt að hafa bara eftirfarandi óformlega reglu í huga: Við setjum einfaldlega nóg af svigum til að alveg sé tryggt að rétt sé lesið úr stæðum; ef einhver vafi leikur á hvort setja eigi svigana eða ekki, þá er öruggara að hafa þá.

Þetta virðist kannski gera hugtakið „formlegt mál“ dálítið óformlegt; en við getum litið svo á að stæður með færri svigum en reglurnar segja til um séu *skammstafanir* fyrir raunverulegar stæður, og svigareglur, formlegar eða óformlegar, geri okkur ávallt kleyft að bæta svigum inn með ótvíræðum hætti þannig að stæðurnar verði rétt skrifaðar, og síðan gætum við sleppt öllu svigum með því að þýða aftur yfir á pólska ritháttinn.

(3) Í hverju samhengi notum við einungis endanlega marga bókstafi. Við viljum hins vegar ekki setja nein takmörk á hversu marga við megum nota; við þurfum ávallt að geta gripið til nýs bókstafs, hversu marga sem við höfum þegar notað, svo að bókstafirnir verða að vera óendanlega margir. Það þýðir hins vegar ekki að við þurfum að nota óendanlega mörg tákn, því að við getum litið svo á að tölusettur bókstafur sé settur saman úr endanlega mörgum táknum, nefnilega venjulegum bókstöfum og venjulegum talnatáknum. Við gætum raunar komizt af með milku minna; til dæmis gætum við komið okkur saman um að bókstafirnir skuli einungis vera þessir:

$$x, x', x'', x''', x'''', x''''', x'''''', x''''''', \ldots \text{ o. s. frv.};$$

með öðrum orðum gætum við skilgreint bókstafi formlegrar kenningar með þrepun þannig að 'x' sé bókstafur og þannig að fyrir bókstaf $\mathbf{x}$ sé $\mathbf{x}'$ bókstafur. Þá þyrftum við í raun einungis tvö tákn, nefnilega bókstafinn 'x' og táknið '$'$', til að skilgreina alla bókstafi í formlegri kenningu. Þetta mundi hinsvegar gera textann illlæsilegan. Við leyfum því alla venjulega bókstafi og merkjum þá með náttúrlegum tölum ef þörf krefur, rétt eins og venja er í stærðfræðitextum.

(4) Einn varnagla þarf að setja um notkun bókstafa: Í sumum málum fyrstu stéttar eru einhverjir tilteknir bókstafir notaðir sem falltákn eða umsagnartákn, og þá má ekki nota þá sem breytur. Gerum til dæmis ráð fyrir að við höfum formlegt mál $\mathcal{L}$ sem á að fjalla um rauntölur. Þá viljum við kannski gera bókstafina 'e' og 'π' að föstum (þ. e. núllstæðum falltáknum) sem eiga að tákna *tilteknar rauntölur*, og þá verða þessir bókstafir óhæfir til að vera breytur í málinu. Önnur dæmi er að finna í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$ í lið (4) og í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ í lið (6) í dæmunum (1.3) hér á eftir.

Við tökum því upp eftirfarandi reglu: *Ef venjulegur bókstafur er notaður sem falltákn eða umsagnartákn í máli fyrstu stéttar, þá verður að fjarlægja hann af (óendanlega) listanum yfir breytur.*

(5) Þegar mál fyrstu stéttar er skilgreint þarf að taka umsagnartákn þess og falltákn fram. Það verður að vera hluti af skilgreiningunni að taka fram fyrir hvert slíkt tákn fyrir hvaða n það er n-stætt. Ef til dæmis tákn er n-stætt má ekki nota það sem m-stætt tákn fyrir einhverja náttúrlega tölu m þannig að $m \neq n$.

(1.3) Dæmi. (1) Búa má til mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{O}_1)$ til að fjalla um röðuð mengi þannig: Það hefur engin falltákn og aðeins tvö tvístæð umsagnartákn, '$\leq$' og '$=$'. Dæmi um yrðingar á þessu máli eru stæðurnar

$$\text{`}(x \leq y) \wedge (y \leq z) \to (x \leq z)\text{'}, \quad \text{`}\forall x \exists y (x \leq y) \wedge (y \neq x))\text{'}.$$

Við getum líka búið til annað mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{O}_2)$ til að fjalla um *stranglega* röðuð mengi þannig: Það hefur engin falltákn og aðeins tvö tvístæð umsagnartákn, '$<$' og '$=$'. Dæmi um yrðingar á þessu máli eru stæðurnar

$$\text{`}\neg(x < x)\text{'}, \quad \text{`}(x < y) \wedge (y < z) \to (x < z)\text{'}, \quad \text{`}\forall x \forall z \exists y ((x < y) \wedge (y < z))\text{'}.$$

(2) Búa má til mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ til að fjalla um víxlgrúpur þannig: Það hefur eitt tvístætt falltákn '$+$'og eitt tvístætt umsagnartákn '$=$'og engin önnur tákn. Dæmi um heiti á þessu máli eru stæðurnar

$$\text{`}x\text{'}, \quad x + y\text{'}, \quad \text{`}(x + y) + z\text{'} \quad \text{og} \quad \text{`}x + (y + z)\text{'};$$

og dæmi um grunnyrðingar á málinu eru stæðurnar

$$\text{`}x + y = y + x\text{'} \quad \text{`}y = x + x\text{'} \quad \text{og} \quad \text{`}x + (y + z) = (x + y) + z\text{'};$$

og dæmi um samsettar yrðingar eru

$$\text{`}x + y = z \wedge z + y = x\text{'} \quad \text{`}\exists y (x + y = z)\text{'} \quad \text{og} \quad \text{`}x + y = x \to \forall z (z + y = z)\text{'}.$$

Einnig má búa til annað mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ til að fjalla um víxlgrúpur þannig: Það hefur einn fasta '0', eitt einstætt falltákn '$-$', eitt tvístætt falltákn '$+$' og eitt tvístætt umsagnartákn '$=$'. Dæmi um heiti á þessu máli eru stæðurnar

$$\text{`}-x\text{'}, \quad \text{`}(0 + x) + y\text{'}, \quad \text{`}0 + (x + y)\text{'}, \quad \text{`}x + (-x)\text{'};$$

hér er '$(0+x)+y$' skammstöfun fyrir heitið '$++0xy$', '$0+(x+y)$' er skammstöfun fyrir heitið '$+0+xy$' og '$x+(-x)$' er skammstöfun fyrir heitið '$+x-x$'. Dæmi um grunnyrðingar á málinu eru stæðurnar

$$`0+x=x', \quad `(x+(-y))+(-z)=x+(-(y+z))', \quad `x+(-y)=((-y)+z)+0',$$

dæmi um samsettar yrðingar eru stæðurnar

$$`(x+y=0)\to(y=-x)', \quad `\forall x\exists y(x+y=0)', \quad `\forall x\forall y(x+y=y+x)'.$$

(3) Með nákvæmlega sama hætti má búa til tvö mál fyrstu stéttar, $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ og $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$, til að fjalla um almennar grúpur. Fyrra málið $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ hefur aðeins eitt tvístætt falltákn '$\cdot$' og eitt tvístætt umsagnartákn '$=$', og dæmi um fullyrðingar á því máli eru

$$`\exists y\forall x((y\cdot x=x)\wedge(x\cdot y=x))', \quad \forall x\forall y\exists z(x\cdot z=y)'.$$

Seinna málið $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$ hefur bæði þessi tákn '$\cdot$' og '$=$' og að auki fasta 'e' og einstætt falltákn ι. Við komum okkur saman um að $\mathbf{a}^{-1}$ skuli vera skammstöfun fyrir $\iota\mathbf{a}$ fyrir sérhvert heiti $\mathbf{a}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$. Dæmi um yrðingar á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$ eru

$$`\forall x((e\cdot x=x)\wedge(x\cdot e=x))', \quad `(x\cdot x^{-1}=e)\wedge(x^{-1}\cdot x=e), \quad `(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}'.$$

Athugum að í þessu formlega máli höfum við gert bókstafinn 'e' að *sérstöku tákni*; og um leið neyðumst við til að fjarlægja hann úr listanum yfir breytur formlega málsins.

(4) Búa má til mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ til að fjalla um bauga með því að bæta einum fasta '1' og einu tvístæðu falltákni '$\cdot$' við málið $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\in)$ fyrir víxlgrúpur úr dæmi (3). Dæmi um yrðingar á því máli eru stæðurnar

$$`x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z', \quad `\neg\exists x((1+1)\cdot x=1)', \quad `\forall x(x\neq 0\to\exists y(x\cdot y=1))'.$$

(5) Mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{ZF})$ fyrir mengjafræði hefur engin falltákn og aðeins tvö tvístæð umsagnartákn, '$\in$' og '$=$'. Þar sem málið hefur engin falltákn eru breyturnar einu heitin. Dæmi um yrðingar á þessu máli eru stæðurnar '$x\in y\to\neg(y\in x)$' og

$$`\forall x(x\in A\to x\in B)\wedge\forall x(x\in B\to x\in C)\to\forall x(x\in A\to x\in C)'.$$

(6) Búa má til mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ til að fjalla um náttúrlegar tölur þannig: Það hefur einn fasta '0', eitt einstætt falltákn 'S', tvö tvístæð falltákn '$+$' og '$\cdot$' og tvö tvístæð umsagnartákn '$=$' og '$<$'. Við hugsum okkur að Sx sé ***eftirfari tölunnar*** x; með öðrum orðum næsta náttúrlega tala á eftir náttúrlegu tölunni x. Dæmi um yrðingar á þessu máli eru stæðurnar

$$`SS0+SS0=SSSS0', \quad `\forall x(\neg(x<0))', \quad `x<Sy\leftrightarrow x<y\vee x=y'.$$

Við getum tekið upp algengar skammstafanir í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ og skrifað '1' í stað '$S0$', '2' í stað '$SS0$', '3' í stað '$SSS0$', '4' í stað '$SSSS0$', '5' í stað '$SSSSS0$', o. s. frv. Fyrsta yrðingin sem við skrifuðum verður þá '$2+2=4$'. En athugum að í fyrstu stæðunni eru líka notaðar skammstafanir, þannig að yrðingin '$2+2=4$' er í raun skammstöfun fyrir yrðinguna '$=+SS0SS0SSSS0$'.

Athugum að í þessu formlega máli höfum við gert bókstafinn 'S' að *sérstöku tákni*; og um leið neyðumst við til að fjarlægja hann úr listanum yfir breytur formlega málsins.

(1.4) Skilgreining. (1) *Látum* $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n$ *vera stæðu í formlegu máli.* ***Hlutstæða*** *í stæðunni* $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n$ *er stæða (hugsanlega tóm) af gerðinni* $\mathbf{s}_j\mathbf{s}_{j+1}\cdots\mathbf{s}_k$*; með öðrum orðum er hún mynduð af samliggjandi táknum úr stæðunni* $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n$ *í sömu röð og þau koma fyrir í stæðunni* $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n$*.* ***Hlutyrðing*** *í yrðingu* $\mathbf{A}$ *á máli fyrstu stéttar* $\mathcal{L}$ *er hlutstæða í* $\mathbf{A}$ *sem jafnframt er yrðing á málinu* $\mathcal{L}$*.*

(2) *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingu á máli fyrstu stéttar og* $\mathbf{x}$ *vera breytu. Ef* $\mathbf{x}$ *kemur fyrir í hlutyrðingu í* $\mathbf{A}$ *af gerðinni* $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}$ *(eða* $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}$*), þar sem* $\mathbf{B}$ *er yrðing, þá segjum við að breytan* $\mathbf{x}$ *sé* ***bundin*** *í stæðunni* $\mathbf{A}$ *á þeim stað. Ef breytan* $\mathbf{x}$ *kemur fyrir á stað sem er ekki hluti af slíkri hlutyrðingu, þá segjum við að hún sé* ***frjáls*** *(eða* ***óbundin****) í stæðunni* $\mathbf{A}$ *á þeim stað.*

(1.5) Athugasemdir. (1) Ef einhverjar breytur $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ koma fyrir frjálsar í yrðingu $\mathbf{A}$, þá er skiljum við það svo að $\mathbf{A}$ sé *fullyrðing um einhver stök sem við gefum nöfnin* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Ef hins vegar breyta $\mathbf{x}$ kemur aðeins fyrir bundin í yrðingunni $\mathbf{A}$, þá er $\mathbf{A}$ ekki fullyrðing um neitt stak $\mathbf{x}$; hún segir ekkert um $\mathbf{x}$.

Tökum dæmi úr málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ úr dæmi (5) í (1.3). Í yrðingunni '$\exists y(x = 2 \cdot y)$', sem við gerum ráð fyrir að eigi að fjalla um náttúrlegar tölur, kemur breytan 'x' fyrir á einum stað, og þar er hún frjáls. Yrðingin segir eitthvað ákveðið um x, nefnilega hið sama og fullyrðingin „talan x er jöfn tala" segir á okkar ágæta yfirmáli. Í yrðingunni kemur breytan 'y' einnig fyrir, en hún er hvergi frjáls, enda segir yrðingin ekkert um eitthvern hlut y, og við gætum allt eins notað einhvern allt annan bókstaf en 'y' (en þó ekki bókstafinn 'x') til að segja hið sama: Yrðingarnar '$\exists y(x = 2 \cdot y)$', '$\exists t(x = 2 \cdot t)$', '$\exists n(x = 2 \cdot n)$', '$\exists \beta_5(x = 2 \cdot \beta_5)$' segja allar hið sama, nefnilega að til sé tala sem margfölduð með tveimur verður talan x, og það skiptir í raun engu máli hvaða nafn við gefum þeirri tölu. Hins vegar segir yrðingin '$\exists x(x = 2 \cdot x)$' eitthvað allt annað; í henni er engin frjáls breyta, og hún segir ekkert um einhverja tölu x, heldur að til sé náttúrleg tala sem sé sama talan og hún sjálf tvöfölduð (og yrðingin er þá sönn fullyrðing um náttúrlega talnakerfið, því að talan 0 hefur þennan eiginleika).

(2) Athugum að breyta getur komið fyrir bæði frjáls og bundin í sömu yrðingunni, til dæmis kemur breytan 'x' fyrir bæði frjáls og bundin í þessari yrðingu:

$$\text{`}(y < x) \wedge \forall x((x < z) \vee (x = z))\text{'}$$

frjáls bundin

(3) Í yrðingarökfræði gátum við sett *yrðingasnið* inn í staðinn fyrir breytur. Í umsagnarökfræði standa breyturnar fyrir einhverja *ótiltekna hluti*, og stundum viljum við líka geta talað um *tiltekna hluti* eða hluti *af einhverri tiltekinni tegund*, og því viljum við í máli fyrstu stéttar geta sett *heiti* inn í staðinn fyrir breytur.

Athugum að í umsagnarökfræði geta breytur komið fyrir bæði í heitum og yrðingum. Ef kenning hefur tvístætt falltákn '$+$' og tvístætt umsagnartákn '$=$', þá getum við myndað heitið '$x + y$' og yrðinguna '$x + y = y + x$'. Ef kenningin hefur fastana '2' og '3', þá getum við sett '2' inn fyrir 'x' og '3' inn fyrir 'y' bæði í heitinu og í yrðingunni, og við fáum þá heitið '$2 + 3$' og yrðinguna '$2 + 3 = 3 + 2$'. Það er engum vandkvæðum bundið að setja heiti inn fyrir breytu í heiti, en það getur verið vandkvæðum bundið að setja heiti inn fyrir breytu í yrðingu:

Ef við setjum heiti $\mathbf{a}$ inn í staðinn fyrir breytu $\mathbf{x}$ í yrðingu $\mathbf{A}$, þá viljum við að yrðingin sem þannig fæst segi hið sama um hlutinn sem ber heitið $\mathbf{a}$ eins og yrðingin $\mathbf{A}$ segir um hlut sem ber heitið $\mathbf{x}$. En þá er tvennt sem þarf að varast: Í fyrsta lagi er ljóst að við megum ekki setja heiti inn í staðinn fyrir breytu á þeim stöðum þar sem hún er bundin. Í öðru lagi verðum við að varast að setja inn fyrir breytu $\mathbf{x}$ í yrðingu $\mathbf{A}$ heiti sem inniheldur breytu $\mathbf{y}$ sem verður bundin þegar við setjum heitið inn í yrðinguna $\mathbf{A}$. Þetta er kannski bezt að skýra með dæmi:

Látum $\mathbf{A}$ vera yrðinguna '$\exists y(x = 2\cdot y)$' sem við skoðuðum í athugasemd (1) og segir að x sé jöfn tala. Ef við setjum heitið '4' inn í yrðinguna í staðinn fyrir 'x', þá fáum við yrðinguna '$\exists y(4 = 2 \cdot y)$'; hún segir að talan 4 sé jöfn tala og er sönn fullyrðing. Ef við setjum heitið '5' inn í yrðinguna í staðinn fyrir 'x', þá fáum við yrðinguna '$\exists y(5 = 2\cdot y)$'; hún segir að talan 5 sé jöfn tala og er ósönn fullyrðing. Þetta er eins og það á að vera. En gerum nú ráð fyrir að við reynum að setja heitið '$y + 1$' inn í staðinn fyrir 'x' í fullyrðingunni; þá fáum við fullyðinguna '$\exists y(y+1 = 2\cdot y)$'. En sú yrðing segir alls ekki að talan $y + 1$ sé jöfn tala heldur eitthvað allt annað, nefnilega að jafnan '$y + 1 = 2 \cdot y$' hafi lausn y. Ástæðan er sú að breytan 'y' varð allt í einu bundin þegar við settum hana inn fyrir breytuna 'x' í yrðingunni '$\exists y(x = 2 \cdot y)$'. Þetta megum við því alls ekki leyfa, því að það gæti orðið uppspretta allskonar vitleysu.

Við skilgreinum því:

(1.6) Skilgreining. (1) *Látum* $\mathbf{b}$ *vera heiti á máli fyrstu stéttar* $\mathcal{L}$*, látum* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar breytur og* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vera heiti á málinu* $\mathcal{L}$*. Við táknum með*

$$\mathbf{b}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \quad \textit{eða} \quad \mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{b}$$

heitið sem fæst úr heitinu $\mathbf{b}$ *með því að setja heitið* $\mathbf{a}_k$ *inn fyrir breytuna* $\mathbf{x}_k$ *á hverjum þeim stað þar sem breytan* $\mathbf{x}_k$ *kemur fyrir í heitinui* $\mathbf{b}$ *fyrir öll* $k = 1, \ldots, n$ *samtímis.*

(2) *Við segjum að heiti* $\mathbf{a}$ *í máli fyrstu stéttar* $\mathcal{L}$ *sé* ***innsetjanlegt*** *fyrir breytuna* $\mathbf{x}$ *í yrðingu* $\mathbf{A}$ *á málinu* $\mathcal{L}$ *ef eftirfarandi skilyrði er fullnægt: Fyrir sérhverja breytu* $\mathbf{y}$ *sem kemur fyrir í heitinu* $\mathbf{a}$ *inniheldur yrðingin* $\mathbf{A}$ *enga hlutyrðingu af gerðinni* $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}$ *(eða* $\exists\mathbf{y}\mathbf{B}$*) þannig að breytan* $\mathbf{x}$ *komi fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{B}$*.*

(3) *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingu á máli fyrstu stéttar* $\mathcal{L}$*, látum* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar breytur og* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vera heiti á málinu* $\mathcal{L}$ *þannig að fyrir sérhvert* $k = 1, \ldots, n$ *sé heitið* $\mathbf{a}_k$ *innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{x}_k$ *í yrðingunni* $\mathbf{A}$*. Við táknum með*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \quad \textit{eða} \quad \mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$$

yrðinguna sem fæst úr yrðingunni $\mathbf{A}$ *með því að setja heitið* $\mathbf{a}_k$ *inn fyrir breytuna* $\mathbf{x}_k$ *á hverjum þeim stað þar sem breytan* $\mathbf{x}_k$ *kemur fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{A}$ *fyrir öll* $k = 1, \ldots, n$ *samtímis.*

(1.7) Athugasemdir. (1) Við notum yfirleitt ritháttinn „$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$“ þegar við erum að tala um einstakar yrðingar; en rithátturinn „$\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$“ getur verið þægilegri ef við viljum líta á innsetninguna sem vörpun $\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}$ frá mengi allra yrðinga

$\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}$ þannig að fyrir sérhvert $k = 1, \dots, n$ sé heitið $\mathbf{a}_k$ innsetjanlegt fyrir breytuna $\mathbf{x}_k$ í yrðingunni $\mathbf{A}$ yfir í mengi allra yrðinga á málinu $\mathcal{L}$. Sama er að segja um innsetningar í heiti.

(2) Það er mikilvægt að við setjum heitin $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ inn fyrir breyturnar $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ *samtímis*. Yrðingarnar $\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2}\mathbf{A}$, $\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1}_{\mathbf{x}_1}\mathbf{I}^{\mathbf{a}_2}_{\mathbf{x}_2}\mathbf{A}$ og $\mathbf{I}^{\mathbf{a}_2}_{\mathbf{x}_2}\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1}_{\mathbf{x}_1}\mathbf{A}$ geta allar orðið ólíkar ef heitið $\mathbf{a}_1$ inniheldur breytuna $\mathbf{x}_2$ og heitið $\mathbf{a}_2$ inniheldur breytuna $\mathbf{x}_1$, eins og lesandinn getur auðveldlega fundið einföld dæmi um.

(1.8) Samkomulag. *Við komum okkur saman um að setja aldrei heiti* $\mathbf{a}$ *inn fyrir breytu* $\mathbf{x}$ *í yrðingu* $\mathbf{A}$ *nema heitið* $\mathbf{a}$ *sé innsetjanlegt fyrir* $\mathbf{x}$ *í* $\mathbf{A}$. *Hvenær sem við skrifum „*$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$*“ eða „*$\mathbf{I}^{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$*“ eða eitthvað sambærilegt ber að skilja það sem svo að við gerum ráð fyrir að heitin séu innsetjanleg í fyrir breyturnar í yrðingunni, þótt það sé ekki tekið sérstaklega fram.*

(1.9) Skilgreining. ***Formleg kenning fyrstu stéttar*** $\mathcal{T}$ *er gefin með eftirfarandi hætti:*

A. *Gefið er formlegt mál fyrstu stéttar* $\mathcal{L}(\mathcal{T})$, *sem við köllum* ***mál kenningarinnar***. *Við gerum ráð fyrir að málið hafi að minnsta kosti eitt umsagnartákn.*
B. *Frumsendur kenningarinnar skiptast í tvo flokka; í fyrsta lagi eru* ***eiginlegar frumsendur*** *kenningarinnar, sem geta verið hverjar sem er og ólíkar eftir kenningum, og í öðru lagi eru* ***rökfrumsendur***, *sem eru eins myndaðar fyrir allar kenningar fyrstu stéttar og eru gefnar með eftirfarandi fimm frumsendugripum:*

   F1. $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.
   F2. $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$.
   F3. $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{C} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vee \mathbf{C})$.
   F4. $\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, *þar sem* $\mathbf{a}$ *er heiti sem er innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{a}$ *í yrðingunni* $\mathbf{A}$.
   F5. $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{A} \vee \forall \mathbf{x}\mathbf{B}$ *hvenær sem breytan* $\mathbf{x}$ *kemur hvergi fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{A}$

   Hér geta $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *og* $\mathbf{C}$ *verið hvaða yrðingar sem vera skal á máli kenningarinnar.*
C. *Kenningin hefur tvær rökreglur sem kallast* ***modus ponens*** *og* ***alhæfing*** *og eru þannig:*

   MP. *Af* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *og* $\mathbf{A}$ *leiðir* $\mathbf{B}$.
   Alh. *Af* $\mathbf{A}$ *leiðir* $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}$.

(1.10) Athugasemdir. (1) Alhæfingarreglan kann að koma afar spánskt fyrir sjónir við fyrstu sýn, en dálítil íhugun sýnir okkur að hún er í samræmi við hversdagslegar hefðir um notkun yrðinga sem hafa frjálsar breytur í venjulegum stærðfræðitextum, en þær má orða þannig: Ef við setjum fram almenna setningu þar sem fyrir koma frjálsar breytur, þá skiljum við setninguna þannig að hún eigi að gildar fyrir *alla* þá hluti sem fjallað er um. Tökum dæmi: Þegar við segjum „ef x og y eru rauntölur, þá er $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$“, þá skiljum við þetta svo að það sé hið sama og að segja „fyrir öll x og öll y gildir: ef x og y eru rauntölur, þá er $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$“. Eins þegar við segjum „ef V er línulegt rúm yfir svið K, $\phi : V \to V$ er línuleg vörpun og x er stak í V, þá er $\phi(2x) = \phi(x) + \phi(x)$“, þá skiljum við þetta svo að það sé hið sama og að segja „fyrir öll V og öll K og öll ϕ og öll x gildir: ef V er línulegt rúm yfir rauntalnasviðið, $\phi : V \to V$ er línuleg vörpun og x er stak í V, þá er $\phi(2x) = \phi(x) + \phi(x)$“.

Alhæfingarreglan segir eftirfarandi: Ef við getum *sannað* yrðingu $\mathbf{A}$, þá getum við líka sannað yrðinguna $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$. Og það er einfaldlega vegna þess að við *skiljum* yrðinguna $\mathbf{A}$ þannig að hún segi hið sama og yrðingin $\forall\mathbf{x}\mathbf{A}$, ef hún er sett fram sem sjálfstæð yrðing, til dæmis sem setning í kenningu. Allt öðru máli gegnir ef $\mathbf{A}$ er hluti af stærri yrðingu. Tökum sérstaklega eftir að alhæfingarreglan segir *alls ekki* að við getum sannað yrðinguna $\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}$; sú yrðing er yfirleitt kolröng!! Afleiðslusetningin (I.5.25) sem við sönnuðum í yrðingarökfræði gildir *ekki* ótakmarkað í umsagnarökfræði; sjá setningu (2.9) og viðvörun(2.11) hér á eftir.

(2) Allar kenningar fyrstu stéttar hafa sömu rökreglur og sömu rökfrumsendugrip (en það þýðir ekki að þær hafi sömu rökfrumsendur, því að rökfrumsendugripin eru notuð til að mynda frumsendur úr yrðingum sem eru settar saman úr grunnyrðingum, og grunnyrðingarnar geta verið ólíkar eftir því hvert mál kenningarinnar er). Til að tilgreina kenningu fyrstu stéttar nægir því að tilgreina mál hennar og *eiginlegar* frumsendur hennar.

Langflestar formlegar kenningar sem við höfum áhuga á hafa samasemmerkið ‘$=$’ sem tvístætt umsagnartákn. Það er eðlilegt að telja reglur sem gilda um samasemmerkið með rökreglum. Öll dæmin sem við gefum hér á eftir í (1.13) og (1.14) eru dæmi um kenningar með samasemmerki þar sem þessar reglur gilda. Áður en við gefum dæmi um kenningar fyrstu stéttar setjum því strax fram eftirfarandi viðbót við síðustu skilgreiningu:

(1.11) Skilgreining. ***Formleg kenning fyrstu stéttar með samsemd*** *eða einfaldlega* ***samsemdarkenning*** *er kenning $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar sem hefur samasemmerkið ‘$=$’ meðal tvístæðra umsagnartákna sinna og er auk þess þannig að*

Eq1. $\vdash_{\mathcal{T}}$‘$x = x$’

og þannig að fyrir sérhverja grunnyrðingu $\mathbf{A}$ *sé*

Eq2. $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \to \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$.

(1.12) Athugasemdir. (1) Tökum eftir að **Eq1** sýnir okkur yrðingu (í viðfangsmálinu), en **Eq2** er ***yrðingargrip*** (skrifað á yfirmálinu) sem gefur okkur yrðingu á viðfangsmálinu fyrir sérhverja (grunn)yrðingu $\mathbf{A}$ og allar breytur $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$.

(2) Sérhverja kenningu $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar má gera að samsemdarkenningu $\mathcal{T}_=$ með því að bæta við hana tvístæða umsagnartákninu ‘$=$’ (ef það er ekki þegar fyrir hendi) og bæta yrðingunum í **Eq1** og í **Eq2** við kenninguna sem *nýjum frumsendum*; *við teljum þær þá til rökfrumsendna kenningarinnar*. Þegar við tilgreinum kenningu með þeim formála að hún eigi að vera samsemdarkenning, þá felst í því að við hún hafi samasemmerkið sem tvístætt umsagnartákn og **Eq1**, **Eq2** sem *frumsendur*, sem við köllum þá ***samsemdarfrumsendur*** (og teljum eins og áður sagði til rökfrumsendna). Þetta er algengasta leiðin til að tilgreina samsemdarkenningar. Ástæða þess að við settum

skilgreiningu (1.11) samt fram eins og við gerðum, nefnilega með því að krefjast þess að yrðingarnar í **Eq1** og **Eq2** séu *setningar* frekar en *frumsendur*, er sú að í undantekningartilvikum er hugsanlegt að við getum sannað **Eq 1** og **Eq 2** útfrá *eiginlegum* frumsendum kenningarinnar. Í sumum útgáfum af mengjafræði er samasemmerkið til dæmis *skilgreint* umsagnartákn þannig að litið er á yrðinguna $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ sem skammstöfun fyrir yrðinguna $\forall x(x \in \mathbf{a} \leftrightarrow x \in \mathbf{b})$, þar sem '$x$' kemur ekki fyrir í heitunum **a** og **b**, og yrðingin í **Eq 1** verður þá setning, en **Eq 2** verður ***setningargrip*** í kenningunni.

(1.13) Dæmi. (1) Skilgreinum ***kenningu*** $\mathcal{O}_1$ ***um raðanir*** (sem sumir kalla „hlutraðanir") með þeim skilyrðum að hún sé samsemdarkenning, hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{O}_1)$ úr dæmi (1) í (1.3) og þrjár eiginlegar frumsendur, nefnilega yrðingarnar

$$`x \leq x', \quad `x \leq y \wedge y \leq x \to x = y' \quad \text{og} \quad `x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z'.$$

Við getum fengið ***kenningu um línulegar raðanir*** (sem sumir kalla bara „raðanir") með því að bæta við þessa kenningu fjórðu frumsendunni, nefnilega yrðingunni

$$`x \leq y \vee y \leq x'.$$

Sömuleiðis getum við skilgreint ***kenningu*** $\mathcal{O}_2$ ***um strangar raðanir*** með þeim skilyrðum að hún sé samsemdarkenning, hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{O}_2)$ úr dæmi (1) í (1.3) og einungis tvær eiginlegar frumsendur, nefnilega yrðingarnar

$$`\neg(x < x)' \quad \text{og} \quad `x < y \wedge y < z \to x < z'.$$

Við getum þá einnig bætt við þriðju eiginlegu frumsendunni til að fá ***kenningu um línulegar strangar raðanir***, nefnilega yrðingunni

$$`x < y \vee x = y \vee y < x'.$$

(2) Við skilgreinum tvær ***kenningar um víxlgrúpur***. Sú fyrri, $\mathcal{A}_1$, er skilgreind með þeim skilyrðum að hún hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ úr dæmi (2) í (1.3), sé samsemdarkenning og hafi eftirfarandi þrjár eiginlegar frumsendur:

$$`x + (y + z) = (x + y) + z', \quad `x + y = y + x' \quad \text{og}$$
$$`\exists z(\forall x(x + z = x) \wedge \forall x \exists y(x + y = z)).'$$

Hin kenningin, $\mathcal{A}_2$, um víxlgrúpur er skilgreind með þeim skilyrðumi að hún hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ úr dæmi (2) í (1.3), sé samsemdarkenning og hafi eftirfarandi fjórar eiginlegar frumsendur:

$$`x + (y + z) = (x + y) + z', \quad `x + 0 = x', \quad `x + (-x) = 0' \quad \text{og} \quad `x + y = y + x'.$$

(3) Með hliðstæðum hætti getum við skilgreint kenningar sem nota málin úr lið (3) í (1.3). Fyrra málið $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ má raunar nota til að skilgreina fleiri en eina kenningu; minnumst á þrjár:

Í fyrsta lagi getum við skilgreint ***kenningu um hálfgrúpur*** $\mathcal{H}$ með þeim skilyrðum að hún sé samsemdarkenning á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ og hafi aðeins eina frumsendu, nefnilega ***tengiregluna***

$$`x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z'.$$

Við getum líka skilgreint ***kenningu um hálfgrúpur með hlutleysu***, sem einnig má nefna ***kenningu um einunga*** með þeim skilyrðum að hún sé samsemdarkenning á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ og hafi nákvæmlega tvær frumsendur, nefnilega tengiregluna og ***frumsendu um hlutleysu***

$$`\exists z(\forall x((x \cdot z = x) \land (z \cdot x = x))'.$$

Loks getum við notað málið til að skilgreina ***kenningu um grúpur*** $\mathcal{G}_1$ með þeimr skilyrðum að hún sé samsemdarkenning á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ og hafi eftirfarandi tvær frumsendur:

$$`\,x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z' \quad \text{og}$$
$$`\exists z(\forall x((x \cdot z = x) \land (z \cdot x = x)) \land \forall x \exists y((x \cdot y = z) \land (y \cdot x = z))).'$$

En við getum einnig skilgreint aðra kenningu um grúpur, nefnilega kenninguna $\mathcal{G}_2$ sem er samsemdarkenning á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$ úr lið (3) í (1.3) og hefur þrjár frumsendur:

$$`x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z', \; `(e \cdot x = x) \land (x \cdot e = x)' \text{ og } \; `(x \cdot x^{-1} = e) \land (x^{-1} \cdot x = e)'.$$

Hér er táknið '$^{-1}$' í táknasamstæðunni 'x^{-1}' skammstöfun, eins og skýrt var frá í (1.3) Við athugum tengslin milli þessara tveggja kenninga betur síðar.

(4) Skilgreinum ***kenningu*** $\mathcal{R}$ ***um bauga*** með því skilyrði að hún hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ úr dæmi (4) í (1.3) og eftirfarandi níu eiginlegar frumsendur:

$$`\,x + (y + z) = (x + y) + z', \quad `\,x + 0 = x', \quad `\,x + (-x) = 0', \quad `\,x + y = y + x'$$
$$`x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z', \quad `1 \cdot x = x', \quad `x \cdot 1 = x',$$
$$`x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z' \quad \text{og} \quad `(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z'.$$

(5) Kannski er ***Zermelo-Fraenkel-mengjafræði*** allramikilvægasta dæmið um kenningu fyrstu stéttar. Við ætlum ekki að gera fulla grein fyrir henni hér, því að það er efni í aðra bók, heldur látum okkur í stórum dráttum nægja að tiltaka frumsendur hennar. Mál kenningarinnar er málið $\mathcal{L}(\mathcal{ZF})$ úr dæmi (5) í (1.3), og fyrir utan samasemmerkið hefur það aðeins eitt eiginlegt tákn, nefnilega táknið '$\in$'; við lesum fullyrðinguna $\mathbf{x} \in \mathbf{u}$ sem „$\mathbf{x}$ er stak í (menginu) $\mathbf{y}$“.

Tökum þó strax skýrt fram að setja má fram frumsendur mengjafræðinnar á marga ólíka vegu, þannig að ekki er víst að þær frumsendur sem við setjum hér fram séu notaðar af öllum höfundum. Tökum einnig fram að mengjafræði er samsemdarkenning, og við teljum **Eq1** og **Eq2** til rökfræðilegra frumsendna hennar.

Fyrstu eiginlegu frumsenduna sem við tilgreinum má sannarlega nefna mikilvægusta undirstöðueiginleika mengjafræðinnar, enda er hún sameiginleg flestum frumsendukerfum fyrir mengjafræði. Það er svokölluð ***frumsenda um umtak***, en það er yrðingin

$$`\,((x \in A) \leftrightarrow (x \in B)) \to A = B'.$$

Í pólskum rithætti er þetta yrðingin '$\to\leftrightarrow \in xA \in xB = AB$', og ber þess þá að gæta að '$\,\to$' og '$\,\leftrightarrow$' eru skilgreind tákn (þ. e. skammstafanir) í pólskum rithætti, eins og gerð er grein fyrir í skilgreiningu (1.1); sjá líka athugasemd (I.4.13). Ef lesið er úr skammstöfununum verður fullyrðingin að

$$\text{‘}\vee\neg\neg\vee\neg\vee\neg{\in}xA{\in}xB\neg\vee\neg{\in}xB{\in}xA{=}AB\text{’}.$$

Frumsendan um umtak er það sem í raun skilgreinir mengjahugtakið: Hún segir að einhver gefin mengi séu sama mengið þá og því aðeins að þau hafi sömu stök; með öðrum orðum að mengi ákvarðist ótvírætt af stökum sínum.

Aðrar frumsendur mengjafræðinnar (með einni undantekningu, svokallaðri ***regluleikafrumsendu***, sem er sjaldan notuð af öðrum en þeim sem leggja mengjafræði sérstaklega fyrir sig) tryggja tilvist mengja sem eru mynduð með venjulegum mengjaaðgerðum. Þar má fyrst nefna svokallaða ***frumsendu um hlutmengi***, sem er raunar ekki ein frumsenda, heldur *frumsendugrip*, og er þannig: Fyrir sérhverja yrðingu $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{ZF})$ og allar ólíkar breytur $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ þannig að $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ komi ekki fyrir í yrðingunni $\mathbf{A}$ er yrðingin

$$\forall\mathbf{x}\exists\mathbf{y}\forall\mathbf{z}(\mathbf{z}\in\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{z}\in\mathbf{x}\wedge\mathbf{A})$$

frumsenda. Við köllum sérhverja frumsendu sem fæst úr þessu frumsendugripi ***hlutmengjafrumsendu***.

Enn ein frumsenda er stundum nefnd ***frumsenda um lítil mengi*** og stundum ***frumsenda um (óraðaðar) tvenndir*** og er þannig:

$$\text{‘}\forall x\forall y\exists z\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)\text{’}.$$

Frumsendu um sammengi má setja fram sem hér segir:

$$\text{‘}\forall x\exists u(t\in u\leftrightarrow\exists y(t\in y\wedge y\in x\}\text{’}.$$

Og ***frumsendu um veldismengi*** má setja fram sem hér segir:

$$\text{‘}\forall x\exists p\forall y(y\in p\leftrightarrow\forall z(z\in y\to z\in x)\text{’}.$$

Frumsendu um tilvist óendanlegs mengis má orða þannig:

$$\text{‘}\exists x\big(\exists y(y\in x\wedge\forall z(x\notin y))\wedge\forall y(y\in x\to\exists z(z\in x\wedge\forall t(t\in z\leftrightarrow t\in y\vee t=y))))\big)\text{’}.$$

Kenninguna $\mathcal{Z}$ með ofangreindum frumsendum mætti kalla ***Zermelo-mengjafræði án valfrumsendu***. Við getum svo bætt við hana ***valfrumsendunni***. Hana má orða á ýmsa vegu. Ef við viljum geta skrifað hana beint á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{ZF})$ er auðveldast að hugsa sér að hún segi að sérhvert mengi x af mengjum sem hafa ekkert sameiginlegt stak tvö og tvö og eru ekki tóm sé til mengi w sem hefur nákvæmlega eitt stak úr hverju mengi y sem er stak í x, og engin önnur stök; með öðrum orðum megum við *velja* eitt stak úr hverju mengjanna sem eru stök í x og taka þau saman í eitt mengi w. Þetta mætti skrifa svona á málinu $\mathcal{LZF}$:

$$\begin{aligned}\text{‘}\forall x\Bigg(&\forall y\forall z\big(y\in x\wedge z\in x\wedge y\neq z\to\neg\exists t(t\in y\wedge t\in z)\big)\wedge\forall y\big(y\in x\to\exists t(t\in y)\big)\\&\to\exists w\big((\forall t(t\in w\to\exists y(y\in x\wedge t\in x))\\&\wedge\forall y(y\in x\to\exists t(t\in y\wedge t\in w\wedge\forall s(s\in y\wedge s\in w\to s=t))))\big)\Bigg)\text{’}.\end{aligned}$$

Kenninguna $\mathcal{ZC}$ sem fæst með því að bæta valfrumsendunni við kenninguna $\mathcal{Z}$ mætti kalla ***Zermelo-mengjafræði með valfrumsendu***. Þetta er sú mengjafræði sem flestir stærðfræðingar nota dags daglega.

Í Zermelo-Fraenkel-mengjafræði bætast tvær frumsendur við, eða öllu heldur ein frumsenda og eitt frumsendugrip. Þessar frumsendur eru afar sjaldan notaðar nema af þeim sem fást alveg sérstaklega við mengjafræði eða þurfa að nota einhver sérstök hugtök hennar; til dæmis *raðtölur* (sem við ætlum ekki að fjalla um í þessum fyrirlestrum). Sú fyrri er stundum kölluð ***regluleikafrumsenda*** og er venjulega orðuð með heldur ógegnsæjum hætti þannig:

$$\text{‘}\forall x\big(\exists y(y \in x) \to \exists(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))\big)\text{’}.$$

Sýna má (eftir að ýmis frekari hugtök hafa verið skilgreind) að þessi frumsenda jafngildir því að *ekki* sé til óendenlega löng runa $x_0, x_1, x_2, \ldots$ af mengjum þannig að hvert þeirra sé stak í því næsta á undan, þ. e.

$$\cdots \in x_{n+1} \in x_n \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0.$$

Frumsendugripið er gjarnan kallað ***frumsendugrip um innsetningu*** og er þannig:

$$\forall \mathbf{u}\Bigg(\forall \mathbf{x}\big(\mathbf{x} \in \mathbf{u} \to \exists \mathbf{y}(\mathbf{A} \wedge \forall \mathbf{z}(\mathbf{A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{z}] \to \mathbf{z} = \mathbf{y}))\big) \to \exists \mathbf{v}\forall \mathbf{y}\big(\mathbf{y} \in \mathbf{v} \leftrightarrow \exists \mathbf{x}(\mathbf{x} \in \mathbf{u} \wedge \mathbf{A})\big)\Bigg).$$

Hér er $\mathbf{A}$ yrðing og $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ eru ólíkar breytur þannig að $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ komi ekki fyrir í yrðingunni $\mathbf{A}$. Við hugsum okkur að $\mathbf{A}$ sé fullyrðing um stökin $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Frumsendugripið segir þá eftirfarandi: Fyrir sérhvert mengi $\mathbf{u}$ þannig að fyrir sérhvert stak $\mathbf{x}$ úr menginu $\mathbf{u}$ sé til *nákvæmlega eitt* stak $\mathbf{y}$ þannig að yrðingin $\mathbf{A}$ sé sönn, þá er til mengi $\mathbf{v}$ sem inniheldur öll stök $\mathbf{y}$ sem fullnægir skilyrðinu $\mathbf{A}$ fyrir eitthvert stak $\mathbf{x}$ úr menginu $\mathbf{u}$. [Frumsendugripið leyfir okkur þá að nota yrðinguna $\mathbf{A}$ til að skilgreina vörpun frá menginu $\mathbf{u}$ í mengið $\mathbf{v}$.]

Ef við bætum regluleikafrumsendunni og frumsendugripinu við kenninguna $\mathcal{Z}$ fáum við ***Zermelo-Fraenkel-mengjafræði án valfrumsendu*** $\mathcal{ZF}$. Ef við svo bætum valfrumsendunni við að auki, þá fáum við ***Zermelo-Fraenkel-mengjafræði með vafrumsendu*** $\mathcal{ZFC}$.

Tvö önnur dæmi um formlegar kenningar þurfum við að nota síðar meir, ekki aðeins sem dæmi, heldur sem bæði tæki og sérstök athugunarefni, svo að við tilgreinum þau í formlegri skilgreiningu:

(1.14) Skilgreining. (1) *Kenningin $\mathcal{N}$ um náttúrlegar tölur er skilgreind með því skilyrði að hún sé samsemdarkenning, hafi málið $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ úr dæmi* (5) *í* (1.3) *og eftirfarandi níu eiginlegar frumsendur (sem við skrifum á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$):*

N1. $Sx \neq 0$.
N2. $Sx = Sy \to x = y$.
N3. $x + 0 = x$.
N4. $x + Sy = S(x + y)$.
N5. $x \cdot 0 = 0$.

N6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$.
N7. $\neg(x < 0)$.
N8. $x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y$.
N9. $x < y \vee x = y \vee y < x$.

(2) *Kenningin $\mathcal{PA}$ um náttúrlegar tölur hefur sama mál og kenningin $\mathcal{N}$ og allar frumsendur kenningarinnar $\mathcal{N}$ eru jafnframt frumsendur kenningarinnar $\mathcal{PA}$; en auk þess hefur kenningin $\mathcal{PA}$ frumsendugrip sem við köllum* ***frumsendugrip um þrepun*** *og er þannig:*

Ind. $\mathbf{A_x}[0] \wedge \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]) \rightarrow \mathbf{A}$.

Kenningin $\mathcal{PA}$ kallast ***Peano-reikningur****.*

(1.15) Athugasemd. Kenningin $\mathcal{N}$ er afar veik í þeim skilningi að það er langt frá að við getum sannað algengustu eiginleika náttúrlegra talna úfrá frumsendunum í $\mathcal{N}$, svo sem víxlreglurnar fyrir samlagningu og margföldun. Við getum hins vegar framkvæmt reikninga í kenningunni $\mathcal{N}$ með *tilteknum ákveðnum tölum*: Þannig fáum við til dæmis $\vdash$ '$SS0 + SS0 = S(SS0 + S0)$' samkvæmt **N4**, $\vdash$ '$S(SS0 + S0) = SS(SS0 + 0)$', aftur samkvæmt **N4**, $\vdash$ '$SS(SS0 + 0) = SSSS0$' samkvæmt **N3**, og gegnvirkni gefur okkur $\vdash$ '$SS0 + SS0 = SSSS0$', sem má skrifa $\vdash$ '$2 + 2 = 4$' með samkomulaginu úr dæmi (6) í (1.3). En þótt kenningin $\mathcal{N}$ sé ekki ýkja sterk á hún eftir að koma okkur að góðum notum síðar meir.

Kenningin $\mathcal{PA}$ er hins vegar miklu sterkari, og í henni má sanna mjög margt af þeim eiginleikum náttúrlegu talnanna sem má setja fram á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$, til dæmis einfölduðstu reiknireglurnar fyrir samlagningu og margföldun. Tökum eftir að kenningin $\mathcal{N}$ hefur einungis endanlega margar frumsendur, en kenningin $\mathcal{PA}$ hefur *óendanlega margar* frumsendur, því að frumsendugripið **Ind** gefur okkur eina frumsendu fyrir hverja yrðingu $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$.

Tökum eftir að mál kenningarinnar leyfir okkur þó aðeins að tala um náttúrlegu tölurnar sjálfar, en ekki til dæmis um mengi af náttúrlegum tölum, þannig að fullyrðingu eins og „sérhvert mengi af náttúrlegum tölum sem er ekki tómt hefur minnsta stak“ getum við ekki sannað í Peano-reikningi af þeirri einföldu ástæðu að við getum ekki skrifað hana á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$.

Minnumst þess nú að í yrðingarökfræði gegna breytistærðir allt öðru hlutverki en breyturnar í kenningum fyrstu stéttar; við hugsuðum okkur að þær gætu staðið fyrir hvers komar fullyrðingar á hvaða máli sem vera skal. Það er því ekkert því til fyrirstöðu að við setjum yrðingar úr kenningu fyrstu stéttar inn í stað breytnanna í yrðingasniði. Við getum því gert eftirfarandi viðbót við skilgreiningu (I.4.7).

(1.16) Skilgreining. *Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingasnið í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ fyrir yrðingarökfræði og látum og $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera ólíkar yrðingabreytur þannig að engar yrðingabreytur aðrar en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ komi fyrir í yrðingasniðinu $\mathbf{A}$. Látum $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ vera yrðingar á máli $\mathcal{L}$ fyrstu stéttar. Við táknum með*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n]$$

og stundum einnig með

$$\mathbf{I}^{\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\ldots,\mathbf{B}_n}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$$

stæðuna sem fæst úr yrðingasniðinu $\mathbf{A}$ *með því að setja yrðinguna* $\mathbf{B}_k$ *inn í stað yrðingabreytunnar* $\mathbf{x}_k$ *á hverjum þeim stað sem breytan* $\mathbf{x}_k$ *kemur fyrir í stæðunni* $\mathbf{A}$ *fyrir öll* $k = 1, \ldots, n$.

Tökum eftir að að öll þau tákn sem við höfðum til umráða í yrðingarökfræði höfum við einnig í sérhverri kenningu fyrstu stéttar. Því er augljóst:

(1.17) Setning. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingasnið í málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ *og látum og* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur þannig að engar yrðingabreytur aðrar en* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *komi fyrir í yrðingasniðinu* $\mathbf{A}$. *Látum* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *vera yrðingar á máli* $\mathcal{L}$ *fyrstu stéttar. Þá er stæðan* $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n]$ *líka yrðing á málinu* $\mathcal{L}$. □

Tökum næst eftir að fyrstu þrjú frumsendugripin í kenningu fyrstu raðar líta alveg eins út og frumsendugripin í yrðingarökfræði; munurinn er aðeins sá að í yrðingarökfræði notum við frumsendugripin til að búa til frumsendur út *yrðingasniðum* en í kenningu fyrstu stéttar búum við frumsendurnar til úr *yrðingum kenningarinnar.* Við sjáum því: *Ef við setjum yrðingasnið úr máli* $\mathcal{L}$ *fyrstu stéttar inn fyrir breyturnar í frumsendu kenningarinnar* $\mathcal{P}$ *um yrðingarökfræði, þá fáum við rökfrumsendu á málinu* $\mathcal{L}$, og hún er þá frumsenda í sérhverri kenningu fyrstu stéttar sem er skrifuð á málinu $\mathcal{L}$. Auk þess er eina rökreglan sem við höfðum í kenningunni $\mathcal{P}$ reglan **MP**, sem er líka regla í sérhverri formlegri kenningu fyrstu stéttar. Við fáum því:

(1.18) Sísönnusetning. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera sísönnu á málinu* $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, *látum* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vera ólíkar yrðingabreytur þannig að engar yrðingabreytur aðrar en* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *komi fyrir í yrðingasniðinu* $\mathbf{A}$ *og látum* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *vera yrðingar á máli* $\mathcal{L}$ *fyrstu stéttar. Þá er yrðingin* $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$ *setning í sérhverri formlegri kenningu fyrstu stéttar sem hefur málið* $\mathcal{L}$. □

Sönnun: Látum $\mathbf{C}_1, \ldots .\mathbf{C}_m$ vera sönnun sísönnunnar $\mathbf{A}$ í kenningunni $\mathcal{P}$ um yrðingarökfræði. Látum $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$ vera upptalningu allra yrðingarbreytna sem koma fyrir í yrðingasniðunum $\mathbf{C}_1, \ldots .\mathbf{C}_m$ en eru ekki meðal breytnanna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Látum $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_r$ vera einhverjar yrðingar á málinu $\mathcal{L}$. Skrifum $\theta\mathbf{D}$ í stað $\mathbf{I}^{\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n,\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_r}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_r}\mathbf{D}$. Þá er $\theta\mathbf{C}_1, \ldots .\theta\mathbf{C}_m$ sönnun sísönnunnar $\theta\mathbf{A}$ í sérhverri kenningu fyrstu stéttar sem hefur málið $\mathcal{L}$, og $\theta\mathbf{A}$ er einmitt yrðingin $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$. □

Orðið „sísönnusetning“ er líka oft notað um eftirfarandi afleiðingu:

(1.19) Fylgisetning. *Látum* $\mathcal{T}$ *vera kenningu fyrstu stéttar og* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}$ *vera yrðingar á máli kenningarinnar. Gerum ráð fyrir að* $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_1 \ldots, \vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_n$ *og að yrðingin* $\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ *fáist með innsetningu í sísönnu. Þá er* $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{B}$.

Sönnun: Lesandinn sér auðveldlega að yrðingasniðið ‘$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$’ er rökfræðilega jafngilt yrðingasniðinu ‘$p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_n \to q$’, svo að yrðingin $\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ fæst líka með innsetningu í sísönnu. Af sísönnusetningunni leiðir þá að $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. Af $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_1$ og $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ leiðir $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ með **MP**; af $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_2$ og $\vdash_\mathcal{T} \mathbf{A}_2 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$

leiðir $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}_3 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ með **MP** og svo koll af kolli, þar til við að lokum fáum $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$. □

Í raun leyfir sísönnusetningin okkur að nota allar afleiddar reglur í yrðingarökfræði sem eru leiddar af sísönnum, eins og lýst var lauslega í athugasemd (I.5.36), einnig í umsagnarökfræði Í næstu setningu tilgreinum við örfáar slíkar reglur; lesandinn ætti að geta notað hana sem fyrirmynd til að fá fjöldann allan af öðrum afleiðingum af sísönnusetningunni. Einfaldar afleiðingar af sísönnusetningunni sem má sanna með svipuðum hætti og næstu setningu notum við einatt hiklaust og látum okkur þá nægja að vísa í sísönnusetninguna.

(1.20) Fylgisetning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar og $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vera yrðingar á máli kenningarinnar.*

(1) *Gerum ráð fyrir að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$. Þá höfum við $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ þá og því aðeins að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$.*
(2) (*Gegnvirkni*) *Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, þá $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.*
(3) *Við höfum $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ þá og því aðeins að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$.*
(4) *Við höfum $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ þá og því aðeins að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.*
(5) *Við höfum $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ þá og því aðeins að $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}$.*

Sönnun: (1) Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$, þá fæst $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$, því að $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ fæst með innsetningu í sísönnu. Eins leiða $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$ til $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$, því að yrðingin $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ fæst með innsetningu í sísönnu.

(2) er ljóst, því að yrðingin $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ fæst með innsetningu í sísönnu.

(3) Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, þá fæst $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$, því að yrðingarnar $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ og $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ fást með innsetningu í sísönnur. Ef á hinn bóginn $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ og $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{B}$, þá fæst $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, því að yrðingin $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ fæst með innsetningu í sísönnu.

(4) er augljóst, af því að yrðingarnar $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$ og $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A}) \to (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ fást með innsetningu í sísönnur.

(5) er sömuleiðis augljóst, af því að yrðingarnar $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A})$ og $(\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ fást með innsetningu í sísönnur. □

§2. Ýmsar afleiddar rökreglur í umsagnarökfræði

(2.1) Samkomulag. Í þessari grein gerum við ráð fyrir, meðan annað er ekki tekið fram, að við höfum gefna einhverja kenningu $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar með máli $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{T})$; og við skrifum „$\vdash \mathbf{A}$“ í stað „$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$“. Breytur, heiti og yrðingar eru á málinu $\mathcal{L}$, nema annað sé tekið fram.

(2.2) Setning. *Ef heitið $\mathbf{a}$ er innsetjanlegt fyrir breytuna $\mathbf{x}$ í yrðingunni $\mathbf{A}$, þá er*

$$\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}.$$

Sönnun: Ljóst er að heitið $\mathbf{a}$ er einnig innsetjanlegt í yrðinguna $\neg\mathbf{A}$. Samkvæmt frumsendu **Fr4** fæst $\vdash \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, og af því leiðir $\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \neg\forall\neg\mathbf{A}$ samkvæmt sísönnusetningu. □

(2.3) Setning. (1) („$\exists\rightarrow$-*regla*“) *Ef breytan* $\mathbf{x}$ *kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{B}$ *og* $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *þá er* $\vdash \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

(2) („$\rightarrow\forall$-*regla*“) *Ef breytan* $\mathbf{x}$ *kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{A}$ *og* $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *þá er* $\vdash \mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$.

Sönnun: (1) Gefið er að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, og sísönnusetning gefur $\vdash \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$. Þá fæst $\forall\mathbf{x}(\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A})$ samkvæmt **Alh**. Nú er $\forall\mathbf{x}(\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}) \to \mathbf{B} \vee \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}$ samkvæmt frumsendu **Fr5**, og **MP** gefur því $\mathbf{B} \vee \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}$. Sísönnusetningin sýnir þá að $\vdash (\neg\neg\forall\mathbf{A}\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B}$, og það má umskrifa sem $\vdash \mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$.

(2) Gefið er að $\vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, og **Alh** gefur $\vdash \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$. Nú er $\vdash \forall\mathbf{x}(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A} \vee \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$ samkvæmt **Fr5**, og **MP** sýnir að $\vdash \neg\mathbf{A} \vee \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$, en það þýðir eimnitt að $\vdash \mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$. $\square$

(2.4) Innsetningarregla. *Gerum ráð fyrir að* $\vdash \mathbf{A}$ *og að heitin* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *séu innsetjanleg fyrir ólíku breyturnar* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *í yrðingunni* $\mathbf{A}$. *Þá er*

$$\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n].$$

Sönnun: Við sönnum fyrst tilvikið $n = 1$. Gerum ráð fyrir að $\vdash \mathbf{A}$ og að heitið $\mathbf{a}$ sé innsetjanlegt fyrir $\mathbf{x}$ í yrðingunni $\mathbf{A}$. Við höfum $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{A}$ samkvæmt **Alh** og **Fr4** gefur $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$. En þá fæst $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ samkvæmt **MP**.

Til að sanna almenna tilvikið látum við $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ vera ólíkar breytur þannig að þær séu einnig ólíkar breytunum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ og komi ekki fyrir í yrðingunni $\mathbf{A}$ (hvorki bundnar né óbundnar) og ekki í neinu af heitunum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Þá eru breyturnar $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ innsetjanlegar fyrir breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ í yrðingunni $\mathbf{A}$, og þar sem engin þeirra er ein af breytunum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ getum við sett þær inn í staðinn fyrir $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ eina og eina í einu og fáum hið sama út eins og við að setja þær inn allar samtímis. Af tilvikinu $n = 1$ leiðir skref fyrir skref að

$$\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1], \quad \vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2], \quad \cdots \quad , \quad \vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n].$$

En nú koma breyturnar $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ ekki fyrir í heitunum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. En það þýðir að við getum aftur sett heitin $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ inn fyrir breyturnar $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ í yrðingunni $\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n]$ eitt og eitt í einu og fáum hið sama út eins og við að setja þær inn allar samtímis. Af tilvikinu $n = 1$ leiðir skref fyrir skref að

$$\begin{gathered}
\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_n], \\
\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_n], \\
\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{y}_n], \\
\vdots \\
\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n],
\end{gathered}$$

[Það hefði hinsvegar verið óleyfilegt að setja heitin $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ inn fyrir $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ í $\mathbf{A}$ eitt og eitt í einu, því að breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ gætu komið fyrir í heitunum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.] $\square$

(2.5) Innsetningarsetning fyrir umsagnarökfræði. *Ef heitin* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ *eru innsetjanleg fyrir ólíku breyturnar* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ *í yrðingunni* $\mathbf{A}$*, þá er*

$$\vdash \forall \mathbf{x}_1 \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n].$$

og

$$\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \cdots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}.$$

Sönnun: Þar sem breytan $\mathbf{x}$ er alltaf innsetjanleg fyrir sjálfa sig í yrðingu $\mathbf{B}$ og $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]$ er einfaldlega $\mathbf{B}$ er

$$\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{B} \to \mathbf{B}$$

samkvæmt frumsendu **Fr4**. Látum nú $\mathbf{B}$ vera yrðinguna $\forall \mathbf{x}_{i+1} \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}$ og $\mathbf{x}$ vera breytuna $\mathbf{x}_i$ og fáum

$$\vdash \forall \mathbf{x}_i \forall \mathbf{x}_{i+1} \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x}_{i+1} \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}.$$

Þetta gildir fyrir öll $i = 1, \dots, n$, og með því að nota lið (2) í fylgisetningu (1.20) $n-1$ sinni fáum við $\vdash \forall \mathbf{x}_1 \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Innsetningarreglan (2.4) sýnir okkur svo $\vdash \forall \mathbf{x}_1 \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$.

Eins höfum við $\vdash \mathbf{C} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{C}$; af því leiðir með sama hætti að $\vdash \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_1 \cdots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}$, og innsetningarreglan sýnir þá að $\vdash \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \cdots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}$. □

(2.6) Fylgisetning. *Ef* $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, þá er* $\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}$ *og* $\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{B}$.

Sönnun: Gefið er að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Af innsetningarsetningu leiðir $\vdash \mathbf{B} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}$. Af fylgisetningu (1.20) leiðir að $\vdash \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}$, og $\exists\to$-reglan í (2.3) sýnir að $\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}$.

Eins er $\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ samkvæmt innsetningarsetningu. Af því og $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ fæst $\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, og $\to\forall$-reglan í (2.3) sýnir þá að $\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{B}$ □

(2.7) Skilgreining. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingu á máli fyrstu stéttar. Yrðing kallast* ***lokun*** *yrðingarinar* $\mathbf{A}$ *ef hún er af gerðinni* $\forall \mathbf{x}_1 \cdots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}$*, þar sem* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ *er einhver upptalning breytnanna sem koma fyrir frjálsar í yrðingunni* $\mathbf{A}$.

Við fáum nú:

(2.8) Fylgisetning. *Látum* $\mathbf{A}'$ *vera lokun yrðingarinnar* $\mathbf{A}$*. Við höfum* $\vdash \mathbf{A}'$ *þá og því aðeins að* $\vdash \mathbf{A}$.

Sönnun: Ef $\vdash \mathbf{A}$, þá fæst $\vdash \mathbf{A}'$ samkvæmt **Alh** og þrepun. Gerum næst ráð fyrir að $\vdash \mathbf{A}'$. Nú er $\vdash \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$ samkvæmt innsetningarsetningu, og $\vdash \mathbf{A}$ fæst þá með **MP**. □

(2.9) Afleiðslusetning fyrir umsagnarökfræði. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera lokaða yrðingu og* $\mathbf{B}$ *vera yrðingu á máinu* $\mathcal{L}$*. Ef* $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$*, þá er* $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Sönnun: Látum $\mathcal{T}[\mathbf{A}]$ vera kenninguna sem fæst úr kenningunni $\mathcal{T}$ með því að bæta yrðingunni $\mathbf{A}$ við hana sem nýrri eiginlegri frumsendu. Fullyrðingin „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ þýðir þá að $\vdash_{\mathcal{T}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}$. Við þurfum því að sýna: Ef $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_m$ er sönnun yrðingarinnar $\mathbf{B}$ í kenningunni $\mathcal{T}[\mathbf{A}]$, þá er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Við sýnum með þrepun að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_k$; fullyrðingin fæst þá fyrir $k = m$. Við skiptum sönnuninni í þrjú tilvik:

Fyrsta tilvik; fullyrðingin $\mathbf{C}_k$ er frumsenda í kenningunni $\mathcal{T}[\mathbf{A}]$: Ef $\mathbf{C}_k$ er yrðingin $\mathbf{A}$, þá er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_k$ samkvæmt sísönnusetningu. Annars er $\mathbf{C}_k$ frumesenda í kenningunni $\mathcal{T}$, og þá er $\vdash \mathbf{C}_k$, svo að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_k$ samkvæmt sísönnusetningu (því að '$p \to (q \to p)$' er sísanna).

Annað tilvik: fullyrðingin $\mathbf{C}_k$ er afleiðing af yrðingum $\mathbf{C}_i$ og $\mathbf{C}_j$ þannig að $i, j < k$ með **MP**. En samkvæmt þrepunarforsendu er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$ og $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_j$, svo að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_k$ samkvæmt sísönnusetningu.

Þriðja tilvik; fullyrðingin $\mathbf{C}_k$ er afleiðing af yrðingu $\mathbf{C}_i$ þannig að $i < k$ með **Alh**. Þá er $\mathbf{C}_k$ fullyrðing af gerðinni $\forall \mathbf{x} \mathbf{C}_i$, þar sem $\mathbf{x}$ er einhver breyta. Samkvæmt þrepunarforsendu er $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_i$, Þar sem yrðingin $\mathbf{A}$ er lokuð kemur breytan $\mathbf{x}$ ekki fyrir frjáls í $\mathbf{A}$, svo að $\vdash \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{C}_i$ samkvæmt ($\to\forall$)-reglu í setningu (2.3), og það þýðir að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}_k$. □

(2.10) Fylgisetning. *Látum* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *vera lokaðar yrðingar. Ef* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, *þá er* $\vdash \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. □

(2.11) Viðvörun. Ekki má sleppa þeirri forsendu úr afleiðslusetningunni að yrðingin $\mathbf{A}$ sé lokuð. Gerum til dæmis ráð fyrir að $\mathcal{T}$ sé kenning fyrstu stéttar með samasemmerki '$=$' og fasta '0'. Þá gildir ævinlega $x = 0 \vdash y = 0$. Þetta má sjá með eftirfarandi hætti: Gefum okkur fullyrðinguna '$x = 0$' sem nýja frumsendu. Þá getum við skrifað niður eftirfarandi sönnun á málinu $\mathcal{L}$:

1. $x = 0$	Ný frumsenda
2. $\forall x(x = 0)$	**Alh**
3. $\forall x(x = 0) \to y = 0$	Innsetningarsetning
4. $y = 0$	Línur 2, 3 og **MP**

Þetta er ekkert skrýtið: Ef við bætum yrðingunni '$x = 0$' við sem *nýrri frumsendu*, þá verður að skilja hana sem svo að *sérhvert* x sé núll, og þá er eðlilega $y = 0$, hvað sem y er.

Hins vegar er allsendis fráleitt að við getum almennt sannað í slíkri kenningu $\mathcal{T}$ að $\vdash$'$x = 0 \to y = 0$'; við gætum þá notað **Alh** og fengið $\vdash$'$\forall x \forall y(x = 0 \to y = 0)$', og sú yrðing segir nokkurnveginn sama og „ef eitt stak er núll, þá eru öll stök núll".

Tökum eftir: Ef við tökum *lokuðu* yrðinguna '$\forall x(x = 0)$' í staðinn fyrir yrðinguna '$x = 0$', þá verður allt í himnalagi: Við höfum alltaf bæði '$\forall x(x = 0)$'$\vdash$'$y = 0$' og $\vdash$'$\forall x(x = 0) \to y = 0$', hvort sem kenningin $\mathcal{T}$ hefur nokkrar eiginlegar frumsendur eða ekki.

(2.12) Athugasemd. Sú takmörkun að yrðingin $\mathbf{A}$ í afleiðslusetningunni þurfi að vera lokuð er við fyrstu sýn verulega óþægileg. Langflestar setningar stærðfræðinnar eru af gerðinni „ef gefnum forsendum er fullnægt, þá gildir tiltekin niðurstaða", og það er alsiða að sanna slíkar setningar með þvi að gefa sér forsendurnar og sýna fram á að af þeim (og almennum frumsendum kenningarinnar sem við erum að vinna með) leiði niðurstaðan. Með öðrum orðum sönnum við $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ og viljum álykta að $\vdash \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. Þetta er það sem við gerum í venjulegum stærðfræðitextum, og virðumst ekki hafa nokkrar áhyggjur af hvort yrðingarnar $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ eru lokaðar eða ekki.

Það má hugsa sér tvær leiðir út úr þessum ógöngum. Sú fyrri er að alhæfa afleiðslusetninguna dálítið þannig að við þurfum ekki nauðsynlega að gera ráð fyrir að yrðingin $\mathbf{A}$ sé lokuð, ef við í staðinn setjum skilyrði á *sönnun* fullyrðingarinnar „$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$“ (sem er fullyrðing á yfirmálinu, ekki á málinu $\mathcal{L}$). Sýna má: Ef $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ og $\mathbf{B}$ eru yrðingar á málinu $\mathcal{L}$ og sanna má fullyrðinguna „$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$“ þannig að alhæfingarreglunni „$\mathbf{A} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}$“ sé aðeins beitt fyrir breytur $\mathbf{x}$ sem koma hvergi fyrir frjálsar í yrðingunum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, þá er $\vdash \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. Lesandinn getur gengið úr skugga um að sönnun afleiðslusetningarinnar megi alhæfa til að sýna þetta.

Ef við viljum fara þessa leið, þá verðum við að takmarka hvaða rökreglur við megum nota þegar við sönnum niðurstöður útfrá gefnum forsendum, og það mætti líta á sem ókost.

En það má ná fram sama markmiði með því að líta dálítið öðruvísi á málið: Við getum gert yrðingarnar $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ að lokuðum yrðingum með því að breyta öllum breytum í *fasta* þar sem þær koma fyrir óbundnar í yrðingunum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$.

(2.13) Fastasetning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar og $\mathcal{T}'$ vera kenningu sem fæst úr kenningunni $\mathcal{T}$ með því að bæta við $\mathcal{T}$ nýjum föstum sem eru ekki í kenningunni $\mathcal{T}$, en engu öðru. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé yrðing í $\mathcal{T}$, að $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ séu ólíkar breytur og að $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ séu ólíkir nýir fastar í $\mathcal{T}'$. Við höfum þá $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ þá og því aðeins að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$.*

Sönnun: Ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$, þá er einnig ljóst að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}$, því að sérhver frumsenda í $\mathcal{T}$ er frumsenda í $\mathcal{T}'$, og af því leiðir að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$ samkvæmt innsetningarsetningu.

Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$ og látum $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_m$ vera sönnun yrðingarinnar $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$ í kenningunni $\mathcal{T}'$. Látum $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ vera ólíkar breytur sem koma ekki fyrir í neinni af yrðingunum $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_m$. Breytum nú yrðingunum $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_m$ þannig að við setjum breyturnar $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ inn í stað fastanna $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ hvar sem þeir koma fyrir í yrðingunum $\mathbf{S}_k$; við fáum þannig nýja runu $\mathbf{S}'_1, \ldots, \mathbf{S}'_m$ af yrðingum á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$. Tökum nú eftir: Ef $\mathbf{S}_k$ er eiginleg frumsenda í $\mathcal{T}'$, þá koma fastarnir $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ ekki fyrir í $\mathbf{S}_k$, svo að $\mathbf{S}_k$ breytist ekki þegar við myndum $\mathbf{S}'_k$; $\mathbf{S}'_k$ er bara $\mathbf{S}_k$ og er því frumsenda í $\mathcal{T}$. Ef hins vegar $\mathbf{S}_k$ er rökfrumsenda í $\mathcal{T}$, þá verður $\mathbf{S}'$ rökfrumsenda af sömu tegund (búin til úr sama frumsendugripi), en á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$ og því rökfrumsenda í $\mathcal{T}$. Ef að lokum $\mathbf{S}_k$ er afleiðing af einhverjum af yrðingunum $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_{k-1}$ samkvæmt rökreglu, þá er ljóst að $\mathbf{S}'_k$ er afleiðing af samsvarandi yrðingum í rununni $\mathbf{S}'_1, \ldots, \mathbf{S}'_{k-1}$ samkvæmt sömu rökreglu. Þar með er runan $\mathbf{S}'_1, \ldots, \mathbf{S}'_m$ sönnun yrðingarinnar $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$ í kenningunni $\mathcal{T}$. En þá er yrðingin $(\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n])_{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ setning í kenningunni $\mathcal{T}$ samkvæmt innsetningarreglu; en þetta er ekkert annað en yrðingin $\mathbf{A}$.$\square$

(2.14) Fylgisetning. *Látum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ og $\mathbf{B}$ vera yrðingar á máli kenningar $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar og $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera upptalningu á breytunum sem koma fyrir frjálsar í einhverri af yrðingunum $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Látum $\mathcal{T}'$ vera kenninguna sem fæst með því að bæta nýjum ólíkum föstum $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ við kenninguna $\mathcal{T}$ og engu öðru og gerum ráð fyrir að*

$$(\mathbf{A}_1)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n], \ldots, (\mathbf{A}_n)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n] \vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

Þá er $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$.

Sönnun: Yrðingarnar $(\mathbf{A}_1)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n],\ldots,(\mathbf{A}_n)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n]$ eru lokaðar, svo að

$$\vdash_{\mathcal{T}'} (\mathbf{A}_1)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n] \wedge \cdots \wedge (\mathbf{A}_n)_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n] \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n]$$

samkvæmt fyrlgisetningu við afleiðslusetningu. En þá er $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ samkvæmt fastasetningu. □

(2.15) Dæmi. Til að sýna notkun fastasetningarinnar skulum við beita henni á fylgisetningu (2.6): Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera yrðingar í kenningunni $\mathcal{T}$, $\mathbf{x}$ vera breytu og $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ vera upptalningu allra breytna sem koma fyrir annaðhvort í $\mathbf{A}$ eða í $\mathbf{B}$, *fyrir utan breytuna* $\mathbf{x}$. Látum $\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n$ vera nýja fasta, $\mathcal{T}'$ vera kenninguna sem fæst með því að bæta þessum föstum við kenninguna $\mathcal{T}$, en engu öðru, látum $\mathbf{A}'$ vera $\mathbf{I}^{\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}'$ vera $\mathbf{I}^{\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}\mathbf{B}$. Þá er ljóst að $\mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$ er $\mathbf{I}^{\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$.

Gerum nú ráð fyrir að $\vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}')$. Samkvæmt fylgisetningu (2.8) er þá $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$, og samkvæmt fylgisetningu (2.6) fæst bæði $\vdash_{\mathcal{T}'} \exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}'$ og $\vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}'$. Við höfum því sýnt að

$$\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}') \vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}' \text{ og } \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}') \vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}'.$$

En yrðingin $\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}')$ er *lokuð*, og afleiðslusetningin (2.9) gefur okkur því

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}') \to (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}') \text{ og } \vdash_{\mathcal{T}'} \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}' \to \mathbf{B}') \to (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}').$$

En ljóst er að yrðingin $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}') \to (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}')$ er ekkert annað en yrðingin $\mathbf{I}^{\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}((\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}) \to (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}))$, og fastasetningin (2.13) segir okkur því að

$$\vdash_{\mathcal{T}} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}) \to (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}),$$

og eins sjáum við að

$$\vdash_{\mathcal{T}} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}) \to (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}),$$

Við höfum því sýnt:

(2.16) Fylgisetning. *Fyrir yrðingar* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *í kenningu fyrstu stéttar er*

$$\vdash \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \exists\mathbf{x}\mathbf{B}) \text{ og } \vdash \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}). \qquad \square$$

(2.17) Athugasemd. Í venjulegum stærðfræðitextum er fastasetningunni og fylgisetningu hennar (2.14) beitt óspart. Að vísu er yfirleitt ekki haft fyrir því að innleiða ný tákn fyrir nýju fastana, heldur eru breytur *gerðar að föstum* um stundarsakir með sérstakri yfirlýsingu, sem er gjarnan eitthvað á þessa leið: „Látum $\mathbf{x}$ vera …“ eða „Gerum ráð fyrir að $\mathbf{x}$ sé …“. Í mörgum tilvikum er slíkum yfirlýsingun þó sleppt og lesandinn látinn um að átta sig á að það þarf að meðhöndla óbundnu breyturnar sem fasta; og stundum þarf að vera vel vakandi fyrir hverjar breyturnar eru.

Segjum til dæmis að við viljum sanna eftirfarandi fullyrðingu um grúpur: „Ef x og y eru stök í grúpu G, þá er $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.“ Þetta er fullyrðing skrifuð á máli mengjafræðinnar, eins og flestöll stærðfræði nú á dögum (en ekki til dæmis á öðruhvoru málanna $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)$ eða $\mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$, sem við skilgreindum í lið (4) í dæmum (1.3)), með skammstöfunum og skilgreindum táknum, og þar að auki er hún skrifuð dálítið óformlega. Við getum gert hana örlítið formlegri með því að skrifa „Ef G er grúpa og x er stak í G og y er stak í G, þá er $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.“ Hér verður að líta svo á að fullyrðingin „G er grúpa“ sé skammstöfun fyrir langa yrðingu, sem getur verið talsvert háð því hvernig grúpuhugtakið hefur verið skilgreint á máli mengjafræðinnar (en það má gera á marga jafngilda vegu). Athugum að í fullyrðingunni eru bókstafirnir 'G', 'x' og 'y' breytur og allsstaðar óbundnar.

Ef við viljum nú sanna fullyrðinguna, þá er eins víst að sönnunin hefjist á orðunum „Látum G vera grúpu og x, y vera stök í grúpunni G.“ Þetta orðalag gefur til kynna að við gerum breyturnar 'G', 'x' og 'y' að föstum í nýrri kenningu $\mathcal{T}'$, og auk þess að við ætlum að bæta fullyrðingunum 'G er grúpa' 'x er stak í G' og 'y er stak í G' sem sérstökum nýjum forsendum (eða frumsendum). Þetta þýðir sér í lagi að við höfum fjarlægt bókstafina 'G', 'x' og 'y' af listanum yfir breytur í kenningunni og gert þá að föstum, svo að við megum því til dæmis ekki nota magnarana '$\forall G$', '$\forall x$' og '$\forall y$' fyrr en sönnuninni er lokið.

Við sönnum þvínæst eftirfarandi fullyrðingu á yfirmálinu:

$$\text{'}G \text{ er grúpa'}, \text{'}x \text{ er stak í } G\text{'}, \text{'}y \text{ er stak í } G\text{'} \vdash_{\mathcal{T}'} \text{'}(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}\text{'};$$

með öðrum orðum sönnum við að fyrir *fasta* 'G', 'x' og 'y' sé fullyrðingin '$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$'afleiðing af yrðingunum 'G er grúpa' 'x er stak í G' og 'y er stak í G' í kenningunni $\mathcal{T}'$. Fylgisetningin við fastasetninguna leyfir okkur svo að álykta að upphaflega fullyrðingin er setning í upphaflegu (mengjafræði)kenningunni.

Hér var að yfirlögðu ráði gefin einfölduð og þar með dálítið villandi lýsing á þessu dæmi í þeim tilgangi að það mætti leiðrétta hana og um leið leggja sérstaka áherzlu á að alltaf þarf að hafa skýrt í huga hverjar breyturnar eru í fullyrðingunni sem á að sanna, og það liggur ekki alltaf í augum uppi. Í dæminu er nefnilega ein breyta á sveimi sem er hálffalin og önnur sem er hvergi sjáanleg, og því er auðvelt að láta sér sjást yfir þær. Sú sem er hvergi sjáanleg er margföldunardepillinn, táknið '$\cdot$' fyrir margföldunina í grúpunni G. Það er hefð að sleppa margföldunardeplinum, þegar ekki er hætta á misskilningi; en raunar verður að líta á yrðinguna '$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$' sem skammstöfun fyrir '$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$'. Og þar sem við erum að skrifa á máli mengjafræðinnar (en ekki á sérstöku máli fyrir grúpur) verðum við að líta á margföldunina sem vörpun $f : G \times G \to G$ og heiti hennar 'f' sem breytu, en ekki tvístætt falltákn á máli mengjafræðinnar, því þá hefði það ávallt sömu merkinguna, en hver vörpunin f á að vera er breytilegt eftir grúpum og ekki neitt sem við getum gefið nafn í eitt skipti fyrir öll. Breytan sem er hálffalin er „veldisvísirinn“ '${}^{-1}$', því að eðlilegast er að líta svo á að það x^{-1} sem verið er að tala um í fullyrðingunni sé gildi vörpunarinnar $\iota : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ sem varpar staki í grúpunni á umhverfu sína í grúpunni; við skulum (í þessu dæmi) kalla þessa vörpun *umhverfingu* grúpunnar. Ástæðan er sú umhverfingin er að sjálfsögðu einnig háð grúpunni G, við höfum ólíkar umhverfingar fyrir ólíkar grúpur, þannig að merking táknsins 'x^{-1}' er háð grúpunni G

og margföldun hennar, og heiti umhverfingarinnar á máli mengjafræðinnar hlýtur því að vera breyta en ekki einstætt falltákn, sem hefði þá ávallt sömu merkingu óháð því hver grúpan er.

Við verðum því að líta svo á að í fullyrðingunni sé '$x \cdot y$' skammstöfun fyrir '$f(x, y)$', þar sem 'f' er breyta sem á að standa fyrir (tvístæða) vörpun (og auk þess á f að fullnægja ákveðnum skilyrðum sem eru hluti af fullyrðingunni 'G er grúpa'). Sömuleiðis verðum við að líta svo á að 'x^{-1}' sé skammstöfun fyrir '$\iota(x)$', þar sem 'ι' er breyta sem á að standa fyrir (einstæða) vörpun (sem einnig þarf að fullnægja ákveðnum skilyrðum).

Það sem við þurfum að sanna með því að nota fastasetninguna er því í rauninni fullyrðingin

$$\text{`}G \text{ er grúpa'}, \text{`}x \text{ er stak í } G\text{'}, \text{`}y \text{ er stak í } G\text{'}, \text{`}f \text{ er margföldunin í } G\text{'}, \\ \text{`}\iota \text{ er umhverfingin í } G\text{'} \vdash_{\mathcal{T}'} \text{`}\iota(f(x,y)) = f(\iota(y), \iota(x))\text{'},$$

þar sem við eigum að hugsa okkur að $\mathcal{T}'$ fáist úr $\mathcal{T}$ með því að gera allar fimm breyturnar 'G', 'x', 'y', 'f' og 'ι' að föstum meðan á sönnuninni stendur. Það eru því fimm breytur, en ekki bara þrjár, sem þarf að breyta í fasta meðan við sönnum fullyrðinguna, þótt einungis þrjár þeirra séu sýnilegar sem breytur (þ. e. skrifaðar með bókstöfum) í venjulegri framsetningu fullyrðingarinnar.

(2.18) Jafngildissetning. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingu og* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ *vera hlutyrðingar í* $\mathbf{A}$ *sem eru sundurlægar tvær og tvær; með öðrum orðum hafa engar tvær þeirra sameiginlegt tákn. Látum* $\mathbf{A}'$ *vera yrðingu sem fæst úr yrðingunni* $\mathbf{A}$ *með því að setja yrðingar* $\mathbf{B}'_1, \ldots, \mathbf{B}'_n$ *inn í yrðinguna* $\mathbf{A}$ *stað hlutyrðinganna* $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$. *Ef* $\vdash \mathbf{B}_k \leftrightarrow \mathbf{B}'_k$ *fyrir öll* $k = 1, \ldots, n$, *þá er* $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Sönnun: Við athugum fyrst afar einfalt sértilvik, nefnilega þegar aðeins ein umskipti fara fram, og það eru höfð skipti á allri yrðingunni $\mathbf{A}$; með öðrum orðum er $n = 1$ og $\mathbf{B}_1$ er öll yrðingin $\mathbf{A}$. En þá er $\mathbf{A}'$ yrðingin $\mathbf{B}'_1$, og vegna $\vdash \mathbf{B}_1 \leftrightarrow \mathbf{B}'_1$ er $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Við sönnum nú setninguna með þrepun yfir lengd yrðingarinnar $\mathbf{A}$. Við þurfum að athuga fjögur tilvik:

Ef $\mathbf{A}$ er grunnyrðing, þá inniheldur $\mathbf{A}$ enga hlutyrðingu nema sjálfa sig, svo að annaðhvort erum við í sértilvikinu sem við höfum afgreitt, eða $n = 0$ og engin umskipti fara fram, og þá er $\mathbf{A}'$ ekkert annað en $\mathbf{A}$. En við vitum að $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$ samkvæmt sísönnusetningu.

Gerum næst ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé $\neg\mathbf{C}$, þar sem $\mathbf{C}$ er yrðing. Ef neitunartáknið fremst í yrðingunni $\mathbf{A}$ kemur fyrir í einhverri yrðingunni $\mathbf{B}_k$, þá verður $\mathbf{B}_k$ að vera öll yrðingin $\mathbf{A}$, og við erum þá í sértilvikinu sem við höfum afgreitt. Að öðrum kosti eru yrðingarnar $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ hlutyrðingar í yrðingunni $\mathbf{C}$, sem er styttri en yrðingin $\mathbf{A}$. Látum $\mathbf{C}'$ vera yrðinguna sem fæst úr $\mathbf{C}$ með því að setja yrðingar $\mathbf{B}'_1, \ldots, \mathbf{B}'_n$ inn í yrðinguna $\mathbf{C}$ stað hlutyrðinganna $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$. Þá er $\mathbf{A}'$ yrðingin $\neg\mathbf{C}'$ og samkvæmt þrepunarforsendu er $\vdash \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$. En með sísönnusetningu fæst þá $\vdash \neg\mathbf{C} \leftrightarrow \neg\mathbf{C}'$, sem er sama og $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Tilvikið þegar $\mathbf{A}$ er $\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$, þar sem $\mathbf{C}$ og $\mathbf{D}$ eru yrðingar, fæst með svipuðum hætti og er eftirlátið lesanda.

Gerum að lokum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé $\forall\mathbf{x}\mathbf{C}$, þar sem $\mathbf{C}$ er yrðing. Ef við erum ekki í sértilvikinu, þá sést eins og áður að $\mathbf{A}'$ er $\forall\mathbf{x}\mathbf{C}'$, þar sem $\mathbf{C}'$ fæst úr $\mathbf{C}$ með því að setja yrðingarnar $\mathbf{B}'_1, \ldots, \mathbf{B}'_n$ inn í yrðinguna $\mathbf{C}$ stað hlutyrðinganna $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$, og samkvæmt þrepunarforsendu er $\vdash \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$. Þá er $\vdash \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ og $\vdash \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ samkvæmt lið (4) í fylgisetningu (1.20). Samkvæmt fylgisetningu (2.6) er þá $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{C} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{C}'$ og $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{C}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{C}$. En það þýðir einmitt að $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ og $\vdash \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$, og af því leiðir að $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$. $\square$

Í athugasemd (1) í (1.5) bentum við á að í yrðingu þar sem breyta kemur aðeins fyrir bundin skiptir ekki máli hver breytan er; við bentum á að yrðingarnar '$\exists y(x = 2 \cdot y)$' og '$\exists t(x = 2 \cdot t)$' segja hið sama, nefnilega að talan x sé jöfn tala (ef breytunum er aðeins ætlað að standa fyrir náttúrlegar tölur). Við ættum því að geta sannað að þær séu jafngildar.

(2.19) Skilgreining. *Við segjum að yrðing* $\mathbf{A}'$ *sé* ***tilbrigði*** *við yrðinguna* $\mathbf{A}$ *ef* $\mathbf{A}'$ *fæst úr yrðingunni* $\mathbf{A}$ *með því að setja í stað hlutyrðingar* $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}$ *yrðingu af gerðinni* $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$, *þar sem* $\mathbf{y}$ *er breyta sem kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni* $\mathbf{B}$.

(2.20) Tilbrigðasetning. *Látum* $\mathbf{A}'$ *er tilbrigði við yrðinguna* $\mathbf{A}$. *Þá er* $\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$.

Sönnun: Samkvæmt jafngildissetningu nægir að sýna að $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \forall\mathbf{y}\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$ ef $\mathbf{y}$ er breyta sem kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{B}$.

Samkvæmt innsetningarsetningu er $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{B} \to \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$. Þar sem breytan $\mathbf{y}$ kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{B}$ kemur hún ekki heldur fyrir frjáls í yrðingunni $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}$ og samkvæmt $\to\forall$-reglu í (2.3) er því $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{B} \to \forall\mathbf{y}\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$.

Látum $\mathbf{B}'$ vera yrðinguna $\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$. Þar sem breytan $\mathbf{y}$ kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{B}$ er $\mathbf{B}'_\mathbf{y}[\mathbf{x}]$ yrðingin $\mathbf{B}$. Þar með er $\vdash \forall\mathbf{y}\mathbf{B}' \to \mathbf{B}$ samkvæmt innsetningarsetningu. En breytan $\mathbf{x}$ kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{B}'$ og því ekki heldur í yrðingunni $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}'$, svo að samkvæmt $\to\forall$-reglu í (2.3) er $\vdash \forall\mathbf{y}\mathbf{B}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$.

Þar með höfum við bæði sýnt að $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{B} \to \forall\mathbf{y}\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$ og $\vdash \forall\mathbf{y}\mathbf{B}' \to \forall\mathbf{x}\mathbf{B}$, svo að $\vdash \forall\mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \forall\mathbf{y}\mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]$, eins og sýna átti. $\square$

(2.21) Athugasemd. Tilbrigðasetningin getur komið að góðum notum ef við viljum setja heiti $\mathbf{a}$ inn fyrir breytu $\mathbf{x}$ í yrðingu $\mathbf{A}$ en getum það ekki vegna þess að heitið $\mathbf{a}$ er ekki innsetjanlegt fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{A}$. Við finnum þá tilbrigði $\mathbf{A}'$ við yrðinguna $\mathbf{A}$ þannig að engin af breytunum sem koma fyrir í heitinu $\mathbf{a}$ sé bundin í yrðingunni $\mathbf{A}'$. Þá verður heitið $\mathbf{a}$ innsetjanlegt fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{A}'$, og við getum notað $\mathbf{A}'$ í stað $\mathbf{A}$.

Við sönnum næst nokkrar almennar staðreyndir um samsemdarkenningar.

(2.22) Setning. *Gerum ráð fyrir að kenningin* $\mathcal{T}$ *sé samsemdarkenning. Fyrir öll heiti* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *og* $\mathbf{c}$ *á málinu* $\mathcal{L}$ *er*

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{a},$$
$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a},$$
$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \land \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

Sönnun: (1) Samkvæmt innsetningarreglu nægir okkur að sýna að

$$\vdash `x = x\text{'}, \quad \vdash `x = y \to y = x\text{'} \quad \text{og} \quad \vdash `x = y \land y = z \to x = z\text{'}.$$

Fyrsta fullyrðingin, '$x = x$', er yrðingin **Eq1**, sem gildir í öllum samsemdarkenningum samkvæmt skilgreiningu.

Til að sanna næstu fullyrðingu setjum við grunnyrðinguna '$z = x$'inn fyrir **A** í **Eq2**, látum **x** vera breytuna 'x', **y** vera breytuna 'y' og **z** vera breytuna 'z' í **Eq2** og fáum $\vdash$'$x = y \to (x = x \to y = x)$'. En nú er $\vdash$'$x = x$', svo að $\vdash$'$x = y \to y = x$' samkvæmt sísönnusetningu.

Setjum að lokum grunnyrðinguna '$t = z$' inn fyrir **A** í yrðingargripið **Eq2**, látum **x** vera breytuna 'y', **y** vera breytuna 'z' og **z** vera breytuna 't' og fáum $\vdash$'$y = x \to (y = z \to x = z)$'. En nú höfum við sýnt að $\vdash$'$x = y \to y = x$', og gegnvirkni gefur okkur $\vdash$'$x = y \to (y = z \to x = z)$'; en það er jafngilt $\vdash$'$x = y \wedge y = z \to x = z$' samkvæmt sísönnusetningu. □

(2.23) Setning. *Gerum ráð fyrir að kenningin $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning. Ef* **A** *er yrðing og* **x** *og* **y** *eru breytur sem eru innsetjanlegar fyrir breytuna* **z** *í yrðingunni* **A**, *þá er* $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$.

Sönnun: Við sönnum fullyrðinguna í setningunni með þrepun yfir lengd yrðingarinnar **A**. Ef **A** er grunnyrðing, þá er $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \to \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$ samkvæmt **Eq2**. Með því að nota **Eq2** á **y** í stað **x** og **x** í stað **y** fæst $\vdash \mathbf{y} = \mathbf{x} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{y}] \to \mathbf{A_z}[\mathbf{x}])$. En nú er $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{y} = \mathbf{x}$ samkvæmt (2.22), svo að $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{y}] \to \mathbf{A_z}[\mathbf{x}])$ samkvæmt gegnvirknireglu. En þá fæst $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$ samkvæmt sísönnusetningu.

Ef **A** er af gerðinni $\neg\mathbf{B}$ eða $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, þá er fullyrðingin rétt fyrir **B** og **C** samkvæmt þrepunarforsendu og fáum hana fyrir **A** með sísönnusetningu.

Gerum því ráð fyrir að **A** sé af gerðinni $\forall\mathbf{uB}$. Ef breytan **z** kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni **A**, þá eru báðar yrðingarnar $\mathbf{A_z}[\mathbf{x}]$ og $\mathbf{A_z}[\mathbf{y}]$ sama yrðingin og **A**, og $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$ segir þá ekkert annað en $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A})$, sem er setning í kenningunni $\mathcal{T}$ samkvæmt sísönnusetningu. Við getum því gert ráð fyrir að breytan **z** komi fyrir frjáls í yrðingunni **A**. En þá getur **z** ekki verið breytan **u**, því að hún kemur ekki fyrir frjáls í $\forall\mathbf{uB}$, sem er samkvæmt forsendi yrðingin **A**, og einnig er ljóst að **z** hlýtur að koma fyrir frjáls í yrðingunni **B**. Þar sem **x** og **y** eru innsetjanleg fyrir **z** í **A** hljóta þau að vera innsetjanleg fyrir **z** í **B**, og hvorug breytan **x**, **y** getur verið breytan **u**, því að þá væri hún ekki innsetjanleg í **A**. Þannig er breytan **u** frábrugðin öllum breytunum $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ og **z**. Samkvæmt þrepunarforsendu er $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{B_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{B_z}[\mathbf{y}])$, og $\to\exists$-reglan úr setningu (2.3) sýnir að þá er $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \forall\mathbf{u}(\mathbf{B_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{B_z}[\mathbf{y}])$. En af fylgisetningu (2.16) leiðir auðveldlega að $\vdash \forall\mathbf{u}(\mathbf{B_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{B_z}[\mathbf{y}]) \to (\forall\mathbf{uB_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \forall\mathbf{uB_z}[\mathbf{y}])$, og gegnvirkni gefur $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\forall\mathbf{uB_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \forall\mathbf{uB_z}[\mathbf{y}])$, og það þýðir einmitt að $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A_z}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{A_z}[\mathbf{y}])$. □

(2.24) Fylgisetning. *Gerum ráð fyrir að kenningin $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning og gerum ráð fyrir að yrðingin* $\mathbf{A}'$ *fáist úr yrðingunni* **A** *með því að setja breytuna* **y** *inn fyrir* **x** *á sumum þeim stöðum þar sem* **x** *kemur fyrir frjálst í* **A** *(og þar sem* **y** *er innsetjanlegt fyrir* **x***). Þá er* $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}')$.

Sönnun: Látum **z** vera breytu aðra en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ þannig að **z** komi ekki fyrir í yrðingunni **A** og **B** vera yrðinguna sem fæst úr $\mathcal{A}$ með því að setja breytuna **z** inn fyrir **x** *á sömu stöðum* og við settum **y** inn fyrir **x** til að fá yrðinguna $\mathbf{A}'$. Þá er $\mathbf{B_z}[\mathbf{x}]$ yrðingin **A**, og $\mathbf{B_z}[\mathbf{y}]$ er yrðingin $\mathbf{A}'$, og fullyrðingin því bein afleiðing af setningu (2.23). □

(2.25) Fylgisetning. *Gerum ráð fyrir að kenningin $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning. Fyrir yrðingu* $\mathbf{A}$ *og breytur* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *er* $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{x},\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{A})$.

Sönnun: Þetta er einföld umorðun síðustu fylgisetningar, því að $\mathbf{A}$ fæst úr $\mathbf{A}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{x},\mathbf{x}]$ með því að setja $\mathbf{y}$ inn fyrir $\mathbf{x}$ á sumum þeim stöðum sem $\mathbf{x}$ kemur fyrir frjálst í $\mathbf{A}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{x},\mathbf{x}]$. □

(2.26) Setning. *Gerum ráð fyrir að kenningin $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning. Fyrir heiti* $\mathbf{a}$ *og breytur* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *er* $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}])$.

Sönnun: Veljum breytu $\mathbf{u}$ sem kemur ekki fyrir í heitinu $\mathbf{a}$ og er engin af breytunum $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Notum setningu (2.23) á yrðinguna $\mathbf{A}$, þar sem $\mathbf{A}$ er $\mathbf{u} = \mathbf{a}$, og sjáum að $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{u} = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}])$. Setjum $\mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}]$ inn fyrir $\mathbf{u}$ og fáum $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] \leftrightarrow \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}])$. En með innsetningu í **Eq1** fæst $\vdash \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}]$ og niðurstaðan fæst þá með sísönnureglu. □

(2.27) Setning. *Gerum ráð fyrir að $\mathcal{T}$ sé kenning fyrstu stéttar með tvístæða umsagnartákninu '$=$'. Kenningn $\mathcal{T}$ er samsemdarkenning þá og því aðeins að eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Við höfum* $\vdash$'$x = x$'.

(ii) *Fyrir sérhvert n og sérhvert n-stætt falltákn* $\mathbf{f}$ *er*

$$\vdash x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to \mathbf{f}x_1x_2\cdots x_n = \mathbf{f}y_1y_2\cdots y_n.$$

(iii) *Fyrir sérhvert n og sérhvert n-stætt umsagnartákn* $\mathbf{p}$ *er*

$$\vdash x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (\mathbf{p}x_1x_2\cdots x_n \to \mathbf{p}y_1y_2\cdots y_n).$$

Sönnun: Gerum fyrst ráð fyrir að $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning. Þá er skilyrði (i) fullnægt samkvæmt skilgreiningu samsemdarkenningar. Til að sjá (ii) athugum við fyrst að með því að nota (2.26) leiðir beint að

$$\vdash x_1 = y_1 \to \mathbf{f}x_1x_2\cdots x_n = \mathbf{f}y_1x_2\cdots x_n.$$

En þá er auðsannað með (endanlegri) þrepun að fyrir $k = 1, \ldots, n$ er

$$\vdash x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_k = y_k \to \mathbf{f}x_1x_2\cdots x_n = \mathbf{f}y_1y_2\cdots y_kx_{k+1}x_n,$$

og niðurstaðan fæst fyrir $k = n$. Skilyrði (ii) er sannað með sama hætti.

Gerum nú á hinn bóginn ráð fyrir að skilyrðunum sé fullnægt. Skilyrði (i) er ekkert annað en skilyrðið **Eq1**, svo að við þurfum aðeins að sanna skilyrði **Eq2**; með öðrum orðum þurfum við að sýna að $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] \to \mathbf{A}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}])$ fyrir sérhverja *grunnyrðingu* $\mathbf{A}$. Við sýnum fyrst að

$$\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}]$$

fyrir sérhvert heiti $\mathbf{a}$. Við sýnum það með þrepun yfir lengd heitisins $\mathbf{a}$. Þetta er augljós afleiðing af skilyrði (iii) í setningunni með því að nota innsetningu ef $\mathbf{a}$ er breyta eða fasti. Gerum því ráð fyrir að $\mathbf{a}$ sé af gerðinni $\mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$, þar sem $\mathbf{f}$ er n-stætt falltákn. Látum $\mathbf{b}_k$ vera $\mathbf{a}_{k,\mathbf{z}}[\mathbf{x}]$ og $\mathbf{c}_k$ vera $\mathbf{a}_{k,\mathbf{z}}[\mathbf{y}]$ fyrir $k = 1,\ldots,n$. Þá er

$$\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1, \quad \vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2, \quad ,,\ldots, \quad \vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n$$

samkvæmt þrepunarforsendu. Með innsetningu í skilyrðið í lið (ii) fæst

$$\vdash \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n \to (\mathbf{f}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n = \mathbf{f}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_n).$$

En $\mathbf{f}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n$ er ekkert annað en $\mathbf{a}_\mathbf{z}[\mathbf{x}]$, og $\mathbf{f}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_n$ er $\mathbf{a}_\mathbf{z}[\mathbf{y}]$, og sísönnusetningin gefur okkur nú $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{a}_\mathbf{z}[\mathbf{x}] = \mathbf{a}_\mathbf{z}[\mathbf{y}])$.

Látum nú $\mathbf{A}$ vera grunnyrðingu af gerðinni $\mathbf{p}\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n$. Látum $\mathbf{b}_k$ og $\mathbf{c}_k$ vera eins og áður. Innsetning í skilyrðið í lið (iii) í setningunni gefur okkur

$$\vdash \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n \to (\mathbf{p}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n \to \mathbf{p}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_n).$$

En $\mathbf{p}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n$ er ekkert annað en $\mathbf{A}_\mathbf{z}[\mathbf{x}]$, og $\mathbf{p}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_n$ er $\mathbf{A}_\mathbf{z}[\mathbf{y}]$, og samkvæmt ofansögðu er $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to \mathbf{b}_k = \mathbf{c}_k$ fyrir $k = 1,\ldots,n$, svo að sísönnusetningin gefur $\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{A}_\mathbf{z}[\mathbf{x}] \to \mathbf{A}_\mathbf{z}[\mathbf{y}])$, eins og sýna átti. □

§3. Útvíkkun kenninga

Við komum okkur saman um að allar kenningar sem við ræðum um í þessari grein séu kenningar fyrstu stéttar. Við komum okkur einnig saman um að fyrir slíka kenningu $\mathcal{T}$ sé $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ ávallt mál kenningarinnar $\mathcal{T}$.

(3.1) Látum $\mathbf{A}$ vera yrðingu í kenningu fyrstu stéttar og $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ vera upptalningu breytnanna sem koma fyrir frjálsar í yrðingunni $\mathbf{A}$. Við getum þá hugsað okkur að yrðingin $\mathbf{A}$ lýsi einhverjum eiginleika sem stök með heitin $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ geta haft eða ekki. Sumir slíkir eiginleikar geta okkur þótt nægilega athyglisverðir til að okkur finnist vert að lýsa þeim með sérstökum táknum.

Tökum sem dæmi kenninguna $\mathcal{O}_1$ um raðanir úr lið (1) í dæmum (1.13). Hún hefur tvístæðu umsagnartáknin '$=$' og '$\leq$. Við lesum yrðinguna '$x \leq y$' gjarnan „stakið x er minna eða jafnt stakinu y". Látum nú $\mathbf{A}$ vera yrðinguna '$x \leq y \wedge x \neq y$'. Við lesum hana gjarnan „stakið x er minna en stakið y", og okkur finnst kannski eðlilegt að nota nýtt tákn, nefnilega táknið '$<$', til að lýsa þessum eiginleika og skrifa hann sem '$x < y$'. Þetta getum við gert á tvo vegu:

Annarsvegar getum við hugsað okkur að við lítum á yrðingu með nýja tákninu sem skammstöfun, þannig að fyrir sérhver tvö heiti $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ eigi „$\mathbf{a} < \mathbf{b}$" einfaldlega að vera skammstöfun fyrir yrðinguna $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Þetta breytir svo sem engu; málið og kenningin verða óbreytt eftir sem áður, því að við verðum að líta svo á að fyllyrðingin „$\mathbf{a} < \mathbf{b}$" sé skammstöfun á *yfirmálinu*; sér í lagi er táknið '$<$' ekki eiginlegur partur af máli kenningarinnar og því ekki tvístætt umsagnartákn í venjulegum skilningi.

Hin aðferðin er sú að við bætum tákninu '$<$' við mál kenningarinnar sem *nýju tvístæðu umsagnartákni* og höfum þá *útvíkkað málið*. En það dugar náttúrlega ekki eitt og sér, því að við viljum auðvitað að yrðingin '$x \leq y$' segi ekkert annað, hvorki minna eða meira, en yrðingin '$x \leq y \wedge x \neq y$', og það getum við ekki gert með því að breyta bara málinu; við þurfum líka að *útvíkka kenninguna* með því að bæta við hana nýrri frumsendu, nefnilega frumsendunni

$$\text{'}x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y\text{'},$$

eða, það sem jafngilt er vegna innsetningarsetningarinnar, frumsendugripinu

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b},$$

þar sem **a** og **b** geta verið hvaða heiti sem vera skal.

Seinni aðferðin er að mörgu leyti heppilegri: Við getum farið með nýja táknið eins og hvert annað umsagnartákn, og nýja málið verður þjálla og þægilegra: Við getum skrifað margt á hagkvæmari og styttri hátt en ef við hefðum einungis upphaflegu táknin.

En við viljium gjarnan sýna að það eitt að bæta þannig nýju tákni við mál kenningar og frumsendu sem segir hvað nýja táknið á að þýða breyti engu öðru; við ættum í raun ekki að geta „sannað neitt nýtt“ sem ekki er unnt að sanna í upphaflegu kenningunni. Til að segja nákvæmlega hvað meint er með þessu þurfum við að skilgreina nokkur hugtök.

(3.2) Skilgreining. (1) *Látum $\mathcal{L}$ vera mál fyrstu stéttar. Mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}'$ er sagt vera **útvíkkun málsins** $\mathcal{L}$ ef sérhvert tákn í $\mathcal{L}$ er jafnframt tákn í $\mathcal{L}'$ og þannig að þau séu af sömu tegund í báðum málum; með öðrum orðum verður n-stætt umsagnartákn í $\mathcal{L}$ að vera n-stætt umsagnartákn í $\mathcal{L}'$, og sömuleiðis verður n-stætt falltákn í $\mathcal{L}$ að vera n-stætt falltákn í $\mathcal{L}'$.*

(2) *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar. Kenning fyrstu stéttar $\mathcal{T}'$ er sögð vera **útvíkkun kenningarinnar** $\mathcal{T}$ ef málið $\mathcal{L}(\mathcal{T}')$ er útvíkkun málsins $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ og sérhver setning kenningarinnar $\mathcal{T}$ er líka setning kenningarinnar $\mathcal{T}'$. Ef $\mathcal{T}'$ er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{T}$ og þær hafa sama málið, þá segjum við að kenningin $\mathcal{T}'$ sé **einföld útvíkkun** kenningarinnar $\mathcal{T}$.*

(3) *Við segjum að útvíkkun $\mathcal{T}'$ kenningarinnar $\mathcal{T}$ sé **íhaldssöm** ef sérhver yrðing á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ sem er setning í kenningunni $\mathcal{T}'$ sé einnig setning í kenningunni $\mathcal{T}$.*

(4) *Við segjum að tvær kenningar fyrstu stéttar séu **jafngildar** ef hvor um sig er íhaldssöm útvíkkun hinnar; með öðrum orðum ef þær hafa sama málið og sömu setningarnar.*

(3.3) Athugasemd. Til að kenning $\mathcal{T}'$ sé útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{T}$ nægir augljóslega að málið $\mathcal{L}(\mathcal{T}')$ sé útvíkkun málsins $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ og sérhver *frumsenda* kenningarinnar $\mathcal{T}$ sé setning kenningarinnar $\mathcal{T}'$.

Af þessu leiðir að tvær kenningar fyrstu stéttar eru jafngildar þá og því aðeins að þær hafi sama málið og sérhver frumsenda hvorrar um sig sé setning í hinni. Jafngildar kenningar eru *einfaldar* útvíkkanir hvor annarrar.

(3.4) Látum **S** vera yrðingu í kenningu $\mathcal{T}$ og $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vera ólíkar breytur þannig að engar breytur nema breyturnar $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ komi fyrir í yrðingunni **S**. Við búum til nýja kenningu $\mathcal{T}'$, sem er útvíkkun kenninegarinnar $\mathcal{T}$, þannig að við bætum nýju

n-stæðu umsagnartákni $\mathbf{p}$ við mál kenningarinnar og bætum síðan við nýrri eiginlegri frumsendu, nefnilega yrðingunni

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{S},$$

sem við köllum ***skilgreiningarfrumsendu*** umsagnartáknsins $\mathbf{p}$. Ef kenningin $\mathcal{T}$ er samsemdarkenning, þá krefjumst við þess að kenningin $\mathcal{T}'$ sé einnig samsemdarkenning.

Fyrir sérhverja yrðingu $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T}')$ búum við svo til yrðingu $\mathbf{A}^*$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$, sem við köllum ***þýðingu yrðingarinnar $\mathbf{A}$ á mál kenningarinnar $\mathcal{T}$***, sem hér segir: Við veljum tilbrigði $\mathbf{S}'$ við yrðinguna $\mathbf{S}$ þannig að engin breyta sem kemur fyrir í $\mathbf{A}$ komi fyrir bundin í yrðingunni $\mathbf{S}'$. Síðan búum við yrðinguna $\mathbf{A}^*$ til með því að taka út úr yrðingunni $\mathbf{A}$ sérhverja hlutfullyrðingu af gerðinni $\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$ og setja í staðinn yrðinguna

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n].$$

(Valinu á tilbrigðunu $\mathbf{S}'$ er ætlað að tryggja að heitin $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ séu innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ í $\mathbf{A}$.) Þessi þýðing $\mathbf{A}^*$ ákvarðast ekki ótvírætt, því að hún er háð valinu á tilbrigðinu $\mathbf{S}'$; en tvær þýðingar sem eru myndaðar með þessum hætti eru tilbrigði hvor við aðra og því jafngildar í kenningunni $\mathcal{T}$.

Við sýnum fyrst:

(3.5) Hjálparsetning. *Látum $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^*$ vera eins og í* (3.4). *Þá er*

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*.$$

Sönnun: Samkvæmt skilgreiningarfrumsendunni og innsetningarreglunni (2.4) fæst

$$\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \leftrightarrow \mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n].$$

En þá er fullyrðingin afleiðing af jafngildissetningunni (2.18). □

(3.6) Setning. *Látum $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^*$ vera eins og í* (3.4). *Þá gildir:*

Yrðingin $\mathbf{A}$ er setning í $\mathcal{T}'$ þá og því aðeins að yrðingin $\mathbf{A}^*$ sé setning í $\mathcal{T}$.

Sönnun: Byrjum á að sýna að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}$ hefur í för með sér

$$(*) \qquad \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}^*,$$

og segjum til þæginda að yrðingin $\mathbf{A}$ *fullnægi skilyrði* $(*)$ ef $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}^*$. Augljóslega nægir að sanna eftirfarandi tvær fullyrðingar:

(i) Allar frumsendur $\mathbf{A}$ kenningarinnar $\mathcal{T}'$ fullnægja skilyrði $(*)$.
(i) Ef $\mathbf{A}$ er yrðing í $\mathcal{T}$ sem er afleiðing af setningum í $\mathcal{T}'$ sem fullnægja skilyrði $(*)$ samkvæmt rökreglu, þá fullnægir $\mathbf{A}$ skilyrði $(*)$.

Athugum þá fyrst frumsendu af gerð **F1**, **F2** eða **F3**. Slík frumsenda $\mathbf{A}$ fæst með innsetningu í sísönnu, og ljóst er að þá fæst yrðingin $\mathbf{A}^*$ með innsetningu í sömu sísönnu og er því setning í $\mathcal{T}$ og fullnægir þar með skilyrði $(*)$. Þetta gildir að vísu aðeins *að því gefnu* að við notum allsstaðar inn sama tilbrigðið $\mathbf{S}'$ þegar við setjum $\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$ inn fyrir $\mathbf{pa}_1\cdots\mathbf{a}_n$ í yrðingunni $\mathbf{A}$; en það er regla sem við gerum þegjandi samkomulag um hér í framhaldinu.

Athugum næst frumsendu $\mathbf{A}$ af gerð **F4**; með öðrum orðum er $\mathbf{A}$ yrðing af gerðinni $\forall\mathbf{x}\mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, þar sem $\mathbf{B}$ er yrðing í $\mathcal{T}'$ og $\mathbf{a}$ er heiti í $\mathcal{T}'$. Heitin í $\mathcal{T}'$ eru hin sömu og í $\mathcal{T}$, og þá er ljóst að $\mathbf{A}^*$ er yrðingin $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}^* \to \mathbf{B}^*_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, en hún er frumsenda af gerð **F4** í $\mathcal{T}$, svo að $\mathbf{A}$ fullnægir skilyrði $(*)$.

Fyrir frumsendu $\mathbf{A}$ af gerðinni **F5**, með öðrum orðum af gerðinni $\forall\mathbf{x}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \to \mathbf{B} \vee \forall\mathbf{x}\mathbf{C}$, þar sem breytan $\mathbf{x}$ er ekki frjáls í $\mathbf{B}$, er svipað uppi á teningnum: Yrðingin $\mathbf{A}^*$ er ekkert annað en yrðingin $\forall(\mathbf{B}^* \vee \mathbf{C}^*) \to \mathbf{B}^* \vee \forall\mathbf{x}\mathbf{C}^*$, og hún er frumsenda af gerðinni **F5** í kenningunni $\mathcal{T}$.

Ef kenningin $\mathcal{T}$ er samsemdarkenning, þá þurfum við einnig að ganga úr skugga um að samsemdarfrumsendurnar í $\mathcal{T}$ fullnægi skilyrði $(*)$. Þetta er augljóst fyrir frumsenduna **Eq1**, sem er bara yrðingin '$x = x$', því að $\mathbf{Eq1}^*$ er þá líka yrðingin '$x = x$'. Látum því $\mathbf{A}$ vera frumsendu af gerðinni **Eq2**; með öðrum orðum er $\mathbf{A}$ af gerðinni $\mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{B}_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}] \to \mathbf{B}_{\mathbf{z}}[\mathbf{y}])$, þar sem $\mathbf{B}$ er grunnyrðing í $\mathcal{T}'$; með öðrum orðum er $\mathbf{B}$ af gerðinni $\mathbf{qa}_1\cdots\mathbf{a}_m$, þar sem $\mathbf{q}$ er m-stætt umsagnartákn í $\mathcal{T}'$ og $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ eru heiti.. Ef $\mathbf{q}$ er ekki nýja umsagnartáknið $\mathbf{p}$, þá er ljóst að $\mathbf{A}^*$ er bara $\mathbf{A}$, og fullyrðingin er augljós. Ef hinsvegar $\mathbf{q}$ er $\mathbf{p}$, þá er einnig $m = n$, $\mathbf{A}$ er yrðingin $\mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{I}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}\mathbf{pa}_1\cdots\mathbf{a}_n \to \mathbf{I}^{\mathbf{y}}_{\mathbf{z}}\mathbf{pa}_1\cdots\mathbf{a}_n)$, og $\mathbf{A}^*$ er yrðingin $\mathbf{x} = \mathbf{y} \to (\mathbf{I}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{z}}\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n] \to \mathbf{I}^{\mathbf{y}}_{\mathbf{z}}\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n])$; en þetta er samsemdarfrumsenda af gerðinni **Eq2** í kenningunni $\mathcal{T}$, svo að $\mathbf{A}$ fullnægir skilyrði $(*)$.

Ef $\mathbf{A}$ er skilgreiningarfrumsendan $\mathbf{px}_1\cdots\mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{S}$, þá er $\mathbf{A}^*$ fullyrðingin $\mathbf{S}' \leftrightarrow \mathbf{S}$, sem er setning í $\mathcal{T}$ samkvæmt tilbrigðasetningunni.

Þá hafa allar frumsendur kenningarinnar $\mathcal{T}'$ verið taldar nema eiginlegu frumsendurnar sem hún erfir frá kenningunni $\mathcal{T}$, af því að hún er útvíkkun hennar; en ef $\mathbf{A}$ er ein þeirra, þá er $\mathbf{A}^*$ bara $\mathbf{A}$, og því fullnægir $\mathbf{A}$ skilyrðinu $(*)$. Því höfum við sannað fullyrðinguna (i).

Gerum þá ráð fyrir að yrðing $\mathbf{A}$ í $\mathcal{T}'$ sé afleiðing af yrðingum sem fullnægja skilyrði $(*)$ samkvæmt rökreglunni **MP**. Það þýðir að til er yrðing $\mathbf{C}$ í $\mathcal{T}'$ þannig að yrðingarnar $\mathbf{C} \to \mathbf{A}$ og $\mathbf{C}$ fullnægi skilyrði $(*)$, og það þýðir aftur að yrðingarnar $(\mathbf{C} \to \mathbf{A})^*$ og $\mathbf{C}^*$ séu setningar í $\mathcal{T}$. En $(\mathbf{C} \to \mathbf{A})^*$ er ekkert annað en yrðingin $\mathbf{C}^* \to \mathbf{A}^*$, og $\mathbf{A}^*$ er afleiðing af $\mathbf{C}^* \to \mathbf{A}^*$ og $\mathbf{C}^*$ samkvæmt **MP**, svo að $\mathbf{A}^*$ er setning í $\mathcal{T}$, og $\mathbf{A}$ fullnægir skilyrði $(*)$.

Gerum að lokum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé afleiðing af yrðingu $\mathbf{C}$ í $\mathcal{T}'$ sem fullnægir skilyrði $(*)$ samkvæmt rökreglunni **Alh**. Það þýðir að $\mathbf{C}^*$ er setning í $\mathcal{T}$ og breyta $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{A}$ sé yrðingin $\forall\mathbf{x}\mathbf{C}$. En $\mathbf{A}^*$ er þá $(\forall\mathbf{x}\mathbf{C})^*$, sem er ekkert annað en $\forall\mathbf{x}\mathbf{C}^*$, og því er $\mathbf{A}^*$ afleiðing af $\mathbf{C}^*$ samkvæmt rökreglunni **Alh**, og $\mathbf{A}$ fullnægir því skilyrði $(*)$. Þar með höfum við einnig sannað fullyrðinguna (ii).

Til að sanna hina áttina gerum við ráð fyrir að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}^*$. Þar sem $\mathcal{T}'$ er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{T}$ er $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}^*$. En $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$ samkvæmt hjálparsetningu (3.5), svo að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A}$ samkvæmt sísönnusetningu og **MP**. □

(3.7) Fylgisetning. *Látum $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ vera eins og í* (3.4). *Kenningin $\mathcal{T}'$ er íhaldssöm útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{T}$.*

Sönnun: Gerum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé yrðing á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$ og setning í kenningunni $\mathcal{T}'$. Samkvæmt ofansögðu er yrðingin $\mathbf{A}^*$ setning í $\mathcal{T}$. En þar sem $\mathbf{A}$ er á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$ er $\mathbf{A}^*$ bara yrðingin $\mathbf{A}$, svo að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$. □

(3.8) Gerum nú ráð fyrir að $\mathcal{T}$ sé samsemdarkenning, að $\mathbf{S}$ sé yrðing á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$ og að $\mathbf{y}$ sé breyta sem kemur fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{S}$. Við getum þá litið svo á að yrðingin $\mathbf{S}$ sé *skilyrði* sem stakið sem er gefið til kynna með breytunni $\mathbf{y}$ getur fullnægt eða ekki fullnægt. Gerum nú ráð fyrir að við getum sannað að til sé *nákvæmlega eitt* stak kallað $\mathbf{y}$ sem fullnægir skilyrðinu. Þá getum við gefið því nafn. Ef fleiri breytur koma fyrir frjálsar í yrðingunni $\mathbf{S}$, þá verðum við að líta svo á að stakið sem er kallað $\mathbf{y}$ sé fall af þessum aukabreytum, og því þurfum við að gefa stakið til kynna með *falltákni*. Nánar tiltekið:

Látum $\mathbf{S}$ vera yrðingu á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$, látum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ og $\mathbf{y}$ vera breytur þannig að engar breytur aðrar en þær komi fyrir frjálsar í yrðingunni $\mathbf{S}$. Gerum einnig ráð fyrir að $\mathbf{z}$ sé breyta sem er ekki nein af breytunum $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ og kemur ekki fyrir í yrðingunni $\mathbf{S}$. Gerum að lokum ráð fyrir að við getum sýnt að

$$\vdash_{\mathcal{T}} \exists \mathbf{y}\mathbf{S}$$

og

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{y}}[\mathbf{z}] \to \mathbf{y} = \mathbf{z}.$$

Við útvíkkum þá kenninguna $\mathcal{T}$ í nýja kenningu $\mathcal{T}'$ með því að bæta við $\mathcal{T}$ nýju n-stæðu falltákni $\mathbf{f}$ og nýrri frumsendu

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}}[\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n],$$

sem við köllum ***skilgreiningarfrumsendu*** nýja falltáknsins $\mathbf{f}$, og fara auk þess fram á að kenningin $\mathcal{T}'$ sé einnig samsemdarkenning.

Fyrir sérhverja yrðingu $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T}')$ búum við svo til yrðingu $\mathbf{A}^*$ á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$, sem við köllum ***þýðingu yrðingarinnar* A *á mál kenningarinnar*** $\mathcal{T}$. Við þurfum aðeins að skilgreina $\mathbf{A}^*$ fyrir *grunnyrðingar* $\mathbf{A}$, því að fyrir almenna yrðingu $\mathbf{A}$ fæst yrðingin $\mathbf{A}^*$ með því að setja inn $\mathbf{B}^*$ í stað $\mathbf{B}$ fyrir sérhverja grunnyrðingu $\mathbf{B}$ sem er hlutyrðing í yrðingunni $\mathbf{A}$. Fyrir grunnyrðingu $\mathbf{A}$ búum við yrðinguna $\mathbf{A}^*$ til með þrepun yfir fjölda þeirra staða þar sem falltáknið $\mathbf{f}$ kemur fyrir í $\mathbf{A}$. Ef það kemur hvergi fyrir, þá er $\mathbf{A}^*$ yrðingin $\mathbf{A}$. Annar má rita $\mathbf{A}$ sem $\mathbf{B}_{\mathbf{z}}[\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, þar sem falltáknið $\mathbf{f}$ og breytan $\mathbf{z}$ koma ekki fyrir í heitunum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{B}$ er grunnyrðing þar sem falltáknið $\mathbf{f}$ kemur einu sinni sjaldnar fyrir en í yrðingunni $\mathbf{A}$. Við veljum tilbrigði $\mathbf{S}'$ við yrðinguna $\mathbf{S}$ þannig að engin breyta sem kemur fyrir í $\mathbf{A}$ komi fyrir bundin í yrðingunni $\mathbf{S}'$ og látum $\mathbf{A}$ vera yrðinguna

$$\exists \mathbf{z}(\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{z}] \wedge \mathbf{B}^*).$$

Þessi þýðing $\mathbf{A}^*$ ákvarðast ekki ótvírætt, því að hún er háð valinu á tilbrigðinu $\mathbf{S}'$ og breytunni $\mathbf{z}$; en tvær þýðingar sem eru myndaðar með þessum hætti eru tilbrigði hvor við aðra og því jafngildar í kenningunni $\mathcal{T}$.

Við þurfum nú að sanna samskonar niðurstöður og fyrir umsagnartákn og byrjum eins og áðan á hjálparsetningu:

(3.9) Hjálparsetning. *Látum $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^*$ vera eins og í* (3.8). *Þá er*

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*.$$

Sönnun: Við sönnum fullyrðinguna með þrepun yfir fjölda þeirra staða þar sem falltáknið $\mathbf{f}$ kemur fyrir í $\mathbf{A}$. Ef það kemur hvergi fyrir, þá er $\mathbf{A}^*$ yrðingin $\mathbf{A}$ og fullyrðingin sem sanna á er $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$, sem er rétt samkvæmt sísönnusetningu. Gerum því ráð fyrir að $\mathbf{f}$ komi fyrir í $\mathbf{A}$ og látum $\mathbf{B}$ og $\mathbf{S}'$ vera eins og í (3.8). Við þurfum þá að sýna að

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{z}] \wedge \mathbf{B}^*).$$

Samkvæmt skilgreiningarfrumsendunni og tilbrigðasetningu er $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{S}'_{\mathbf{y}}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$, og með innsetningu fæst $\vdash_{\mathcal{T}'} S'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$. Samkvæmt forsendu og tilbrigðasetningu er $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{S}' \wedge \mathbf{S}'_{\mathbf{y}}[\mathbf{z}] \to \mathbf{y} = \mathbf{z}$, og með innsetningu fæst

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \wedge \mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{z}] \to \mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z}.$$

En þar sem $\mathcal{T}'$ er samsemdarkenning er

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \to (\mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{z}]),$$

og vegna $\vdash_{\mathcal{T}'} S'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ fáum við með hjálp sísönnusetningar að

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{S}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{z}] \leftrightarrow \mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z}.$$

Nú vitum við samkvæmt þrepunarforsendu að $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}^*$, svo að samkvæmt jafngildissetningu þurfum við að sanna

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}),$$

þar sem breytan $\mathbf{z}$ kemur ekki fyrir í heitinu $\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n$. En þar sem $\mathcal{T}'$ er samsemdarkenning er $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \to (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n])$. Af því leiðir með sísönnusetningu að $\vdash_{\mathcal{T}'} (\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n])$, og $\exists\to$-reglan gefur þá

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n].$$

Notum síðan setningu (2.2) á yrðinguna $\mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}$ og breytuna $\mathbf{z}$ og fáum $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n \wedge \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B})$. En þar sem $\mathcal{T}'$ er samsemdarkenning er $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n$, og sísönnusetningin gefur þá

$$\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}).$$

En þetta þá höfum við sýnt bæði $\vdash_{\mathcal{T}'} \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ og $\mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B})$ og því $\vdash_{\mathcal{T}'} \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{fa}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{z} \wedge \mathbf{B})$. □

(3.10) Setning. *Látum $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^*$ vera eins og í* (3.8). *Þá gildir:*

Yrðingin $\mathbf{A}$ er setning í $\mathcal{T}'$ þá og því aðeins að yrðingin $\mathbf{A}^*$ sé setning í $\mathcal{T}$.

Sönnunin er ófrágengin, og henni er því sleppt. Niðurstöður þessarar greinar verða ekki notaðar í því sem eftir er fyrirlestranna.

Eins og áður fáum við:

(3.11) Fylgisetning. *Látum* $\mathcal{T}$ *og* $\mathcal{T}'$ *vera eins og í* (3.8). *Kenningin* $\mathcal{T}'$ *er íhaldssöm útvíkkun kenningarinnar* $\mathcal{T}$. □

(3.12) Dæmi. (1) Við getum bætt nýju umsagnartákni '$<$' við kenninguna $\mathcal{O}_1$ um raðanir úr dæmi (1) í (1.13) ásamt nýrri frumsendu

$$\text{`}x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y\text{'}$$

og fáum þannig nýja kenningu $\mathcal{O}_1'$ sem er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{O}_1$. Eins má bæta nýju umsagnartákni '$\leq$' við kenninguna $\mathcal{O}_2$ um strangar raðanir úr dæmi (1) í (1.13) ásamt nýrri frumsendu

$$\text{`}x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y\text{'}$$

og fáum þannig nýja kenningu $\mathcal{O}_2'$ sem er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{O}_2$. Auðvelt er að ganga úr skugga um að kenningarnar $\mathcal{O}_1'$ og $\mathcal{O}_2'$ eru jafngildar.

(2) Athugum kenninguna $\mathcal{A}_1$ um víxlgrúpur úr dæmi (2) í (1.13). Auðvelt er að sjá að

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \text{`}\exists y \forall x (x + y = x)\text{'}$$

og

$$\vdash_{\mathcal{A}_1} \text{`}\forall x (x + y = x) \wedge \forall x (x + z = x) \rightarrow y = z\text{'}.$$

Við getum því bætt við kenninguna nýjum fasta '0' ásamt nýrri frumsendu

$$\text{`}\forall x (x + 0 = x)\text{'}$$

og fáum þannig nýja kenningu $\mathcal{A}_1'$ sem er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{A}_1$. Í kenningunni $\mathcal{A}_1'$ getum við svo auveldlega sannað yrðingarnar

$$\text{`}\exists y (x + y = 0)\text{'}$$

og

$$\text{`}x + y = 0 \wedge x + z = 0 \rightarrow y = z.\text{'}$$

Við getum því bætt við kenninguna einstæðu falltákni '$-$' ásamt nýrri frumsendu

$$\text{`}x + (-x) = 0\text{'}$$

og fáum þannig nýja kenningu $\mathcal{A}_1''$ sem er útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{A}_1'$. Auðséð er að kenningin $\mathcal{A}_1''$ er jafngild kenningunni $\mathcal{A}_2$ úr dæmi (2) í (1.13).

Við látum lesanda eftir að hliðstætt má gera fyrir kenninguna $\mathcal{G}_1$ úr dæmi (3) í (1.13) og fá þannig kenningu sem er jafngild kenningunni $\mathcal{G}_2$ úr sama dæmi.

(3) Lítum að lokum á Zermelo-Fraenkel-mengjafræði úr dæmi (5) í (1.13). Af frumsendugripi um hlutmengi leiðir að

$$\vdash_{\mathcal{ZF}} \text{`}\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq z)\text{'}.$$

En nú er $\vdash_{\mathcal{ZF}}$ '$\forall z(z = z)$', svo að ljóslega gildir $\vdash_{\mathcal{ZF}}$ '$\forall z \neg(z \in x \wedge z \neq z)$', og því fæst

$$\vdash_{\mathcal{ZF}} \text{'}\exists y \forall z(z \notin y)\text{'}.$$

Af frumsendu um umtak leiðir

$$\vdash_{\mathcal{ZF}} \text{'}\forall z(z \notin y) \wedge \forall z(z \notin w) \to y = w\text{'}.$$

Við getum þá bætt við kenninguna $\mathcal{ZF}$ nýjum fasta '$\varnothing$' ásamt nýrri frumsendu

$$\text{'}\forall z(z \notin \varnothing).$$

Samkvæmt fylgisetningu (3.11) fáum við þannig nýja kenningu sem er íhaldssöm útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{ZF}$.

En nú er það siðvenja að kalla þessa kenningu áfram $\mathcal{ZF}$ og líta svo á að við höfum einfaldlega stækkað $\mathcal{ZF}$ með því að bæta við hana skilgreiningu, og að þessi stækkaða útgáfa sé bara $\mathcal{ZF}$ í þægilegri rithætti, enda gætum við þýtt allar yrðingar útvíkkuðu kenningarinnar til baka í $\mathcal{ZF}$ samkvæmt setningu (3.10).

Nefnum stuttlega fleiri slíkar „stækkanir" kenningarinnar $\mathcal{ZF}$. Þá má fyrst nefna að við getum bætt við tvístæðu umsagnartákni '$\subset$' ásamt frumsendunni (eða skilgreiningunni)

$$\text{'}x \subset y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y)\text{'}.$$

Frumsenda um lítil mengi er lokun yrðingarinnar '$\exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$', og frumsenda um umtak leyfir okkur að sanna yrðinguna '$\forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y) \wedge \forall t(t \in w \leftrightarrow t = x \vee t = y) \to z = w$'. Því er má bæta við kenninguna $\mathcal{ZF}$ tvístæðu falltákni 'T' ásamt frumsendu '$\forall t(t \in Txy \leftrightarrow t = x \vee t = y)$'. Við tökum strax upp skammstöfunina

$$\text{'}\{x, y\}\text{'}$$

í stað 'Txy' og höfum þá

$$t \in \{x, y\} \leftrightarrow t = x \vee t = y.$$

Við tökum líka upp skammstöfunina

$$\text{'}\{x\}\text{'} \quad \text{í stað} \quad \text{'}\{x, x\}\text{'}.$$

Frumsenda um sammengi leyfir okkur að bæta við nýju einstæðu falltákni '$\bigcup$' sem fullnægir skilyrðinu

$$\text{'}x \in \bigcup C \leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in C)\text{'},$$

og við tökum strax upp skammstöfunina

$$\text{'}x \cup y\text{'} \quad \text{í stað} \quad \text{'}\bigcup\{x, y\}\text{'}.$$

Frumsenda um sammengi leyfir okkur að bæta við nýju einstæðu falltákni '$\mathcal{P}$' sem fullnægir skilyrðinu

$$\text{'}y \in \mathcal{P}x \leftrightarrow y \subset x\text{'}.$$

Með hjálp þessara nýju tákna getum við umritað frumsenduna um tilvist óendanlegs mengis: Hún verður jafngild yrðingunni

$$`\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)'.$$

Við látum þessi dæmi nægja, en svona mætti lengi halda áfram. Raunar má halda því fram að nú til dags sé meströll stærðfræði fengin sem útvíkkun kenningarinnar $\mathcal{ZFC}$ með slíkum viðbótum

Kafli III

Líkön

§1. Mynztur og líkön

(1.1) Skilgreining. (1) *Látum $\mathcal{L}$ vera mál fyrstu stéttar.* ***Mynztur*** *fyrir málið $\mathcal{L}$ er gefið með því að tiltaka eftirfarandi hluti:*

(i) *Mengi $|M|$;*
(ii) *fall $\mathbf{f}_M : |M|^n \to |M|$ fyrir sérhvert n-stætt falltákn $\mathbf{f}$ í $\mathcal{L}$; sér í lagi skal tiltaka stak $\mathbf{c}_M$ úr $|M|$ fyrir sérhvern fasta $\mathbf{c}$ í $\mathcal{L}$;*
(iii) *n-stæð venzl $\mathbf{p}_M$, með öðrum orðum hlutmengi í $|M|$, fyrir sérhvert umsagnartákn $\mathbf{p}$ í $\mathcal{L}$.*

Við köllum föllin $\mathbf{f}_M$ og vemzlin $\mathbf{p}_M$ ***túlkanir*** *falltáknanna $\mathbf{f}$ og umsagnartáknanna $\mathbf{p}$ í mynztrinu M, eða stuttlega M-**túlkanir** þeirra.*

(2) *Gerum ráð fyrir að eitt tvístætt umsagnartákn málsins $\mathcal{L}$ sé samasemmerkið '='.* ***Samsemdarmynztur*** *fyrir málið $\mathcal{L}$ er mynztur M fyrir $\mathcal{L}$ þannig að venzlin $=_M$ séu venjulegu samsemdarvenzlin á $|M|$; með öðrum orðum ef fullyrðingin $x =_M y$ er sönn þá og því aðeins að $x \in |M|$, $y \in |M|$ og $x = y$.*

Við viljum nú skilgreina hvað það þýðir að yrðing á máli fyrstu stéttar sé *sönn* í einhverju líkani. Athugum til dæmis málið $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ úr dæmi (1) í (II.1.3). Ljóst er að náttúrlegu tölurnar $\mathbb{N}$ eru með eðlilegum hætti samsemdarmynztur fyrir málið $\mathcal{L}(\mathcal{N})$: Túlkum fastans '0' í $\mathbb{N}$ er náttúrlega talan 0, túlkun einstæða falltáknsins 'S' er vörpunin $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$, túlkanir tvístæðu falltáknanna '+' og '$\cdot$' eru venjulega samlagningin $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x + y$ og venjulega margföldunin $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \to x \cdot y$, túlkun tvístæða umsagnartáknsins '$<$' er venjulega stranga röðunin á $\mathbb{N}$, og túlkun samasemmerkisins er að sjálfsögðu venjulegu samsemdarvenzlin á $\mathbb{N}$ eins og vera ber fyrir samsemdarkenningar. En tökum eftir að rauntölurnar $\mathbb{R}$ eru líka samsemdarmynztur fyrir málið $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ með hliðstæðum túlkunum: Túlkun fastans '0' í $\mathbb{R}$ er rauntalan 0, túlkun einstæða falltáknsins 'S' er vörpunin $S_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$, túlkanir tvístæðu falltáknanna '+' og '$\cdot$' eru venjulega samlagningin $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ og venjulega margföldunin $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x \cdot y$ og túlkun tvístæða umsagnartáknsins '$<$' er venjulega stranga röðunin á $\mathbb{R}$.

Hvað viljum við að það þýði að yrðing með frjálsum breytum, eins og til dæmis yrðingin '$x < y$', sé sönn í líkaninu $\mathbb{N}$? Við getum *úthlutað* breytunum 'x' og 'y' tilteknum tölum og fengið þannig fullyrðingar um ákveðnar tölur sem við getum sagt til um hvort eru réttar eða rangar. Ef við til dæmis úthlutum breytunni 'x' tölunni 2 og breytunni 'y' tölunni 3, þá fáum við sönnu fullyrðinguna '$2 < 3$', en ef við úthlutum breytunni 'x' tölunni 5 og breytunni 'y' tölunni 4, þá fáum við ósönnu fullyrðinguna '$5 < 4$'. Fyrir sérhverja slíka úthlutun getum við gengið úr skugga um hvort yrðingin er sönn eða ekki.

Að yrðing með frjálsum breytum sé sönn í líkaninu á að þýða að hún sé sönn fyrir *sérhverja* slíka úthlutun. Yrðingin '$x < y$' er því ekki sönn í líkaninu $\mathbb{N}$, því að hún er að vísu sönn fyrir einhverjar úthlutanir breytistærðanna, en hún er ósönn fyrir aðrar úthlutanir.

Yrðingin '$x \neq 0 \to 0 < x$' á málinu $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ er hinsvegar sönn í líkaninu $\mathbb{N}$, því að hún er rétt fyrir *allar* náttúrlegar tölur x. Hún er hinsvegar ekki sönn í líkaninu $\mathbb{R}$, því að hún er röng fyrir allar neikvæðar tölur x.

Við gefum nú formlega skilgreiningu:

(1.2) Skilgreining. *Látum M vera mynztur fyrir mál fyrstu stéttar $\mathcal{L}$ og látum $V_{\mathcal{L}}$ vera mengið af öllum breytum málsins $\mathcal{L}$.*

(1) *Vörpun $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ er kallað* ***úthlutun*** *í mynztrinu M.*

(2) *Ef $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ er úthlutun í mynztrinu M, $\mathbf{x}$ er breyta í $V_{\mathcal{L}}$ og a er stak í $|M|$, þá látum við $s_{\mathbf{x}}[a] : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ vera úthlutunina sem er skilgreind með því að setja*

$$s_{\mathbf{x}}[a](\mathbf{y}) := \begin{cases} s(\mathbf{y}), & \text{ef } \mathbf{y} \text{ er ekki } \mathbf{x}, \\ a, & \text{ef } \mathbf{y} \text{ er } \mathbf{x}. \end{cases}$$

(3) *Látum $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ vera úthlutun í mynztrinu M. Fyrir sérhvert heiti $\mathbf{a}$ á málinu $\mathcal{L}$ skilgreinum við stak $\mathbf{a}_M(s)$ í $|M|$ með þrepun þannig að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt:*

(i) *Ef $\mathbf{a}$ er breyta $\mathbf{x}$, þá er $\mathbf{a}_M(s) := s(\mathbf{x})$.*

(ii) *Ef $\mathbf{a}$ er heiti $\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$, þar sem $\mathbf{f}$ er n-stætt falltákn og $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ eru heiti, þá er*

$$\mathbf{a}_M(s) := \mathbf{f}_M(\mathbf{a}_{1,M}(s), \ldots, \mathbf{a}_{n,M}(s)).$$

Sér í lagi er $\mathbf{a}_M(s) = \mathbf{c}_M$ ef $\mathbf{a}$ er fasti $\mathbf{c}$.

(4) *Látum $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ vera úthlutun í mynztrinu M. Við skilgreinum með þrepun hvað það þýðir að yrðingu $\mathbf{A}$ sé* ***fullnægt í mynztrinu*** *M* ***með tilliti til úthlutunarinnar*** *s, skrifað*

$$\vDash_M \mathbf{A}(s),$$

með eftirfarandi hætti:

(i) *Ef $\mathbf{A}$ er grunnyrðing $\mathbf{p}\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, þá þýðir $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ að*

$$(\mathbf{a}_{1,M}(s), \ldots, \mathbf{a}_{n,M}) \in \mathbf{p}_M.$$

(ii) *Ef $\mathbf{A}$ er yrðing $\neg\mathbf{B}$, þá þýðir $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ að ekki sé $\vDash_M \mathbf{B}(s)$.*

(ii) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðing* $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, *þá þýðir* $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ *að annaðhvort sé* $\vDash_M \mathbf{B}(s)$ *eða* $\vDash_M \mathbf{C}(s)$.

(iv) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðing* $\forall \mathbf{x}\mathbf{B}$, *þá þýðir* $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ *að* $\vDash_M \mathbf{B}(s_{\mathbf{x}}[a])$ *fyrir sérhvert stak* a *úr* $|M|$.

(5) *Við segjum að yrðingu* $\mathbf{A}$ *sé* ***fullnægt í mynztrinu*** M *eða einfaldlega að yrðingin* $\mathbf{A}$ *sé* ***sönn í mynztrinu*** M *og skrifum*

$$\vDash_M \mathbf{A}$$

ef $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ *fyrir sérhverja úthlutun* $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$ *í mynztrinu* M.

(1.3) Athugasemd. Hvort $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ gildir eða ekki er einungis háð gildunum $s(\mathbf{x})$ fyrir þær breytur $\mathbf{x}$ sem koma fyrir frjálsar í yrðingunni $\mathbf{A}$. Ef sér í lagi yrðingin $\mathbf{A}$ er lokuð, þá er sannleiksgildi fullyrðingarinnar „$\vDash_M \mathbf{A}(s)$“ óháð úthlutuninni s. Við sjáum einnig: Ef $\mathbf{A}'$ er lokun yrðingarinnar $\mathbf{A}$, þá er

$$\vDash_M \mathbf{A} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \vDash_M \mathbf{A}'.$$

(1.4) Skilgreining. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera yrðingu á máli* $\mathcal{L}$ *fyrstu stéttar.*

(1) *Við segjum að yrðingin* $\mathbf{A}$ *sé* ***röksönn*** *og skrifum*

$$\vDash \mathbf{A}$$

ef $\vDash_M \mathbf{A}$ *gildir fyrir sérhvert mynztur* M *fyrir málið* $\mathcal{L}$.

(2) *Látum* $\mathcal{H}$ *vera mengi af yrðingum á málinu* $\mathcal{L}$. *Við segjum að yrðingin* $\mathbf{A}$ *sé* ***rökafleiðing af yrðingunum í*** $\mathcal{H}$ *eða einfaldlega* ***rökafleiðing af*** $\mathcal{H}$ *og skrifum*

$$\mathcal{H} \vDash \mathbf{A}$$

ef $\vDash_M \mathbf{A}$ *fyrir sérhvert mynztur* M *þannig að* $\vDash_M \mathbf{B}$ *fyrir sérhverja yrðingu* $\mathbf{B}$ *úr* $\mathcal{H}$

(1.5) Hjálparsetning. *Látum* M *vera mynztur fyrir mál* $\mathcal{L}$ *fyrstu stéttar,* $\mathbf{x}$ *vera breytu og* $\mathbf{a}$ *vera heiti í* $\mathcal{L}$. *Setjum*

$$a := \mathbf{a}_M(s) \in |M|.$$

(1) *Ef* $\mathbf{b}$ *er heiti á málinu* $\mathcal{L}$, *þá er*

$$\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]_M(s) = \mathbf{b}_M(s_{\mathbf{x}}[a])$$

fyrir sérhverja úthlutun $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$.

(2) *Ef* $\mathbf{A}$ *er yrðing á málinu* $\mathcal{L}$ *þannig að heitið* $\mathbf{a}$ *sé innsetjanlegt fyrir breytuna* $\mathbf{x}$ *í yrðingunni* $\mathbf{A}$, *þá gildir*

$$\vDash_M \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s) \text{ þá og því aðeins að } \vDash_M \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$$

fyrir sérhverja úthlutun $s : V_{\mathcal{L}} \to |M|$.

Sönnun: (1) Sönnum fullyrðinguna með þrepun yfir lengd heitisins $\mathbf{b}$. Ef lengdin er 1, þá er $\mathbf{b}$ annaðhvort breyta eða fasti. Gerum fyrst ráð fyrir að $\mathbf{b}$ sé breyta $\mathbf{y}$. Ef $\mathbf{y}$ er breytan $\mathbf{x}$, þá er $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ heitið $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s) = a_M(s) = a$; en þá er líka $\mathbf{b}_M(s_{\mathbf{x}}[a]) = \mathbf{x}_M(s_{\mathbf{x}}[a]) = s_{\mathbf{x}}[a](\mathbf{x}) = a$. Ef hins vegar $\mathbf{y}$ er ekki breytan $\mathbf{x}$, þá er $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ heitið $\mathbf{y}$ og $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s) = s(\mathbf{y})$; en þá er líka $\mathbf{b}_M(s_{\mathbf{x}}[a]) = \mathbf{y}_M(s_{\mathbf{x}}[a]) = s_{\mathbf{x}}[a](\mathbf{y}) = s(\mathbf{y})$. Gerum næst ráð fyrir að $\mathbf{b}$ sé fasti $\mathbf{c}$. Þá er ljóst að $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]_M(s) = \mathbf{c}_M = \mathbf{b}_M(s_{\mathbf{x}}[a])$.

Ef $\mathbf{b}$ hefur lengd stærri en 1, þá er $\mathbf{b}$ af gerðinni $\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$, þar sem $\mathbf{f}$ er n-stætt falltákn og $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ eru heiti sem eru styttri en $\mathbf{b}$. Með þrepunarforsendu fæst því

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]_M(s) &= \mathbf{f}\mathbf{a}_{1,\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \cdots \mathbf{a}_{n,\mathbf{x}}[\mathbf{a}] = \mathbf{f}_M(\mathbf{a}_{1,\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s), \dots, \mathbf{a}_{n,\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)) \\ &= \mathbf{f}_M(\mathbf{a}_{1,M}(s_{\mathbf{x}}[a]), \dots, \mathbf{a}_{n,M}(s_{\mathbf{x}}[a])) = \mathbf{b}_M(s_{\mathbf{x}}[a]).\end{aligned}$$

(2) Við sönnum fullyrðinguna með þrepun yfir lengd yrðingarinnar $\mathbf{A}$. Gerum fyrst ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé grunnyrðing $\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$. Þá er $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ yrðingin $\mathbf{p}\mathbf{a}_{1,\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \cdots \mathbf{a}_{n,\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$. Samkvæmt skilgreiningu er $\vDash_M \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$ þá og því aðeins að $(\mathbf{a}_{1,\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s), \dots, \mathbf{a}_{n,\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)) \in \mathbf{p}_M$, en það jafngildir samkvæmt lið (1) skilyrðinu $(\mathbf{a}_{1,M}(s_{\mathbf{x}}[a]), \dots, \mathbf{a}_{n,M}(s_{\mathbf{x}}[a])) \in \mathbf{p}_M$, sem aftur þýðir að $\vDash_M \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$.

Ef $\mathbf{A}$ er af gerðinni $\neg\mathbf{B}$, þá $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ yrðingin $\neg\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, og því er er $\vDash_M \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$ jafngilt því að ekki sé $\vDash_M \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$. Samkvæmt þrepunarforsendu er það jafngilt því að ekki sé $\vDash_M \mathbf{B}(s_{\mathbf{x}}[a])$, sem aftur jafngildir því að $\vDash_M \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$.

Ef $\mathbf{A}$ er af gerðinni $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, þá er $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ yrðingin $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \vee \mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$, og því er $\vDash_M \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$ jafngilt því að annaðhvort sé $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$ eða $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$. Samkvæmt þrepunarforsendu er það jafngilt því að annaðhvort sé $\vDash_M \mathbf{B}(s_{\mathbf{x}}[a])$ eða $\vDash_M \mathbf{C}(s_{\mathbf{x}}[a])$, og það er aftur jafngilt því að $\vDash_M \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$.

Þá er aðeins eftir að athuga tilvikið þegar $\mathbf{A}$ er af gerðinni $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}$. Ef $\mathbf{y}$ er breytan $\mathbf{x}$, þá er breytan $\mathbf{x}$ ekki frjáls í $\mathbf{A}$, svo að $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ er yrðingin $\mathbf{A}$, og fullyrðingin $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ er jafngild $\vDash_M \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$, því að hún er einungis háð gildum s í frjálsu breytunum í yrðingunni $\mathbf{A}$. Við getum því gert ráð fyrir að $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x}$ séu ólíkar breytur, og þar sem heitið $\mathbf{a}$ er innsetjanlegt fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{A}$ kemur breytan $\mathbf{y}$ ekki fyrir í heitinu $\mathbf{a}$. Nú þýðir $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ að $\vDash_M \forall\mathbf{y}\mathbf{A}(s)$, og það er jafngilt því að $\vDash_M \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s_{\mathbf{y}}[b])$ fyrir sérhvert stak b úr $|M|$. Samkvæmt þrepunarforsendu gildir $\vDash_M \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}](s)$ þá og því aðeins að $\vDash_M \mathbf{B}(s_{\mathbf{x}}[a])$ fyrir allar úthlutanir s, og þá líka fyrir úthlutunina $s_{\mathbf{y}}[b]$, svo að $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ er jafngilt því að $\vDash_M \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]((s_{\mathbf{y}}[b])_{\mathbf{x}}[a])$ fyrir öll b úr $|M|$. En þar sem breyturnar $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ eru ólíkar er ljóst að $(s_{\mathbf{y}}[b])_{\mathbf{x}}[a] = (s_{\mathbf{x}}[a])_{\mathbf{y}}[b]$, því að báðar varpanirnar taka gildið a í breytunni $\mathbf{x}$, gildið b í breytunni $\mathbf{y}$ og sama gildi og s í öllum öðrum breytum. Því er $\vDash_M \mathbf{A}(s)$ jafngilt því að $\vDash_M \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]((s_{\mathbf{x}}[a])_{\mathbf{y}}[b])$ fyrir sérhvert stak b úr $|M|$, en það þýðir að $\vDash_M \forall\mathbf{y}\mathbf{B}(s_{\mathbf{x}}[a])$, eða með öðrum orðum að $\vDash \mathbf{A}(s_{\mathbf{x}}[a])$. □

(1.6) Setning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar á máli $\mathcal{L}$ þannig að $\mathcal{T}$ hafi engar eiginlegar frumsendur.*

(1) *Sérhver (rök)frumsenda í $\mathcal{T}$ er röksönn.*

(2) *Ef $\mathbf{A}$ er yrðing á málinu $\mathcal{L}$ og $\mathcal{H}$ er mengi af yrðingum á málinu $\mathcal{L}$ þannig að $\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$, þá er $\mathcal{H} \vDash \mathbf{A}$.*

Sönnun: Sýnum fyrst að frumsenda af gerðinni $\mathbf{F1}$, með öðrum orðum yrðing af gerðinni $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, er röksönn: Annars væri til mynztur M og úthlutun s þannig að ekki gildi $\models_M (\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \to \mathbf{A})(s)$; með öðrum orðum gildir ekki $\models_M (\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A})(s)$. En þá væri ekki $\models_M \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{A})(s)$ og ekki heldur $\models_M \mathbf{A}(s)$. Það þýðir að $\models (\mathbf{A} \vee \mathbf{A})(s)$ gildir, en ekki $\models_M \mathbf{A}(s)$.En $\models (\mathbf{A} \vee \mathbf{A})(s)$ þýðir að $\models \mathbf{A}(s)$ eða $\models \mathbf{A}(s)$, sem er ausljóslega jafngilt $\models \mathbf{A}(s)$, svo að við höfum bæði $\models \mathbf{A}(s)$ og ekki $\models \mathbf{A}(s)$, sem er mótsögn.

Að frumsendur af gerðunum **F2** eða **F3** séu röksannar sést með svipuðum hætti.

Athugum þá frumsendu af gerðinni **F4**, með öðrum orðum yrðingu $\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}]$, þar sem $\mathbf{a}$ er heiti sem er innsetjanlegt fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{A}$, en þessa yrðingu má einnig skrifa $\neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}]$. Ef hún er ekki röksönn, þá er til mynztur M ásamt úthlutun s þannig að $\models (\neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}])(s)$ gildi ekki, sem þýðir að hvorki gildi $\models_M \neg\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(s)$ né $\models_M \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}](s)$. Það þýðir svo að $\models_M \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(s)$ gildir, en ekki $\models_M \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}](s)$. Samkvæmt hjálparsetningu þýðir þetta að $\models_M \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(s)$ gildir, en ekki $\models_M \mathbf{A}(s_\mathbf{x}[a])$, en það er í beinni mótsögn við skilgreiningu.

Athugum loks frumsendu af gerðinni **F5**, með öðrum orðum yrðingu $\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{A} \vee \forall x\mathbf{B}$, þar sem breytan $\mathbf{x}$ kemur ekki fyrir frjáls í yrðingunni $\mathbf{A}$. En það sést með afar svipuðum hætti fyrir frumsendur af gerð **F1**, svo að við látum lesandanum eftir smáatriðin.

(2) Það nægir að sýna að $\models_M \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ og $\models_M \mathbf{A}$ leiði til $\models_M \mathbf{B}$ og að $\models_M \mathbf{A}$ leiði til $\models_M \forall \mathbf{x}\mathbf{A}$, en hvort tveggja er bein afleiðing að skilgreiningunum. □

(1.7) Fylgisetning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar á máli $\mathcal{L}$. Ef M er mynztur fyrir málið $\mathcal{L}$ þannig að sérhver eiginleg frumsenda kenningarinnar $\mathcal{T}$ er sönn í mynztrinu M, þá er sérhver setning í $\mathcal{T}$ sönn í mynztrinu M.* □

(1.8) Skilgreining. (1) ***Líkan*** *fyrir kenningu $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar á máli $\mathcal{L}$ fyrstu stéttar er mynztur fyrir málið $\mathcal{L}$ þannig að sérhver eiginleg frumsenda kenningarinnar $\mathcal{T}$ sé sönn í mynztrinu M.*

(2) ***Samsemdarlíkan*** *fyrir kenningu fyrstu stéttar er líkan fyrir kenninguna sem er jafnframt samsemdarmynztur.*

(3) *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar og $\mathbf{A}$ vera yrðingu á máli kenningarinnar. Við skrifum*

$$\models_\mathcal{T} \mathbf{A}$$

ef $\models_M \mathbf{A}$ fyrir sérhvert líkan M fyrir kenninguna $\mathcal{T}$; með öðrum orðum ef yrðingin $\mathcal{A}$ er sönn í sérhverju líkani fyrir kenninguna.

(1.9) Athugasemd. Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar og $\mathcal{A}$ vera mengi allra eiginlegra frumsendna kenningarinnar $\mathcal{T}$. Þá gildir

$$\models_\mathcal{T} \mathbf{A} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \mathcal{A} \models \mathbf{A}.$$

Af setningu (1.6) leiðir samstundis:

(1.10) Fylgisetning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar á málinu $\mathcal{L}$ fyrstu stéttar þannig að kenningin $\mathcal{T}$ hefi engar eiginlegar frumsendur. Þá er sérhvert mynztur fyrir málið $\mathcal{L}$ líkan fyrir kenninguna $\mathcal{T}$.* □

(1.11) Skilgreining. *Við segjum gjarnan að kenning $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar sé* ***hrein rökfræðikenning*** *ef hún hefur engar eiginlegar frumsendur. (Ef $\mathcal{T}$ er samsemdarkenning, þá teljum við samsemdarfrumsendurnar ekki til eiginlegra frumsendna.)*

(1.12) Athugasemd. Í langflestum kennslubókum eru mynztur M fyrir mál fyrstu stéttar og líkön M fyrir kenningu fyrstu stéttar skilgreind með því aukaskilyrði að mengið $|M|$ eigi ekki vera tómt. Fyrir langflestar kenningar sem athugaðar eru dags daglega er þessu skilyrði sjálfkrafa fullnægt; til dæmis ef mál kenningarinnar hefur fasta eða ef eiginlegar frumsendur hennar leiða af sér yrðingar sem fullyrða tilvist einhverra hluta, og fyrir slíkar kenningar er skilyrðið óþarft. Það er líka vandséð í öðrum tilvikum hvaða tilgangi það þjónar að gera þessa kröfu *fyrirfram* fyrir öll mynztur eða líkön, en auðvelt að láta sér detta í hug tilvik þar sem sú krafa gæti orðið til trafala.

(1.13) Athugasemd. Látum $\mathcal{T}$ vera samsemdarkenningu á máli $\mathcal{L}$ og M vera líkan fyrir $\mathcal{T}$. Þá eru venzlin $=_M$ jafngildisvenzl á menginu $|M|$. Þá má búa til samsemdarlíkan M' fyrir $\mathcal{T}$ þannig að $|M'| := M/{=_M}$ sé mengi jafngildisflokkanna með eftirfarandi hætti:

Táknum með$[a]$ jafngildisflokk staks a úr $|M|$ með tilliti til venzlanna $=_M$, þannig að $|M'| = \{[a] : a \in |M|\}$. Látum $\mathbf{f}$ vera n-stætt falltákn í málinu $\mathcal{L}$. Við skilgreinum vörpun $\mathbf{f}_{M'} : |M'|^n \to |M'|$ með því að setja

$$\mathbf{f}_{M'}([a_1], \ldots, [a_n]) := \mathbf{f}(a_1, \ldots, a_n)$$

fyrir öll stök $a_1, \ldots, a_n$ úr $|M|$, og vegna

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n \to \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n = \mathbf{f}\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n$$

er skilgreiningin óháð valinu á stökunum $a_1, \ldots, a_n$ úr jafngildisflokkunum $[a_1], \ldots, [a_n]$. Látum $\mathbf{p}$ vera n-stætt umsagnartákn í málinu $\mathcal{L}$. Við skilgreinum n-stæð venzl $\mathbf{p}_{M'}$ á $|M'|$ með því að setja

$$([a_1], \ldots, [a_n]) \in \mathbf{p}_{M'} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{p}_M$$

fyrir öll stök $a_1, \ldots, a_n$ úr $|M|$, og vegna

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n \to (\mathbf{p}\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{p}\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n)$$

er skilgreiningin óháð valinu á stökunum $a_1, \ldots, a_n$ úr jafngildisflokkunum $[a_1], \ldots, [a_n]$. Sér í lagi er

$$[a] =_{M'} [b] \quad \text{þá og því aðeins að} \quad [a] = [b].$$

Nú er auðvelt að sjá með þrepun yfir lengd yrðinga að fyrir sérhverja yrðingu $\mathbf{A}$ gildir

$$\vDash_{M'} \mathbf{A} \quad \text{þá og því aðeins að} \vDash_M \mathbf{A} :$$

við eftirlátum lesanda eftir að ganga úr skugga um það. En þá er ljóst að M' er samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{T}$.

(1.14) Dæmi. (1) Samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{O}_1$ um raðanir er raðað mengi (sem sumir kalla „hlutraðað mengi“). Samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{O}_2$ um strangar raðanir er stranglega raðað mengi.

Látum M vera líkan fyrir kenninguna $\mathcal{O}_1$. Samkvæmt dæmi (1) í (II.3.12) má útvíkka kenninguna í kenningu $\mathcal{O}_1'$ með því að bæta við hana umsagnartákninu ‘$<$’

ásamt nýrri frumsendu '$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$'. Við getum nú líka útvíkkað líkanið M í líkan M' fyrir $\mathcal{O}_1'$ með því að setja $|M'| := |M|$, $\leq_{M'} := \leq_M$ og skilgreina venzin $<_{M'}$ með því að setja

$$x <_{M'} y \quad \text{þá og því aðeins að} \quad x \leq_M y \quad \text{og} \quad x \neq_M y$$

fyrir öll x, y úr $|M|$.

Við útvíkkuðum einnig kenninguna $\mathcal{O}_2$ um strangar raðanir í kenningu $\mathcal{O}_2'$ með því að bæta við hana umsagnartákninu '$\leq$' og nýrri frumsendu '$x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$', og með nákvæmlega sama hætti og fyrir $\mathcal{O}_1$ má útvíkka sérhvert líkan M fyrir $\mathcal{O}_2$ í líkan M' fyrir $\mathcal{O}_2'$ með því að setja

$$x \leq_{M'} y \quad \text{þá og því aðeins að} \quad x <_M y \quad \text{eða} \quad x =_M y$$

og halda öðru óbreyttu. Við sjáum nú að jafngildu kenningarnar $\mathcal{O}_1'$ og $\mathcal{O}_2'$ hafa nákvæmlega sömu líkönin, og ljóslega hafa þær einnig sömu samsemdarlíkönin.

(2) Samsemdarlíkön fyrir kenningarnar $\mathcal{A}_1$ og $\mathcal{A}_2$ úr dæmi (2) í (II.3.12) eru víxlgrúpur.

(3) Samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{H}$ í dæmi (3) í (II.3.12) er hálfgrúpa, samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{E}$ í sama dæmi er hálfgrúpa með hlutleysu, öðru nafni einungur, og samsemdarlíkön fyrir kenningarnar $\mathcal{G}_1$ og $\mathcal{G}_2$ í sama dæmi eru grúpur.

(4) Samsemdarlíkan fyrir kenninguna $\mathcal{R}$ í dæmi (4) í (II.3.12) er baugur.

Jafngildar kenningar hafa sama málið og sömu setningarnar. Því er ljóst:

(1.15) Setning. *Jafngildar kenningar hafa sömu líkönin. Jafngildar samsemdarkenningar hafa sömu samsemdarlíkönin.* □

Einnig er ljóst:

(1.16) Setning. *Ef $\mathcal{T}'$ er útvíkkun kenningar $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar og M' er líkan fyrir kenninguna $\mathcal{T}$, þá fæst líkan M fyrir kenninguna $\mathcal{T}$ með því að setja $|M| := |M'|$ og sleppa úr líkaninu M' öllum föllum og venzlum sem tilheyra táknum sem eru í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T}')$ en ekki í málinu $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.* □

§2. Fullkomleikasetningin

Eðlilegt er að spyrja: Hvenær hefur kenning fyrstu stéttar líkan? Augljóst nauðsynlegt skilyrði er að hún sé samkvæm, því að fyrir yrðingu $\mathbf{A}$ á máli kenningarinnar geta yrðingarnar $\mathbf{A}$ og $\neg\mathbf{A}$ ekki verið sannar í sama mynztrinu fyrir málið. (Athugum að af setningu (I.5.33) er ljóst að kenning fyrstu stéttar er samkvæm þá og því aðeins að hún sé samkvæm með tilliti til neitunar.)

Það er merkileg staðreynd að þetta nauðsynlega skilyrði er einnig nægjanlegt:

(2.1) Setning. *Sérhver samkvæm kenning fyrstu stéttar hefur líkan.*

Þetta er ein útgáfan af svokallaðri *fullkomleikasetningu.* Áður en við sönnum hana sýnum við að hún hefur eftirfarandi afleiðingu:

(2.2) Fullkomleikasetning Gödels. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar á máli $\mathcal{L}$. Yrðing á málinu $\mathcal{L}$ er setning í kenningunni $\mathcal{T}$ þá og því aðeins að hún sé sönn í sérhverju líkani fyrir $\mathcal{T}$.*

Sönnum fyrst einfalda hjálparsetningu:

(2.3) Hjálparsetning. *Lokuð yrðing $\mathbf{A}$ á máli kenningar $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar er setning í kenningunni $\mathcal{T}$ þá og því aðeins að kenningin $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}]$ sé ósamkvæm.*

Sönnun: Ef $\mathbf{A}$ er setning í kenningunni $\mathcal{T}$, þá eru yrðingarnar $\mathbf{A}$ og $\neg\mathbf{A}$ báðar setningar í kenningunni $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}]$, svo að $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}]$ er ósamkvæm. Ef á hinn bóginn kenningin $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}]$ er ósamkvæm, þá er yrðingin $\mathbf{A}$ setning í kenningunni $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}]$, sem þýðir að $\neg\mathbf{A} \vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$. Þar sem yrðingin $\mathbf{A}$ er lokuð er $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ samkvæmt afleiðslusetningunni. En $\vdash_{\mathcal{T}} (\neg A \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ samkvæmt sísönnusetningu, svo að $\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A}$ samkvæmt **MP**. $\square$

(2.4) Athugasemd. Lesandinn getur með einföldum dæmum sannfært sig um að ekki er unnt að sleppa þeirri forsendu í hjálparsetningu (2.3) að yrðingin $\mathbf{A}$ sé lokuð.

Við sýnum nú að fullkomleikasetning Gödels er afleiðing af setningu (2.1):

Sönnun setningar (2.2)*:* Sérhver setning í kenningu $\mathcal{T}$ fyrstu stéttar er sönn í sérhverju líkani fyrir $\mathcal{T}$ samkvæmt skilgreiningu á líkani. Gerum því ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé yrðing á máli kenningarinnar $\mathcal{T}$ sem er ekki setning í $\mathcal{T}$ og látum $\mathbf{A}'$ vera lokun yrðingarinnar $\mathbf{A}$. Þá er $\mathbf{A}'$ ekki heldur setning í $\mathcal{T}$. Samkvæmt hjálparsetningu (2.3) er kenningin $\mathcal{T}[\neg\mathbf{A}']$ samkvæm og hefur þá samkvæmt setningu (2.1) líkan M. En þá er M einnig líkan fyrir kenninguna $\mathcal{T}$ þannig að yrðingin $\neg\mathbf{A}'$ sé sönn í líkaninu M, og þá hlýtur yrðingin $\mathbf{A}'$ og þar með einnig yrðingin $\mathbf{A}$ að vera ósönn í líkaninu M. $\square$

Við getum einnig orðað fullkomleikasetningu Gödels þannig:

(2.5) Fylgisetning. *Látum $\mathcal{T}$ vera kenningu fyrstu stéttar á máli $\mathcal{L}$. Fyrir yrðingu $\mathbf{A}$ á málinu $\mathcal{L}$ gildir*

$$\vdash_{\mathcal{T}} \mathbf{A} \quad \text{þá og því aðeins að} \quad \models_{\mathcal{T}} \mathbf{A}. \qquad \square$$

Þá liggur næst fyrir að sanna setningu (2.1).