

偏导数法化简二次型

Zzy

1 偏导数法的使用步骤

设有二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,$$

按照如下步骤将其化为标准型:

1. 若 $\exists t \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_t \neq 0$, 即 f 含有某个变量的平方项, 则如下处理.
记

$$f_t = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t},$$

令

$$g_t = f - \frac{1}{a_t} (f_t)^2,$$

则 g_t 为二次型, 且不含有 x_t .

我们继续按如上步骤处理, 即可将 f 转化为一个二次型 h , 且不含有单一变量的平方项.

若 h 为标准型, 结束; 若 h 不为标准型, 进行下面的步骤.

2. 若 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都有 $a_k = 0$, 即 f 不含有某个变量的平方项, 则如下处理.
若 $\exists u, v \in \{1, 2, \dots, n\}, u < v$, 使得 $a_{u,v} \neq 0$.

记

$$f_u = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u}, f_v = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_v},$$

令

$$g_{u,v} = f - \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2],$$

则 $g_{u,v}$ 为二次型, 且不含有 x_u 和 x_v 项.

我们继续按如上步骤处理, 即可将 f 转化为一个二次型 h , 且 h 为标准型.

2 偏导数法的证明

以下证明繁而不难.

先证明两个引理.

引理 2.1. 设二次型

$$f = \sum_{t=1}^n a_t x_t^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,$$

$\forall t \in \{i | i = 1, 2, \dots, n, a_i \neq 0\}$, 记

$$g = f - \frac{1}{a_t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \right)^2,$$

则有 g 为不含 x_t 项的二次型.

证明. 计算知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[\left(a_t x_t^2 + \sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i x_t + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_t x_j \right) + \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n a_k x_k^2 + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq t, j \neq t}} a_{i,j} x_i x_j \right) \right] \\ &= a_t x_t + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right), \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \right)^2 &= \left[a_t x_t + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right) \right] \left[a_t x_t + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right) \right] \\ &= a_t^2 x_t^2 + h(x_t^2), \end{aligned}$$

其中

$$h(x_t^2) = a_t x_t \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right)^2$$

是不含有 x_t^2 项的二次型.

从而

$$\begin{aligned} g &= f - \frac{1}{a_t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \right)^2 = \left[a_t x_t^2 + \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n a_k x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \right) \right] - \left[a_t x_t^2 + \frac{1}{a_t} h(x_t^2) \right] \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^n a_k x_k^2 + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq t, j \neq t}} a_{i,j} x_i x_j - \frac{1}{4a_t} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{j=t+1}^n a_{t,j} x_j \right)^2 \end{aligned}$$

为不含 x_t 项的二次型, 证毕. □

引理 2.2. 设二次型

$$f = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,$$

$\forall (u, v) \in \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n, a_{i,j} \neq 0\}$, 记

$$f_u = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u}, f_v = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_v},$$

令

$$g = f - \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2],$$

则有 g 为不含 x_u 和 x_v 项的二次型.

证明. 计算知

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_u} \left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i x_u + \sum_{j=u+1}^n a_{u,j} x_u x_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{j=u+1}^n a_{u,j} x_j \right), \end{aligned}$$

同理有

$$f_v = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right).$$

记

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v} &= \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2] \\ &= \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v) + (f_u - f_v)] [(f_u + f_v) - (f_u - f_v)] \\ &= \frac{4}{a_{u,v}} (f_u f_v), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v} &= \frac{4}{a_{u,v}} (f_u f_v) \\ &= \frac{1}{a_{u,v}} \left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{j=u+1}^n a_{u,j} x_j \right) \left(\sum_{i=1}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right) \\ &= \left[a_{u,v} x_v + \left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^n a_{u,j} x_j \right) \right] \left[a_{u,v} x_u + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right) \right] \\ &= a_{u,v} x_u x_v + h(x_u x_v), \end{aligned}$$

其中

$$h(x_u x_v) = \left[x_v \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right) + x_u \left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^n a_{u,j} x_j \right) \right] \\ + \frac{1}{a_{u,v}} \left[\left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^n a_{u,j} x_j \right) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right) \right]$$

是不含有 $x_u x_v$ 项的二次型.

从而

$$g = f - \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2] = f - \varphi_{u,v} \\ = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j - (a_{u,v} x_u x_v + h(x_u x_v)) \\ = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq u, j \neq v}} a_{i,j} x_i x_j - \frac{1}{a_{u,v}} \left[\left(\sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^n a_{u,j} x_j \right) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^n a_{v,j} x_j \right) \right]$$

为不含 x_u 和 x_v 项的二次型, 证毕. □

下面给出偏导数法的证明.

证明. 设有二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,$$

利用数学归纳法, 对二次型的变量个数 k 进行归纳.

- 当 $k = 1$ 时, $f = a_1 x_1^2$, 此时已是标准型.
 - 假设当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, 二次型可由偏导数法化为标准型.
- 当 $k = n$ 时:

– 若 $\exists t \in \{1, 2, \dots, n\}, a_t \neq 0$, 则由引理 2.1 有

$$f = \frac{1}{a_t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \right)^2 + g,$$

其中 g 为不含有 x_t 项的二次型.

由归纳假设, 我们可以用偏导数法将 g 化为标准型

$$g(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_n).$$

令

$$\begin{cases} y_i = y_i, & i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{t\} \\ y_t = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \end{cases},$$

则有

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2$$

为标准型, 其中 b_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{t\}$) 为 $g(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_n)$ 的对应系数, $b_t = \frac{1}{a_t}$.

– 若 $\forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, a_t = 0$, 但 $\exists u, v \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{u,v} \neq 0$, 则由引理 2.2 有

$$f = \frac{1}{a_{u,v}} [(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2] + g,$$

其中 g 为不含有 x_u 和 x_v 项的二次型.

由归纳假设, 我们可以用偏导数法将 g 化为标准型

$$g(y_1, \dots, y_{u-1}, y_{u+1}, \dots, y_{v-1}, y_{v+1}, \dots, y_n).$$

令

$$\begin{cases} y_i = y_i, & i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{u, v\} \\ y_u = f_u + f_v \\ y_v = f_u - f_v \end{cases},$$

则有

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2$$

为标准型, 其中 b_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{u, v\}$) 为 $g(y_1, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_n)$ 的对应系数, $b_u = b_v = \frac{1}{a_{u,v}}$.

综上, 当 $k = n$ 时二次型也可由偏导数法化为标准型, 且此时的变换为可逆变换.

由数学归纳法, 证毕. □

3 偏导数法的应用

先看两道简单习题, 熟悉偏导数法的使用.

例 3.1. 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

为标准型.

解. 记

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 + x_2,$$

则有

$$f = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3.$$

记

$$g = x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3,$$

又记

$$g_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} = x_2 - x_3,$$

则有

$$g = (x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2,$$

从而有

$$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 &= y_2 + y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{cases},$$

从而将 f 化为标准型

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2.$$

□

例 3.2. 化二次型

$$f = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准型.

解. 记

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_2 + x_3, \quad f_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + x_3,$$

则有

$$f = -(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_3^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 &= y_3 \end{cases}$$

从而将 f 化为标准型

$$f = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

□

以上两题均有多种解法, 如配方法和正交变换法. 但有时我们会碰到配方法和正交变换法都不好处理的题目, 这时候偏导数法就很有用了. 看下面两题.

例 3.3. 化二次型

$$f = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}$$

为标准型.

分析: 记

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_{2n}, \quad f_{2n} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} = \frac{1}{2}x_1,$$

则有

$$f = \frac{1}{4}(x_1 + x_{2n})^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_{2n})^2 + x_2x_{2n-1} + x_3x_{2n-2} + \cdots + x_nx_{n+1}.$$

此时可以看出, 不断的进行上述步骤即可将 f 化为标准型.

解. 作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{2n+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ y_{2n+1-i} &= x_i - x_{2n+1-i} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_i &= \frac{1}{2}(y_i + y_{2n+1-i}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{2n+1-i} &= \frac{1}{2}(y_i - y_{2n+1-i}) \end{cases}$$

从而将 f 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 + \dots + \frac{1}{4}y_n^2 - \frac{1}{4}y_{n+1}^2 - \frac{1}{4}y_{n+2}^2 - \frac{1}{4}y_{2n}^2.$$

□

例 3.4. 化二次型

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

为标准型.

分析: 记

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_2, \quad f_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} = \frac{1}{2}(x_1 + x_3),$$

则有

$$f = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3)^2 + x_3x_4 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n.$$

此时需要对 n 的奇偶性进行讨论:

- 若 n 为偶数, 则需要令

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2}, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-3, \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + x_n \\ y_n &= x_{n-1} - x_n \end{cases}$$

- 若 n 为奇数, 则需要令

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2}, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-2, \\ y_n &= x_n \end{cases}$$

此时即可将 f 化为标准型.

解. 对 n 的奇偶性进行讨论:

- 若 n 为偶数, 作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2}, i = 1, 3, 5, \dots, n-3, \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + x_n \\ y_n &= x_{n-1} - x_n \end{cases}$$

从而将 f 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \dots + \frac{1}{4}y_{n-1}^2 - \frac{1}{4}y_n^2.$$

- 若 n 为奇数, 作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2}, i = 1, 3, 5, \dots, n-2, \\ y_n &= x_n \end{cases}$$

从而将 f 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \dots + \frac{1}{4}y_{n-2}^2 - \frac{1}{4}y_{n-1}^2.$$

□

4 参考文献

1. 蒲和平 《线性代数疑难问题选讲》
2. 姚慕生, 谢启鸿 《高等代数 (第三版)》