大学-非数组

Zzy

1 高等数学

1. 解. 注意到

$$\frac{(2n+1)}{6n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3+n^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}=\frac{1}{3}$$

□

2. 解.

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{2f(x)(f'(x))^3-2f^2(x)f'(x)f''(x)}{(f'(x))^4}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\left(\frac{f^2(x)}{(f'(x))^2}\right)\\&=\frac{f^2(x)}{2(f'(x))^2}+C\end{aligned}$$

□

3.

4. (1)

解. 错误: 只有当 $|x|<1$ 时, 有 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$; 且幂级数的求导法则也只有在 $|x|$ 小于收敛半径时成立.

断言:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

用数学归纳法证明.
当 $n=1$ 时, 有

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

此时断言成立.
假设 $1\le n\le k-1$ 时, 断言成立, 即

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\ n=1,2,\cdots,k-1$$

则当 $n=k$ 时, 有

$$f^{(k)}(x)=\left(f^{(k-1)}(x)\right)'=\left(\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}\right)'=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

此时断言成立.
综上, 由数学归纳法, 断言被证明. □

(2)

解. 记 $g(x)=(1-x^m)^n$.
断言:

$$g^{(k)}(x)=h_k(x)+(-1)^k\frac{n!m^k}{(n-k)!}x^{k(m-1)}(1-x^m)^{n-k},\ k=1,2,\cdots,n$$

其中 $h_k(x)$ 满足 $h_k'(1)=h_k(1)=0$.
用数学归纳法证明.
当 $t=1$ 时, 有

$$g'(x)=(-1)nmx^{(m-1)}(1-x^m)^{(n-1)}=0+(-1)\frac{n!m}{(n-1)!}x^{(m-1)}(1-x^m)^{(n-1)}$$

此时 $h_1(x)=0$, 有 $h_1'(1)=h_1(1)=0$. 断言成立.
假设当 $1\le t\le k-1<n$ 时, 断言成立, 则当 $t=k$ 时, 有

$$\begin{aligned}g^{(k)}=\left(g^{(k-1)}\right)'&=\left(h_{k-1}(x)+(-1)^{k-1}\frac{n!m^{k-1}}{(n-k+1)!}x^{(k-1)(m-1)}(1-x^m)^{n-k+1}\right)'\\&=h_{k-1}'(x)+(-1)^{k-1}\frac{(k-1)(m-1)n!m^{k-1}}{(n-k+1)!}x^{(k-1)(m-1)-1}(1-x^m)^{n-k+1}\\&\quad+(-1)^k\frac{n!m^k}{(n-k)!}x^{k(m-1)}(1-x^m)^{n-k}\end{aligned}$$

记 $h_k(x)=h_{k-1}'(x)+(-1)^{k-1}\frac{(k-1)(m-1)n!m^{k-1}}{(n-k+1)!}x^{(k-1)(m-1)-1}(1-x^m)^{n-k+1}$, 验证可知有 $h_k'(1)=h_k(1)=0$, 此时断言成立.

综上, 由数学归纳法, 断言被证明.

根据断言, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{x^n}(1-x^m)^n|_{x=1} &= \left(h_n(x)+(-1)^n n! m^n x^{n(m-1)}\right)|_{x=1} \\ &= (-1)^n n! m^n\end{aligned}$$

□

5. 引理: 若 $f(x)$ 为区间 I 上的上凸函数, 对于区间 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

证明. 记 $\lambda = (x_3-x_2)/(x_3-x_1)$, 则有 $0<\lambda<1$ 和 $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$.

由于 $f(x)$ 为上凸函数, 则有

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$$

代入 λ 表达式整理得

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

引理得证. □

下面证明本题.

证明. 由 $f''(x) \leq 0$ 知, $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上为上凸函数.

由 $0<a<b<a+b<2$ 及引理得

$$\frac{f(a)-f(a+b)}{-b} \geq \frac{f(a+b)-f(b)}{a} \tag{1}$$

又由 $f(a) \geq f(a+b)$, 得

$$\frac{f(a)-f(a+b)}{b} \geq 0 \geq \frac{f(a)-f(a+b)}{-b} \tag{2}$$

结合 (1)(2) 两式, 得

$$\frac{f(a)-f(a+b)}{b} \geq \frac{f(a+b)-f(b)}{a}$$

整理得

$$af(a)+bf(b) \geq (a+b)f(a+b)$$

此题得证. □

2 线性代数

6. (1)

证明. 做分块初等变换, 有

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det(D)
$$

□

(2)

证明. 直接验证有

$$
\begin{aligned}
&(A-BD^{-1}C)[A^{-1}-A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}] \\
=&E-B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}-BD^{-1}CA^{-1} \\
+&BD^{-1}CA^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1} \\
=&E+B[D^{-1}CA^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}-(CA^{-1}B-D)^{-1}-D^{-1}]CA^{-1} \\
=&E+B[D^{-1}(CA^{-1}B-D)(CA^{-1}B-D)^{-1}-D^{-1}]CA^{-1} \\
=&E+B(D^{-1}-D^{-1})CA^{-1} \\
=&E
\end{aligned}
$$

故有

$$
(A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1}-A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1}CA^{-1}
$$

□

7. 证明. 设

$$
f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k) = x^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sigma_k x^{n-k}
$$

令

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

由题目条件, 得

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0 \tag{3}$$

由 Newton 恒等式, 有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^k k\sigma_k = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$$

在 Newton 恒等式中分别令 $k = 1, 2, \cdots, n$, 并结合 (3) 式, 解得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0$$

故有

$$f(x) = x^n$$

令 $f(x) = 0$, 解得

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

故 (3) 式的方程组只有零解, 即题目所给方程组只有零解. □

8. (1)

证明. 设 λ 是 σ 的特征值, 设 α 为 σ 属于特征值 λ 的一个特征向量, 则有

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sigma^2(\alpha) \\ \Longrightarrow \lambda\alpha &= \lambda^2\alpha \\ \Longrightarrow (\lambda^2 - \lambda)\alpha &= 0 \end{aligned}$$

又有 $\alpha \neq 0$, 故

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$.
即证得 σ 的特征值为 0 或 1. □

(2)

证明. $\forall \beta \in V_0 \bigcap V_1$, 由 $\beta \in V_1$, 有

$$\sigma(\beta) = \beta \tag{4}$$

又 $\beta \in V_0$, 有

$$\sigma(\beta) = 0 \tag{5}$$

结合 (4)(5) 式, 有

$$\beta = 0$$

即 $V_0 \bigcap V_1 = \{0\}$, 故 $V_0 + V_1 = V_0 \oplus V_1$.
$\forall \gamma \in V$, 有

$$\gamma = (\gamma - \sigma(\gamma)) + \sigma(\gamma)$$

注意到

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma - \sigma(\gamma)) &= \sigma(\gamma) - \sigma^2(\gamma) = 0 \\ \sigma(\sigma(\gamma)) &= \sigma^2(\gamma) = \sigma(\gamma) \end{aligned}$$

故有 $\gamma - \sigma(\gamma) \in V_0$, $\sigma(\gamma) \in V_1$, 即有 $V \subset V_0 \oplus V_1$.
显然有 $V_0 \oplus V_1 \subset V$, 从而有

$$V = V_0 \oplus V_1$$

此题得证. □

9. 解. 设题目中二次型的相伴矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

记 A 的各阶顺序主子式分别为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 且有 $I_1 = 2 > 0$.
$\forall k = 2, 3, \cdots, n-1$ 有

$$\begin{aligned} & I_k = 2I_{k-1} - I_{k-2} \\ \Longrightarrow\ & I_k - I_{k-1} = I_{k-1} - I_{k-2} = \cdots = I_2 - I_1 = 3 - 2 = 1 \\ \Longrightarrow\ & I_k = 1 + I_{k-1} = \cdots = I_1 + (k-1) = 2 + (k-1) = k + 1 > 0 \end{aligned}$$

又有

$$I_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

故 A 的全部顺序主子式均非负, 即此二次型为半正定二次型.

又因为

$$I_n = 0, I_{n-1} > 0$$

则 A 的秩为 $n-1$.

故半正定二次型 $f(x)$ 的正惯性指数为 $n-1$, 负惯性指数为 0. $\square$

10.