**Publié le 14 septembre 2014 à 05h00** | Mis à jour le 14 septembre 2014 à 05h00

**La conjecture De Koninck**



(Québec) «Le mathématicien Jean-Marie De Koninck, bien connu pour son implication dans Nez rouge, a déjà formulé un théorème qui porte son nom. Ma question est la suivante: pouvez-vous résumer et vulgariser ce théorème, et aussi nous indiquer en quoi ce théorème pourrait trouver des applications pratiques dans la vie de tous les jours, un peu comme son auteur qui oeuvre dans le quotidien des gens?» demande Luc Côté, de Québec.

M. De Koninck a obtenu plusieurs résultats qui portent son nom, mais celui qui a fait le plus «jasé» les mathématiciens récemment, celui qui a généré le plus de publications savantes, est la «conjecture de De Koninck». Nous présumerons que c'est de cela dont notre lecteur veut parler.

Alors, notons tout de suite une petite chose: il s'agit d'une conjecture, et non d'un théorème à proprement parler. Une conjecture est un énoncé que l'on croit vrai, et dont les mathématiciens peuvent même être pratiquement certains, mais pour lequel on n'a pas encore trouvé de «preuve mathématique», de démonstration logique. On peut par exemple programmer un ordinateur pour vérifier qu'une conjecture est vraie pour tous les nombres jusqu'à, disons, 100 milliards, mais les mathématiciens sont plus exigeants : il leur faut un raisonnement qui prouvera logiquement et hors de tout doute la véracité de l'énoncé avant d'être pleinement convaincus. C'est uniquement lorsque la conjecture finit par être prouvée de cette manière qu'elle devient alors un théorème - mais cela peut prendre, littéralement, des siècles.

Et la conjecture de De Koninck, que dit-elle? Elle avance essentiellement qu'il n'y a que deux solutions possibles pour un certain problème qui, comme c'est souvent le cas en théorie des nombres, est assez facile à formuler, mais terriblement difficile à résoudre. Ce problème met deux fonctions simples en parallèle. La première, que l'on notera P - donc P (n) -, est le «produit des diviseurs premiers d'un nombre n». Les nombres premiers, rappelons-le, sont ces nombres qui ne se divisent que par 1 et par eux-mêmes, comme 7, 11, 23, etc. Les «diviseurs premiers» de n sont donc tous les nombres premiers qui divisent n, et on obtient évidemment leur produit en les multipliant tous. Pour 12, par exemple, les seuls diviseurs premiers sont 2 et 3 (puisque 12 = 2 x 2 x 3), et on a donc P (n) = P (12) = 2 x 3 = 6.

La seconde fonction est simplement la somme des diviseurs de n - et ici, les diviseurs peuvent être premiers ou non; on la notera S (n). Pour reprendre notre exemple de 12, on a S (n) = S (12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.

Maintenant, la question à laquelle M. De Koninck tentait de répondre quand il a formulé sa conjecture est : y a-t-il des nombres pour lesquels S (n) et P (n)2 seraient égaux? En d'autres termes, existe-t-il des nombres dont la somme des diviseurs est égale au carré du produit des diviseurs premiers? Et la conjecture de De Koninck dit qu'il n'en existe que deux, soit 1 et 1782.

Pour le chiffre 1, la chose est une évidence : sa liste de diviseurs se résume bien sûr à 1, et donc S (1) = 1 = P (n)2. Pour 1782, les listes sont plus longues, mais le résultat est le même. Les diviseurs de 1782 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 27, 33, 54, 66, 81, 99, 162, 198, 297, 594, 891 et 1782. En additionnant tous ces nombres, on obtient S (1782) = 4356.

Les facteurs premiers de 1782 sont quant à eux 2, 3 et 11 -, puisque 1782 = 2 x 3 x 3 x 3 x 3 x 11. Ainsi, on a P (1782)2 = (2 x 3 x 11)2 = 662 = 4356, et par conséquent, S (1782) = P (1782)2.

Si M. De Koninck croit qu'il n'y a que 1 et 1782 pour lesquels cette relation fonctionne, c'est parce qu'«il y a toutes sortes de contraintes que tu additionnes et qui font que tu te dis que c'est quasiment impossible. Mais on ne l'a pas prouvé complètement encore». La longueur des listes de diviseurs et de facteurs premiers est un exemple de ces «contraintes».

**«Aventure ludique»**

Maintenant, à quoi tout cela peut-il bien servir? Pour l'instant, la conjecture de De Koninck n'a pas d'application. «Ce problème est d'abord et avant tout une aventure ludique», explique le mathématicien. Mais comme c'est souvent le cas en mathématiques, une percée peut trouver une utilité pratico-pratique à peu près n'importe quand et dans n'importe quel domaine. Parfois, la solution à ce genre de problème peut fournir la clef d'autres énigmes en maths - et ces autres énigmes peuvent avoir une utilité immédiate.

Autrement, la solution elle-même peut finir, tôt ou tard, par avoir un usage. D'ailleurs, l'époque ultra-informatisée que nous vivons est une grande consommatrice de formules et de théorèmes, où n'importe quelle découverte en apparence triviale peut fournir des raccourcis de calcul, et ainsi améliorer la performance des ordinateurs ou des logiciels.

\*\*\*«Pourquoi le nombre 12 était-il si fréquemment utilisé dans le commerce pour des lots de produits? Il l'est moins depuis que le système international a été introduit dans nombre de pays, mais il demeure utilisé, par exemple pour les oeufs. Ce n'est peut-être pas très "sciences" comme question, mais justement la science (dans les pays colonisés par l'Angleterre) s'en accommodait», demande Jean-Claude Lachance, de Sainte-Marthe-sur-le-Lac.

Le système en base 10, comme celui des chiffres dits «arabes», nous vient sans doute du fait que nous avons 10 doigts, mais d'un point de vue pratico-pratique, le nombre 12 est plus utile, répond M. De Koninck. Le nombre 10 n'a que deux diviseurs «non triviaux» (c'est-à-dire à part 1 et lui-même), soit 2 et 5. Le nombre 12, quant à lui, en a quatre: 2, 3, 4 et 6. Pour séparer un lot entre plusieurs personnes, donc, la douzaine offre donc nettement plus de possibilités que la dizaine. C'est pourquoi il était (et est toujours) si populaire dans le commerce.

D'ailleurs, ce n'est pas que dans le Commonwealth que la douzaine est en usage. Autour de 3000 av. J.-C., les Sumériens (bien qu'ils comptaient généralement en base 60) divisaient l'année en 12 mois et le jour en 12 heures...