

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н.Э. БАУМАНА

Р.В. КОМЯГИН, А.И. СЕНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ  
МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу  
"Основы теории и техники радиосистем передачи информации"

Москва, 2017

## ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

*Цель работы* – изучение спектральной плотности мощности модулированных сигналов.

*Задачи работы* – ознакомление с теоретическим материалом по данным методическим указаниям, выполнение работы в указанном порядке.

*Назначение лабораторной работы* – углубление теоретических знаний, практических умений и навыков в результате проведения экспериментальных исследований спектральной плотности мощности модулированных сигналов.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Модулирующий сигнал в системах передачи дискретной информации является одной из реализаций некоторого дискретного случайного процесса. В дальнейшем будем считать, что модулирующий процесс  $f(t)$  представляет случайную последовательность двухполярных прямоугольных импульсов с одинаковыми амплитудой  $h$  и длительностью  $T$ , причем вероятность появления положительных и отрицательных импульсов одинакова. Такой сигнал называют случайным синхронным телеграфным сигналом.

Корреляционная функция случайного синхронного телеграфного сигнала и его односторонняя спектральная плотность мощности определяются выражениями:

$$R(\tau) = \begin{cases} h^2 [1 - |\tau|/T], & |\tau| \leq T \\ 0, & \text{для других значений } \tau, \end{cases}$$
$$G(\omega) = 4h^2 \int_0^T (1 - \frac{|\tau|}{T}) \cos(\omega\tau) d\tau = 2h^2 T \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}.$$

### Спектральная плотность мощности амплитудно-манипулированного сигнала (АМ сигнала)

Амплитудно-манипулированный сигнал в рассматриваемом случае можно представить в виде:

$$S_{AM}(t) = 0,5U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \left[ 1 + \frac{f(t)}{h} \right].$$

Сигнал  $S_{AM}(t)$  – нестационарный с математическим ожиданием, равным  $0,5U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Нетрудно показать, что усредненная ковариационная функция сигнала  $S_{AM}(t)$  и его усредненная односторонняя спектральная плотность мощности определяются выражениями:

$$\bar{K}_{S_{AM}}(\tau) = (U_0^2/8) \cos \omega_0 \tau + (U_0^2/8) [1 - |\tau|/T] \cos \omega_0 \tau,$$
$$\bar{G}_{S_{AM}}(\omega) = \frac{\pi U_0^2}{4} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{U_0^2 T \sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{4[(\omega - \omega_0)T/2]^2}.$$

Второе слагаемое в выражении ковариационной функции равно 0 при  $|\tau| > T$ .

## Спектральная плотность мощности фазоманипулированных сигналов (ФМ сигналов)

### Двоичная фазовая модуляция (ФМ-2)

Сигнал ФМ-2 можно представить в виде

$$S_{\text{ФМ-2}}(t) = f(t)U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Нетрудно показать, что усредненная корреляционная функция сигнала  $S_{\text{ФМ-2}}(t)$  и усредненная односторонняя спектральная плотность мощности определяются выражениями:

$$\bar{R}_{S_{\text{ФМ-2}}}(\tau) = \frac{U_0^2 h^2}{2} [1 - |\tau|/T] \cos \omega_0 \tau, \quad |\tau| \leq T,$$

$$\bar{G}_{S_{\text{ФМ-2}}}(\omega) = U_0^2 h^2 T \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{[(\omega - \omega_0)T/2]^2}.$$

Заметим, что ширина спектра при ФМ-2 и АМ одинакова.

### Четырехкратная фазовая модуляция (ФМ-4)

При четырехкратной ФМ каждая пара двоичных элементов кодируется в виде одной из четырех фаз сигнала ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ). Сигнал  $S_{\text{ФМ-4}}(t)$  можно представить двумя эквивалентными выражениями:

$$S_{\text{ФМ-4}}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \theta_m(t)) = \frac{U_0}{\sqrt{2}} f_s(t) \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{U_0}{\sqrt{2}} f_c(t) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $\theta_m$  принимает значения  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ ;  $f_s(t)$  и  $f_c(t)$  – модулирующие процессы в квадратурном и синфазном каналах соответственно (последовательности двоичных символов  $\pm 1$  длительностью  $2T$ , передаваемые по синфазному и квадратурному каналам).

В предположении, что синфазный и квадратурный потоки символов независимы и каждый из них представляет собой случайный синхронный телеграфный сигнал, усредненная односторонняя спектральная плотность мощности сигнала  $S_{\text{ФМ-4}}(t)$  определяется выражением:

$$\bar{G}_{S_{\text{ФМ-4}}}(\omega) = 2U_0^2 T \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T]}{[(\omega - \omega_0)T]^2}.$$

Одно из главных преимуществ четырехфазной ФМ перед двухфазной заключается в том, что при определенных условиях передачи при

четырёхфазной ФМ достигается такая же эффективность использования мощности, как при двухфазной ФМ, но при использовании только половины ширины полосы частот, занимаемой сигналами ФМ-2.

#### **Четырёхкратная фазовая модуляция (ФМ-4) со сдвигом**

При четырёхкратной ФМ со сдвигом синфазный и квадратурный потоки символов смещены во времени на  $T$ . Каждый информационный символ, поступающий на вход модулятора синфазного или квадратурного канала, вызывает изменение фазы модулированного сигнала на  $0, +90^\circ, -90^\circ$ . Таким образом, нет изменения фазы на  $180^\circ$  (огибающая сигнала не принимает нулевых значений).

Усредненный односторонний спектр сигнала ФМ-4 со сдвигом определяется как

$$\overline{G}_{S_{\text{ФМ-4}}}(\omega) = 2U_0^2 T \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T]}{[(\omega - \omega_0)T]^2}.$$

Для сигналов ФМ с числом позиций больше двух, ширина спектра уменьшается в  $\log_2 m$  раз относительно ширины спектра двукратной фазовой модуляции.

ФМ-4 со сдвигом обладает важным преимуществом перед ФМ-2 и ФМ-4. Оно заключается в следующем. Как известно, для уменьшения боковых лепестков спектра сигнала используют полосовую фильтрацию. В случае ФМ-2 и ФМ-4 при этом происходит уменьшение огибающей до нуля в моменты изменения фазы на  $180^\circ$ . Жесткое ограничение этих сигналов восстанавливает постоянство огибающей. При этом уровень боковых полос спектра этих сигналов, уменьшенных в результате узкополосной фильтрации, вновь увеличивается. Уровень боковых лепестков оказывается таким же, как и до полосовой фильтрации.

В случае ФМ-4 со сдвигом полосовая фильтрация также вызывает модуляцию огибающей. Однако минимальный уровень огибающей при умеренной фильтрации будет не менее 0,707 его максимального значения [1].

Жесткое ограничение можно не производить. При этом уровень боковых лепестков снижается.

### Амплитудно-фазомодулированные сигналы (АФМ сигналы)

Системы сигналов с  $m > 2$  можно построить путем одновременной модуляции амплитуды и фазы гармонического сигнала. Число возможных дискретных значений параметров должно быть равно  $m$ . АФМ сигналы описываются выражением

$$S_{i\text{АФМ}}(t) = a_i \sqrt{2/T} \cos(\omega_0 t) - b_i \sqrt{2/T} \sin(\omega_0 t), \quad 0 \leq t \leq T, i = 1, 2, \dots, m$$

или выражением

$$S_{i\text{АФМ}}(t) = U_i \sqrt{2/T} \cos(\omega_0 t - \varphi_i),$$

где  $U_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \varphi_i = \arctg(b_i/a_i).$

Используя функции  $\sqrt{2/T} \cos(\omega_0 t)$  и  $-\sqrt{2/T} \sin(\omega_0 t)$  в качестве базисных, сигнал  $S_{i\text{АФМ}}(t)$  можно рассматривать либо как двухмерный вектор с координатами  $a_i$  и  $b_i$  в декартовой системе координат, либо как вектор с амплитудой  $U_i$  и фазой  $\varphi_i$  в полярной системе координат.

Для каждого числа  $m$  можно построить большое число ансамблей АФМ сигналов. Поэтому важной является задача нахождения оптимальных ансамблей. При равновероятной передаче сообщений оптимизация ансамбля заключается в таком размещении сигнальных точек, при котором собственные области сигналов примерно одинаковы и имеют максимальный объем (площадь). Эта задача сводится в общем случае к плотнейшей укладке сфер одинакового радиуса в  $m$ -мерном пространстве сигналов или, как в рассматриваемом случае, к плотнейшей укладке окружностей на плоскости. При этом центры сфер или окружностей соответствуют сигнальным точкам.

В связи с трудностью нахождения усредненной спектральной плотности мощности АФМ сигнала с  $m > 2$  в лабораторной работе она изучается при проведении эксперимента.

## Спектральная плотность мощности частотно-манипулированного сигнала (ЧМ сигнала)

Частотная модуляция может осуществляться двумя способами. При модуляции первого вида проводится переключение независимых генераторов, один из которых генерирует колебание на частоте  $f_1$ , соответствующее символу +1, а другой – колебание на частоте  $f_2$ , соответствующее символу -1. Поскольку при этом переход от символа +1 к символу -1 и обратно сопровождается скачком фазы, так как фазы колебаний на частотах  $f_1$  и  $f_2$  меняются независимо, первый вид частотной модуляции получил название модуляции "со скачком фазы". При модуляции второго вида используется один генератор, частота колебаний которого за время длительности посылки изменяется от  $f_1$  до  $f_2$  или обратно без скачка фазы. Этот вид ЧМ называется модуляция с непрерывной фазой (ЧМНФ).

Частотную модуляцию "со скачком фазы" можно рассматривать как сумму двух АМ сигналов с различными частотами несущих колебаний  $f_1$  и  $f_2$ , модулируемых в соответствующие промежутки времени.

Следовательно, усредненная ковариационная функция и усредненная односторонняя спектральная плотность мощности ЧМ сигнала являются суммами усредненных ковариационных функций и усредненных спектральных плотностей мощности сигналов АМ с несущими на частотах  $f_1$  и  $f_2$  и амплитудой  $U_0$ :

$$\begin{aligned}\overline{K}_{\text{счм}}(\tau) &= \frac{U_0^2}{8}(\cos \omega_1 \tau + \cos \omega_2 \tau) + \frac{U_0^2}{8}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)(\cos \omega_1 \tau + \cos \omega_2 \tau), \\ \overline{G}_{\text{счм}}(\omega) &= \frac{\pi U_0^2}{4}[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2)] + \frac{U_0^2 T}{4} \left\{ \frac{\sin^2[(\omega - \omega_1)T/2]}{[(\omega - \omega_1)T/2]^2} + \frac{\sin^2[(\omega - \omega_2)T/2]}{[(\omega - \omega_2)T/2]^2} \right\}.\end{aligned}$$

Второе слагаемое в выражении ковариационной функции равно 0 при  $|\tau| > T$ .

Отметим, что ширина спектра зависит от длительности информационной посылки  $T$  и девиации частоты  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  и шире, чем при АМ и ФМ.

В случае ММС сигнал представляется как

$$S_{\text{ММС}}(t) = \sin(\varphi_0 t + n\pi/2 + 2\pi \int f_i dt), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$f_i = \begin{cases} f_1 = 1/4T, & \text{для информационного символа "1"} \\ f_2 = -1/4T, & \text{для информационного символа "0"}. \end{cases}$$

Модуляция с минимальным сдвигом аналогична четырехкратной ФМ со сдвигом, что можно увидеть из следующего преобразования:

$$S_{\text{ММС}}(t) = \sin\left[\omega_0 t + \frac{n\pi}{2} + A(t)\frac{\pi t}{2T}\right] = \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] = \cos\left[A(t)\frac{\pi t}{2T}\right] \sin\left[\omega_0 t + \frac{n\pi}{2}\right] + \\ + \sin\left[A(t)\frac{\pi t}{2T}\right] \cos\left[\omega_0 t + \frac{n\pi}{2}\right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $A(t) = \pm 1$ . Очевидно, что фаза этого колебания изменяется на  $90^\circ$  в каждом временном интервале элемента точно так же, как при четырехкратной ФМ со сдвигом, за исключением того, что изменение фазы происходит линейно, а не мгновенно. Таким образом, если модуляция в модуляторах четырехкратной ФМ со сдвигом проводится колебаниями вида  $\sin x$  и  $\cos x$ , как в предыдущем выражении для  $S_{\text{ММС}}(t)$ , то сигналы на выходе будут идентичны сигналам при модуляции с минимальным сдвигом. Следует заметить, что для поддержания постоянства огибающей  $S_{\text{ММС}}(t)$  необходимо модулировать сигналы в обоих каналах (синфазном и квадратурном) в течение каждого временного интервала.

Усредненная односторонняя спектральная плотность мощности ММС сигнала при случайном законе модуляции определяется следующим соотношением [2]:

$$\overline{G}_{\text{ММС}}(\omega) = \frac{4U_0^2 T}{\pi^2} \frac{1 + \cos[2(\omega - \omega_0)T]}{[1 - 4(\omega - \omega_0)^2 T^2 / \pi^2]^2}.$$

Ширина основного лепестка спектра ММС сигнала на 50% шире, чем у сигнала ФМ-4 со сдвигом. Однако боковые лепестки в ММС сигнале уменьшаются значительно быстрее, чем в ФМ-4 со сдвигом. Например, если сравним полосу  $W$ , которая содержит 99% общей мощности, найдем, что



$W=1,2/T$  для ММС и  $W$  приблизительно равна  $8/T$  для ФМ-4 со сдвигом. Следовательно, ММС имеет более узкую концентрацию спектра. Заметим, что ММС существенно эффективней по полосе, чем ФМ-4 со сдвигом. Эта эффективность объясняет популярность ММС во многих цифровых сетях связи.

## **ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ**

Экспериментальная установка состоит из персонального компьютера, принтера и программного обеспечения. При исследовании энергетических спектров сигналов используются стандартные процедуры быстрого преобразования Фурье. Программа позволяет вычислять спектральные плотности мощности модулированных сигналов и строить их графики.

## **ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ**

1. Войти в программу моделирования и установить следующие параметры: опции "Виды НКС" - "Белый шум"; опция "Синхронизация" - "Когерентный прием". Установить цвет рисования графиков "BLACK".
2. В опции "Модуляция" выбрать сигнал "2-ФМ". Перейти в опцию "Принятый сигнал" и выбрать пункт "Спектр". Программа воспроизведет спектр сигнала с двукратной фазовой модуляцией.
3. Щелкнув правой кнопкой мыши на изображении спектра, выбрать в появившемся меню пункт "Копировать". Перейти в программу Paint. В опции меню "Правка" выбрать пункт "Вставить". Сохранить файл с изображением спектра в директории D:\TEMP с каким-либо уникальным именем в формате BMP (например, СПЕСТК\_2 PM. BMP).
4. Перейти в программу моделирования и повторить пункты 2 и 3 для сигналов "4-ФМ", "4-ФМ со сдвигом", "8-ФМ", "АФМ 8-кратная", "16-ФМ", "АФМ 16-кратная", "Частотная с ММС".
5. Перейти в программу Paint и распечатать полученные графики.
6. Закрыть программу моделирования и Paint.

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Поясните формирование сигналов: ФМ-2, ФМ-4, ФМ-4 со сдвигом, ФМ-8, АФМ-16, ЧМ, ММС.
2. Сравните спектры сигналов ФМ-2, ФМ-4, ФМ-8, ЧМ, ММС.
3. Сравните спектры сигналов ФМ-4 со сдвигом и ММС.
4. Что такое усредненная корреляционная функция и усредненная спектральная плотность мощности модулированного сигнала?

## **ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ**

1. Найти спектральную плотность мощности случайного синхронного телеграфного сигнала.
2. Найти усредненную спектральную плотность мощности сигналов: АМ, ФМ и ЧМ.

## **ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ**

Отчет о работе должен содержать:

1. Краткие теоретические сведения о спектрах модулированных сигналов.
2. Расчеты спектров модулированных сигналов (см. домашнее задание).
3. Экспериментальные графики.

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь. Пер. с англ./ Под ред. В.В. Маркова.-М.: Связь, 1979.- 592 с.
2. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./ Под ред. Д.Д. Кловского.- М.: Радио и связь, 2000.- 800 с.: ил.