2. Algebra di Boole

Definizione

L'algebra di Boole è un metodo per rappresentare il valore di entrata ed uscita dei circuiti, dove l'alfabeto di supporto è composto da valori binari.

Per capire meglio la logica degli operatori, è utile pensare ai valori binari come:

- 0 = False
- 1 = True

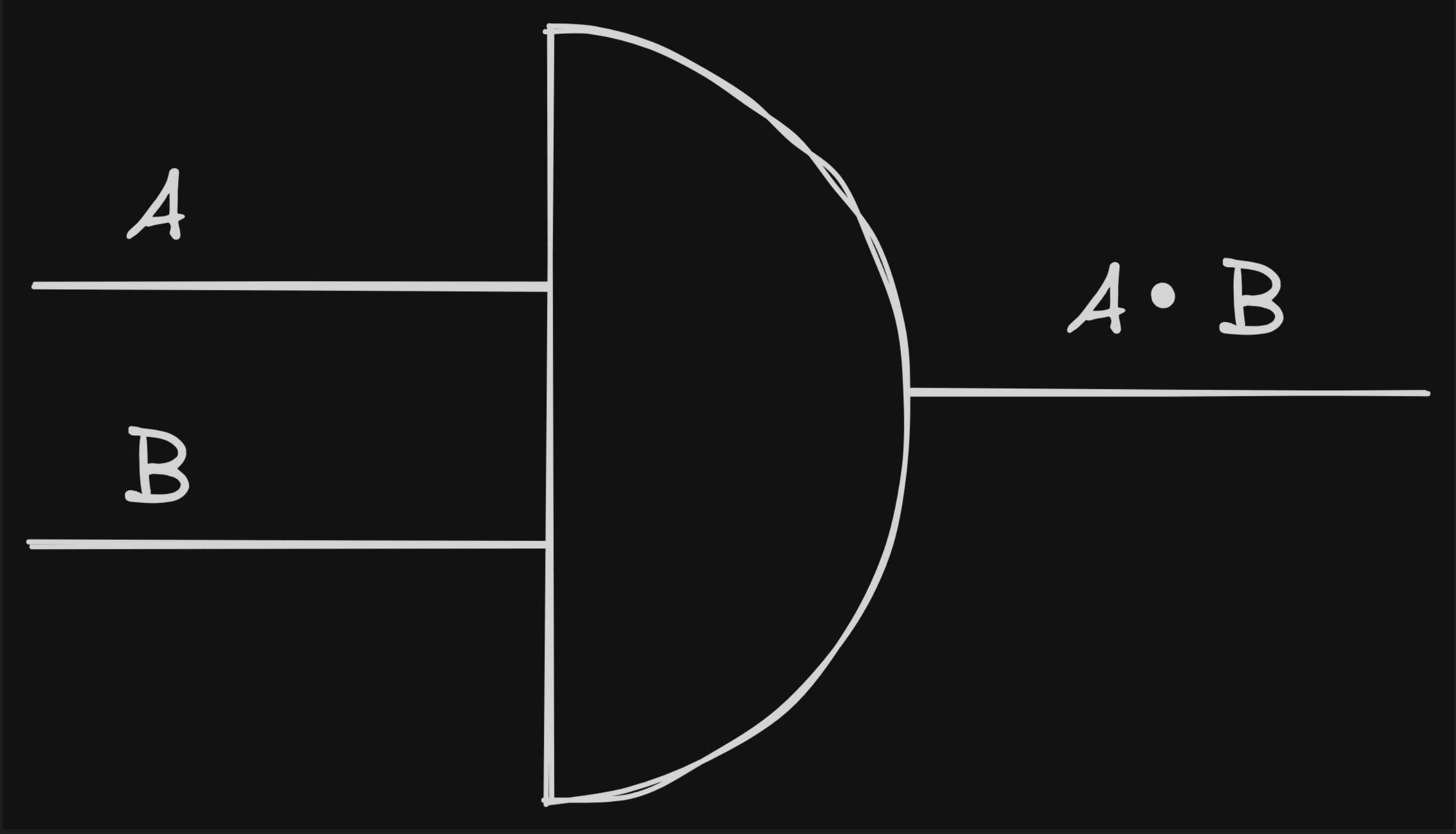
Principali operatori

AND

L'AND è un operatore rappresentato dal simbolo della moltiplicazione, e che restituisce un valore di 1 esclusivamente quando ambi i fattori hanno il valore 1. Infatti, è paragonabile alla moltiplicazione binaria.

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta logica

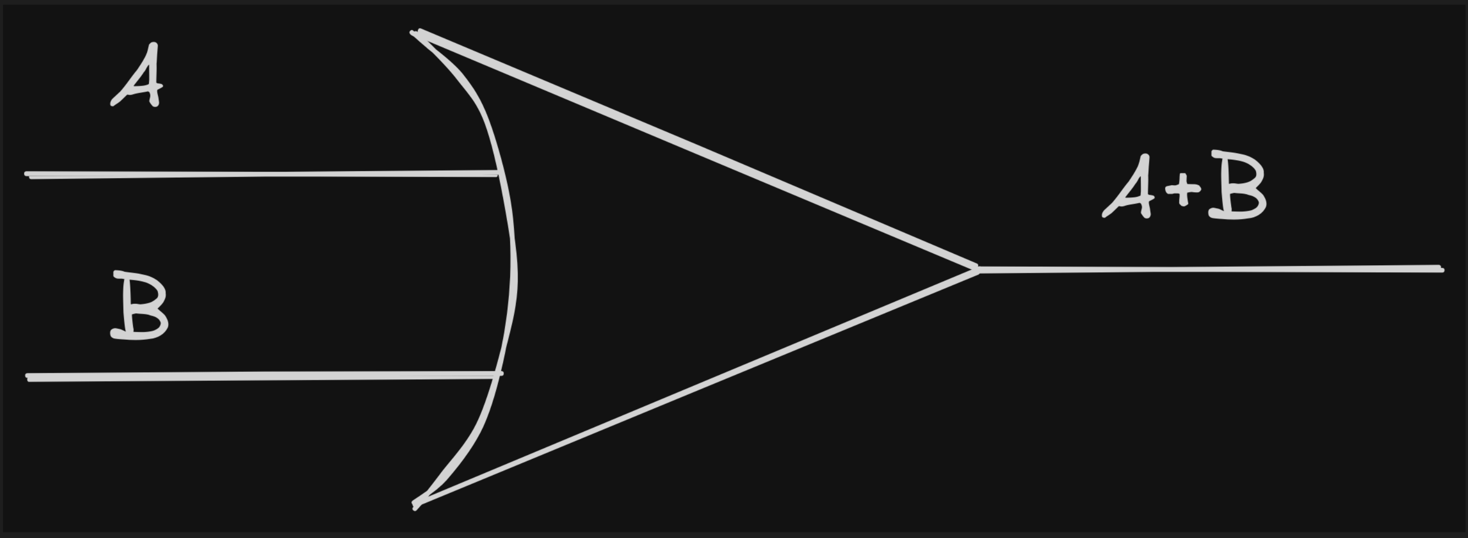


OR

L'OR è un operatore rappresentato dal simbolo della somma, e che restituisce un valore di 1 quando almeno uno dei due addendi è 1. Infatti, è paragonabile alla somma binaria, tranne per il caso `1+1`.

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta logica

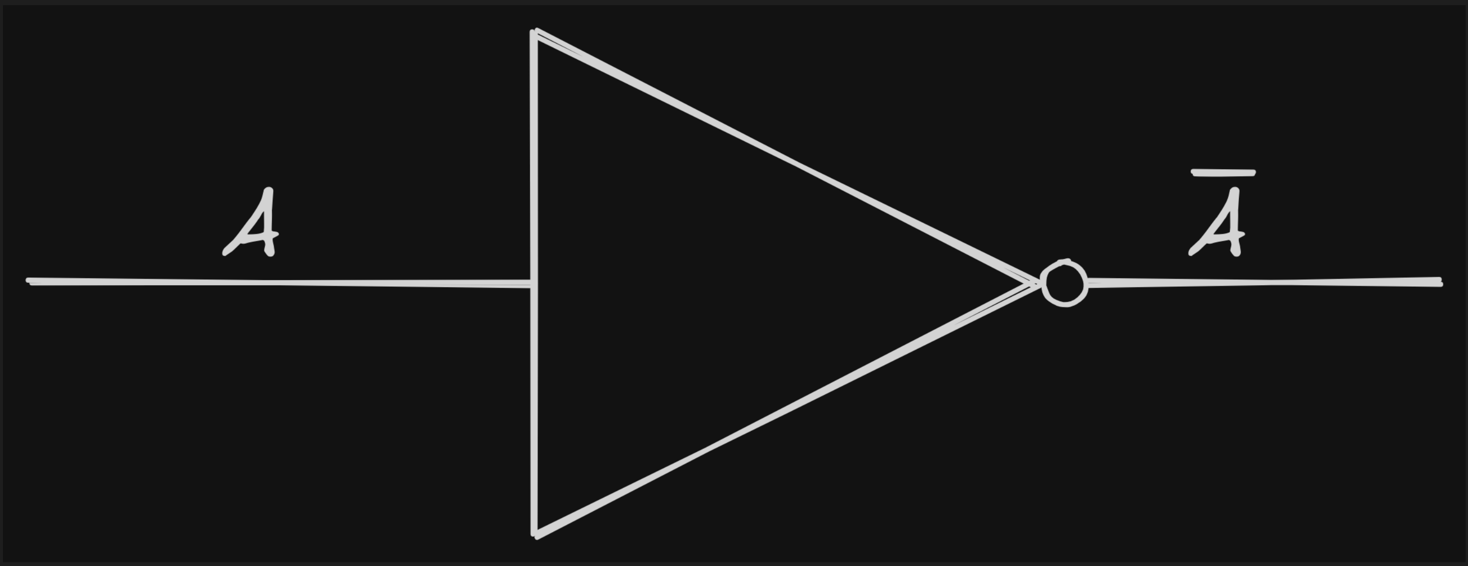


NOT

Il NOT è un operatore rappresentato da una linea sopra la variabile, e ne restituisce il valore opposto.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Porta logica



Rappresentazione nei circuiti

A volte in alcune porte logiche, viene usato il simbolo di un pallino vuoto per indicare la negazione di una variabile.

Assiomi e proprietà

- *Associatività*:
    - $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;
    - $X(YZ) = (XY)Z$
- *Commutatività*:
    - $X + Y = Y + X$;
    - $XY = YX$
- *Distributività*:
    - $X(Y + Z) = XY + XZ$;
    - $X + (YZ) = (X + Y)(X + Z)$

- *Complemento*:
  - $X + \overline{X} = 1$;
  - $X \cdot \overline{X} = 0$
- *Elemento neutro*:
  - $X + 0 = X$;
  - $X \cdot 1 = X$
- *Elemento nullificatore*:
  - $X + 1 = 1$;
  - $X \cdot 0 = 0$
- *Involuzione*:
  - $\overline{\overline{X}} = X$
- *Idempotenza*:
  - $X + X = X$;
  - $X \cdot X = X$
- *Assorbimento*:
  - $X + XY = X$;
  - $X \cdot (X + Y) = X$
- *Leggi di De Morgan*:
  - $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$;
  - $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

Forma duale

Una funzione $\widetilde{f}$ dell'algebra di Boole si dice *duale* quando differisce dalla relativa funzione f per gli operatori (cioè, AND ed OR sono scambiati) ed il risultato rimane lo stesso. Per ogni espressione dell'algebra di boole, è sempre possibile individuare la duale.

> Esempio
>
> $$f = X\overline{Y} + Z$$
> $$\widetilde{f} = (X + \overline{Y}) \cdot Z$$

Forma complementare

Una funzione $\overline{f}$ dell'algebra di Boole si dice *complementare* ad f quando ne restituisce il risultato inverso. Corrisponde alla duale con le variabili invertite. Ricordiamo che quando la negazione si estende sulle operazioni tra variabili, vanno applicate le leggi di De Morgan.

Esempio

$$f = X\overline{Y} + Z$$
$$\overline{f} = \overline{X\overline{Y} + Z} = (\overline{X} + Y) \cdot \overline{Z}$$

Forme normali

Le espressioni possono essere scritte in due tipi di forme normali:

- SOP: cioè "*sum of products*";
- POS: cioè "*product of sums*"

Un esempio di forma normale SOP è la seguente, dove ogni addendo è il risultato di un prodotto (qui possiamo vedere Z come $Z \cdot 1$):

$$X\overline{Y} + Z$$

Un esempio di forma normale POS è la seguente, dove ogni fattore è il risultato di una somma (qui possiamo vedere Z come $Z + 0$):

$$(X + \overline{Y})Z$$

In genere, per portare un'espressione in forma normale,

1) Se necessario, applico De Morgan fino ad avere la complementazione su una sola variabile
2) Applico la proprietà distributiva per portare in forma SOP o POS
3) Elimino termini ridondanti e/o ripetuti con idempotenza ed assorbimento

Esempio

Voglio portare in forma SOP:
$\overline{(a + \overline{b})c} + \overline{a\overline{c} + bc}$; Applico De Morgan
$\overline{a + \overline{b}} + \overline{c} + \overline{a\overline{c}} \cdot \overline{bc}$; Applico De Morgan
$\overline{a}b + \overline{c} + (\overline{a} + c) \cdot (\overline{b} + \overline{c})$; Applico la distributiva
$\overline{a}b + \overline{c} + \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c} + \overline{b}c + c\overline{c}$; Applico complemento su $c\overline{c}$ ed assorbimento su $\overline{c}$ e $\overline{a}\overline{c}$
$\overline{a}b + \overline{c} + \overline{a}\overline{b} + \overline{b}c$; Raccolgo $\overline{a}$ applicando la distributiva
$\overline{a}(b + \overline{b}) + \overline{c} + \overline{b}c$; Applico complemento su $b + \overline{b}$
$\overline{a} + \overline{c} + \overline{b}c$; Applico la distributiva
$\overline{a} + (\overline{c} + \overline{b}) \cdot (c + \overline{c})$; Applico complemento su $c + \overline{c}$
$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

Forma canonica

Una forma normale POS o SOP può essere anche una forma canonica quando tutti i termini dell'espressione hanno a loro interno tutte le variabili.

- Nella SOP, questi termini si chiamano mintermini\
- Nella POS, questi termini si chiamano maxtermini

Le forme canoniche permettono di scrivere le tabelle di verità in maniera più semplice, perché quella della POS contiene le combinazioni che restituiscono 0, considerando le variabili con valore 0 e le loro negazioni con valore 1; mentre quella della SOP contiene le combinazioni che restituiscono 1 considerando le variabili con valore 1 e le loro negazioni con valore 0.

> **Esempio**
>
> Consideriamo la seguente forma canonica POS:
>
> $$f = (a + \overline{b} + c)(a + b + c)(\overline{a} + \overline{b} + c)$$
>
> Possiamo notare che, considerando le variabili come 0 e le loro negazioni come 1, i maxtermini della forma canonica rappresentano tutte le combinazioni in cui $f = 0$, e quindi in tutte le altre $f = 1$.

Ecco la tabella di verità dell'esempio.

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ottenere la forma canonica

1) Mi metto in forma normale

2) Per la SOP, moltiplico $(X+\overline{X})$ al termine a cui manca la variabile X; Per la POS, sommo $X\overline{X}$ al termine a cui manca la variabile X

3) Applico la proprietà distributiva

4) Elimino i termini ridondanti

> **Esempio**
>
> Prendiamo una espressione in forma normale POS da portare in forma canonica
> $(a+c)(\overline{b}+c)$; Aggiungo le variabili mancanti
> $(a+b\overline{b}+c)(a\overline{a}+\overline{b}+c)$; Applico la proprietà distributiva
> $(a+b+c)(a+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)$; Rimuovo il termine ridondante
> $(a+b+c)(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)$

> **Esempio**
>
> Prendiamo una espressione in forma normale SOP da portare in forma canonica
> $\overline{a}+\overline{b}c$; Aggiungo le variabili mancanti
> $\overline{a}(b+\overline{b})(c+\overline{c})+(a+\overline{a})\overline{b}c$ Svolgo e riordino applicando la distributiva
> $\overline{a}(\overline{b}\overline{c}+\overline{b}c+b\overline{c}+bc)+a\overline{b}c+\overline{a}\overline{b}c$; Svolgo applicando la distributiva
> $\overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{a}\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}bc+a\overline{b}c+\overline{a}\overline{b}c$; Rimuovo l'ultimo termine perché ridondante
> $\overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{a}\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}bc+a\overline{b}c$

Qui c'è un esercizio completo dove si va da una espressione generica a forma normale SOP, poi a forma canonica SOP, ci si ricava la tavola di verità, e da essa si trova forma canonica POS e la forma canonica SOP della funzione complementare.

Forma minimale e mappe di Karnaugh

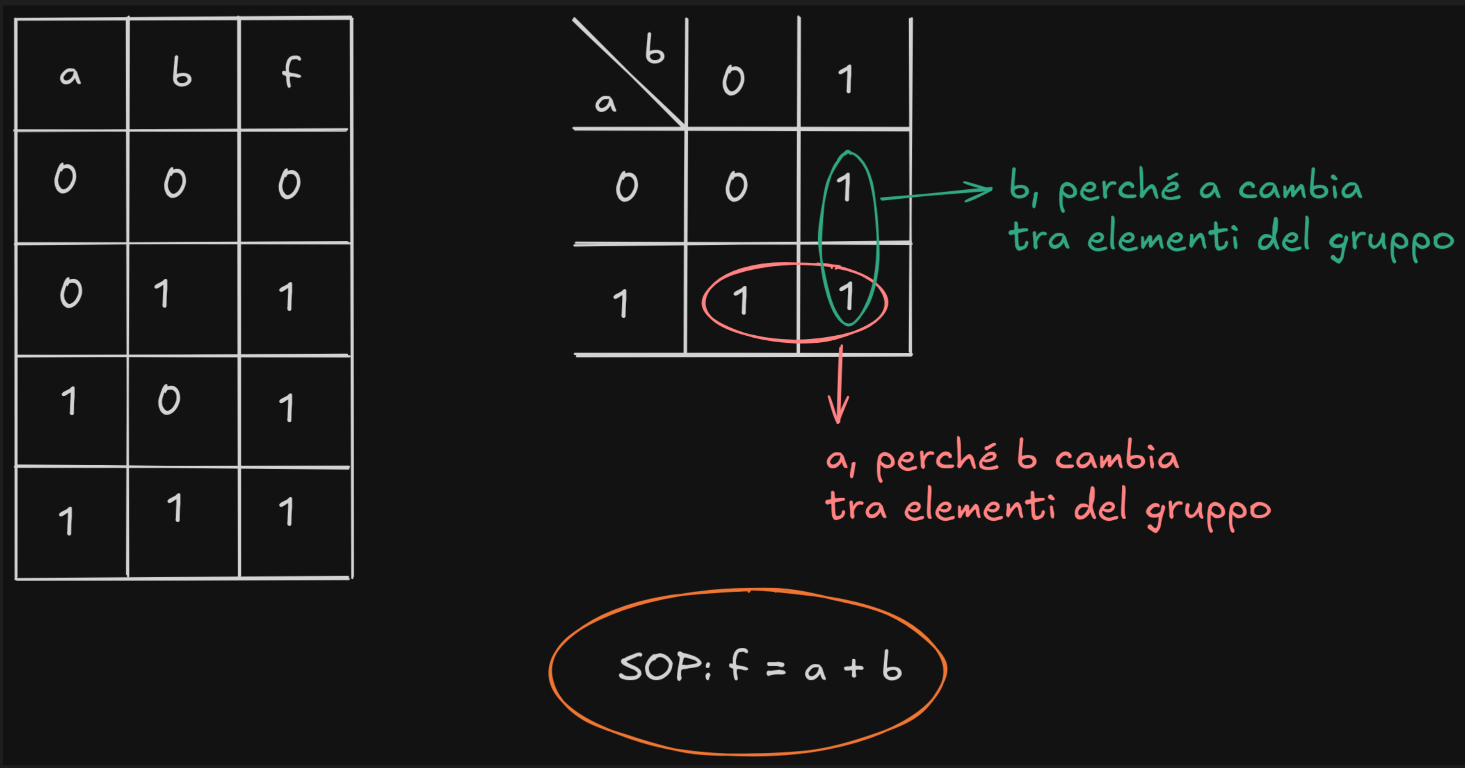
Una espressione si dice in forma minimale quando il suo numero di termini è ridotto al minimo possibile, il che rende il circuito rappresentabile con un minor numero di porte logiche e variabili.

Per trovare la forma minimale di una espressione con un numero di variabili ridotto (circa 4 variabili, con un numero di variabili maggiore conviene usare metodi automatizzati), il metodo più semplice e veloce è tramite le mappe di Karnaugh.

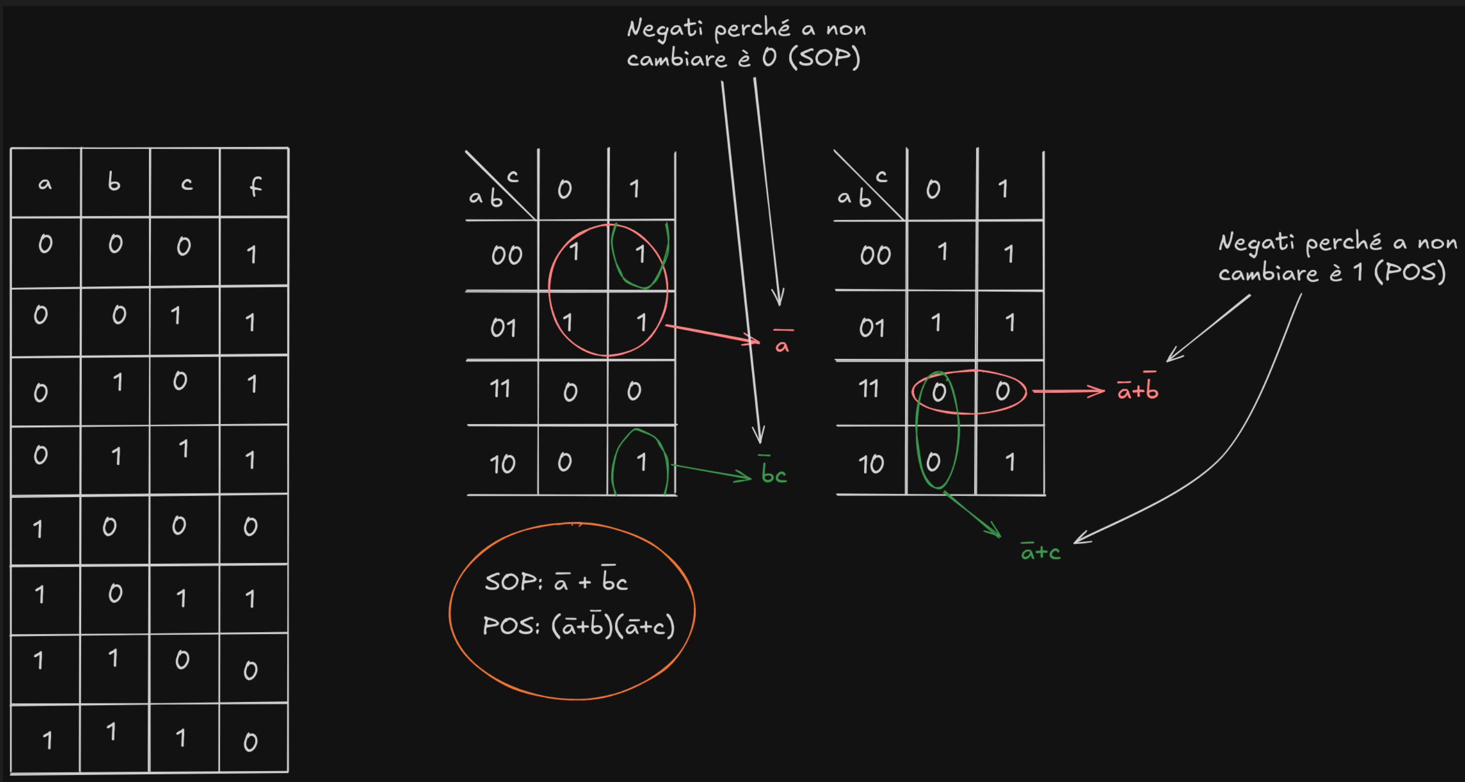
- Una volta trovata la tavola di verità della funzione, si inseriscono le variabili, eventualmente a tuple, come righe e colonne della mappa.
- Si scrive 0 o 1 nelle celle corrispondenti al valore della funzione che si ottiene con la relativa combinazione di input.

- Per i termini della SOP, raggruppo gli 1 in gruppi con una certa quantità di elementi che è una potenza di 2 (1 elemento, 2 elementi, 4 elementi ecc.). Per la POS, faccio la stessa cosa, ma raggruppo gli 0 invece degli 1.
- Prendo come termine solo le variabili che non cambiano nel gruppo

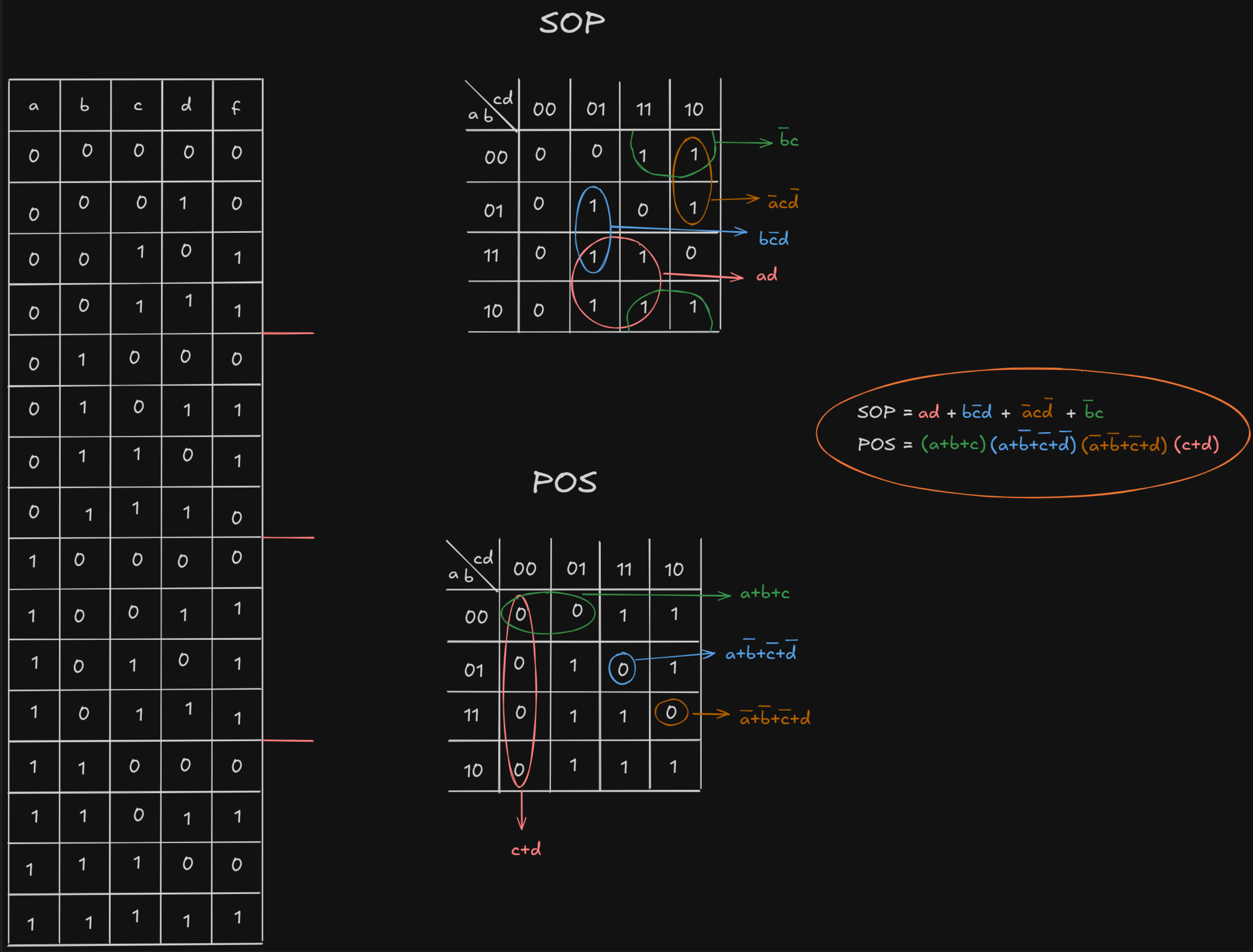
K-Mappa a 2 variabili



K-Mappa a 3 variabili



K-Mappa a 4 variabili



✏ Ordine delle combinazioni nelle mappe di Karnaugh

Come è possibile notare, quando nelle mappe di Karnaugh elenchiamo le combinazioni delle variabili e ci sono più di due bit, invece di scriverle in ordine numerico `00`, `01`, `10` e `11`, le scriviamo nell'ordine `00`, `01`, `11` ed `10`. In questo modo, tra una combinazione e la precedente cambia solo un bit alla volta, che rende più comodo effettuare le semplificazioni ed inoltre rappresenta come nella logica asincrona i valori non posso cambiare entrambi contemporaneamente.

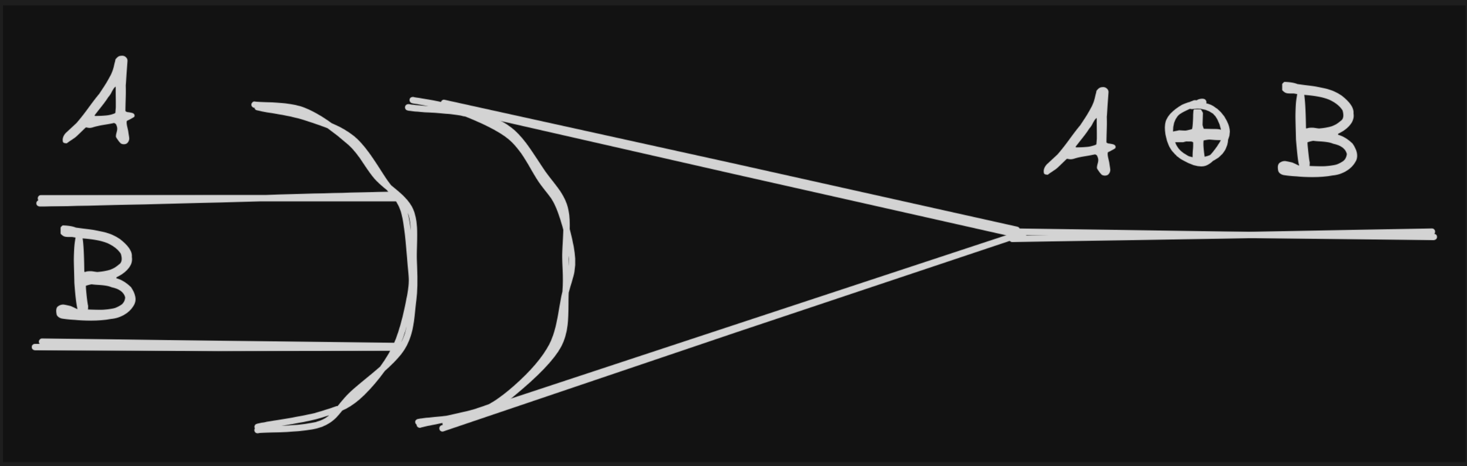
Operatore XOR

L'XOR è un operatore rappresentato dal simbolo della somma dentro un cerchio ($\oplus$), e che restituisce un valore di 1 esclusivamente quando i due operandi hanno valore diverso.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1

A	B	$A \oplus B$
1	0	1
1	1	0

Porta logica



Proprietà

1) $X \oplus Y = X\overline{Y} + \overline{X}Y$
2) $X \oplus Y \oplus Z = (X\overline{Y} + \overline{X}Y)\overline{Z} + (XY + \overline{XY})Z$
3) $X \oplus X = 0$
4) $X \oplus 0 = \overline{X} \cdot 0 + X \cdot 1 = X$
5) $X \oplus 1 = \overline{X}$
6) $X \oplus \overline{X} = 1$
7) $X \oplus \overline{Y} = \overline{X} \oplus Y = X \oplus Y$
8) $$\begin{aligned} &\overline{X \oplus Y} = \overline{\overline{X}Y + X\overline{Y}} = \\ &\overline{\overline{X}Y} \cdot \overline{X\overline{Y}} = (X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y) = \\ &X\overline{X} + XY + \overline{XY} + \overline{Y}Y = XY + \overline{XY} \end{aligned}$$

> **Esempio**
>
> $\overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + abc =$
>
> $c(\overline{a}\overline{b} + ab) + \overline{c}(\overline{a}b + a\overline{b}) =$
>
> $c(\overline{a \oplus b}) + \overline{c}(a \oplus b) =$
>
> $c \oplus (a \oplus b)$

Funzioni non completamente specificate

Non è detto che tutte le combinazioni in ingresso o di uscita di una funzione siano ammissibili o necessarie per il nostro circuito. In questi casi, il valore della funzione è rappresentato dal simbolo δ per indicare il "*don't care*".

Nelle mappe di Karnaugh, i valori dei don't care vengono usati solamente se utili per creare dei raggruppamenti, altrimenti vengono ignorati.

Vediamo un esempio di funzioni non completamente specificate nelle tavole di verità:
Dato $x \in [0, 7]$, stendere la tavola di verità per $y = x - 2$ in CA2 con minimo numero di bit.
Inoltre, dato $x \in [1, 5]$, stendere la tavola di verità $z = x - 2$ in CA2 con 3 bit.

x_2	x_1	x_0	$(x-2)_{10}$	y_3	y_2	y_1	y_0	z_2	z_1	z_0
0	0	0	-2	1	1	1	0	δ	δ	δ
0	0	1	-1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	3	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	4	0	1	0	0	δ	δ	δ
1	1	1	5	0	1	0	1	δ	δ	δ