# 偏导数法化简二次型

Zzy

## 1 偏导数法的使用步骤

设有二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,$$

按照如下步骤将其化为标准型:

1. 若 $\exists t \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $a_t \neq 0$, 即 $f$ 含有某个变量的平方项, 则如下处理.
   记
   $$f_t = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t},$$
   令
   $$g_t = f - \frac{1}{a_t} \left(f_t\right)^2,$$
   则 $g_t$ 为二次型, 且不含有 $x_t$.
   我们继续按如上步骤处理, 即可将 $f$ 转化为一个二次型 $h$, 且不含有单一变量的平方项.
   若 $h$ 为标准型, 结束; 若 $h$ 不为标准型, 进行下面的步骤.

2. 若 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 都有 $a_k = 0$, 即 $f$ 不含有某个变量的平方项, 则如下处理.
   若 $\exists u, v \in \{1, 2, \cdots, n\}, u < v$, 使得 $a_{u,v} \neq 0$.
   记
   $$f_u = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u}, f_v = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_v},$$
   令
   $$g_{u,v} = f - \frac{1}{a_{u,v}} \left[(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2\right],$$
   则 $g_{u,v}$ 为二次型, 且不含有 $x_u$ 和 $x_v$ 项.
   我们继续按如上步骤处理, 即可将 $f$ 转化为一个二次型 $h$, 且 $h$ 为标准型.

# 2　偏导数法的证明

以下证明繁而不难.

先证明两个引理.

**引理 2.1.** 设二次型

$$f=\sum_{t=1}^{n}a_tx_t^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_{i,j}x_ix_j,$$

$\forall t\in\{i|i=1,2,\cdots,n,a_i\neq 0\}$, 记

$$g=f-\frac{1}{a_t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)^2,$$

则有 $g$ 为不含 $x_t$ 项的二次型.

**证明.** 计算知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_t}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_t}\left[\left(a_tx_t^2+\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_ix_t+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_tx_j\right)+\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}a_kx_k^2+\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\i\neq t\\j\neq t}}a_{i,j}x_ix_j\right)\right]\\&=a_tx_t+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right),\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)^2&=\left[a_tx_t+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right)\right]\left[a_tx_t+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right)\right]\\&=a_t^2x_t^2+h(x_t^2),\end{aligned}$$

其中

$$h(x_t^2)=a_tx_t\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right)+\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right)^2$$

是不含有 $x_t^2$ 项的二次型.

从而

$$\begin{aligned}g=f-\frac{1}{a_t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)^2&=\left[a_tx_t^2+\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}a_tx_t^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_{i,j}x_ix_j\right)\right]-\left[a_tx_t^2+\frac{1}{a_t}h(x_t^2)\right]\\&=\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{n}a_tx_t^2+\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\i\neq t,j\neq t}}a_{i,j}x_ix_j-\frac{1}{4a_t}\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_{i,t}x_i+\sum_{j=t+1}^{n}a_{t,j}x_j\right)^2\end{aligned}$$

为不含 $x_t$ 项的二次型, 证毕. □

**引理 2.2.** 设二次型

$$f = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j,$$

$\forall (u, v) \in \{(i, j) | 1 \le i < j \le n, a_{i,j} \ne 0\}$, 记

$$f_u = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u}, f_v = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_v},$$

令

$$g = f - \frac{1}{a_{u,v}} \left[ (f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2 \right],$$

则有 $g$ 为不含 $x_u$ 和 $x_v$ 项的二次型.

**证明.** 计算知

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_u} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_u} \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i x_u + \sum_{j=u+1}^{n} a_{u,j} x_u x_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{j=u+1}^{n} a_{u,j} x_j \right), \end{aligned}$$

同理有

$$f_v = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right).$$

记

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v} &= \frac{1}{a_{u,v}} \left[ (f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2 \right] \\ &= \frac{1}{a_{u,v}} \left[ (f_u + f_v) + (f_u - f_v) \right] \left[ (f_u + f_v) - (f_u - f_v) \right] \\ &= \frac{4}{a_{u,v}} \left( f_u f_v \right), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \varphi_{u,v} &= \frac{4}{a_{u,v}} \left( f_u f_v \right) \\ &= \frac{1}{a_{u,v}} \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{j=u+1}^{n} a_{u,j} x_j \right) \left( \sum_{i=1}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right) \\ &= \left[ a_{u,v} x_v + \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \ne v}}^{n} a_{u,j} x_j \right) \right] \left[ a_{u,v} x_u + \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right) \right] \\ &= a_{u,v} x_u x_v + h(x_u x_v), \end{aligned}$$

其中

$$h(x_u x_v) = \left[ x_v \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right) + x_u \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^{n} a_{u,j} x_j \right) \right]$$
$$+ \frac{1}{a_{u,v}} \left[ \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^{n} a_{u,j} x_j \right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right) \right]$$

是不含有 $x_u x_v$ 项的二次型.
从而

$$\begin{aligned} g &= f - \frac{1}{a_{u,v}} \left[ (f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2 \right] = f - \varphi_{u,v} \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j - (a_{u,v} x_u x_v + h(x_u x_v)) \\ &= \sum_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i \neq u, j \neq v}} a_{i,j} x_i x_j - \frac{1}{a_{u,v}} \left[ \left( \sum_{i=1}^{u-1} a_{i,u} x_i + \sum_{\substack{j=u+1 \\ j \neq v}}^{n} a_{u,j} x_j \right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{v-1} a_{i,v} x_i + \sum_{j=v+1}^{n} a_{v,j} x_j \right) \right] \end{aligned}$$

为不含 $x_u$ 和 $x_v$ 项的二次型, 证毕. □

下面给出偏导数法的证明.

**证明.** 设有二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j,$$

利用数学归纳法, 对二次型的变量个数 $k$ 进行归纳.

- 当 $k = 1$ 时, $f = a_1 x_1^2$, 此时已是标准型.
- 假设当 $1 \le k \le n-1$ 时, 二次型可由偏导数法化为标准型.
  当 $k = n$ 时:
  - 若 $\exists t \in \{1, 2, \cdots, n\}, a_t \neq 0$, 则由引理?? 有

    $$f = \frac{1}{a_t} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_t} \right)^2 + g,$$

    其中 $g$ 为不含有 $x_t$ 项的二次型.
    由归纳假设, 我们可以用偏导数法将 $g$ 化为标准型

    $$g(y_1, \cdots, y_{t-1}, y_{t+1}, \cdots, y_n).$$

令

$$\begin{cases} y_i & = y_i,\ i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{t\} \\ y_t & = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_t} \end{cases},$$

则有

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

为标准型, 其中 $b_i$ $(i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{t\})$ 为 $g(y_1,\cdots,y_{t-1},y_{t+1},\cdots,y_n)$ 的对应系数, $b_t = \frac{1}{a_t}$.

– 若 $\forall t \in \{1,2,\cdots,n\}, a_t = 0$, 但 $\exists u,v \in \{1,2,\cdots,n\}, a_{u,v} \neq 0$, 则由引理?? 有

$$f = \frac{1}{a_{u,v}}\left[(f_u + f_v)^2 - (f_u - f_v)^2\right] + g,$$

其中 $g$ 为不含有 $x_u$ 和 $x_v$ 项的二次型.
由归纳假设, 我们可以用偏导数法将 $g$ 化为标准型

$$g(y_1,\cdots,y_{u-1},y_{u+1},\cdots,y_{v-1},y_{v+1},\cdots,y_n).$$

令

$$\begin{cases} y_i & = y_i,\ i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{u,v\} \\ y_u & = f_u + f_v \\ y_v & = f_u - f_v \end{cases},$$

则有

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

为标准型, 其中 $b_i$ $(i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{u,v\})$ 为 $g(y_1,\cdots,y_{t-1},y_{t+1},\cdots,y_n)$ 的对应系数, $b_u = b_v = \frac{1}{a_{u,v}}$.

综上, 当 $k = n$ 时二次型也可由偏导数法化为标准型, 且此时的变换为可逆变换.

由数学归纳法, 证毕. □

# 3 偏导数法的应用

先看两道简单习题, 熟悉偏导数法的使用.

**例 3.1.** 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

为标准型.

**解.** 记

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 + x_2,$$

则有

$$f = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3.$$

记

$$g = x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_2x_3,$$

又记

$$g_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_2} = x_2 - x_3,$$

则有

$$g = (x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2,$$

从而有

$$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 &= y_2 + y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{cases},$$

从而将 $f$ 化为标准型

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2.$$

□

**例 3.2.** 化二次型

$$f=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

为标准型.

**解.** 记

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_2+x_3,\ f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_1+x_3,$$

则有

$$f=-\left(x_1+x_2-x_3\right)^2+\left(x_1-x_2\right)^2+x_3^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 & =x_1+x_2-x_3 \\ y_2 & =x_1-x_2 \\ y_3 & =x_3 \end{cases},\ \text{即}\begin{cases} x_1 & =\frac{1}{2}\left(y_1+y_2+y_3\right) \\ x_2 & =\frac{1}{2}\left(y_1-y_2+y_3\right) \\ x_3 & =y_3 \end{cases},$$

从而将 $f$ 化为标准型

$$f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

□

以上两题均有多种解法, 如配方法和正交变换法. 但有时我们会碰到配方法和正交变换法都不好处理的题目, 这时候偏导数法就很有效了. 看下面两题.

**例 3.3.** 化二次型

$$f=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$$

为标准型.

**分析**: 记

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{1}{2}x_{2n},\ f_{2n}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}}=\frac{1}{2}x_1,$$

则有

$$f=\frac{1}{4}(x_1+x_{2n})^2-\frac{1}{4}(x_1-x_{2n})^2+x_2x_{2n-1}+x_3x_{2n-2}+\cdots+x_nx_{n+1}.$$

此时可以看出, 不断的进行上述步骤即可将 $f$ 化为标准型.

**解.** 作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_i & = x_i + x_{2n+1-i} \\ y_{2n+1-i} & = x_i - x_{2n+1-i} \end{cases},\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$\begin{cases} x_i & = \frac{1}{2}\left(y_i + y_{2n+1-i}\right) \\ x_{2n+1-i} & = \frac{1}{2}\left(y_i - y_{2n+1-i}\right) \end{cases},\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

从而将 $f$ 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 + \cdots + \frac{1}{4}y_n^2 - \frac{1}{4}y_{n+1}^2 - \frac{1}{4}y_{n+2}^2 - \frac{1}{4}y_{2n}^2.$$

□

**例 3.4.** 化二次型

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

为标准型.

**分析**: 记

$$f_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_2,\ f_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_3\right),$$

则有

$$f = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3)^2 + x_3x_4 + x_4x_5 + \cdots + x_{n-1}x_n.$$

此时需要对 $n$ 的奇偶性进行讨论:

- 若 $n$ 为偶数, 则需要令

$$\begin{cases} y_i & = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} & = x_i - x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{n-1} & = x_{n-1} + x_n \\ y_n & = x_{n-1} - x_n \end{cases}, i = 1, 3, 5, \cdots, n-3,$$

- 若 $n$ 为奇数, 则需要令

$$,\begin{cases} y_i & = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} & = x_i - x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_n & = x_n \end{cases}, i = 1, 3, 5, \cdots, n-2,$$

此时即可将 $f$ 化为标准型.

**解.** 对 $n$ 的奇偶性进行讨论:

- 若 $n$ 为偶数, 作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + x_n \\ y_n &= x_{n-1} - x_n \end{cases}, i = 1, 3, 5, \cdots, n-3,$$

  从而将 $f$ 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \cdots + \frac{1}{4}y_{n-1}^2 - \frac{1}{4}y_n^2.$$

- 若 $n$ 为奇数, 作可逆线性变换

$$, \begin{cases} y_i &= x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_{i+1} &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2} \\ y_n &= x_n \end{cases}, i = 1, 3, 5, \cdots, n-2,$$

  从而将 $f$ 化为标准型

$$f = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \cdots + \frac{1}{4}y_{n-2}^2 - \frac{1}{4}y_{n-1}^2.$$

□

# 4 参考文献

1. 蒲和平《线性代数疑难问题选讲》

2. 姚慕生, 谢启鸿《高等代数 (第三版)》