Tegur- og Málfræði

Fyrirlestrarnótur

Matthías Páll Gissurarson

Vor 2015

Efnisyfirlit

Kafli 1

2015-01-05

1.1 Mengi: Ritháttur og upprifjun

Gefum okkur að til grundvallar liggi "hæfilega" stórt almengi.

- Fjölskylda af hlutmengjum í mengi M er vörpun $a : \Lambda \to \mathcal{P}(M)$. Skrifum í stað $a(\alpha)$ og táknum a með $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Λ kallast *stikamengi* fjölskyldunnar.

- $$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} := \{x \in M | x \in A_\alpha \text{ f. } \textit{öll } \alpha \text{ úr } \Lambda\}$$

- $$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} := \{x \in M | x \in A_\alpha \text{ f. } \textit{eitthvert } \alpha \text{ úr } \Lambda\}$$

- Fyrir $A \subseteq M$ setjum við
$$A^C = M \setminus A := \{x \in M | x \notin A\}$$
og köllum *fyllimengi* A (í M).

- Fyrir $A, B \subseteq M$ setjum við
$$B \setminus A := \{x \in B | x \notin A\} = B \cap A^C$$

- Fyrir $A, B \subseteq M$ kallast
$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
(s.s. bara þau stök sem eru í öðru hvoru, en ekki báðum) *samhverfur mismunur* A og B.

- *Reglur de Morgan*

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C$$

$$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C$$

- Fyrir $A \subseteq M$ skgr. við kennifall A:

$$1_A : M \to \mathbb{R}, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef } x \in A \\ 0 & \text{ef } x \notin A \end{cases}$$

  A

- Fyrir $A, B \subseteq M$ gildir $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$, $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$ og $1_{A^C} = 1 - 1_A$.

1.2 Firðrúm

Hlutmengi í firðrúmi er opið *þþaa* það sé sammengi af opnum kúlum. Sér í lagi er hlutmengi í $\mathbb{R}$ opið *þþaa* það sé sammengi af opnum bilum.

1.3 Riemann Darboux- heildið

er mjög þunglamalegt og hegðar sér illa m.t.t markgilda; runa af Riemann heildanlegum föllum getur hæglega stefnt (í sérhverjum punkti) á fall sem er ekki Riemann heildanlegt (stundum kallað einfaldlega samleitið).

Dæmi.

$$f : [0,1] \to R, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ef } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad |f = 1_{Q\cap[0,1]}.$$

$\mathbb{Q}$ er teljanlegt, svo að til er gagntækt fall $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$, þ.e.a.s. til er runa $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem sérhver ræð tala úr $[0,1]$ kemur nkvl. einu sinni fyrir. Setjum $A_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ og $f_n = 1_{A_n}$. Þá er $f_n \nearrow f$ og ljóst er að f_n-in eru Riemann heildanleg, en f ekki.

Hugmyndin er sú að stækka flokk heildanlegra falla þ.a. ekki f gildi.

Allar eðlilegar reiknireglur varðandi heildi gilda áfram.

Flokkurinn er mun þjálli m.t.t. ýmissa aðgerða, sérstaklega markgildistöku.

1.4 Núllmengi

1.4.1 Dæmi

i) Öll teljanleg hlutmengi í $\mathbb{R}$ eru Núllmengi: Ef $(x_n)_{n\geq 1}$ er upptalning á stökum teljanlegs mengis, þá er $A = \cup_{n\geq 1}[x_n, x_n]$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \ell([x_n, x_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

ii) $\ell(\emptyset) = \ell(]0,0[) = 0$, svo að $\emptyset$ er núllmengi.

Innskot

Setning. *Látum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vera alsamleitna tvinntalnaröð og $\sigma : \overbrace{\mathbb{N}}^{n\geq 1} \to \mathbb{N}$ vera gagntæka vörpun (umröðun). Þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ alsamleitin og $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Sönnun. Fyrir $N > 0$ er til $M > 0$ þ.a. $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subseteq \{1, \ldots, M\}$.

$$\sum_{n=1}^{N} \left|a_{\sigma(n)}\right| \leq \sum_{n=1}^{M} |a_n| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{< +\infty}$$

þar með er $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{\sigma(n)}\right|$ alsamleitin. Setjum nú fyrir öll $n \geq 1$ $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ og $T_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$. Okkur nægir að sýna að f. sérhvert $\epsilon > 0$ sé til n_0 þ.a. $|S_n - T_n| \leq \epsilon$ f. öll $n \geq n_0$.

Gefum okkur $\epsilon > 0$ og veljum N þ.a. $\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \epsilon$. Tökum svo n_0 þ.a. $\{1, \ldots, n\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_0)\}$. Þá styttast tölurnar $|a_n, \ldots, a_n|$ allar út í mismuninum $S_n - T_n$, og þar með $|S_n - T_n| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \epsilon$ ef $n \geq n_0$. $\square$

Setning (Umröðunarsetning Riemanns)**.** *Ef $\sum a_n$, þar sem a_n eru rauntölur er samleitin, en $\sum |a_n| = \infty$, þ.e. samleitin en ekki alsamleitin, og $L \in [-\infty, +\infty]$, þá er til gagntæk vörpun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sem hefur þann eiginleika að $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L$.*

Sönnun. Sleppt.

Lausleg útskýring:

$$a_n^+ \begin{cases} a_n & \text{ef } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ef } a_n < 0 \end{cases} \quad a_n^- \begin{cases} |a_n| & \text{ef } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{ef } a_n > 0 \end{cases}$$

Ef a_n er alsamleitin, þá er $\sum a_n = \underbrace{\sum a_n^+}_{\text{saml}} - \underbrace{\sum a_n^-}_{\text{saml}}$, en ef $\sum a_n$ er samleitin en ekki alsamleitin, þá eru $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ báðar ósamleitnar.

$\square$

Látum nú Λ vera eitthvað teljanlegt mengi og $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ vera fjölskylda af tvinntölum. Við segjum að summan $\sum_{\alpha\in\Lambda}$ sé alsamleitin ef til er gagntæk vörpun $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda$ þ.a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{\sigma(n)}\right| < +\infty$ (þ.e.a.s. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{\sigma(n)}\right|$ er alsamleitin). Táknum þá summuna með $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Skv. setn sem við vorum að sanna, þá er þessi eiginleiki óháður valinu á σ.

Æfing

Látum $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ eins og áður. Sýnið: Ef a_α er alsamleitin, þá gildir f. sérhvert $\epsilon > 0$ að til er endanlegt hlutmengi I í Λ sem uppfyllir

$$\left|\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha - \sum_{\alpha\in J}\right| < \epsilon$$

fyrir öll endanleg J þ.a. $I \subseteq J \subseteq \Lambda$.

Athugasemd. Út frá umröðunarsetningu fæst að samleitin röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sem breytist ekki við umraðanir er alsamleitin.

Takið eftir að summa $\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha$ er alsamleitin þþaa til sé $K > 0$ sem uppfyllir

$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha |a_\alpha| \le K$ f. öll endanleg $I \subseteq \Lambda$.

Lítum nú á tilfellið $(a_{m,n})_{(m,n)\in\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}_{\mathbb{N}^2}}$.

Ef $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$ er alsamleitin, þá er til $k > 0$ þ.a. $\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} |a_{m,n}| \le k$ f. öll M og N.

Þá er $\sum_{n=1}^{N} |a_{m,n}| \le k$ f. öll m og öll N. og því $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \le k$ og $\forall m$ og þar með $\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M} |a_{m,n}|\right) \le k$ f. öll M. Af því leiðir að $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|\right) \le k$ og þar með er $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|\right)$ alsamleitin.

1.5 Fyrri fyrirlestur

1.5.1

Sönnun. Gefum okkur $\epsilon > 0$. Fyrir hvert m veljum við runu $(I_k^n)_{k\geq 1}$ af bilum sem uppfyllir

$$N_n \subset \bigcup_{k\geq 1} I_k^n \text{ og } \sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k^n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

Veljum gagntæka vörpun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ og skrifum $(I_k^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ sem runu $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$ með hjálp σ, þ.e.a.s $J_j = I_k^n$

þþaa $\sigma(j) = (m, n)$.

Athugasemd. $N \subseteq \mathbb{R}$ er núllmengi ef fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til runa $(I_n)_n$ af bilum þ.a. $N \subseteq \bigcup I_n$ og $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) < \epsilon$.

□

Kafli 2

2015-01-07

Innskot

Þá gildir um öll M og N að $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}| \leq \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|)$, svo að $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$ er alsamleitin.

Sýnum að þá sé $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$.

Nú: Gefum okkur $\epsilon > 0$. Veljum M svo stórt að $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}) < \frac{\epsilon}{4}$.

Veljum svo N það stórt að $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{m,n}| < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$ fyrir $1 \leq m \leq M$.

Við gefum

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

þá fæst:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}) - \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}\right| \leq \left|\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}) - \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\right| + \underbrace{\left|\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} - \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

$$< \left|\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n})\right| + \left|\sum_{m=1}^{M}(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n})\right| + \frac{\epsilon}{2}$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \sum^{n} \frac{\epsilon}{2^{m+2}} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Hér líkur innskoti.

2.1

Sönnun á 2.1.1. Gefum okkur $\epsilon > 0$. Fyrir hvert m veljum við runu $(I_k^n)_{k\geq 1}$ af bilum sem uppfyllir

$$N_n \subset \bigcup_{k\geq 1} I_k^n \text{ og } \sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k^n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

Veljum gagntæka vörpun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ og skrifum $(I_k^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ sem runu $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$ með hjálp σ, þ.e.a.s $J_j = I_k^n$

þþaa $\sigma(j) = (m, n)$.

Athugasemd. $N \subseteq \mathbb{R}$ er núllmengi ef fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til runa $(I_n)_n$ af bilum þ.a. $N \subseteq \bigcup I_n$ og $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) < \epsilon$.

Ljóst er að $N = \bigcup_{n\geq 1} N_n \subseteq \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} I_k^n = \bigcup_{j\geq 1} J_j$ og skv. innskotinu hér að framan fæst þá að $\sum_{n=j}^{\infty} \ell(J_j) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k^n)) < \sum_{n=n}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$

□

Dæmi. Öll teljanleg hlutmengi í $\mathbb{R}$ eru núll mengi, en Cantor-mengið er dæmi um óteljanlegt núllmengi (sjá bls. 19 í bók og "mengi og firðrúm").

2.2

Athugasemd. 2.2.1: F. öll $A \subseteq \mathbb{R}$ gildir

- $m^*(A) \geq 0$
- Z_A er af gerðinni $]r, \infty]$ eða $[r, \infty]$.

Sönnun á setn 2.2.2. A er núllmengi þþaa fyrir sérhver $\epsilon > 0$ sé til runa af bilum $(I_n)_{n\geq 1}$ þ.a. $A \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n$ og $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) < \epsilon$ þþaa fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til tala x úr Z_A þ.a. $x < \epsilon$ þþaa $m^*(A) = \inf Z_A = 0$ □

Sönnun a setn 2.2.3. Sérhver run af bilum sem þekur B þekur líka A svo að $Z_A \subseteq Z_B$ og þar með $m^*(A) = \inf Z_A \leq \inf Z_B = m^*$ □

Æfing

(a) Látum $I_1, \dots, I_n$ vera rauntalna bil sem uppfylla $[a,b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n$. Sýnið að $b - a \le \ell(I_1) + \dots + \ell(I_n)$.

(b) Látum $(I_n)_{n\ge1}$ vera runu af bilum sem þekur óendanlegt bil I. Sýnið að $\sum_{n\ge1} \ell(I_n) = \infty$.

Sönnun á 2.2.4. Skv. (b) í æfingunni er niðurstaðan rétt ef I er ótakmarkað. Gerum því ráð fyrir að $\ell(I) < \infty$. Byrjum á tilfellinu $I = [a,b]$

Athugasemd. Ljóst er að $m^*(I) \le \ell(I)$ vegna þess að bilarunan $I_1 := I$ og $I_k = [0,0]$ fyrir $k \ge 2$ þekur I og $\sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k) = \ell(I) + 0 + \dots + 0 = \ell(I)$.

Sönnum því $\ell(I) \le m^*(I)$.

Gefum okkur $\epsilon > 0$. Þá er til bilaruna $(I_n)_{n\ge1}$ sem uppfyllir

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n\ge1} I_n \text{ og } 0 \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \le m^*([a,b]) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Látum a_n og b_n tákna vinstri og hægri endapunkta bilsins I_n og setjum $J_n :=]a_n - \frac{\epsilon}{2}, b_n + \frac{\epsilon}{2}[$. Þá er $I_n \subseteq J_n$ og $\ell(I_n) = \ell(J_n) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ og þar með $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \frac{\epsilon}{2}$. Af því sést svo að $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \le m^*([a,b]) + \epsilon$. Nú er $(J_n)_n$ opin þakning á $[a,b]$, svo að til er n_0 þ.a. $[a,b] \subseteq J_1 \cup \dots \cup J_{n_0}$ Skv. æfingunni fæst því að $\ell([a,b]) \le \sum_{n=1}^{n_0} \ell(J_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_m) \le m^*([a,b]) + \epsilon$.

Gerum nú næst ráð fyrir að $I =]a,b[$ og tökum eitthvert $\epsilon > 0$. Þá fæst:

$$\begin{aligned} \ell(]a,b[) &\le \ell([a + \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2}]) + \epsilon \\ &\le m^*([a + \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2}]) + \epsilon \\ &\underbrace{\le}_{2.2.3} m*(]a,b[) + \epsilon \end{aligned}$$

Loks fæst að fyrir $I = [a,b[$ eða $I =]a,b]$ að

$$\ell(I) = \ell(]a,b[) \le m^*(]a,b[) \underbrace{\le}_{2.2.3} m^*(I)$$

$\square$

Sönnun á 2.2.5. G.r.f. að $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < \infty$; annars er ekkert að sanna.

Gefum okkur $\epsilon > 0$. Fyrir sérhvert $n \geq 1$ er til runa af bilum $(I_k^n)_{k\geq 1}$ sem þekja E_n og uppfylla $\sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k^n) \leq m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Þá fæst

$$
\begin{aligned}
m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &\leq \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_k^n) \underbrace{=}_{\text{innskot}} \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty} \ell(I_k^n)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \epsilon
\end{aligned}
$$

□

Sö á 2.2.6. Leiðir beint af því að lengd bils er óháð hliðrun □

2.3 Lebesgue-mælanleg mengi og Lebesgue-málið

Þetta skilyrði kemur frá Carathéodory.

Athugasemd. (i)

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$$

og um sérhvert bil I gildir $m^*(I) = \ell(I)$ með hjálp valfrumsendunnar er unnt að sýna fram á að til sé runa $(X_n)_{n\geq 1}$ í $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, sem eru innbyrðis sundurlæg og $m^*(\bigcup_{n\geq 1} X_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(X_n)$ (*) Viljum því einskorða m^* við minna safn hlutmengja sem efur tiltekna eiginleika og meðal annars þannig að $=$ gildi í stað $<$ í (*) hér að ofan.

(ii) Skv. setn. 2.2.5 er ójafnan $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$.

Kafli 3

2015-01-09

3.1 Fyrri fyrirlestur

3.1.1

Sönnun. Við vitum að ójafnan

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$$

gildir alltaf.

$\square$

3.1.2

Sönnun. (i) Látum N vera núllmengi og $A \subseteq \mathbb{R}$. Þá fæst

$$m^*(A \cap N) \leq m^*(N) = 0 \text{ vegna } A \cap N \subseteq N$$
$$m^*(A \cap N^C) \leq m^*(A) \text{ vegna } A \cap N^C \subseteq A$$

og því $m^* \geq m^*(A \cap N) + m^*(A \cap N^C)$.

(ii) Látum okkur nægja að skoða bil af gerðinni $I = [a; b]$. Tökum $A \subseteq \mathbb{R}$ og $\epsilon > 0$. Veljum þakningu $(I_n)_{n \geq 1}$ af bilum fyrir A, sem uppfyllir $m^*(A) \leq m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon$ Ljóst er að bilin $I'_n := I_n \cap [a, b]$ þekja $A \cap [a, b]$, svo að $m^*(A \cap [a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I'_n)$.

Bilin $I''_n := I_n \cap]-\infty, a[$ og $I'''_n := I_n \cap]b, \infty[$ þekja $A \cap]a, b[^c$ svo að

$$m^*(A \cap [a,b]^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I''_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I'''_n)$$

□

3.1.3

Sönnun. (i) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$:

Ef $A \subseteq \mathbb{R}$, þá er $A \cap \mathbb{R} = A$ og $A \cap \mathbb{R}^C = A \cap \emptyset = \emptyset$, svo að

$$m^*(A) = \underbrace{m^*(A \cap \mathbb{R})}_{=m^*(A)} + \underbrace{m^*(A \cap \mathbb{R}^C}_{=0}$$

(ii) Ef $E \in \mathcal{M}$ og $A \subseteq \mathbb{R}$, þá gildir

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) = m^*(A \cap (E^C)^C) + m^*(A \cap E^C)$$

svo að $E^C \in \mathcal{M}$

(iii) Gerum fyrst ráð fyrir að $(E_k)_{k \geq 1}$ sé runa af innbyrðis sundurlægum mengjum úr $\mathcal{M}$.

- Byrjum á að sýna með þrepun, að fyrir sérhvert $A \subseteq \mathbb{R}$ gildi:

$$m^*(A) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)^C)$$

$\mathbf{n = 1}$:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^C) \text{ vegna } E_1 \in \mathcal{M}$$

$(\mathbf{n-1}) \Rightarrow \mathbf{n}$: Látum $A \subseteq \mathbb{R}$. Þar sem E_n er úr $\mathcal{M}$, þá fæst:

$$m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)^C) = m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)^C \cap E_n) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)^C \cap E^C)$$

Nú er $(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)^C \cap E_n = E_n$ (E_k-in eru innb. sundurlæg). svo umskrifa má síðustu jöfnuna:

$$\underbrace{m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)^C)}_{= m^*(A) - \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) \text{ skv. þf.}} \qquad = m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)^C)$$

með því að nota de Morgan, og því

$$m^*(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E_n)}_{\sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)} + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)^C)$$

- Sýnum nú að $\bigcup_{k\geq 1} E_k \in \mathcal{M}$ og $m^*(\bigcup_{k\geq 1} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$. Þar sem $(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^C \subseteq (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)^C$ fyrir öll n, þá fæst:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^C) \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Með því að láta $n \to \infty$ fæst því

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^C) \\ &\geq m^*(A \cap [\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k]) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^C) \end{aligned}$$

Bæði ójöfnumerkin eru því jafnaðarmerki, svo að $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ og

$$m^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^C)$$

Með því að taka $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ fáum við

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \underbrace{m^*(\emptyset)}_{=0}$$

$\square$

3.1.4

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ er σ-algebra.
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ er σ-algebra.
3. $\Omega := \mathbb{N}, O = \{1,3,5,\ldots\}, J = \{2,4,6,\ldots\}$. Þá er $\{\emptyset, O, J, \mathbb{N}\}$ σ-algebra
4. Látum $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ vera fjölskylda af σ-algebrum á Ω, þá er $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{F}_\alpha$ σ-algebra á λ.
   - $\omega \in \mathcal{F}_\alpha\ \forall\alpha \in \Lambda$, svo að $\Omega \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{F}_\alpha$
   - Ef $E \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{F}_\alpha$, þá er $E \in \mathcal{F}_\alpha\ \forall\alpha$ og því $E^C \in \mathcal{F}_\alpha\ \forall\alpha$ og þar með $E^C \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{F}_\alpha$
   - Ef $(E_n)_{n\geq 1}$ er runa í $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{F}_\alpha$, þá er $(E_n)_{n\geq 1}$ runa í $\mathcal{F}_\alpha\ \forall\alpha$ og því $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{F}_\alpha\ \forall\alpha$ og þar með $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{F}_\alpha$
   - *Athugasemd.* Ef $\Lambda = \emptyset$, þá er $\bigcap_{\alpha\in\emptyset} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$ (almengið).
5. Ef $\mathcal{S}$ er eitthver safn hlutmengja í Ω, þá er sniðmengi allra σ-algebra á Ω, sem innihalda $\mathcal{S}$ kölluð *σ-algebran sem $\mathcal{S}$ framleiðir.* Köllsum hana $\mathcal{F}_\mathcal{S}$. Hún hefur eftirfarandi eiginleika (þ.e.a.s hún er minnst allra σ-algebra sem innihalda $\mathcal{S}$): Ef $\mathcal{F}$ er σ-algebra á Ω og $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, þá $\mathcal{F}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$
6. Ef Ω er firðrúm (grannrúm), þá kallast σ-algebran, sem opnu mengin framleiða, *Borel-algebran* á Ω; hún er einnig framleidd af lokuðum mengjum.

3.1.5

Dæmi. 1. $\mu_1, \mu_2 \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1(E) = 0\ \forall E \in \mathcal{P}(\Omega) \\ \mu_2(\emptyset) = 0, \mu_2(E) = \infty \text{ ef } E \neq \emptyset \end{array}\right\} \text{ mál á } \mathcal{P}(\Omega)$$

Athugasemd. $\mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \Omega = \emptyset$

2. Tökum punkt p úr Ω. Fallið $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ sem skilgr. er með

$$\mu(E) := \begin{cases} 0 & \text{ef } p \notin E \\ 1 & \text{ef } p \in E \end{cases}$$

er mál á $\mathcal{P}(\Omega)$.

3. $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty], \mu(E) = \#(E)$ er mál, oft kallað *talningarmálið* á $\mathbb{N}$.

3.2 Seinni fyrirlestur

Farið var í sönnun á 3.1.3.

Kafli 4

2015-01-12

Sönnun á setn 3.1.3 (framhald). Búin að sanna (i) og (ii). (iii) Búið að sanna. Ef $(E_n)_{n\geq 1}$ er runa í $\mathcal{M}$ af innbyrðis sundurlægum mengju, þá er $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{M}$. og $m(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

· *Sýna*: sammengi endanlegra margra (ekki endilega sundurlægra) mengja úr $\mathcal{M}$ sé í $\mathcal{M}$. Okkur nægir að skoða tvö mengi.

Nú: Fyrir sérhvert $A \subseteq \mathbb{R}$ gildir að

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^C)$$

og

$$m^*(A \cap E_1^C) = m^*(A \cap E_1^C \cap E_2) + \underbrace{m^*(A \cap E_1^C \cap E_2^C}_{m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^C)}$$

og því

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \underbrace{m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^C \cap E_2)}_{\geq m^*(A\cap(E_1\cup E_2))} + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C) \\ &\geq m * (A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^C) \end{aligned}$$

og því $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

Skv. (ii) fæst því (de morgan) að enandlegt sniðmengi mengja úr $\mathcal{M}$ er í $\mathcal{M}$.

· Lokahnykkur: Látum $(E_k)_{k\geq 1}$ vera runu í $\mathcal{M}$ og sýnum að $\bigcup_{k\geq 1} E_k \in \mathcal{M}$.

Mengin $F_1 := E_1$, $F_2 := E_1 \setminus E_1$, $F_k := E_k \setminus \underbrace{\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j}_{E_k\cap(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)^C}$, ... eru í $\mathcal{M}$. og auðséð er að $\bigcup_{k\geq 1} F_k = \bigcup_{k\geq 1} E_k$. Þar með er $\bigcup_{k\geq 1} E_k \in \mathcal{M}$ vegna þess að F_k-in eru innbyrðis sundurlæg. $\square$