1 Inngangur og Táknmál

Teiknanlegir punktar

Skilgreining (Teiknanlegir punktar [18].)**.** G.r.f. að við höfum gefna punkta $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$. Við getum útfrá þeim teiknað fleiri punkta með hringfara og reglustiku; við köllum þá *punkta teiknanlega útfrá punktunum* $A_1, \ldots, A_n$ eða til einföldunar *teiknanlega punkta.* Við segjum að mengi teiknanlegra punkta sé *mynd* (e. geometric construction).

Teiknanlegir punktar

Skilgreining (Teiknanlegir punktar, aðgerðir og nafngiftir [18])**.**

(I) Að kalla punktana $A_1, \ldots, A_n$ *teiknanlega.*

(II) Að teikna línu gegnum tvo ólíka teiknanlega punkta og köllum hana teiknanlega línu.

(III) Að teikna hring með miðju í teiknanlegum punkti sem fer í gegnum annan

(IV) Að bæta við teiknanlegu punktanna skurðpunkti tveggja teiknanlegra lína sem eru ekki samsíða.

(V) Að bæta við teiknanlegu punktana skurðpunktum teiknanlegrar línu við teiknanlegan hring (ef til eru).

(VI) Að bæta við teiknanlegu punktana skurðpunktum tveggja teiknanlegra ósammiðja hringja (ef til eru).

Aðgerðir

Athugasemd. Það sem við köllum “myndina” er í raun mengi punkta. Því er reglulegur þríhyrningur teikning í þeim skilningi að það eru 3 punktar sem allir eru jafn langt frá hvorir öðrum.

Einnig sjáum við að aðeins aðgerðir (IV)-(VI) bæta punktum við myndina, og því má teikna allar teiknanlegar myndir ef hægt er að framkvæma aðgerðir (IV)-(VI).

Við leyfum okkur aðeins endanlega margar aðgerðir, og tökum ekki í mál að “nálgast” punktinn, heldur verður hann að passa alveg.

Teiknanlegur punktur er því punktur sem hægt er að fá útfrá teiknanlegum punktum með endanlegum fjölda aðgerða.

Skilgreining (Táknmál)**.**

- Táknum hring með miðju í teiknanlegum punkti A sem fer í gegnum teiknanlegan punkt B með AB

- Táknum hring með miðju í teiknanlegum punkti A með geisla r með $A|r$.

- Táknum línu sem liggur í gegnum tvo ólíka teiknanlega punkta A og B með A-B

- Táknum strikið milli tveggja ólíkra teiknanlegra punkta A og B með AB. Við segjum að $AB = CD$ ef lengd strikana AB og CD er sú sama.

Skilgreining (Táknmál, framhald)**.**

- Látum A og B vera ósamsíða ólíkar línur. Táknum með $A + B$ skurðpunkt línanna.

- Látum AB vera hring og C-D vera línu. Táknum með $AB + C\text{-}D = C\text{-}D + AB$ fyrri skurðpunktinn sem maður rekst á ef maður teiknar hringinn rangsælis með því að byrja í B, en með $AB * C\text{-}D = C\text{-}D * AB$ fyrri skurðpunktinn sem maður rekst á ef maður teiknar hringinn réttsælis með því að byrja í B (ef til eru). Athugum að þegar við byrjum í B, þá teljum við B ekki með fyrr en komið er heilan hring (ef ske skyldi að hann sé einn skurðpunktanna.)

Skilgreining (Táknmál,framhald)**.**

- Látum AB, CD vera ósammiðja hringi. Táknum með $AB + CD$ fyrri skurðpunktinn sem maður rekst á ef maður teiknar AB rangsælis með því að byrja í B, en með $AB * CD$ fyrri skurðpunktinn sem maður rekst á ef maður teiknar AB réttsælis með því að byrja í B.

Athugasemd. $AB + CD = CD * AB$ og $CD + AB = AB * CD$ fyrir alla ósammiðja hringi AB, CD

2 Mohr-Mascheroni setningin

Mohr-Mascheroni setningin

Setning (Mohr-Mascheroni setningin [3])**.** *Sérhverja mynd sem teikna má með hringfara og reglustiku má teikna með hringfara einum saman. Það er, mengi allra punkta sem eru teiknanlegir með reglustiku og hringfara er það sama og mengi þeirra punkta sem teiknanlegir eru með hringferli einum saman.*

Mohr-Mascheroni setningin var fyrst sett fram og sönnuð af dananum Jørgen Mohr (Georg Mohr) (1640-1697) árið 1672, í bók hans *Euclidus Danicus*, eða

"Danski Evklíð". Bókin féll fljótt í gleymsku (að menn telja vegna þess að hún var skrifuð á dönsku), en fannst aftur og var endurútgefin árið 1928.

Hún var svo sönnuð aftur 125 árum síðar, en það var Lorenzo Mascheroni sem sannaði hana þá.

Mohr-Mascheroni setningin

Athugum að við getum gert (VI) (fundið skurðpunkta tveggja hringja) beint með hringfara, en við látum línu vera gefna með tveimur punktum. Við þurfum því að sýna að gera megi (IV) (finna skurðpunkt tveggja lína) og (V) (finna skurðpunkta hrings og línu) með hringfara einum saman. Til þessum þurfum við að smíða frá grunni smíðir sem við getum svo notað til að búa til flóknari smíðir, sem við vonumst svo til þess að geta notað til að gera (IV) og (V). Sönnun þessi er fengin frá Norbert Hungerbuhler [15].

Skurðpunktur línu og hrings

Við skulum byrja á því að sanna hvernig finna má skurðpunkt línu og hrings með hringfara einum saman. Við skiptum þessu upp í tvö tilfelli:

(i) Línan liggur ekki í gegnum miðju hringsins.

(ii) Línan liggur í gegnum miðju hringsins

Við byrjum á að sanna (i).

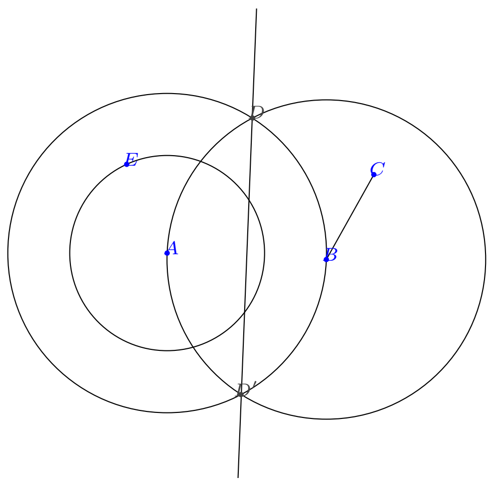
Til þess að geta sýnt (i), þurfum við að byrja á að búa til eftirfarandi smíð:

Hringfarasmíð 1 (Speglun punkts um línu [15]). *Látum M vera punkt sem er ekki á línunni og P_1-P_2 vera línu. Þá getum við speglað M um línuna með því að finna $X = P_1M + P_2M$ og $Y = P_1M * P_2M$ og velja M' þ.a. M' sé sá af punktunum X, Y sem er ekki M. Þá er M' speglun M, þar sem P_1MP_2 og $P_1M'P_2$ eru jafnarma þríhyrningar.*

Ath: Ef $X = Y = M$, þá er M á línunni.

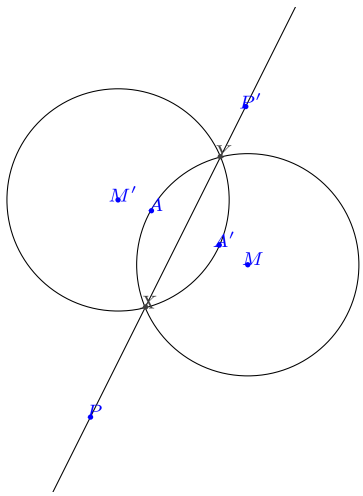
Hringfarasmíð 2 (Jafnarma þríhyrningur [16]). *G.r.f að við höfum gefna tvo punkta A og B. Þá má finna punkt C þ.a. $\{A, B, C\}$ sé jafnarma þríhyrningur (þ.e. $AB = BC = CD$) Látum $C = AB + BA$ (eða $C = AB * BA$). Þá er A, B og C jafnarma þríhyrningur.*

Hringfarasmíð 3 (Færsla lengdar [2])**.** *Látum punkt A punkt og strik BC vera gefið. Þá getum við fundið $D = (AB) + (BA)$ og $D' = (AB) * (BA)$. Við speglum svo punktinum C um línuna D-D' með smíð 1 og köllum E. Athugum að A er speglun B um D-D', en þar sem speglun varðveitir fjarlægðir, þá er $AE = BC$, og því getum teiknað hring með geisla BC með miðju í A með því að teikna hringinn AE. (sjá mynd 1)*



Mynd 1: Færsla lengdar.

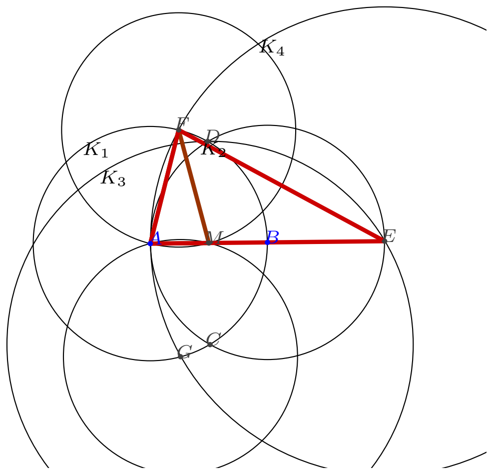
Hringfarasmíð 4 (Skurðpunktar hrings við línu ef línan fer ekki í gegnum miðju hringsins [15])**.** *Látum hring (MA) og línu P_1-P_2 vera gefna þ.a. M liggi ekki á línunni. Látum nú M' vera speglun á M um línuna P_1-P_2. Við teiknum svo hring $M'A'$ sem hring með miðju í M' og geisla MA. Þá er $X = (MA) + (M'A')$ og $Y = (MA) * (M'A')$ skurðpunktar hringsins (MA) við línuna. (Sjá mynd 2)*



Mynd 2: Skurðpunktur línu og hrings (i)

En við höfum þá fundið skurðpunkt hrings og línu ef miða hringsins liggur ekki á línunni. Til þess að geta sannað (ii), þá þurfum við nokkrar smíðir í viðbót.

Hringfarasmíð 5 (Miðpunktur striks [15]). *Látum* $K_1 = (AB)$ *og* $K_2 = (BA)$. *Finnum nú* $D = (AB) + (BA)$ *og* $C = (AB) * (BA)$ *Látum nú* $K_3 = (CD)$ *Finnum svo* $E = (CD) * (BA)$. *Þá er* B *miðpunktur* AE. *Látum nú* $F = (EA) + (AB)$ *og* $G = (EA) * (AB)$. *Þá er* $M = (FA) + (GA)$ *miðpunktur striksins* AB, *þar sem* $\Delta FAM \sim \Delta EFA$ *eru einslaga þríhyrningar með hlutföll* $1 : 2$. *(sjá mynd 3)*



Mynd 3: Miðpunktur striks

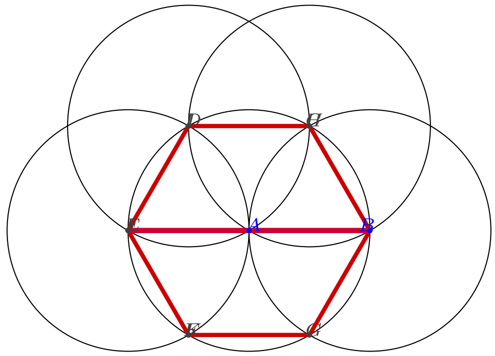
Hringfarasmíð 6 (Tvöföldun lengdar [16])**.** *Gefum okkur tvo punkta, A og B. Látum*

$$C = AB * BA, D = AB + CB, E = AB + DB,$$

$$F = AB + EB, G = AB + FB$$

Þá mynda punktarnir $\{A, C, D, E, F, G\}$ *jafnarma sexhyrning, en sér í lagi er lengd striksins* AE *tvöföld lengd striksins* AB*. (sjá mynd 4).*

Athugm að með því að tvöfalda lengdina BE*, þá getum við fundið punkt* H *þ.a.* AH *sé þreföld lengd* AB *o.s.frv.*

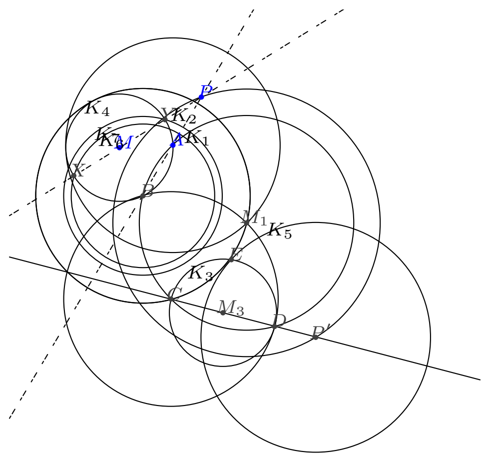


Mynd 4: Jafnarma sexhyrningur

Hringfarasmíð 7 (Skurðpunktar hrings og línu í gegnum miðju hringsins [15]). *Látum línu M-P vera gefna Látum $K = MA$ vera hring með miðju M og punkt A vera á hringnum. Við megum g.r.f að A sé ekki á línunni (annars finnum við annan punkt á hringnum, t.d. með smíð 2). Finnum nú $P = MA + P\text{-}A$ með smíð 4 (vitum að þar sem A er ekki á línunni, þá er P-A ekki lína í gegnum miðju hringsins). Látum nú M_1 vera miðju hrings sem fer í gegnum A og B með geisla sem er meiri en $R = MA$ (getum t.d. þrefaldað lengdina MA með smíð 6, teiknað svo hring með miðju í A og B og fundið skurðpunkt þeirra.) Veljum svo punkt $C = BM_1 * M_1A$ á hringnum M_1A, og finnum svo D sem skurðpunkt hringsins M_1A og hrings með miðju í C og geisla $2R$ (sem við getum fundið með tvöföldun lengdar og svo fært í C). Finnum nú $P' = M_1P + C\text{-}D$ með smíð 4. Látum nú M_3 vera miðpunkt striksins CD sem við finnum með smíð 5. Látum nú E vera punkt á K_3 þ.a. $P'E = PB$ þar sem K_5 er hringur með miðju í P' og geisla PB. Látum nú K_6 vera hring með miðju í B og geisla EC og K_7 vera hring með miðju í B og geisla ED. Látum nú X vera þann skurðpunkt K_6 og M-P sem liggur á K og Y vera þann skurðpunkt K_7 og M-P sem liggur á K Þá eru X og Y skurðpunktar M-P við K. (sjá mynd 5)*

Þetta fæst út frá því að $PX \cdot PY = PA \cdot PA = P'C \cdot P'D$ skv. reglu Eulers um sniðla sem skerast, en hún segir að ef tveir sniðlar hring skerast fyrir utan hringinn, þá er margfeldi hluta þeirra jöfn, en maður beiti því fyrst á MA og svo á M_3C.

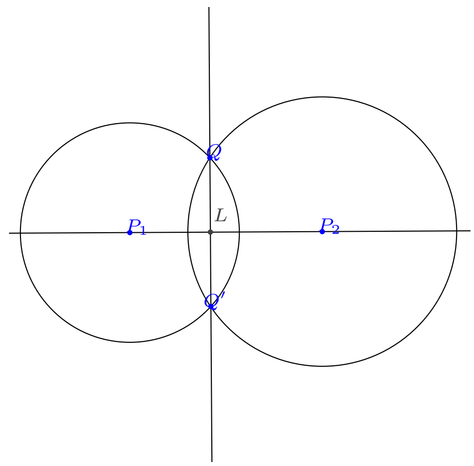
Því eru punktarnir P, Y, M, X og B og P', D, M_3, C og E einslaga skv. smíð. Því eru X og Y fundir eins og sýnt var.



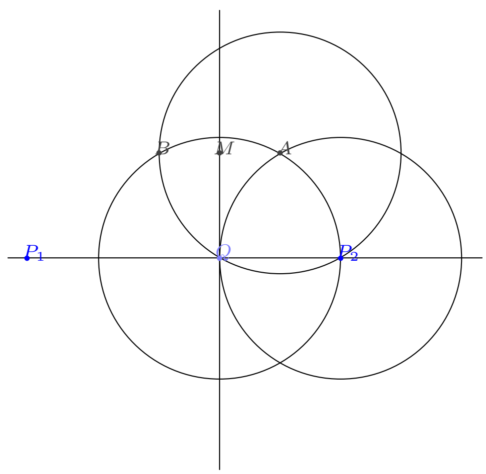
Mynd 5: Skurðpunktar hrings og línu í gegnum miðju hans

En þar með höfum við sannað (i) og (ii) og getum því fundið skurðpunkta hrings og línu. Við þurfum því næst að sanna að við getum fundið skurðpunkt tveggja lína.

Hringfarasmíð 8 (Skurðpunktur línu og þverils hennar gegnum gefinn punkt [15])**.** *Látum P_1-P_2 vera línu Q punkt. Við finnum þá punkt Q' með því að spegla Q um P_1-P_2 með smíð 1. $Q - Q'$ er þá þverill $P_1 - P_2$. Við finnum svo L, miðpunkt striksins Q-Q' með smíð 5, en hann liggur á bæði Q-Q' og P_1-P_2 og er því skurðpunktur þverilsins Q-Q' og P_1-P_2 (sjá mynd 6)*



Mynd 6: Skurðpunktur línu og þverils hennar gegnum gefinn punkt.



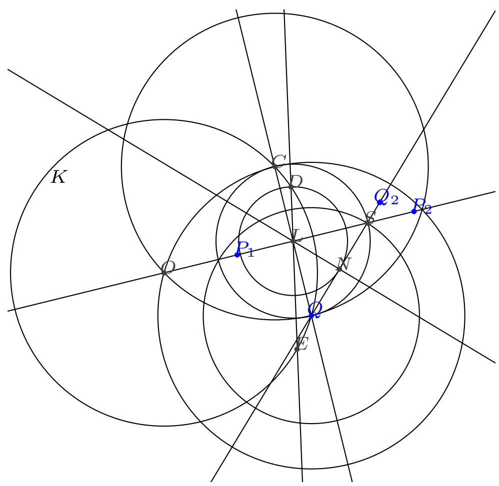
Mynd 7: Skurðpunktur línu og þverils hennar gegnum gefinn punkt á línunni.

Athugum nú hvað gerist þegar við erum með línur sem eru ekki hornréttar hvor á aðra (sjá mynd 8). Það gerum við með því að finna lengdina l frá Q_1 til S, þ.e. lengdina frá einum punkti á strikinu til skurðpunktsins, en það gerum við í smíð 10.

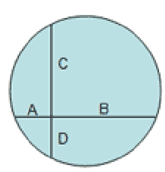
Hringfarasmíð 9 (Skurðpunktur tveggja lína [15])**.** *Nú getum við búið til hring H með miðju í Q_1 og geisla ℓ þar sem ℓ er fundin með smíð 10, en við færum lengdina frá punktunum L, E yfir í Q_1 með smíð 3, en þá er S skurðpunktur H og Q_1-Q_2 (sem við fáum úr smíð 7). Þá er S skp. Q_1-Q_2 og P_1-P_2.*

Finnum nú lengdina ℓ:

Hringfarasmíð 10 (Lengd frá punkti á striki til skurðpunkts þess við annað strik [15]). *Sjá mynd 8. Við byrjum á að tvöfalda lengdina Q_1L þ.a. $Q_1C = 2Q_1L$ með smíð 6. Látum nú K vera hring sem er nógu stór (getum tvöfaldað gefnu lengdina þangað til að það dugir) sem fer í gegnum Q_1 og C (með því að finna skurðpunkt hringja með geisla sem er nógu stóra lengdin og með miðjur í Q_1 og C) og látum D vera punkt á K þ.a. $LD = Q_1N$ (finnum skurðpunkt hringsins með miðju í L og geisla Q_1N). Látum nú E vera skurðpunkt LD og K. Þá er lengd LE ℓ. Lengd LE er ℓ, þar sem $(Q_2L)^2 = Q_1L \cdot LC = LD \cdot LE = Q_1N \cdot LE$ skv. reglu Eulers um strengi í hring sem skerast, en hún segir að ef strengir í hring skerast, þá er margfeldi hluta þeirra jöfn. (Sjá mynd 9).*



Mynd 8: Skurðpunktur tveggja lína



Mynd 9: Regla Eulers um strengi hrings sem skerast segir að $A \cdot B = C \cdot D$ [11]

Sönnun á Mohr-Mascheroni setningunni. Með því að nota smíðir 7, 4, 8 og 9, getum við fundið bæði skurðpunkta hrings og línu og skurðpunkta tveggja lína með hringfara einum saman. Við vitum að við getum fundið skurðpunkta tveggja hringja með hringfara einum saman, og það eru einu aðgerðirnar sem bæta við teiknanlegum punktum. Því er sérhver mynd sem er teiknanleg með hringfara og reglustiku teiknanleg með hringfara einum saman. **Q.E.D**

3 Poncelet-Steiner setningin

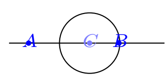
Poncelet-Steiner setningin

Setning (Poncelet-Steiner setningin)**.** *Sérhverja rúmfræðilega mynd sem teikna má með hringfara og reglustiku má teikna með reglustiku einni saman, að því gefnu að einn hringur og miðja hans sé gefin.*

Athugið að við þurfum að hafa gefna miðju hringsins. Síðar var sannað að við þurfum ekki hring, heldur dugar okkur bogi með gefinni miðju. Í teikningum með reglustiku telst hringur gefinn ef við vitum miðju hans og geisla.

Svo virðist sem Steiner hafi gefið sér að hann mætti velja punkt af handahófi á þeim línum sem hann hefur nú þegar teiknað og hringnum.

Athugum að ef allir punktarnir sem við fáum gefnir liggja á línunni, þá getum við ekki bætt við neinum punktum sem liggja ekki á línunni með reglustiku einni saman. Því verðum við annaðhvort að hafa að punktarnir liggi ekki allir á sömu línunni, eða að við megum velja okkur punkt af handahófi (og þá punkt sem er ekki á línunni á hringnum) á þeim hlutum sem við höfum þegar teiknað. Við komum okkur því saman um að það megi.



Mynd 10: Ekki er hægt að teikna þveril línunnar $A-B$ gegnum A

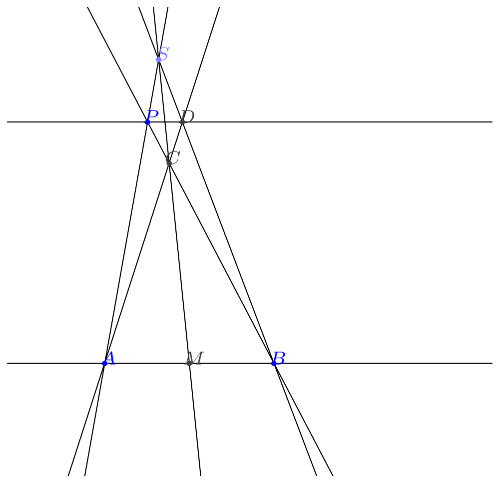
Reglustiku og fast hringssmíð 1 (Lína samsíða gefinni stefndri línu gegnum gefin punkt P)**.** *Tveir punktar A og B og miðpunktur þeirra M á gefnu línunni sé þekktir. Köllum þetta stefnda beina línu. Teiknum $A-P$ og látum S vera punkt á $A-P$ hinumegin við $B-P$.*

Teiknum nú $S-M$ og $B-S$. Látum $C = B-P+S-M$. Ef við teiknum svo línu $A-C$, þá sker hún $B-S$ í $D = B-S+A-O$, en þá er línan $P-D$ samsíða $A-B$.

$P-D$ og $A-B$ eru samsíða, þar sem setning Ceva [4] um þríhyrninga segir að þar eð hornalínurnar liggja allar gegnum sameiginlegan punkt C, þá er

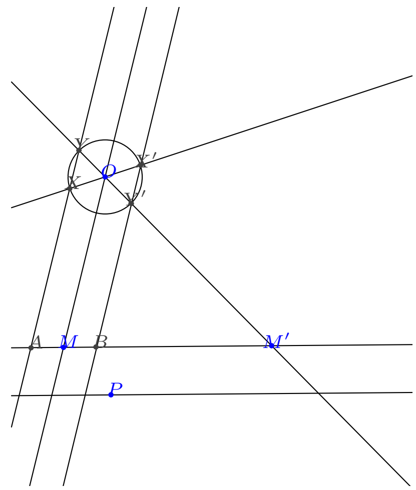
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DS} \cdot \frac{SP}{PA} = 1,$$

og þar sem $\frac{AM}{BM} = 1$, þá er $\frac{BD}{DS} = \frac{PA}{SP}$ svo $\frac{BS}{DS} = \frac{AS}{PS}$. Því er $\Delta ABS \equiv \Delta PDS$ og $P-Q$ því samsíða $A-B$ (því $\angle ABS = \angle PDS$).



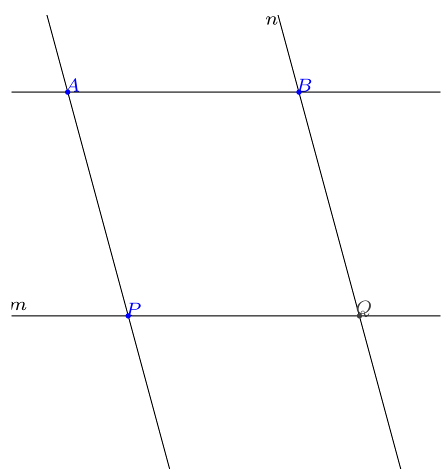
Mynd 11: Lína samsíða gefinni línu með gefnum miðpunkt gegnum gefinn punkt.

Reglustiku og fast hringssmíð 2 (Lína samsíða gefinni línu gegnum gefinn punkt)**.** *Látum $M - M'$ vera línuna og $K = O|r$ vera fasta hringinn og P vera gefna punktinn ekki á $M - M'$. Teiknum nú $M - O$ og látum Notum svo smíð 1 til þess að finna línu samsíða $M - O$ Í gegnum punkt á hringnum Y (sem við getum fundið m.þ.a. nota M' eða P) Táknum skurðpunkt $X - Y$ og $M - M'$ með A. Finnum nú X' og Y' sem skurðpunkta $X - O$ við hringinn og $Y - O$. Teiknum nú línu X' og Y' og látum B vera skurðpunkt $X' - Y'$ við l. Þá er $AM = BM$ og því eru A og B punktar á línunni $M - M'$ með miðpunkt M, en þá getum við notað smíð 1 til að teikna línu samsíða henni gegnum P. Athugum að ef O er á línunni $M - M'$, þá getum við notað O og skurðpunkta K við $M - M'$ í stað A, B og M og fengið sömu niðurstöðu.*



Mynd 12: Lína samsíða gefinni línu gegnum gefinn punkt

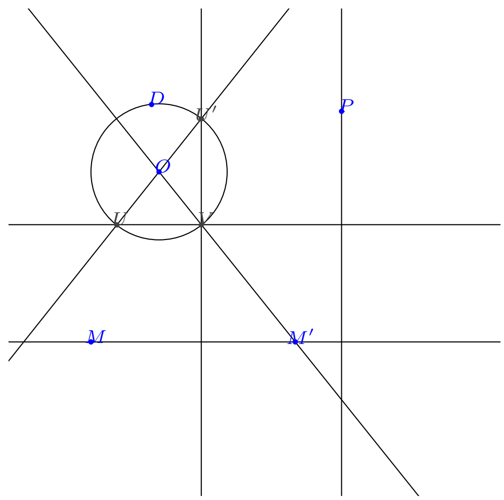
Fylgismíð (Færsla gefinnar lengdar í gefinn punkt)**.** *Látum AB vera gefna lengd og P vera gefinn punkt. Við getum notað smíð 2 til að teikna línu m samsíða $A-B$ í gegnum P. Við getum einnig notað smíð 2 til að teikna línu n samsíða $A-P$ í gegnum B. Látum Q vera skurðpunkt l og n. Þá er $PQ = AM$. Sjá mynd 13*



Mynd 13: Færsla lengdar

Reglustiku og fast hringssmíð 3 (Þverill línu gegnum gefinn punkt)**.** *Viljum teikna þveril línu l gegnum punkt P. Teiknum l' með smíð 2 þ.a. hún skeri fasta hringinn K í U og V. Teiknum svo strenginn $U-O$ og látum U' vera skurðpunkt hans og hringsins K.*

Þá er línan $V - U'$ þverill á l, en við getum svo notað smíð 2 til teikna línu samsíða $V - U'$ í gegnum P. Hann er þá þverill á l gegnum punkt P skv. reglu Þalesar [5].

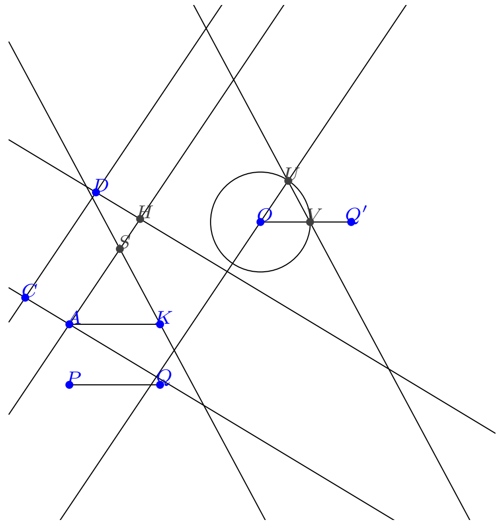


Mynd 14: Þverill gefinnar línu gegnum gefinn punkt.

Reglustiku og fast hringssmíð 4 (Strik af gefinni lengd í gefna átt frá gefnum punkti)**.** *Látum PQ vera gefna lengdin, A vera gefna punktinn og $C - D$ vera gefna áttin.*

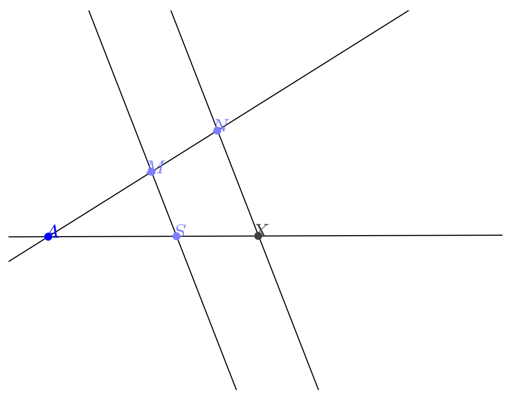
Byrjum á að gera línu samsíða $C-D$ í gegnum A, og köllum þá línu $A-H$. Beitum svo fylgismíðinni og skrifum strik af lengd PQ út frá A, og köllum hinn endapunktinn (ekki A K.

Teiknum svo línu samsíða $C - D$ í gegnum fasta hringinn, og látum skurðpunkt hringsins við línuna vera U. Gerum slíkt hið sama við $P - Q$ og táknum skurðpunkt hringsins við hringinn með V. Teiknum svo línuna $U-V$. Teiknum svo línu samsíða $U - V$ í gegnum K og finnum skurðpunkt hennar við $A - H$ með S. Þá er $A - S$ samsíða $C - D$ af lengd PQ.



Mynd 15: Færsla gefinnar lengdar í gefna átt

Reglustiku og fast hringssmíð 5 (Finnum hlutfallið milli gefinna lengda n,m og s, x = $\frac{n}{m}s$)**.** *Teiknum tvo geisla út frá A og notum smíð 4 til þess að merkja lengdir* $AM = m, AN = n$ *á* AB *og* $AS = s$ *á* AC *(sjá mynd 16). Teiknum svo* $M - S$*, og teiknum svo línu samsíða* $M - S$ *í gegnum* N*. Látum* X *tákna skurðpunkt hennar við* $A - C$*. Þá er* $AX = x = \frac{n}{m}s$ *skv. reglu um einslaga þríhyrninga.*



Mynd 16: Hlutfall milli gefinna lengda

Reglustiku og fast hringssmíð 6 (Gefnar lengdir a og b, smíða á $\sqrt{ab}$)**.** *Látum* $x = \sqrt{ab}$*, d vera þvermál fasta hringsins c og* $t = a + b$*, en finna má t með því að beita smíð 4.*

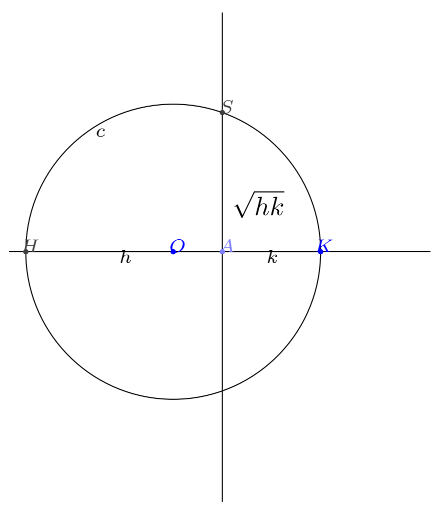
Látum $h = \frac{d}{t}a$*,* $k = \frac{d}{t}b$ *og* $s = \sqrt{hk}$*. Þá er* $x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \cdot \frac{tk}{d}} = \frac{t}{d}s$

Athugum að $h + k = d$, svo við getum búið til strik af lengd $HA = h$ á miðlínu HK í hring c, en þá er $AK = k$. Notum smíð 3 til að búatil þverill á HK í gegnum A og köllum skurðpunkt þverilsins við hringinn S.

Þá er $AS = \sqrt{hk}$, þar sem við höfum frá fyrirlestri Benedikts (og Pýþagórasi að)

$$
\begin{aligned}
AS^2 + OA^2 &= OS^2 \\
\Leftrightarrow AS^2 + \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow AS^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + dk - k^2 \\
\Leftrightarrow AS^2 &= hk + k^2 - k^2 \\
\Leftrightarrow AS^2 &= hk \\
\Leftrightarrow AS &= \sqrt{hk}
\end{aligned}
$$

En þá höfum við fundið lengdirnar t, d og s, en þá má beita smíð 5 til að finna $x = \frac{t}{d}s$



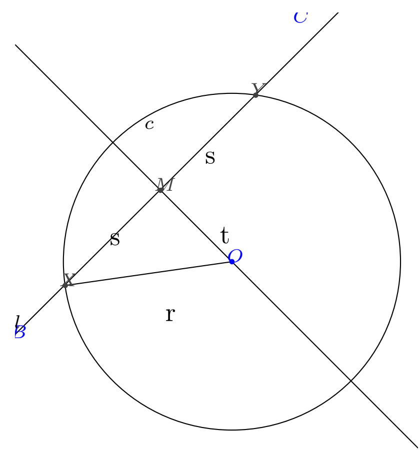
Mynd 17: Finnum $\sqrt{hk}$.

Reglustiku og fast hringssmíð 7 (Skurðpunktar línu og hrings)**.** *Látum ℓ vera gefnu línuna og $c = O|r$ vera gefna hringinn. Við þurfum að finna X og Y, skurðpunkta ℓ og $O|r$.*

Látum $2s$ vera lengd XY, M vera miðju XY og t vera fjarlægðina OM.

Myndum réttan þríhyrning ΔOMX, en þá gefur Pýþagóras að $s^2 = r^2 - t^2$, þ.e. $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$.

Þá getum við fundið t m.þ.a teikna þverill á ℓ í gegnum O með smíð 3. Við höfum r gefið, og með smíð 4 getum við fundið $r+t$ og $r-t$. Þá getum við beitt smíð 6 til þess að finna s, en þá getum við notað smíð 4 til að finna X og Y.



Mynd 18: Skurðpunktar hrings og línu

Reglustiku og fast hringssmíð 8 (Skurðpunktar tveggja hringja)**.** *Látum $c_1 = O_1|r_1$ og $c_2 = O_2|r_2$ vera gefnu hringina, og látum X og Y vera skurðpunkta þeirra (sem við eigum að smíða). Látum A vera skurðpunkt $X-Y$ við O_1-O_2. Látum $t = O_1O_2, q = O_1A$ og $x = XA$. Við þurfum að sýna að við getum smíðað lengdirnar q og x, en þá getum við notað 4 til að finna A, svo getum við notað 3 til að finna línuna $X-Y$, og svo 4 aftur til að búa til strik af lengd x í átt $X-Y$ til að finna X (og Y).*

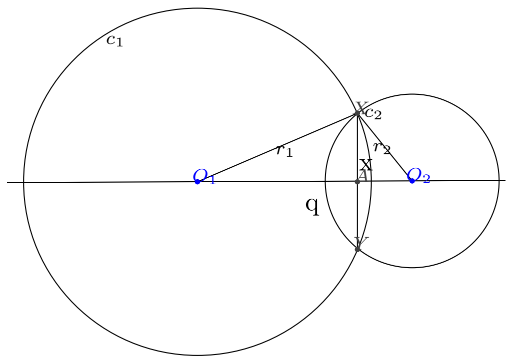
(i) Finnum q: Með því að nota kósínus regluna [6] á ΔO_1O_2X fáum við að

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 + t^2 - 2r_1 t\cos(\angle XO_1O_2) \\ &= r_1^2 + t^2 - 2t(r_1\cos(\angle XO_1O_2)) \quad (*) \\ &= r_1^2 + t^2 - 2tq \end{aligned}$$

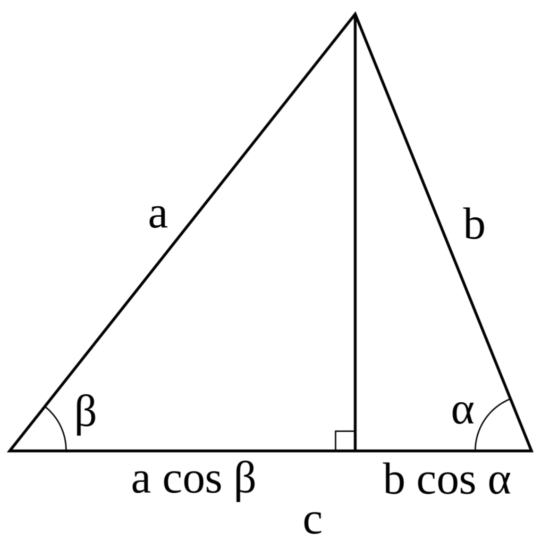
((∗) sjá mynd 20 frá Wikipediu [6]). Látum $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, en þá er $q = \frac{(d+r_2)(d-r_2)}{2t}$. d er langhlið rétthyrnds þríhyrnings með skammhliðar r_1 og r_2 er hægt að búa til með 3 og 4, og ef við látum svo $n = d + r_2$, $m = 2t$ og $s = d_2 - r_2$, þá eru þær lengdir allar smíðanlegar með 4 og $q = \frac{n}{m}s$ er smíðanleg með 5.

(ii) Finnum x: Athugum að ΔAO_1X mynda rétthyrndan þríhyrning, svo $x^2 = r^2 - q^2$, svo $x = \sqrt{r_1 + q}r_1 - q$. Með smíð 4 getum við búið til $h = r_1 + q$ og $k = r_1 - q$, en þá getum við notað smíð 6 til að finna $\sqrt{hk}$.

En með (i) og (ii) höfum við þá fundið q og x og getum þar með fundið X og Y.



Mynd 19: Skurðpunktar tveggja hringja.



Mynd 20: Útskýring á að $r_1 \cos(\angle XO_1O_2) = q$

Poncelet-Steiner setningin

Sönnun á Poncelet-Steiner setningunni. Með því að nota smíðir 7 og 8 getum við fundið skurðpunkta hrings og línu og skurðpunkta tveggja hringja með einum hring og reglustiku. Þar sem við getum þegar fundið skurðpunkt tveggja lína með reglustiku, þá getum við beitt öllum aðgerðunum sem bæta við teiknanlegum punktum. Því er sérhver mynd sem er teiknanleg með hringfara og reglustiku teiknanleg með reglustiku og einum hring. **Q.E.D**

4 Þrískipting horns og annað ómögulegt

Dæmi eru til um sléttumyndir sem ekki er hægt að mynda með einungis hringfara og reglustiku

- Þrískipting horns. Verkefnið felst í að mynda línur sem skipta gefnu horni í þrjú jafn stór horn. Sannað að það væri ekki hægt af Pierre Wantzel árið 1837 (með hjálp Galois fræði).
- Ferningun hrings. Verkefni felst í að búa til ferning sem hefur sama flatarmál og gefinn hringur. Ekki hægt, þar sem það krefst torræðar tölu ($\sqrt{\pi}$). (sjá sönnun hjá Jóni Áskeli síðar í samæfingum.)
- Tvöföldun tenings. Verkefnið felst í að búa til hlið fernings sem hefur tvöfalt rúmmál á við gefin tening. En það er ekki hægt, því ekki er hægt að mynda $\sqrt{3}2$ úr heilumtölum með samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu og kvaðratrótum.

Þó er hægt að þrískipta horni, ef við leyfum okkur reglustiku sem er merkt á tveimur stöðum. Til þess þurfum við þó fleiri smíðir.

Smíð 1 (Tvískipting horns [12]). *Látum horn $\angle PQR$ vera gefið. Finnum miðpunkt PQ með smíð 5 og köllum M. Teiknum hringinn QM og finnum skurðpunktinn $P_1 = Q\text{-}P + QM$ og skurðpunktinn $P_2 = Q\text{-}R + QM$ Finnum einnig skurðpunktinn $S_1 = Q\text{-}P + QP$ og skurðpunktinn $S_2 = Q\text{-}R + QP$ Þá er lengd striksins S_1P_1 sú sama og lengd striksins S_2P_2. Teiknum nú skurðpunkt hringjana $C = S_1P_1 + S_2P_2$. Þá helmingar línan $Q\text{-}C$ hornið $\angle PQR$.*

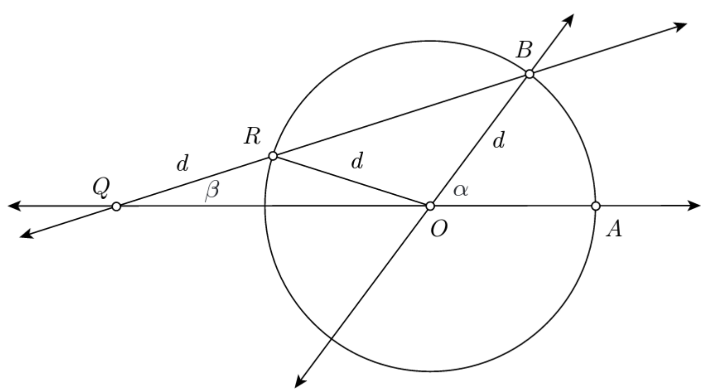
Við sjáum að með því að beita smíð 1, þá getum við breytt hvaða horni í summu hvassra horna. Við getum svo þrískipt hverju horni fyrir sig, og notað svo þær þrískiptingar til að mynda þrískiptingu upprunalega hornsins.

Smíð 2 (Þrískipting horns með tvímerktri reglustiku [13]). *Látum hvasst horn α með oddpunkt O vera gefið. Látum nú annað merki reglustikunnar í O og merkjum punkt D við hina merkinguna. Strikið $O\text{-}D$ hefur þá lengdina d. Teiknum* *nú hring $\bigcirc\!\!\!\!\!\!OD$. Finnum nú nú skp. arma hornsins við hringinn $\bigcirc\!\!\!\!\!\!OD$ og köllum þá A og B. Þá er $\alpha = \angle AOB$. Teiknum nú línuna OA.*

Látum nú reglustikuna þannig að önnur merkingin er á hringnum hinumegin við línuna O-B við A, og hin sömu megin á línunni O-A, og reglustikan fer í gegnum punkt B. Köllum þá R og Q. Látum nú $\beta = \angle RQO$. Þá er þríhyrningurinn ΔRQO jafnarma, þar sem $|RQ| = |RO|$. Því er $\angle ROQ = \beta$ og því er $\angle BRO = 2\beta$. Þar sem þríhyrningurinn ΔBRO er líka jafnarma, $\angle RBO = \angle BRO = 2\beta$. En þá er $\angle ROB = \pi - 4\beta$ (hornasumma þríhyrnings í radíönum er π). Með því að summera upp hornin í O fæst því að

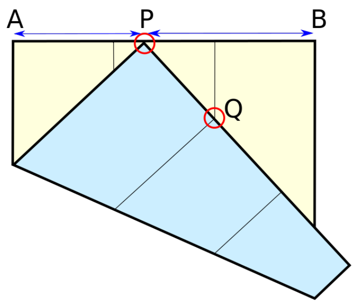
$$\beta + (\pi - 4\beta) + \alpha = \pi,$$

en það þýðir að $\alpha = 3\beta$

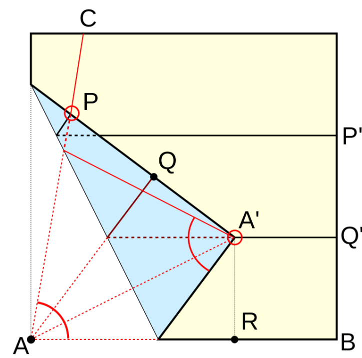


Mynd 21: Þrískipting horns með tvímerktri reglustiku

Vert er að nefna að með því að nota japönsk pappírsbrotslistina Origami [8], þá má tvöfalda teninginn og þrískipta horninu. Þar eru aðgerðirnar gefnar með Huzita-Hatori forsendunum [9].



(a) $PB/PA = \sqrt[3]{2}$



(b) Þrískipting hornsins CAB

Mynd 22: Tvöföldun tengingsins og þrískipting hornsins með Origami

5 Heimildir

Heimildir

[1] Wikipedia *Compass-and-straightedge construction.* `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Compass-and-straightedge_construction&oldid=642473603` Online; accessed 18-January-2015.

[2] Wikipedia *Compass-equivalence theorem.* `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Compass_equivalence_theorem&oldid=637959570` Online; accessed 29-January-2015.

[3] Wikipedia *Mohr-Mascheroni theorem.* `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mohr%E2%80%93Mascheroni_theorem&oldid=614723343` Online; accessed 20-January-2015.

[4] Wikipedia *Ceva's theorem.* `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ceva%27s_theorem&oldid=633406630` Online; accessed 30-January-2015.

[5] Wikipedia *Thales's theorem.* `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Thales%27_theorem&oldid=643678036` Online; accessed 30-January-2015.

[6] Wikipedia *Law of cosines.* `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Law_of_cosines&oldid=645015128` Online; accessed 1-Febuary-2015.

[7] Wikipedia *Poncelet-Steiner theorem.* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Poncelet%E2%80%93Steiner_theorem&oldid=614055164. Online; accessed 20-January-2015.

[8] Wikipedia *Mathematics of paper folding.* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematics_of_paper_folding&oldid=630113885. Online; accessed 1-Febuary-2015.

[9] Wikipedia *Huzita–Hatori axioms.* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita%E2%80%93Hatori_axioms&oldid=591740270. Online; accessed 1-Febuary-2015.

[10] Math Open Reference. *Intersecting Chord Theorem.* http://www.mathopenref.com/chordsintersecting.html. Online; accessed 28-January-2015.

[11] Math Open Reference. *Intersecting Secants Theorem.* http://www.mathopenref.com/secantsintersecting.html. Online; accessed 29-January-2015.

[12] Math Open Reference. *Bisecting an Angle.* http://www.mathopenref.com/constbisectangle.html. Online; accessed 28-January-2015.

[13] Arthur Baragar. *Constructions Using a Compass and Twice-Notched Straightedge.* The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 2 (Feb., 2002), pp. 151-164. http://www.jstor.org/stable/2695327.

[14] Michael Woltermann. *Steiner's Straight-edge Problem.* http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/34.pdf.

[15] Norbert Hungerbuhler. *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 8 (Oct., 1994), pp. 784-787. http://www.jstor.org/stable/2974536.

[16] Jørgen Mohr. *Euclidus Danicus.* Amsterdam: Van Velsen, 1672 (København: 1928).

[17] Evklíð. John Casey. *The First Six Books of the Elements of Euclid* www.gutenberg.org/ebooks/21076

[18] Reynir Axelsson. *Kafli um teiknanlega punkta úr bók um evklíðska rúmfræði.* Óútgefið.