Nota de Clase 2: la matemática de las Q Gates[1]

Milton q.

Septiembre 5, 2025

[1] Este documento fue elaborado en LaTeX utilizando una plantilla inspirada en el trabajo de Edward R. Tufte.

Este documento resume las principales características de las matrices que describen el comportamiento de algunas compuertas cuánticas seleccionadas por su importancia algorítmica. Se busca caracterizar estas matrices en términos de sus propiedades derivadas del álgebra lineal, como por ejemplo diagonalización y descomposición espectral en *eigen-values* y *eigen-vectors*. Estas propiedades resultarán particularmente útiles, toda vez que mucha de la algorítmica cuántica, está basada en el uso de las propiedades matemáticas de las compuertas que componen un circuito cuántico.

1 *Introducción*

Las compuertas cuánticas se pueden caracterizar usando formalismos matemáticos derivados del álgebra lineal. Esta caracterización usualmente está basada en matrices cuadradas complejas que tienen diferentes propiedades como por ejemplo matrices Diagonizables, Unitarias, Normales, de Hermite... cada tipo, con sus propiedades bastante distintivas.

Este documento[2] describe las principales matrices asociadas a las compuertas cuánticas, empezando por las matrices básicas **X**, **Y**, **Z** de *Pauli* de un solo qutbit, hasta algunas otras compuertas más sofisticadas de tres qubits como por ejemplo la compuerta *Toffoli*.

El resto de este documento está organizado en torno a dos grandes secciones como sigue:

1. en la sección «**Definiciones**», se presentan brevemente algunos conceptos de álgebra lineal, matrices y sus características, con especial énfasis en las matrices cuyos elementos son variables complejas,

2. en la sección «**Compuertas y Matrices**», se presenta para cada compuerta seleccionada, su correspondiente caracterización en términos de conceptos del álgebra lineal,

3. en la sección «**Código Sagemath**», se presenta el código **sagemath** sage que se usó para encontrar algunas de las propiedades descritas en este documento.

2 Definiciones

En esta sección se presentarán algunas definiciones y operaciones tomadas del álgebra lineal. Aunque algunas de las operaciones y tipos de matrices, fueron ya mencionadas en el *primer* (por ejemplo, transpuesta conjugada o exponenciación de matrices), ahora nos resulta preciso profundizar en estas operaciones y sus propiedades.

2.1 La Transpuesta Conjugada

Como ya se había anotada en el *primer* la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{A_{m\times m}}$ se denota[3] como $\mathbf{A}^{\dagger}_{m\times m}$ y se obtiene transponiendo la matriz original $\mathbf{A}$ y aplicando el conjugado complejo a cada elemento de la matriz. Es decir:

[3] son de nuestro interés únicamente las matrices cuadradas. En adelante cualquier matrix que consideremos, la supondremos cuadrada

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{i,j} = \overline{\mathbf{A}_{j,i}} \tag{1}$$

Esta operación tiene una serie de propiedades que nos resultarán muy útiles después... Ellas son:

- Para cualquier matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ de dimensiones compatibles se cumple que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{B}^{\dagger}$,
- Para cualquier complejo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $(z\mathbf{A})^{\dagger} = \overline{z}\mathbf{A}^{\dagger}$, donde $\overline{z} \in \mathbb{C}$ es el conjugado complejo de z,
- Para cualquier matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ de dimensiones compatibles se cumple que $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\ \mathbf{A}^{\dagger}$,
- Para cualquier matriz $\mathbf{A}$, en que las operaciones estén adecuadamente definidas, se tiene que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{-1}$,
- Los *eigen-values* de la matriz $\mathbf{A}^{\dagger}$ son los conjugados complejos de los *eigen-values* de la matriz $\mathbf{A}$.

2.2 Exponenciación de Matrices

Recordando el *primer* definíamos la operación de exponenciación de una matriz $\mathbf{A}$ como:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} \tag{2}$$

donde calculamos $\mathbf{X}^n$ con multiplicaciones sucesivas de la matriz $\mathbf{X}$ consigo misma y definiendo $\mathbf{X}^0 = \mathbf{I}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de las mismas dimensiones que la matriz $\mathbf{X}$.

Esta operación sobre matrices así definida, tiene una serie de propiedades interesantes que vamos a estar usando con alguna frecuencia durante el curso:

- $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$,
- $\left(e^{\mathbf{X}}\right)^{\dagger} = e^{\left(\mathbf{X}^{\dagger}\right)}$,
- Si $\mathbf{Y}$ es invertible, entonces $e^{\mathbf{Y}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}} = \mathbf{Y}e^{\mathbf{X}}\mathbf{Y}^{-1}$,
- Si $\mathbf{XY} = \mathbf{YX}$, then $e^{\mathbf{X}}\, e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$,
- Si $\mathbf{X}$ es Diagonizable como $\mathbf{X} = \mathbf{U}\ \mathbf{D}\ \mathbf{U}^{-1}$, entonces $e^{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\ e^{\mathbf{D}}\ \mathbf{U}^{-1}$.

Así mismo, si una matriz $\mathbf{D}$ es Diagonal, es decir:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

Por inspección vemos que su transpuesta es también una matriz Diagonal y que para matrices Diagonales $\mathbf{D}$, se tiene que $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$. Pero hay otras propiedades interesantes. Por ejemplo la exponenciación de $\mathbf{D}$ es también una matriz Diagonal dada por:

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

De manera similar, hay varias simplificaciones importantes en la aritmética de las matrices diagonales. Por ejemplo, el inverso de la matriz $\mathbf{D}$ anteriormente definida, es también una matriz Diagonal que se puede calcular con carga polinomial[4] con la expresión:

[4] específicamente cuadrática.

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

Mientras que -más generalmente-, la potenciación de la misma matriz se puede calcular también eficientemente con carga polinomial[5] con la expresión:

[5] específicamente cuadrática.

$$\mathbf{D}^m = \begin{bmatrix} d_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^m \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, estas son algunas otras propiedades muy interesantes de la exponenciación de matrices que también nos resultarán muy útiles más adelante.

En primer lugar, cualquier *eigen-vector* de una matriz arbitraria $\mathbf{A}$ es también un *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}^2$.

La prueba es sencilla, supongamos que $\vec{v}$ es un *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$ con *eigen-value* λ. Por definición tenemos que $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Si multiplicamos a izquierda y derecha por $\mathbf{A}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\left(\mathbf{A}\vec{v}\right) &= \mathbf{A}\left(\lambda\vec{v}\right) \\ \mathbf{A}^2\vec{v} &= \lambda\mathbf{A}\vec{v} \\ \mathbf{A}^2\vec{v} = \lambda\left(\lambda\vec{v}\right) &= \lambda^2\vec{v} \end{aligned}$$

Así podemos ver que, no solo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$ tienen los mismos *eigen-vectors*, sino que además si λ es un *eigen-value* de $\mathbf{A}$, entonces λ^2 es un *eigen-value* de $\mathbf{A}^2$.

Esta sencilla propiedad se puede extender a potencias arbitrarias[6] así: Si $\mathbf{A}$ es una matriz con *eigen-vector* $\vec{v}$ y *eigen-value* λ, entonces, la matriz $\mathbf{A}^n, n \in \mathbb{Z}$ tendrá como *eigen-vector* el mismo vector $\vec{v}$ y como *eigen-value* λ^n. Es decir,

[6] usando inducción matemática

$$\mathbf{A}^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v} \tag{5}$$

Con esta propiedad, luego extendemos a la exponenciación de matrices, así: Si $\mathbf{A}$ es una matriz con *eigen-vector* $\vec{v}$ y *eigen-value* λ, entonces, la matriz $e^{\mathbf{A}}$ tendrá como *eigen-vector* el mismo vector $\vec{v}$ y como *eigen-value* e^{λ}. Es decir,

$$\text{Si } \mathbf{A} = \lambda\vec{v} \text{ entonces } \; e^{\mathbf{A}}\vec{v} = e^{\lambda}\vec{v} \tag{6}$$

La prueba es sencilla, por definición de la operación usando series de Taylor tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k, \\ e^{\mathbf{A}}\vec{v} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\right)\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k\vec{v} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k\right)\vec{v} \\ &= e^{\lambda}\vec{v} \; \blacksquare \end{aligned}$$

Es decir, cada *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$ es también un *eigen-vector* de la matriz $e^{\mathbf{A}}$. Lo contrario, sin embargo, no es cierto... no todo *eigen-vector* de la matriz $e^{\mathbf{A}}$ es un *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$. Existen varios contra-ejemplos sencillos[7].

[7] El lector atento puede verificar que si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix}$, entonces $e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un *eigen-vector* de $e^{\mathbf{A}}$, pero no lo es de $\mathbf{A}$.

Con estas operaciones ya definidas y sus propiedades detalladas, ahora pasaremos a discutir una clasificación de matrices. Para esta discusión, consideraremos únicamente matrices cuadradas, cuyo número de filas (columnas) corresponde a una potencia de 2 y cuyos elementos son en general números complejos. Los principales tipos de matrices de nuestro interés son:

2.3 *Matrices Diagonizables*

Una matriz $\mathbf{A}$ es **Diagonizable** si existe una matriz invertible $\mathbf{Q}$ y una matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1} \tag{8}$$

En los casos en que la matriz $\mathbf{A}$ es Diagonalizable, la matriz $\mathbf{Q}$ es una matriz formada por los *eigen-vectors* de $\mathbf{A}$ como columnas, mientras que $\mathbf{\Delta}$ es una matriz Diagonal cuyos elementos $\mathbf{\Delta}_{i,i}$ son los correspondientes *eigen-values* λ_i. La justificación de esta propiedad es sencilla de derivar a partir de los *eigen-vectors* y *eigen-values*[8].

[8] Recuerde que para cada uno de los elementos del conjunto de *eigen-vectors* y *eigen-values* se cumple la condición $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Si organizamos estos vectores por columnas en una matriz $\mathbf{Q}$, tenemos que $\mathbf{A}\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}$ y por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1}$.

Si ninguno de los *eigen-vectors* de la matriz $\mathbf{A}$ es cero, entonces la matriz $\mathbf{A}$ es invertible y su inversa está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}^{-1}\ \mathbf{Q}^{-1} \tag{9}$$

Las matrices Diagonizables son muy convenientes por la eficiencia numérica que requiere el calcular las potencias de estas matrices. Por ejemplo, calcular $\mathbf{A}\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ se simplifica[9] a:

[9] es decir, basta con elevar al cuadrado la matrix Diagonal $\mathbf{\Delta}$, -una operación que ya vimos es particularmente eficiente para matrices cuadradas pues se reduce a elevar al cuadrado cada elemento diagonal-, y luego realizar el producto con la matriz $\mathbf{Q}$ y su inversa.

$$\left(\mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1}\right)\left(\mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1}\right) = \mathbf{Q}\mathbf{\Delta}\left(\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}}\right)\mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}^2\ \mathbf{Q}^{-1}$$

En efecto, es sencillo demostrar[10] que si la matriz $\mathbf{A}$ es Diagonizable, y se diagonaliza con las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{\Delta}$ (es decir $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1}$), entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que:

[10] nuevamente usando inducción matemática

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}^n\ \mathbf{Q}^{-1}$$

2.4 Matrices Normales

Una matriz **N** es **Normal** si conmuta con su conjugada transpuesta... i.e.

$$\mathbf{N}^{\dagger}\,\mathbf{N} = \mathbf{N}\,\mathbf{N}^{\dagger} \tag{11}$$

Las matrices Normales son diagonalizables en matrices Unitarias (véase la definición de matrices Unitarias en **Matrices Unitarias** en la página 8). Es decir, una matriz Normal **N** siempre se puede escribir como:

$$\mathbf{N} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1} \tag{12}$$

donde la matriz **U** es Unitaria.

Es importante notar que si bien toda matriz Normal es Diagonizable, no toda matriz Diagonizable es Normal. Por ejemplo, la matriz **A** definida así:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es Diagonizable en:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{Q}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{Q}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

y sin embargo no es Normal, puesto que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} \neq \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si dos matrices **A** y **B** son Normales y además conmutan (i.e. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), entonces se tiene que tanto $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ como $\mathbf{AB}$ son también matrices Normales.

2.5 Matrices de Hermite

Una matriz **H** es **de Hermite** o (auto-adjunta) cuando su conjugada transpuesta es igual a si misma... i.e.

$$\mathbf{H}^{\dagger} = \mathbf{H} \tag{13}$$

El así llamado **«Teorema Espectral para Matrices de Hermite»** resume las siguientes propiedades de las matrices de Hermite:

- sus *eigen-values* son reales,
- los *eigen-vectors* correspondientes a *eigen-values* distintos, son ortogonales entre si.

Adicionalmente, las matrices de Hermite tienen las siguientes propiedades:

- para una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ todos los elementos de su diagonal, son números reales ($h_{i,i} \in \mathbb{R}$),
- si $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, su inversa $\mathbf{H}^{-1}$, es también una matriz de Hermite,
- si dos matrices $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ son matrices de Hermite, su suma $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ es también una matriz de Hermite,
- si $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, la suma de esta matriz y su conjugada $(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\dagger)$ es también una matriz de Hermite,
- si dos matrices $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ son matrices de Hermite y además conmutan (i.e. $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$), entonces se tiene que su producto $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ es también una matriz de Hermite,
  - Corolario 1: si $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathbf{H}^n$ es también una matriz de Hermite,
  - Corolario 2: si dos matrices $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ son matrices de Hermite, entonces el producto $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ es también una matriz de Hermite.

Las matrices de Hermite son muy importantes en computación cuántica, porque corresponden a operadores cuánticos que tienen únicamente *eigen-values* reales. Cuando se aplica un operador tipificado por una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ a algún estado cuántico representado con un ket $|\phi\rangle$ y se mide el resultado, uno de los posibles resultados de la medición es precisamente uno de los *eigen-values* (reales) de la matriz $\mathbf{H}$.

La razón resulta evidente si suponemos que tenemos un vector de estado complejo $\mathbf{v}$ y una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada a algún operador cuántico. Si calculamos la transpuesta conjugada del producto $\mathbf{v}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{v}$ obtenemos:

$$\left(\mathbf{v}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{v}\right)^\dagger = \mathbf{v}^\dagger \left(\mathbf{v}^\dagger\mathbf{H}\right)^\dagger = \mathbf{v}^\dagger\mathbf{H}^\dagger\mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger\mathbf{H}\ \mathbf{v}$$

luego entonces el producto $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{H} \mathbf{v}$ es una matriz de Hermite (la matriz y su conjugada transpuesta son idénticas, definición misma de matrices de Hermite) y por lo tanto sus *eigen-values* son reales. Esto es especialmente importante en el mundo cuántico, donde las operaciones representadas por matrices de Hermite, miden alguna propiedad del sistema cuántico que debe ser real (v.g. spin total).

Las matrices de Hermite son Diagonizables a una matriz Unitaria... es decir, una matriz **H** de Hermite se puede escribir como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$$

donde la matriz **U** es Unitaria y la matriz $\boldsymbol{\Delta}$ es una matriz Diagonal que tiene únicamente valores reales.

Dado que **U** es Unitaria[11], entonces tenemos que $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}$. Por lo tanto, la matriz de Hermite **H** con *n eigen-vectors*, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$, se puede escribir como:

[11] Véase la siguiente sección 2.6 que describe las matrices unitarias

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \tag{14}$$

con $\lambda_k \in \mathbb{R}$ los *eigen-values* correspondientes a la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ y $\mathbf{u}_k$ los *eigen-vectors* asociados a cada *eigen-value*.

2.6 *Matrices Unitarias*

Se dice que una matriz es **Unitaria**, cuando su conjugada transpuesta es igual a su inversa... i.e.

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger, \text{ equivalentemente } \mathbf{U}^\dagger\ \mathbf{U} = \mathbf{U}\ \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I} \tag{15}$$

Las matrices Unitarias son Diagonalizables en otras matrices Unitarias. Es decir, una matriz Unitaria **U** se puede diagonalizar en otra matriz Unitaria **V** así:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{V}^{-1} \tag{16}$$

Una propiedad especialmente relevante de las matrices Unitarias en computación cuántica, tiene que ver con que el producto por una matriz Unitaria **U** preserva el producto punto de vectores. Es decir, dados dos vectores complejos **X**, **Y**, se tiene que:

$$(\mathbf{U}\mathbf{X}) \bullet (\mathbf{U}\mathbf{Y}) = \mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} \tag{17}$$

Las matrices Unitarias son muy utilizadas en computación cuántica, puesto que se trata de matrices que al aplicarse a un vector de estado, que describe un qubit, preserva su norma, es decir el qubit después de aplicar la compuerta cuántica se sigue manteniendo apuntando a la superficie de la esfera de Bloch y su amplitud de probabilidad se mantiene.

La demostración de esta propiedad es bastante sencilla... Supongamos que tenemos una compuerta cuántica definida por la matriz Unitaria $\mathbf{U}$ y un vector de estado $|\phi\rangle$ que representa un qubit. Por lo tanto $\langle \phi \,|\, \phi \rangle = 1$.

Queremos probar que si aplicamos la compuerta cuántica al qubit $|\phi\rangle$ y obtenemos $|\phi\prime\rangle = \mathbf{U}\,|\phi\rangle$, su norma se mantiene, es decir, $\langle \phi\prime \,|\, \phi\prime \rangle = 1$.

Por definición, $\langle \phi\prime \,|\, \phi\prime \rangle = \left\langle (\mathbf{U}\,|\phi\rangle)^\dagger \;\middle|\; \mathbf{U}\,|\phi\rangle \right\rangle$, luego entonces:

$$
\begin{aligned}
\langle \phi\prime \,|\, \phi\prime \rangle = \left\langle (\mathbf{U}\,|\phi\rangle)^\dagger \;\middle|\; \mathbf{U}\,|\phi\rangle \right\rangle &= \left\langle \left(|\phi\rangle^\dagger\,\mathbf{U}^\dagger\right) \;\middle|\; \mathbf{U}\,|\phi\rangle \right\rangle \\
&= \langle \phi |\, \cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}}\, |\phi\rangle = \langle \phi \,|\, \phi \rangle = 1 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

El así llamado **«Teorema Espectral para Matrices Unitarias»** resume las siguientes propiedades de las matrices Unitarias:

- sus *eigen-values* son en general complejos, pero siempre tienen módulo 1,
- los *eigen-vectors* correspondientes a *eigen-values* distintos, son ortogonales entre si.

Para probar la primera parte de esta propiedad basta con recordar que si $\mathbf{U}$ es una matrix Unitaria, entonces $\mathbf{U}\,\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}$ y además se tiene que $\mathbf{U}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$, donde λ es un *eigen-value* y $\vec{v}$ es su *eigen-vector* asociado.

Si aplicamos la conjugada transpuesta a ambos lados de la ecuación $\mathbf{U}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$ obtenemos que $\vec{v}^{\,\dagger}\,\mathbf{U}^\dagger = \overline{\lambda}\vec{v}^{\,\dagger}$ y si multiplicamos miembro a miembro por la expresión original $\mathbf{U}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{v}^{\,\dagger}\,\mathbf{U}^\dagger\right)\;(\mathbf{U}\,\vec{v}) &= \left(\overline{\lambda}\,\vec{v}^{\,\dagger}\right)\;(\lambda\vec{v}), \\
\vec{v}^{\,\dagger}\;\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{U}^\dagger\;\mathbf{U}}\;\vec{v} &= \overline{\lambda}\vec{v}^{\,\dagger}\,\lambda\vec{v}, \\
\vec{v}^{\,\dagger}\,\vec{v} &= \left(\overline{\lambda}\lambda\right)\;\vec{v}^{\,\dagger}\,\vec{v}, \\
|\vec{v}|^2 &= |\lambda|^2\;|\vec{v}|^2, \\
1 &= |\lambda|^2 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Recordando siempre que el módulo de un número complejo $\lambda = a + \imath b$, se denota como $|\lambda|$ es también llamada «la norma compleja» y se define como:

$$|\lambda| = |a + \imath b| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + \imath b)\,(a - \imath b)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda}}.$$

Un resultado interesante a tener presente, es que si $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, la matriz $\mathbf{U}$ resultante de la expresión:

$$\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}} \tag{20}$$

es una matriz Unitaria.

Es fácil encontrar la prueba. Primero encontremos la expresión para la conjugada transpuesta de la matriz $e^{\mathbf{A}}$, siendo $\mathbf{A}$ una matriz arbitraria[12]:

$$\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{\dagger} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right)^{\dagger} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{A}^k\right)^{\dagger}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^k}{k!} = e^{\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)}$$

[12] usemos las propiedades $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{B}^{\dagger}$, $\quad (\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$.

Es decir, la transpuesta conjugada de la exponencial de una matriz arbitraria $\mathbf{A}$ definida como $e^{\mathbf{A}}$, es igual a la exponencial de la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{A}$.

Utilizando esta expresión calculemos $\left(e^{+\imath \mathbf{H}}\right)^{\dagger}$ para una matriz $\mathbf{H}$ de Hermite[13]:

[13] usemos la propiedad $(z\mathbf{A})^{\dagger} = \bar{z}\mathbf{A}^{\dagger}$.

$$\left(e^{+\imath \mathbf{H}}\right)^{\dagger} = e^{(\imath \mathbf{H})^{\dagger}} = e^{-\imath\left(\mathbf{H}^{\dagger}\right)} = e^{-\imath \mathbf{H}}.$$

Ahora volvamos a la propiedad inicial que queríamos probar... si $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, la matriz $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}}$ es una matriz Unitaria... para probar la propiedad debemos verificar que $\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{\dagger} = e^{+\imath \mathbf{H}} \left(e^{+\imath \mathbf{H}}\right)^{\dagger} = e^{+\imath \mathbf{H}} e^{-\imath \mathbf{H}} = e^{+\imath \mathbf{0}} = \mathbf{I} \ \blacksquare$$

La prueba anteriormente mostrada permite, a partir de una matriz de Hermite $\mathbf{H}$, encontrar una matriz Unitaria $\mathbf{U}$ con la expresión $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}}$.

Sin embargo, es interesante también el proceso inverso... es decir, dada una matriz Unitaria $\mathbf{U}$, encontrar la (o las) matrices de Hermite $\mathbf{H}$ asociadas que cumplen la propiedad $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}}$.

Dado que $\mathbf{U}$ es Unitaria, sus *eigen-values* tendrán módulo 1 y serán en general de la forma $\lambda_j = e^{+\imath \theta_j}$ con $\theta_j \in \mathbb{R}$, en su versión compleja más genérica[14].

[14] en efecto, el número complejo definido por $e^{+\imath\theta_j}$ es equivalente a $\cos\theta_j + \imath \sin\theta_j$ y por lo tanto su módulo es $\cos^2\theta_j + \sin^2\theta_j = 1$

Dado que $\mathbf{U}$ es también Normal y por lo tanto Diagonizable, la podemos diagonalizar con una matriz Unitaria $\mathbf{R}$ tal que[15]:

[15] Como $\mathbf{R}$ es Unitaria, tenemos que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\dagger}$.

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{R}^{\dagger}$$

Hay que recordar que si $\mathbf{\Delta}$ es una matriz Diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene que:

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

Es decir, nuestra matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ cuyos elementos corresponden a los *eigen-values* $\lambda_j = e^{+\imath\theta_j}$, la podemos escribir:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} e^{+\imath\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{+\imath\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{+\imath\theta_n} \end{bmatrix} = e^{\wedge} \begin{bmatrix} +\imath\theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +\imath\theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & +\imath\theta_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado, es importante recordar que para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, con $\mathbf{B}$ invertible, se cumple que:

$$e^{\mathbf{B}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}^{-1}} = \mathbf{B}\ e^{\mathbf{A}}\ \mathbf{B}^{-1} \tag{21}$$

Con estas propiedades en mente, definamos la matriz $\mathbf{H}$ como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^{\dagger} \tag{22}$$

Si calculamos $e^{+\imath\mathbf{H}}$ obtenemos:

$$e^{+\imath \mathbf{H}} = e^\wedge \left(\imath \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger \right) = e^\wedge \left(\mathbf{R} \begin{bmatrix} \imath\theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \imath\theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \imath\theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger \right)$$

$$e^{+\imath \mathbf{H}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} e^{+\imath\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{+\imath\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{+\imath\theta_n} \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{U}$$

Es decir, dada una matriz Unitaria $\mathbf{U}$, si deseamos obtener una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ tal que $e^{+\imath \mathbf{H}} = \mathbf{U}$, basta con diagonalizar la matriz $\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{\Delta}\mathbf{R}^\dagger$ y encontrar los *eigen-values* λ_j de $\mathbf{U}$.

Luego para cada uno de los *eigen-values* λ_j hay que encontrar uno de los valores θ_j que hagan que $\lambda_j = e^{+\imath\theta_j}$... Con estos valores θ_j se encuentra fácilmente[16] la matriz $\mathbf{H}$ calculando:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger.$$

[16] el proceso es como sigue, siendo $\lambda_j \in \mathbb{C}$, lo podemos escribir sin pérdida de generalidad como $a_j + \imath b_j$, mientras que $e^{+\imath\theta_j} = \cos\theta_j + \imath \sin\theta_j$. Por lo tanto debemos encontrar los valores de θ_j que cumplen $a_j = \cos\theta_j$ y $b_j = \sin\theta_j$. Por supuesto, no olvidar que $\theta_j \in \mathbb{R}$ y que se trata de toda una familia de matrices de Hermite porque $\theta_j = \theta_j + 2\pi$.

Queda solo probar que la matriz $\mathbf{H}$ así definida es una matriz de Hermite. Calculemos la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{H}$ que calculamos, recordando siempre que $\theta_i \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{H}^\dagger = \left(\mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger \right)^\dagger = \mathbf{R} \left(\mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \right)^\dagger$$

$$= \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix}^\dagger \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{H}$$

Luego $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, ya que $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$.

En aras de la rigurosidad, es posible ver que si la matriz $\mathbf{H}$ recién encontrada cumple que $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}}$, entonces, cualquier matriz de la forma $\mathbf{H} + 2k\pi\mathbf{I}, n \in \mathbb{Z}$ también cumple la misma propiedad:

$$e^{+\imath(\mathbf{H}+2k\pi\mathbf{I})} = e^{+\imath\mathbf{H}}\ e^{+\imath 2k\pi\mathbf{I}} = \mathbf{U}\ e^{+\imath 2k\pi\mathbf{I}} = \mathbf{U}\ \mathbf{I} = \mathbf{U}$$

Luego para $k \in \mathbb{Z}$ cualquier matriz de la forma $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \mathbf{R}^\dagger + 2k\pi\mathbf{I} \tag{25}$$

se cumple que $\mathbf{U} = e^{+\imath\mathbf{H}}$.

Finalmente es importante reseñar una propiedad de las matrices Unitarias que nos va a resultar muy útil posteriormente. Si $\mathbf{U}$ es una matriz Unitaria y tenemos un escalar $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|^2 = 1$, entonces el producto $z\ \mathbf{U}$ es también una matriz Unitaria. Es decir:

$$z\ \mathbf{U}\ \text{ es Unitaria, si } \mathbf{U} \text{ es Unitaria y } |z|^2 = 1, z \in \mathbb{C} \tag{26}$$

La prueba es sencilla, dado que $\mathbf{U}$ es Unitaria, entonces se cumple que $\mathbf{U}\ \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}$. Calculemos la conjugada compleja de la nueva matriz $\mathbf{U}_1 = z\ \mathbf{U}$... Dado que $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $(\mathbf{U}_1)^\dagger = (z\ \mathbf{U})^\dagger = \bar{z}\ \mathbf{U}^\dagger$.

El producto entonces de la nueva matriz $\mathbf{U}_1$ con su conjugada transpuesta sería entonces:

$$\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_1^\dagger = z\ \mathbf{U}\ \ \bar{z}\ \mathbf{U}^\dagger = z\bar{z}\ \ \cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger} = \cancelto{1}{z\bar{z}}\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

Es decir, el multiplicar una matriz Unitaria por un número complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que el cuadrado de su magnitud o módulo $|z|^2 = 1$, obtenemos como resultado una matriz Unitaria. Diremos así que el producto de una matriz por un escalar $z \in \mathbb{C}$, con $|z|^2 = 1$ hace las matrices **unitariamente equivalentes**.

No siempre es evidente que el cuadrado de la magnitud de un número complejo es 1. Algunos casos son simples e intuitivos como por ejemplo:

$$|\pm 1|^2 = \left(1^2\right) = 1,$$

$$|\pm \imath|^2 = \left(1^2\right) = 1,$$

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm 1 \pm \imath\right)|^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1^2 + 1^2\right)\right) = 1,$$

$$|\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm 1 \pm \imath\right)|^2 = \left(\frac{1}{2}\left(1^2 + 1^2\right)\right) = 1,$$

$$|\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \imath \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 1,$$

$$|\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pm \imath \frac{1}{\sqrt{3}}|^2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1,$$

$$|\pm \frac{1}{2} \pm \imath \frac{\sqrt{3}}{2}|^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 1,$$

$$|\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \imath \frac{1}{2}|^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1,$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad |e^{+\imath k\pi}|^2 = |\cancelto{\pm 1}{\cos\left(k\pi\right)} + \imath \cancelto{0}{\sin\left(k\pi\right)}|^2 = |\pm 1|^2 = 1,$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad |e^{+\imath k\frac{\pi}{2}}|^2 = |\left(\cancelto{0}{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)} + \imath \cancelto{\pm\imath}{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}\right)|^2 = |(\pm\imath)|^2 = 1.$$

Otros en cambio, no son tan evidentes, incluso parecieran ser contrarios a nuestra intuición y un tanto sorprendentes para el lector recién iniciado en la aritmética compleja:

$$|\frac{\sqrt{2}}{1-\imath}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{1-\imath}\frac{1+\imath}{1+\imath}|^2 = |\frac{\sqrt{2}\,(1+\imath)}{1-\imath^2}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\imath)|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 = 1,$$

$$|\frac{\sqrt{2}}{1+\imath}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{1+\imath}\frac{1-\imath}{1-\imath}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{1-\imath^2}\,(1-\imath)|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1-\imath)|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 = 1,$$

$$|\frac{1}{1+\imath}\frac{2}{\sqrt{2}}|^2 = |\frac{\cancel{2}\,(1-\imath)}{\cancel{(1-\imath^2)}\sqrt{2}}|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}-\imath\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1,$$

$$|\frac{1}{1-\imath}\frac{2}{\sqrt{2}}|^2 = |\frac{\cancel{2}\,(1+\imath)}{\cancel{(1-\imath^2)}\sqrt{2}}|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}+\imath\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1,$$

$$|\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{(-1-\imath)}|^2 = |\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\frac{(-1+\imath)}{\cancel{(1-\imath^2)}}|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1+\imath)|^2 = |-\frac{1}{\sqrt{2}}+\imath\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1,$$

$$|\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{(-1+\imath)}|^2 = |\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{(1-\imath^2)}}\,(-1-\imath)|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1-\imath)|^2 = |-\frac{1}{\sqrt{2}}-\imath\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1,$$

$$|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\imath}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\imath-1}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\imath)^2}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{(1+\imath)}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{1-\imath^2}\,(1-\imath)|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1-\imath)|^2 = 1,$$

$$|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2\imath}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2\imath-1}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\imath)^2}}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{(1-\imath)}|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{1-\imath^2}\,(1+\imath)|^2 = |\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\imath)|^2 = 1.$$

En efecto, son infinitos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ tal que el cuadrado de su magnitud o módulo $|z|^2 = 1$. Basta con recordar la circunferencia en la imagen del diagrama de *'Argand'* de la figura 2.6 en la página 16.

Una última observación que nos resultará útil más adelante tiene que ver con que la raíz cuadrada de $\imath$ es un número complejo como cualquier otro.

$$\sqrt{\imath} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+\imath) \qquad (30)$$

En efecto,

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+\imath)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cancel{1}+2\imath+\cancel{\imath^2}\right) = \frac{1}{2}\,(2\imath) = \imath$$

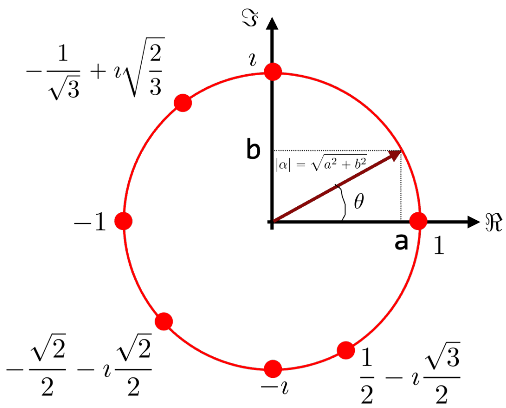

Figura 1: Circunferencia (en rojo) de números complejos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|^2 = 1$

2.7 *Matrices Involutorias*

Una matriz es **Involutoria** cuando su inversa es equivalente a ella misma... i.e.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \tag{31}$$

Todas las matrices Involutorias son Diagonizables... es decir, cualquier matriz Involutoria $\mathbf{A}$ se puede escribir como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{Q}^{-1}$$

con $\mathbf{Q}$ una matriz unitaria y $\mathbf{\Delta}$ una matriz Diagonal, cuyos elementos de la Diagonal son únicamente los valores ± 1.

Por ejemplo, la matriz $\mathbf{A}$ definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es Involutoria y se diagonaliza como[17]:

[17] Nótese que los elementos de la matriz Diagonal corresponden a ± 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{Q}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{Q}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

Las matrices Involutorias tienen las siguientes propiedades:

- si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son matrices Involutorias que conmutan ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), entonces, el producto $\mathbf{AB}$ es también una matriz Involutoria,
- si $\mathbf{A}$ es una matriz Involutoria y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathbf{A}^n$ es Involutoria. En efecto, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ para n impar y $\mathbf{I}$ para n par,

- una matriz Involutoria que adicionalmente sea matriz de Hermite, es también Unitaria,
- todas las matrices Involutorias corresponden a la raíz cuadrada de la matriz Identidad $\mathbf{I}$.

Es relativamente sencillo encontrar una matriz Involutoria, que sin embargo, no es Normal. Por ejemplo, la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

es Involutoria, pero no es Normal. La verificación es simple:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad \text{Involutoria} \\
\mathbf{A}\ \mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \neq \\
\mathbf{A}^\dagger\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{no Normal}
\end{aligned}$$

Hay una propiedad adicional supremamente interesante para matrices Involutorias que nos será útil más adelante: Dada una matriz Involutoria $\mathbf{A}$, se cumple que:

$$e^{+\imath\theta\mathbf{A}} = \cos\theta\ \mathbf{I} + \imath\sin\theta\ \mathbf{A} \tag{33}$$

Para probar esta propiedad hay que tener presente la expansión de series de Taylor para las funciones e^x, $\sin x$ y $\cos x$.

$$\begin{aligned}
e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \\
cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \\
sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots
\end{aligned}$$

Extrapolando a matrices Involutorias tenemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{+\imath\theta\mathbf{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\imath\theta\mathbf{A})^n}{n!} = \frac{(\imath\theta\mathbf{A})^0}{0!} + \frac{(\imath\theta\mathbf{A})^1}{1!} + \frac{(\imath\theta\mathbf{A})^2}{2!} + \frac{(\imath\theta\mathbf{A})^3}{3!} + \frac{(\imath\theta\mathbf{A})^4}{4!} + \ldots \\
&= \mathbf{A}^0 + \frac{\imath\theta\mathbf{A}}{1!} + \frac{\imath^2\theta^2\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\imath^3\theta^3\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\imath^4\theta^4\mathbf{A}^4}{4!} + \frac{\imath^5\theta^5\mathbf{A}^5}{5!} + \frac{\imath^6\theta^6\mathbf{A}^6}{6!} + \frac{\imath^7\theta^7\mathbf{A}^7}{7!} + \ldots \\
&= \underline{\mathbf{I}} + \underline{\frac{\imath\theta\mathbf{A}}{1!}} - \underline{\frac{\theta^2\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^2}}{2!}} - \underline{\frac{\imath\theta^3\cancelto{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^3}}{3!}} + \underline{\frac{\theta^4\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^4}}{4!}} + \underline{\frac{\imath\theta^5\cancelto{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^5}}{5!}} - \underline{\frac{\theta^6\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^6}}{6!}} - \underline{\frac{\imath\theta^7\cancelto{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^7}}{7!}} + \underline{\frac{\theta^8\cancelto{\mathbf{I}}{\mathbf{A}^8}}{8!}} + \ldots \\
&= \mathbf{I}\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \ldots\right) + \imath\mathbf{A}\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!}\ldots\right) \\
&= \mathbf{I}\cos\theta + \imath\mathbf{A}\sin\theta \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Utilizando la ecuación 33 en la página 17, es fácil mostrar como corolario que para una matriz Involutoria se cumple que:

$$e^{+\imath\pi\mathbf{I}} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

La prueba es sencilla:

$$e^{+\imath\pi\mathbf{I}} + \mathbf{I} = \mathbf{I}\ \cancelto{-1}{\cos\pi} + \imath\ \mathbf{I}\ \cancelto{0}{\sin\pi} + \mathbf{I} = -\cancel{\mathbf{I}} + \cancel{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \;\blacksquare$$

Siguiendo este mismo orden de ideas hay otra propiedad de interés... Para una matriz Involutoria $\mathbf{A}$ se cumple también que:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \mathbf{A} \qquad (36)$$

La prueba es también sencilla, tomemos la izquierda de la ecuación y apliquemos las propiedades conmutativas de la exponenciación de matrices:

$$
\begin{aligned}
e^{+\imath\frac{\pi}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{A})} &= e^{+\imath\frac{\pi}{2}\mathbf{I}}\ e^{+\imath\frac{-\pi}{2}\mathbf{A}} = \\
= \left(\mathbf{I}\,\cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \imath\mathbf{I}\,\cancelto{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) &\left(\mathbf{I}\,\cancelto{0}{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)} + \imath\mathbf{A}\,\cancelto{-1}{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}\right) \\
&= (\imath\mathbf{I})\ (-\imath\mathbf{A}) = -\imath^2\ \mathbf{IA} = \mathbf{A} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Esta propiedad se puede usar para calcular la raíz cuadrada de una matriz Involutoria $\mathbf{A}$... Con lo extraño que parezca extender la operación raíz cuadrada a matrices, se trata de encontrar una matriz $\sqrt{\mathbf{A}}$ que multiplicada por si misma nos permita obtener la matriz original $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{\mathbf{A}}$. Es decir[18], usando la propiedad de la ecuación 36 en la página 18 tenemos que:

[18] Note el componente "±"que aparece en estas ocasiones, para denotar que al menos hay dos expresiones ligeramente diferentes para la expresión $\sqrt{\mathbf{A}}$.

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \pm\, e^{+\imath\frac{\pi}{4}(\mathbf{I}-\mathbf{A})} \tag{38}$$

Es fácil ver que $\left(\pm\, e^{+\imath\frac{\pi}{4}(\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right)^2 = e^{+\imath\frac{\pi}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \mathbf{A}$.

Otra forma de calcular la raíz cuadrada de una matriz Involutoria es:

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \pm\,\frac{1+\imath}{2}\,(\mathbf{I}-\imath\mathbf{A}) \tag{39}$$

La prueba es sencilla:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(\pm\,\frac{1+\imath}{2}\right)^2 (\mathbf{I}-\imath\mathbf{A})^2 &= \frac{\cancel{1}+2\imath-\cancel{1}}{4}\left(\mathbf{I}^2-2\imath\mathbf{A}+\imath^2\mathbf{A}^2\right)\\ &= \frac{\imath}{2}\left(\cancel{\mathbf{I}}-2\imath\mathbf{A}-\cancel{\mathbf{I}}\right) = \frac{-\imath^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\mathbf{A} = \mathbf{A}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Por otro lado, si ya hemos encontrado la raíz cuadrada $\sqrt{\mathbf{A}}$ de una matriz $\mathbf{A}$, es posible que ver que cualquier matriz de la forma $e^{+\imath k\pi}\sqrt{\mathbf{A}},\ \ k\in\mathbb{Z},$ es también raíz cuadrada de $\mathbf{A}$, es decir:

$$\begin{aligned}\left(e^{+\imath k\pi}\ \sqrt{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(e^{+\imath k\pi}\right)^2\ \left(\sqrt{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(e^{+\imath k\pi}\right)^2\ \mathbf{A}\\ = (\cos(k\pi)+\imath\sin(k\pi))^2\ \mathbf{A} = \left(\cancelto{\pm 1}{\cos(k\pi)} + \imath\cancelto{0}{\sin(k\pi)}\right)^2\ \mathbf{A}\\ = (\pm 1)^2\ \mathbf{A} = \mathbf{A}, \qquad \text{para}\ \ k = 0,1,2,3,\ldots\end{aligned}$$

Es decir, claramente hay infinitas raíces cuadradas de una matriz Involutoria, todas con los mismos *eigen-vectors* y *eigen-values*, pero expresiones matriciales ligeramente distintas. Sus efectos observables son en cada caso idénticos.

Finalmente, grosso-modo una jerarquía de matrices complejas simplificada, de acuerdo a las definiciones que hemos hecho, tiene la apariencia de la figura 2.7 en la página 20.

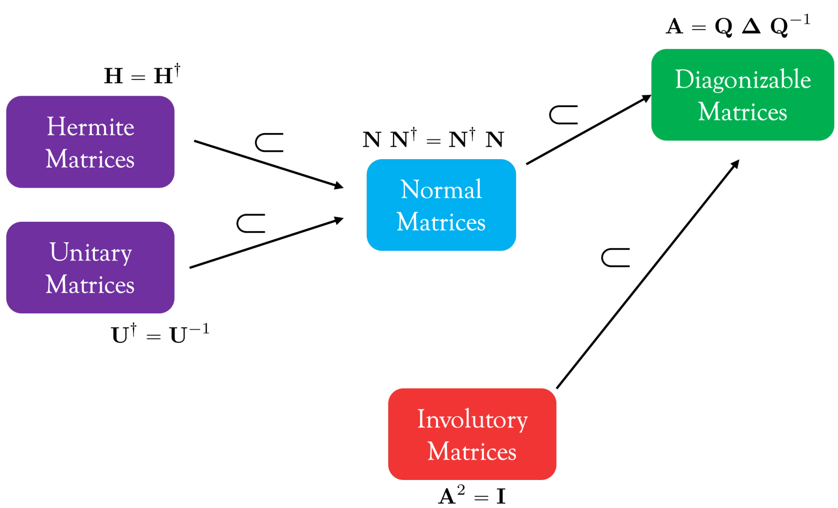

Figura 2: Una jerarquía de matrices

3 *Kets, Compuertas y Matrices*

El estado de un qubit se representa usando un vector columna de dos posiciones, o equivalentemente, usando la notación de Dirac, con la combinación lineal de dos bases como se muestra a continuación:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{42}$$

Cuando este qubit pasa a través de un proceso físico, si este proceso físico se puede caracterizar mediante una matriz **M** de dimensión 2×2:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix}, \text{ con } m_{i,j} \in \mathbb{C}$$

tenemos que el nuevo estado resultante es también un vector columna de dos posiciones (un nuevo ket en términos de Dirac) que lo podemos escribir como:

$$\mathbf{M}\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{43}$$

Ahora hay que recordar de las «Notas de Clase» 1, el significado geométrico 2D de un *eigen-vector* para una matriz **M**, que lo asociábamos a aquellos vectores que al aplicarle la matrix de transformación, simplemente se elongan (o se acortan) de acuerdo con su *eigen-value* asociado.

De acuerdo con esta intuición podemos afirmar que, si el estado $|\psi\rangle$ de un qubit corresponde a un *eigen-vector* de la matriz **M** que caracteriza una operación cuántica, entonces el resultado de aplicar esta operación al estado $|\psi\rangle$ es cuando mucho aplicar una fase global al ket original... es decir, el nuevo ket se podría representar como:

$$\mathbf{M}\,|\psi\rangle = e^{+\imath\theta}\,|\psi\rangle\,, \text{ con } \theta \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, los kets $|1\rangle$, $|-1\rangle$ difieren solo por una fase global de -1... En efecto $e^{+\imath\pi} = \cos\pi + \imath\sin\pi = -1 + 0 = -1$... Por lo tanto diremos que en general estos dos kets son indistinguibles.

Esta afirmación justifica la importancia del estudio de los *eigen-states* de las matrices asociadas a las compuertas cuánticas y son en todo equivalente a las siguientes afirmaciones:

- «El identificar a qué estados cuánticos se les asigna una fase global con la operación definida por **U** nos permite entender el comportamiento de la operación cuántica. Estos estados son los *eigen-states* de la operación **U**».

- «Si después de aplicar una operación cuántica definida por **U** al estado de un qubit, este se modifica solo en su fase global, diremos que este estado es un *eigen-state* de la matriz **U**».
- «Si dos operaciones cuánticas pueden representarse con matrices con los mismos *eigen-vectors* y *eigen-values*, diremos que estas operaciones son completamente indistinguibles la una de la otra».

Hay unos kets especiales, que por su sencillez de expresión y ubicación en la esfera de Bloch, se utilizan como bases estándares para un qubit. Estos Kets son:

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
|+\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \\
|+\imath\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad |-\imath\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sobre estos kets haremos diferentes operaciones, representadas con matrices. A continuación se presentará una lista de las matrices que caracterizan las compuertas cuánticas más importantes. Es claro que hay un conjunto infinito contable de compuertas, las aquí presentadas son una selección curada hecha por el autor de este documento, seleccionadas con el único propósito de reseñar las compuertas que tienen una importancia algorítmica más relevante.

3.1 *La compuerta* **NOT** *o X de Pauli*

La compuerta **NOT** (o compuerta **X** de Pauli) es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Es de Hermite y además Involutoria y se representa como:

$$\mathbf{NOT} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{X}\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = +\,|1\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |1\rangle$$

$$\mathbf{X}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\,|0\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |0\rangle$$

$$\mathbf{X}\,|+\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |+\rangle$$

$$\mathbf{X}\,|-\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\,|-\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |-\rangle$$

$$\mathbf{X}\,|+\imath\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \imath\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\imath\,|-\imath\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |-\imath\rangle$$

$$\mathbf{X}\,|-\imath\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\imath\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\imath\,|+\imath\rangle \quad \underset{\text{observable}}{\sim} \quad |+\imath\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **X** tenemos que:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **X** es una matrix Normal ($\mathbf{X}\,\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^\dagger\,\mathbf{X}$), es una matriz de Hermite ($\mathbf{X} = \mathbf{X}^\dagger$), Unitaria ($\mathbf{X}\,\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^\dagger\,\mathbf{X} = \mathbf{I}$) y es también Involutoria ($\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$).

$$\mathbf{X}\,\mathbf{X}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^\dagger\,\mathbf{X} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz **X** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y -1 respectivamente[19].

[19] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|+\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **X** de Pauli con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|-\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta **X** de Pauli con *eigen-value* -1... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje X, entonces diremos que la compuerta **X** al aplicarse a un ket, realiza un giro de π radianes del ket alrededor del eje X, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.1 de la página 24:

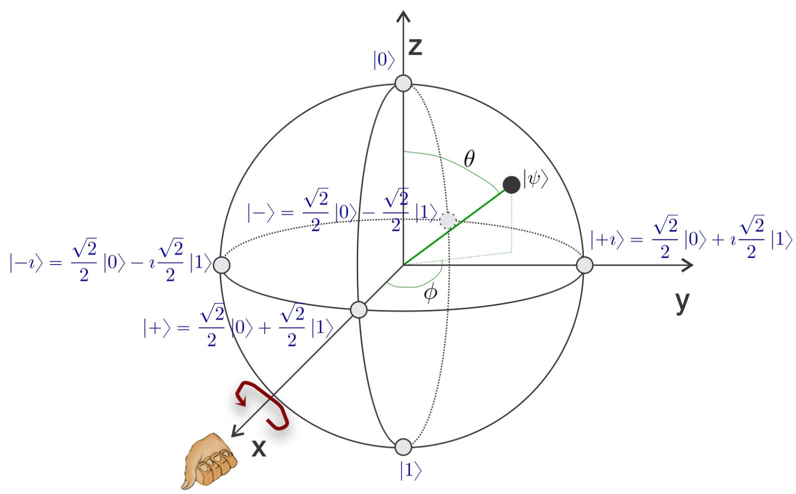

Figura 3: La compuerta **X** sugiere un giro de π radianes alrededor del eje X.

En efecto, esta matriz **X** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{X} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{47}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Adicionalmente, siendo **X** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{X} = (+1)\left|+\right\rangle\left\langle+\right| \quad + \quad (-1)\left|-\right\rangle\left\langle-\right| \tag{48}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{gathered}\mathbf{X} = (+1)\left|+\right\rangle\left\langle+\right| \;+\; (-1)\left|-\right\rangle\left\langle-\right| \\ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}\end{gathered}$$

Siendo además **X** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{+\imath\mathbf{X}}$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} & \left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} \\ \left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} & \left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Como adicionalmente **X** es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite **H** asociada, tal que $\mathbf{X} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz **H** que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectores* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y π, asociados a los *eigen-values* $+1$ y -1, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\pi} = \cos\pi + \imath\sin\pi = -1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que[20]:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{X}$$

[20] A veces para esta matriz se utiliza la expresión equivalente $\mathbf{H} = \frac{\pi}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}\right)$ que se deriva directamente de la ecuación 36 de la página 18

La raíz cuadrada de la matriz **X** está definida más adelante, en la subsección «**La compuerta** $\sqrt{\mathbf{X}}$».

El lector atento notará que en realidad la compuerta **X** no es una legítima compuerta **NOT** en el sentido en que la compuerta **X** solo hace la negación del estado de un qubit en la base computacional.

Una compuerta **NOT** legítima operará convirtiendo un qubit en la superficie de la esfera de Bloch a su antípoda. No existe una operación de matrices que exprese este comportamiento a cabalidad.

3.2 *La compuerta* **Y** *o Y de Pauli*

La compuerta **Y** de Pauli es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Es de Hermite y además Involutoria y se representa como:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{Y}\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \imath \end{bmatrix} = \imath \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = +\imath\,|1\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

$$\mathbf{Y}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath \\ 0 \end{bmatrix} = -\imath \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\imath\,|0\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\mathbf{Y}\,|+\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\imath \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\imath\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle$$

$$\mathbf{Y}\,|-\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \imath \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\imath\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle$$

$$\mathbf{Y}\,|+\imath\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle$$

$$\mathbf{Y}\,|-\imath\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\,|-\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **Y** tenemos que:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **Y** es una matriz Normal ($\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^{\dagger} = \mathbf{Y}^{\dagger}\,\mathbf{Y}$), es una matriz de Hermite ($\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\dagger}$), Unitaria ($\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^{\dagger} = \mathbf{Y}^{\dagger}\,\mathbf{Y} = \mathbf{I}$) y es también Involutoria ($\mathbf{Y}^2 = \mathbf{I}$).

$$\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{\dagger}\,\mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz **Y** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|+\imath\rangle$ y $|-\imath\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y -1, respectivamente[21].

[21] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - \imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|+\imath\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **Y** de Pauli con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|-\imath\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta **Y** de Pauli con *eigen-value* -1. Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje Y, entonces diremos que la compuerta **Y** al aplicarse a un ket, realiza un giro de π radianes del ket alrededor del eje Y, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.2 de la página 27:

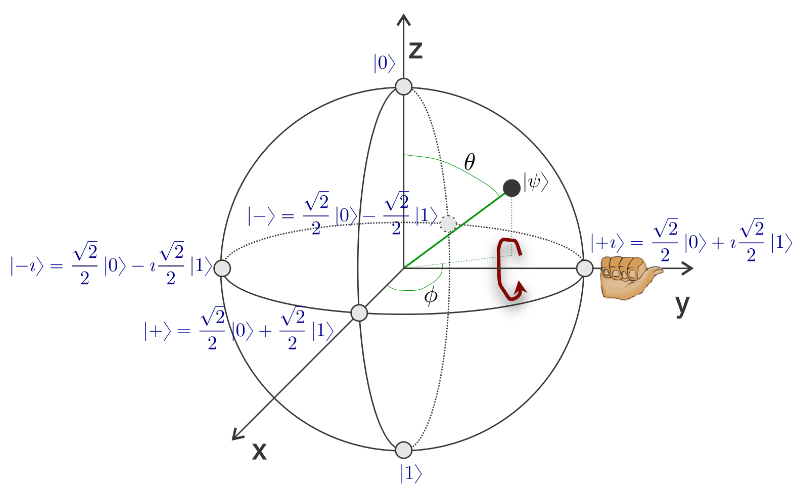

Figura 4: La compuerta **Y** sugiere un giro de π radianes alrededor del eje Y.

En efecto, esta matriz **Y** es Diagonalizable, de forma dada por $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^{-1}} \tag{54}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Adicionalmente, siendo **Y** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{Y} = (+1)\left|+\imath\right\rangle\left\langle+\imath\right| \quad + \quad (-1)\left|-\imath\right\rangle\left\langle-\imath\right| \tag{55}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{gathered}
\mathbf{Y} = (+1)\left|+\imath\right\rangle\left\langle+\imath\right| \;+\; (-1)\left|-\imath\right\rangle\left\langle-\imath\right| \\
= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\imath}{2} \\ \frac{\imath}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\imath}{2} \\ -\frac{\imath}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}
\end{gathered}$$

Siendo además **Y** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{+\imath\mathbf{Y}}$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} & -\imath\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} \\ \imath\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} & \left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} \end{bmatrix} \tag{57}$$

Como adicionalmente **Y** es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite **H** asociada, tal que $\mathbf{Y} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz **H** que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \imath\frac{\pi}{2} \\ -\imath\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \tag{58}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y π, asociados a los *eigen-values* $+1$ y -1, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\pi} = \cos\pi + \imath\sin\pi = -1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que[22]:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{Y}$$

[22] A veces para esta matriz se utiliza la expresión equivalente $\mathbf{H} = \frac{\pi}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{Y}\right)$ que se deriva directamente de la ecuación 36 de la página 18

La raíz cuadrada de la matriz **Y** está definida más adelante, en la subsección «**La compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$**».

3.3 *La compuerta* **Z** *o Z de Pauli*

La compuerta **Z** de Pauli o *phase flip* es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Es de Hermite y además Involutoria y se representa como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}\,|0\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\,|0\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle \\
\mathbf{Z}\,|1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\,|1\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle \\
\mathbf{Z}\,|+\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle \\
\mathbf{Z}\,|-\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle \\
\mathbf{Z}\,|+\imath\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|-\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle \\
\mathbf{Z}\,|-\imath\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **Z** tenemos que:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **Z** es una matrix Normal ($\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\,\mathbf{Z}$), es una matriz de Hermite ($\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\dagger$), Unitaria ($\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\,\mathbf{Z} = \mathbf{I}$) y es también Involutoria ($\mathbf{Z}^2 = \mathbf{I}$).

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^\dagger\,\mathbf{Z} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz **Z** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y -1 respectivamente[23].

[23] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos(0)\,|0\rangle + \sin(0)\,|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|0\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta $\mathbf{Z}$ de Pauli con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|1\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta $\mathbf{Z}$ de Pauli con *eigen-value* -1... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje Z, entonces diremos que la compuerta $\mathbf{Z}$ al aplicarse a un ket, realiza un giro de π radianes del ket alrededor del eje Z, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.3 de la página 30:

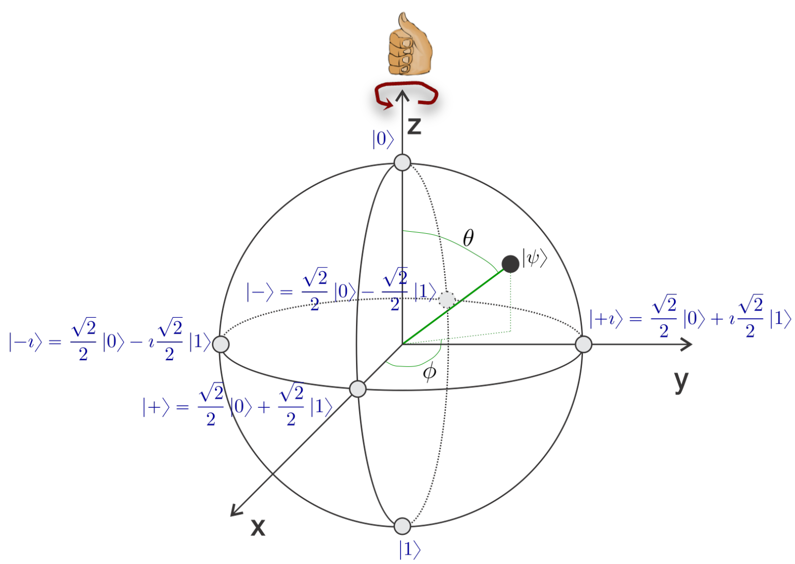

Figura 5: La compuerta $\mathbf{Z}$ sugiere un giro de π radianes alrededor del eje Z.

En efecto, esta matriz $\mathbf{Z}$ es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{61}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Adicionalmente, siendo $\mathbf{Z}$ una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{Z} = (+1)\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \quad + \quad (-1)\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \tag{62}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= (+1)\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \ + \ (-1)\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Siendo además $\mathbf{Z}$ una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria $\mathbf{U}$ asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{+\imath\mathbf{Z}}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{+\imath} & 0 \\ 0 & e^{-\imath} \end{bmatrix} \tag{64}$$

Como adicionalmente $\mathbf{Z}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\mathbf{Z} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz $\mathbf{H}$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \tag{65}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectores* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y π, asociados a los *eigen-values* $+1$ y -1, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\pi} = \cos\pi + \imath\sin\pi = -1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que[24]:

$$e^{+\imath\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{Z}$$

[24] A veces para esta matriz se utiliza la expresión equivalente $\mathbf{H} = \frac{\pi}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{Z}\right)$ que se deriva directamente de la ecuación 36 de la página 18

La raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{Z}$ está definida más adelante, en la subsección **«La compuerta $\sqrt{\mathbf{Z}}$»**.

3.4 La compuerta I

La compuerta **I** (o compuerta *NOP* o *wait-cycle*) corresponde a una matriz que no realiza ninguna transformación sobre el ket y se representa como la matriz identidad. Se trata de una matriz Unitaria, por lo tanto Normal, de Hermite e Involutoria, representada como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{66}$$

Dado que esta compuerta se representa con la matriz identidad, los correspondientes productos con los diferentes kets base son los mismos... Es decir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\,|0\rangle &= +\,|0\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle \\
\mathbf{I}\,|1\rangle &= +\,|1\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle \\
\mathbf{I}\,|+\rangle &= +\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle \\
\mathbf{I}\,|-\rangle &= +\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle \\
\mathbf{I}\,|+\imath\rangle &= +\,|+\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle \\
\mathbf{I}\,|-\imath\rangle &= +\,|-\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **I** tenemos que:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **I** es una matriz Normal ($\mathbf{I}\,\mathbf{I}^\dagger = \mathbf{I}^\dagger\,\mathbf{I}$), es una matriz de Hermite ($\mathbf{I} = \mathbf{I}^\dagger$), Unitaria ($\mathbf{I}\,\mathbf{I}^\dagger = \mathbf{I}^\dagger\,\mathbf{I} = \mathbf{I}$) y es también Involutoria ($\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$).

$$\mathbf{I}\,\mathbf{I}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}^\dagger\,\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz **I** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y $+1$ respectivamente.

Es decir, la base $|0\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **I** con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|1\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta **I** con *eigen-value* $+1$... Geométricamente diremos que la compuerta **I** al aplicarse a un ket, deja el ket exactamente en su posición original.

En efecto, esta matriz **I** es Diagonalizable, de forma dada por $\mathbf{I} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{68}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Adicionalmente, siendo **I** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{I} = (+1)\,|0\rangle\,\langle 0| \quad + \quad (+1)\,|1\rangle\,\langle 1| \tag{69}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (+1)\,|0\rangle\,\langle 0| \ + \ (+1)\,|1\rangle\,\langle 1| \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Siendo además **I** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{I}}$:

$$\mathbf{U} = e^{+\imath \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{71}$$

Como adicionalmente **I** es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite **H** asociada, tal que $\mathbf{I} = e^{+\imath \mathbf{H}}$. Una posible matriz **H** que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y 0, asociados a los *eigen-values* $+1$ y $+1$, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que[25]:

$$e^{+\imath \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \mathbf{I}$$

[25] A veces para esta matriz se utiliza la expresión equivalente $\mathbf{H} = \frac{\pi}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ que se deriva directamente de la ecuación 36 de la página 18

La raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{I}$ no es necesario definirla, toda vez que cualquier matriz Involutiva es una raíz de la matriz Identidad.

3.5 *La compuerta* H

La compuerta $\mathbf{H}$ (o compuerta *Hadamard*) es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Es de Hermite y además Involutoria y se representa como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{73}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{H}\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle$$

$$\mathbf{H}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle$$

$$\mathbf{H}\,|+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\,|0\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\mathbf{H}\,|-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = +\,|1\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

$$\mathbf{H}\,|+\imath\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\imath \\ 1-\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\imath} \begin{bmatrix} 1-\imath^2 \\ \cancel{1} - 2\imath + \cancel{\imath^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\imath} \begin{bmatrix} 1 \\ -\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\imath}\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle$$

$$\mathbf{H}\,|-\imath\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\imath \\ 1+\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\imath} \begin{bmatrix} 1-\imath^2 \\ \cancel{1} + 2\imath + \cancel{\imath^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+\imath} \begin{bmatrix} 1 \\ \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\imath}\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **H** tenemos que:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **H** es una matriz Normal ($\mathbf{H}\,\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^\dagger\,\mathbf{H}$), es una matriz de Hermite ($\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$), Unitaria ($\mathbf{H}\,\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}^\dagger\,\mathbf{H} = \mathbf{I}$) y es también Involutoria ($\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$).

$$\mathbf{H}\,\mathbf{H}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^\dagger\,\mathbf{H} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz **H** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

y los *eigen-values* asociados son -1 y $+1$ respectivamente.

Si asimilamos estos *eigen-vectors* a la definición de un ket en la esfera de Bloch[26], tenemos que:

[26] $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\,,$$
$$\text{de manera que } \; \theta = \frac{3\pi}{4}, \phi = \pi,$$
$$\text{y}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\,,$$
$$\text{de manera que } \; \theta = \frac{\pi}{4}, \phi = 0.$$

y entonces podemos ubicar en la esfera de Bloch estos *eigen-vectors*, recordando siempre que intuitivamente los *eigen-vectors* de una matriz identifican ejes de giro, del resultado de operar esta matriz sobre un vector.

Es decir, geométricamente, diremos que la compuerta **H** al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de π radianes alrededor del eje formado por sus *eigen-vectors*, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.5 de la página 36:

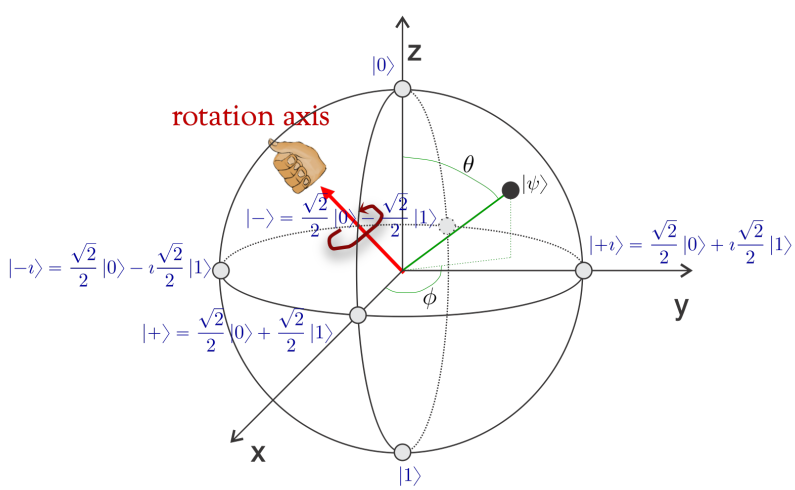

Figura 6: La compuerta **H** sugiere un giro de π radianes alrededor del eje formado por sus *eigen-vectors*.

En efecto, esta matriz **H** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{H} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{H} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \tag{76}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Adicionalmente, siendo $\mathbf{H}$ una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \tag{77}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \cancel{2}+\sqrt{2} & \sqrt{4-2} \\ \sqrt{4-2} & \cancel{2}-\sqrt{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \cancel{2}-\sqrt{2} & -\sqrt{4-2} \\ -\sqrt{4-2} & \cancel{2}+\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \end{aligned}$$

Siendo además la matriz $\mathbf{H}$ de Hadamard una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria $\mathbf{U}$ asociada, definida por la expresión $\mathbf{U} = e^{+\imath \mathbf{H}}$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \left(\left(\sqrt{2}+2\right) e^{2\imath} - \sqrt{2}+2\right) e^{-\imath} & \left(\sqrt{2}e^{2\imath} - \sqrt{2}\right) e^{-\imath} \\ \left(\sqrt{2}e^{2\imath} - \sqrt{2}\right) e^{-\imath} & \left(\left(\sqrt{2}-2\right) e^{2\imath} - \sqrt{2}-2\right) e^{-\imath} \end{bmatrix} \tag{79}$$

Como adicionalmente la matriz de Hadamard $\mathbf{H}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}_1$ asociada, tal que $\mathbf{H} = e^{+\imath \mathbf{H}_1}$. Una posible matriz $\mathbf{H}_1$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{80}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y π, asociados a los *eigen-values* $+1$ y -1, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\pi} = \cos\pi + \imath \sin\pi = -1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que[27]:

$$e^{+\imath \mathbf{H}_1} = e^{+\imath \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}} = \mathbf{H}$$

[27] A veces para esta matriz se utiliza la expresión equivalente $\mathbf{H}_1 = \frac{\pi}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{H})$ que se deriva directamente de la ecuación 36 de la página 18

La raíz cuadrada de la matriz **H** está definida más adelante, en la subsección «**La compuerta** $\sqrt{\mathbf{H}}$».

3.6 *La compuerta* S

La compuerta **S** es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \tag{81}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{S}\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\,|0\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\mathbf{S}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \imath \end{bmatrix} = \imath \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = +\imath\,|1\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

$$\mathbf{S}\,|+\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle$$

$$\mathbf{S}\,|-\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|-\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle$$

$$\mathbf{S}\,|+\imath\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle$$

$$\mathbf{S}\,|-\imath\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **S** tenemos que:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\imath \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **S** es una matrix Normal ($\mathbf{S}\ \mathbf{S}^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}\ \mathbf{S}$), no es una matriz de Hermite ($\mathbf{S} \neq \mathbf{S}^{\dagger}$), es Unitaria ($\mathbf{S}\ \mathbf{S}^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}\ \mathbf{S} = \mathbf{I}$) y no es Involutoria ($\mathbf{S}^2 \neq \mathbf{I}$).

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\imath \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz **S** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y $+\imath$ respectivamente[28].

[28] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos(0)\,|0\rangle + \sin(0)\,|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle$

Es decir, la base $|0\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **S** con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|1\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta **S** con *eigen-value* $+\imath$... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje Z, entonces diremos que la compuerta **S** al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje Z, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.6 de la página 40:

En efecto, esta matriz **S** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{S} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^{-1}} \tag{83}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Como **S** es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite **H** asociada, tal que $\mathbf{S} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz **H** que cumple esta propiedad se calcula como:

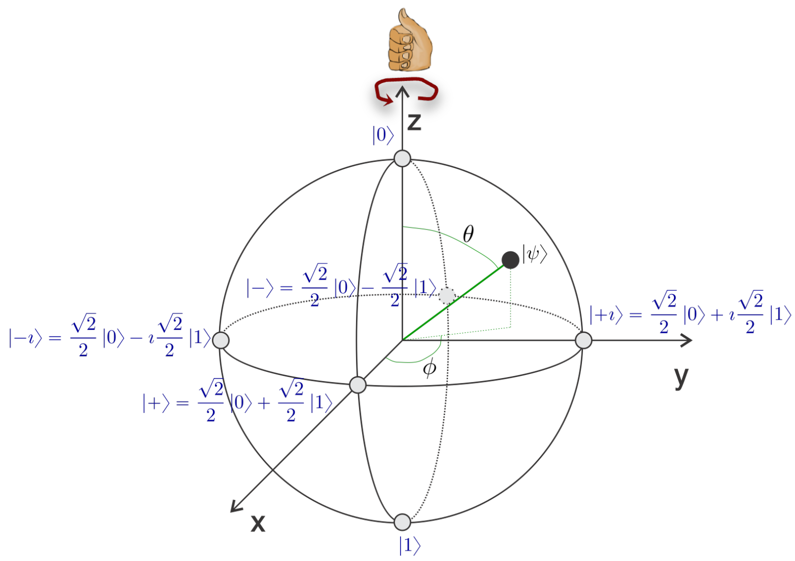

Figura 7: La compuerta **S** sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje Z.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y $\frac{\pi}{2}$, asociados a los *eigen-values* $+1$ y $+\imath$, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + \imath \sin \frac{\pi}{2} = +\imath$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que:

$$e^{+\imath \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{S}$$

Finalmente, es importante destacar que:

$$\mathbf{S}\ \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}$$

Es decir, la matriz **S** y la matriz $\sqrt{\mathbf{Z}}$ son completamente equivalentes[29]. En efecto, esta matriz $\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{Z}}$ se calculó utilizando la ecuación 39 de la página 19, de la siguiente manera:

[29] Esta es la razón por la que la interpretación geométrica sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes, siguiendo la regla de la mano derecha. Aplicar dos veces la compuerta **S** correspondería a dos giros sucesivos, cada uno de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z... lo que sería equivalente a un único giro de π radianes.

$$\sqrt{\mathbf{Z}} = \frac{1+\imath}{2}\left(\mathbf{I} - \imath\mathbf{Z}\right) = \frac{1+\imath}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\imath & 0\\ 0 & -\imath\end{bmatrix}\right) = \frac{1+\imath}{2}\begin{bmatrix}1-\imath & 0\\ 0 & 1+\imath\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-\imath^2 & 0\\ 0 & \cancel{1}+2\imath+\cancel{\imath^2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\imath\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \imath\end{bmatrix}$$

3.7 *La compuerta* T

La compuerta **T** es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{87}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{T}\left|0\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = +\left|0\right\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} \left|0\right\rangle$$
$$\mathbf{T}\left|1\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\e^{+\imath\frac{\pi}{4}}\end{bmatrix} = e^{+\imath\frac{\pi}{4}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = e^{+\imath\frac{\pi}{4}}\left|1\right\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} \left|1\right\rangle$$
$$\mathbf{T}\left|+\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}\left|-\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}\left|+\imath\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}\left|-\imath\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de **T** tenemos que:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **T** es una matrix Normal ($\mathbf{T}\,\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{T}^{\dagger}\,\mathbf{T}$), no es una matriz de Hermite ($\mathbf{T} \neq \mathbf{T}^{\dagger}$), es Unitaria ($\mathbf{T}\,\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{T}^{\dagger}\,\mathbf{T} = \mathbf{I}$) y no es Involutoria ($\mathbf{T}^2 \neq \mathbf{I}$).

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz **T** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y $e^{+\imath\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)$ respectivamente[30].

[30] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos(0)|0\rangle + \sin(0)|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|0\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **T** con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|1\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **T** con *eigen-value* $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)$... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje Z, entonces diremos diremos que la compuerta **T** al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de $\frac{\pi}{4}$ radianes alrededor del eje Z, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.7 de la página 42:

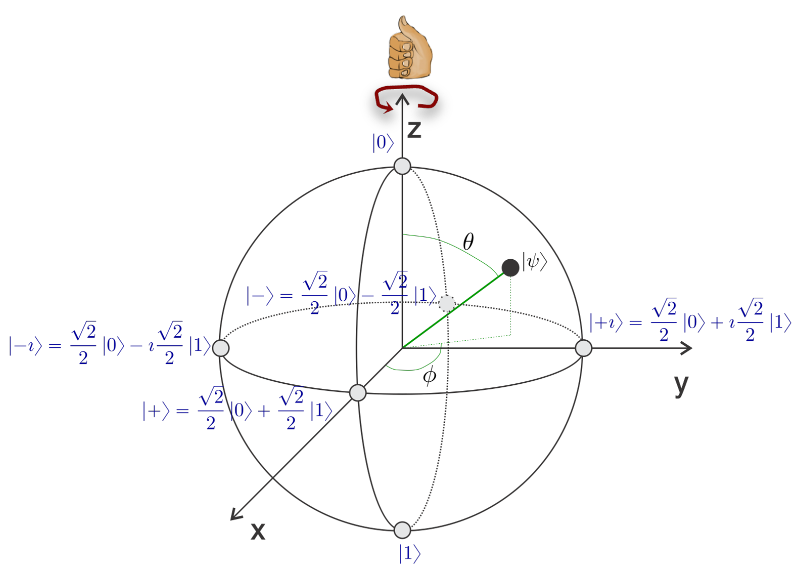

Figura 8: La compuerta **T** sugiere un giro de $\frac{\pi}{4}$ radianes alrededor del eje Z.

En efecto, esta matriz **T** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{T} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath) \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{90}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Como $\mathbf{T}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\mathbf{T} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz $\mathbf{H}$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \tag{91}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y $\frac{\pi}{4}$, asociados a los *eigen-values* $+1$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)$, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \mathbf{T}$$

Finalmente, es importante destacar que:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} = \mathbf{S}$$

Es decir, la matriz $\mathbf{T}$ y la matriz $\sqrt{\mathbf{S}}$ son completamente equivalentes[31].

[31] Esta es la razón por la que la interpretación geométrica sugiere un giro de $\frac{\pi}{4}$ radianes alrededor del eje Z. Aplicar dos veces la compuerta $\mathbf{T}$ correspondería a dos giros sucesivos, cada uno de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje Z... lo que sería equivalente a un único giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes.

3.8 La compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$

La compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Se representa como:

$$\sqrt{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix} \tag{93}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|0\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath \\ 1-\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\imath}\begin{bmatrix} (1+\imath)(1-\imath) \\ (1-\imath)(1-\imath) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\imath}\begin{bmatrix} 1-\imath^2 \\ 1-2\imath+\imath^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\imath}\begin{bmatrix} 1 \\ -\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\imath}\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|1\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\imath \\ 1+\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\imath}\begin{bmatrix} (1-\imath)(1+\imath) \\ (1+\imath)(1+\imath) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\imath}\begin{bmatrix} 1-\imath^2 \\ 1+2\imath+\imath^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\imath}\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1+\cancel{\imath}+1-\cancel{\imath} \\ 1-\cancel{\imath}+1+\cancel{\imath} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cancel{2} \\ \cancel{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|-\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cancel{1}+\imath-\cancel{1}+\imath \\ \cancel{1}-\imath-\cancel{1}-\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cancel{2}\imath \\ -\cancel{2}\imath \end{bmatrix}$$

$$= \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = +\imath\,|-\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|+\imath\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath+\imath-\imath^2 \\ \cancel{1}-\cancel{\imath}+\cancel{\imath}+\cancel{\imath^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 2+2\imath \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,|-\imath\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cancel{1}+\cancel{\imath}-\cancel{\imath}+\cancel{\imath^2} \\ 1-\imath-\imath-\imath^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2-2\imath \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\sqrt{\mathbf{X}}$ tenemos que:

$$\sqrt{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\imath & 1+\imath \\ 1+\imath & 1-\imath \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\sqrt{\mathbf{X}}$ es una matriz Normal ($\sqrt{\mathbf{X}}\ \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger}\ \sqrt{\mathbf{X}}$), no es una matriz de Hermite ($\sqrt{\mathbf{X}} \neq \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger}$), es Unitaria ($\sqrt{\mathbf{X}}\ \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger}\ \sqrt{\mathbf{X}} = \mathbf{I}$) y no es Involutoria ($\sqrt{\mathbf{X}}^{2} \neq \mathbf{I}$).

$$\sqrt{\mathbf{X}}\sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\imath & 1+\imath \\ 1+\imath & 1-\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\imath & 1+\imath \\ 1+\imath & 1-\imath \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{X}}^{\dagger}\sqrt{\mathbf{X}} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\sqrt{\mathbf{X}}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y $+\imath$ respectivamente[32].

[32] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|+\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|-\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ con *eigen-value* $+\imath$... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje X, entonces diremos que la compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje X, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.8 de la página 45:

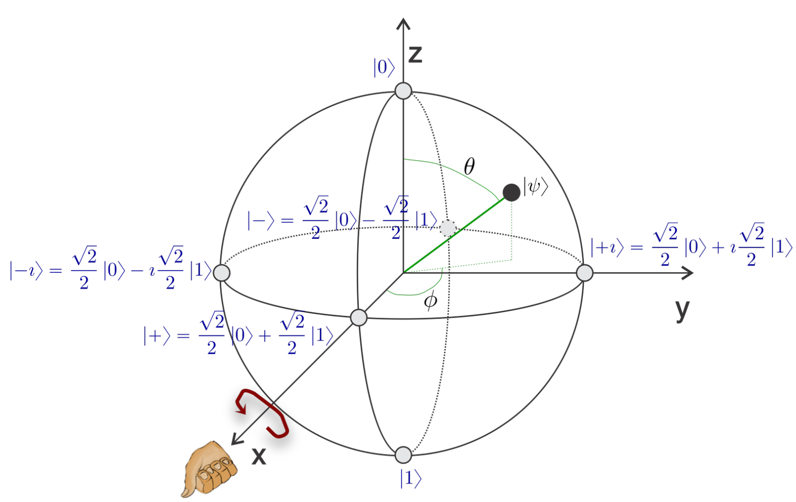

Figura 9: La compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje X.

En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{X}}$ es Diagonizable, de forma dada por

$\sqrt{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\sqrt{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{96}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Como $\sqrt{\mathbf{X}}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\sqrt{\mathbf{X}} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz $\mathbf{H}$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y $0\frac{\pi}{2}$, asociados a los *eigen-values* $+1$ y $+\imath$, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2} = +\imath$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{\mathbf{X}}$$

Finalmente, es importante destacar que:

$$\sqrt{\mathbf{X}}\,\sqrt{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1+\imath)^2+(1-\imath)^2 & 1-\imath^2+1-\imath^2 \\ 1-\imath^2+1-\imath^2 & (1-\imath)^2+(1+\imath)^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}$$

Es decir, la matriz $\sqrt{\mathbf{X}}^2$ y la matriz $\mathbf{X}$ son completamente equivalentes[33]. En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{X}}$ se calculó utilizando la ecuación 39 de la página 19, de la siguiente manera:

[33] Esta es la razón por la que la interpretación geométrica sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Aplicar dos veces la compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$ correspondería a dos giros sucesivos, cada uno de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje X... lo que sería equivalente a un único giro de π radianes.

$$\sqrt{\mathbf{X}} = \frac{1+\imath}{2}\left(\mathbf{I}-\imath\mathbf{X}\right) = \frac{1+\imath}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1+\imath}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}$$

3.9 *La compuerta* $\sqrt{\mathbf{X}'}$

Es posible usar un planteamiento diferente a la matriz $\sqrt{\mathbf{X}}$ utilizando una expresión matemática diferente dada por:

$$\sqrt{\mathbf{X}'} = \frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \tag{100}$$

que cumple también la propiedad que esperamos de la raíz cuadrada... i.e.

$$\sqrt{\mathbf{X}'}\,\sqrt{\mathbf{X}'} = \frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\imath}\begin{bmatrix} \imath^2+1 & 2\imath \\ 2\imath & \imath^2+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\imath}\begin{bmatrix} \cancelto{0}{\imath^2+1} & 2\imath \\ 2\imath & \cancelto{0}{\imath^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz $\sqrt{\mathbf{X}'}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$, mientras que los *eigenvalues* asociados son $+1$ y $+\imath$ respectivamente.

Es un poco laborioso pasar de una expresión de $\sqrt{\mathbf{X}'}$ a $\sqrt{\mathbf{X}}$, pero nada particularmente difícil...

$$\sqrt{\mathbf{X}'} = \frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+2\imath-1}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1+\imath)^2}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(1+\imath)}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+\imath)}\frac{(1-\imath)}{(1-\imath)}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\imath^2}\begin{bmatrix} \imath(1-\imath) & (1-\imath) \\ (1-\imath) & \imath(1-\imath) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath-\imath^2 & 1-\imath \\ 1-\imath & \imath-\imath^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & 1-\imath \\ 1-\imath & \imath+1 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{X}}$$

Expresión idéntica a la de la ecuación definida para $\sqrt{\mathbf{X}}$ en la sección «**La compuerta** $\sqrt{\mathbf{X}}$» de la página 43. Como quiera que los *eigen-vectors* y los *eigen-values* de esta matriz son idénticos a los ya reseñados para la matriz $\sqrt{\mathbf{X}}$ de la sección **«La compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$»** en la página 43, y encontramos una transformación algebraica que nos lleva del cuadrado de una al cuadrado de la otra, entonces diremos que las dos expresiones son en todo equivalentes.

3.10 La compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$

La compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Se representa como:

$$\sqrt{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} \tag{103}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|0\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 \\ \imath+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\imath+1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\imath+1)\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |+\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|1\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath-1 \\ +\imath+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-\imath-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-\imath-1)\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |-\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \imath+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\imath+1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|-\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\imath+1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|+\imath\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\,|+\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle$$

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\,|-\imath\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \imath \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \imath\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = +\imath\,|-\imath\rangle \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\sqrt{\mathbf{Y}}$ tenemos que:

$$\sqrt{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath+1 & -\imath+1 \\ \imath-1 & -\imath+1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\sqrt{\mathbf{Y}}$ es una matriz Normal ($\sqrt{\mathbf{Y}}\,\sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger}\,\sqrt{\mathbf{Y}}$), no es una matriz de Hermite ($\sqrt{\mathbf{Y}} \neq \sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger}$), es Unitaria ($\sqrt{\mathbf{Y}}\,\sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger}\,\sqrt{\mathbf{Y}} = \mathbf{I}$) y no es Involutoria ($\sqrt{\mathbf{Y}}^{2} \neq \mathbf{I}$).

$$\sqrt{\mathbf{Y}}\sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath+1 & -\imath+1 \\ \imath-1 & -\imath+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-\imath^2-\imath^2+1 & \cancel{\imath}-\cancel{\imath^2}-\cancel{\imath}+\cancel{\imath^2} \\ \cancel{\imath}-\cancel{\imath^2}+\cancel{\imath^2}-\cancel{\imath} & 1-\imath^2+1-\imath^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath+1 & -\imath+1 \\ \imath-1 & -\imath+1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{Y}}^{\dagger}\sqrt{\mathbf{Y}} = \mathbf{I}$$

Los *eigen-vectores* de esta matriz $\sqrt{\mathbf{Y}}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|+\imath\rangle$ y $|-\imath\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$ y $+\imath$ respectivamente[34].

[34] Nótese que estos *eigen-vectors* se pueden escribir numéricamente como: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - \imath\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$.

Es decir, la base $|+\imath\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ con *eigen-value* $+1$; mientras que la base $|-\imath\rangle$ es también un *eigen-vector* de la compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ con *eigen-value* $+\imath$... Geométricamente, dado que estos *eigen-vectors* componen el eje Y, entonces diremos que la compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje Y, siguiendo la regla de la mano derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.10 de la página 50:

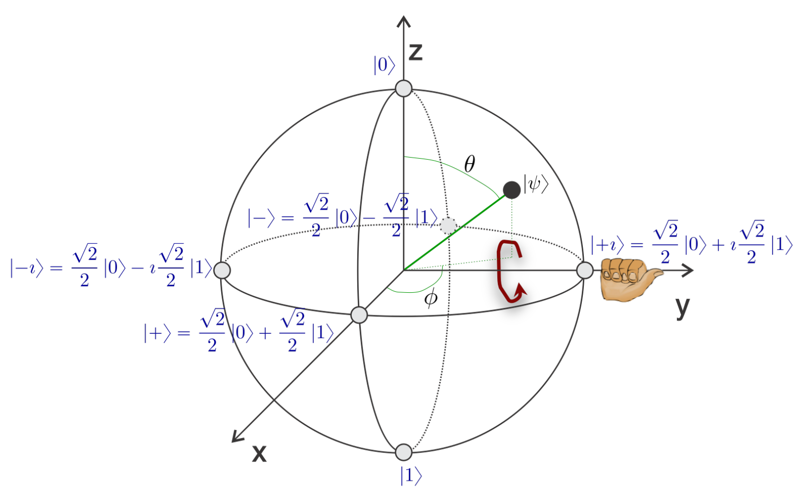

Figura 10: La compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje Y.

En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{Y}}$ es Diagonizable, de forma dada por $\sqrt{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\sqrt{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{106}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Como $\sqrt{\mathbf{Y}}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\sqrt{\mathbf{Y}} = e^{+\imath\mathbf{H}}$. Una posible matriz $\mathbf{H}$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{bmatrix} \tag{107}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores 0 y $\frac{\pi}{2}$, asociados a los *eigen-values* $+1$ y $+\imath$, puesto que $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$ y $e^{+\imath\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2} = \imath$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{\mathbf{Y}}$$

Finalmente, es importante destacar que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{Y}}\,\sqrt{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cancel{(\imath+1)^2} - \cancel{(\imath+1)^2} & -(\imath+1)^2 - (\imath+1)^2 \\ (\imath+1)^2 + (\imath+1)^2 & -\cancel{(\imath+1)^2} + \cancel{(\imath+1)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -2\left(\cancel{\imath^2} + 2\imath + \cancel{1}\right) \\ 2\left(\cancel{\imath^2} + 2\imath + \cancel{1}\right) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cancel{4}}\begin{bmatrix} 0 & -\cancel{4}\imath \\ \cancel{4}\imath & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$$

Es decir, la matriz $\sqrt{\mathbf{Y}}^2$ y la matriz $\mathbf{Y}$ son completamente equivalentes[35]. En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{Y}}$ se calculó utilizando la ecuación 39 de la página 19, de la siguiente manera:

[35] Esta es la razón por la que la interpretación geométrica sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Aplicar dos veces la compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$ correspondería a dos giros sucesivos, cada uno de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje Y... lo que sería equivalente a un único giro de π radianes.

$$\sqrt{\mathbf{Y}} = \frac{1+\imath}{2}\left(\mathbf{I} - \imath\mathbf{Y}\right) = \frac{1+\imath}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1+\imath}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\imath & -1-\imath\\ 1+\imath & 1+\imath\end{bmatrix}$$

3.11 La compuerta $\sqrt{\mathbf{Z}}$

La compuerta $\sqrt{\mathbf{Z}}$ es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Ya previamente la habíamos reseñado en la subsección **S** de la página 38, pues en realidad $\sqrt{\mathbf{Z}} = \mathbf{S}$.

3.12 La compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$

La compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$ es una matriz Unitaria, por lo tanto Normal. Pero no es una matriz de Hermite ni tampoco es Involutoria. Se representa como:

$$\sqrt{\mathbf{H}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix} \qquad (110)$$

O alternativamente[36], como:

[36] ambas expresiones son equivalentes numéricamente y de la una se puede derivar la otra.

$$\sqrt{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \imath\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(1-\imath) \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(1-\imath) & \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\imath\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \qquad (111)$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{H}}\,|0\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \\ -(\imath-1)\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
\sqrt{\mathbf{H}}\,|1\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2} \\ (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix} \\
\sqrt{\mathbf{H}}\,|+\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\left((\imath-1)\sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath+2 \\ -\sqrt{2}\left(-(i-1)\sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath+2 \end{bmatrix} \\
\sqrt{\mathbf{H}}\,|-\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\left((\imath-1)\sqrt{2}-2\imath-2\right)+2\imath-2 \\ \sqrt{2}\left(-(\imath-1)\sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath+2 \end{bmatrix} \\
\sqrt{\mathbf{H}}\,|+\imath\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\left((\imath-1)\sqrt{2}-2\imath-2\right)+2\imath+2 \\ -\sqrt{2}\left(-(\imath-1]\sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath+2 \end{bmatrix} \\
\sqrt{\mathbf{H}}\,|-\imath\rangle &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\left((\imath-1)\ \sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath-2 \\ \sqrt{2}\left(-(\imath-1)\ \sqrt{2}-2\imath-2\right)-2\imath+2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\sqrt{\mathbf{H}}$ tenemos que:

$$
\sqrt{\mathbf{H}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 & (\imath+1)\sqrt{2} \\ (\imath+1)\sqrt{2} & -(\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 \end{bmatrix}
$$

Es posible, aunque laborioso, ver que $\sqrt{\mathbf{H}}$ es una matrix Normal ($\sqrt{\mathbf{H}}\,\sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger}\,\sqrt{\mathbf{H}}$), no es una matriz de Hermite ($\sqrt{\mathbf{H}} \neq \sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger}$), es Unitaria ($\sqrt{\mathbf{H}}\ \sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger}\ \sqrt{\mathbf{H}} = \mathbf{I}$) y no es Involutoria ($\sqrt{\mathbf{H}}^{2} \neq \mathbf{I}$).

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{H}}\sqrt{\mathbf{H}}^{\dagger} = \frac{1}{4} &\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{4} &\begin{bmatrix} (\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 & (\imath+1)\sqrt{2} \\ (\imath+1)\sqrt{2} & -(\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} (\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 & (\imath+1)\sqrt{2} \\ (\imath+1)\sqrt{2} & -(\imath+1)\sqrt{2}-2\imath+2 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} -(\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2 & -(\imath-1)\sqrt{2} \\ -(\imath-1)\sqrt{2} & (\imath-1)\sqrt{2}+2\imath+2\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\sqrt{\mathbf{H}}$ son los vectores columna:

$$
\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
$$

con los *eigen-values* asociados son $+\imath$ y $+1$ respectivamente.

Al igual que con la compuerta $\mathbf{H}$, si asimilamos estos *eigen-vectors* a la definición de un ket en la esfera de Bloch[37], tenemos que:

[37] $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \\
\text{de manera que }\ \theta &= \frac{3\pi}{4}, \phi = \pi, \\
&\text{y} \\
\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{+\imath\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \\
\text{de manera que }\ \theta &= \frac{\pi}{4}, \phi = 0.
\end{aligned}
$$

y entonces podemos ubicar en la esfera de Bloch estos *eigen-vectors*, recordando siempre que intuitivamente los *eigen-vectors* de una matriz identifican ejes de giro, del resultado de operar esta matriz sobre un vector.

Es decir, geométricamente, diremos que la compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$ al aplicarse a un ket, realiza un giro del ket de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje formado por sus *eigen-vectors*, siguiendo la regla de la mano

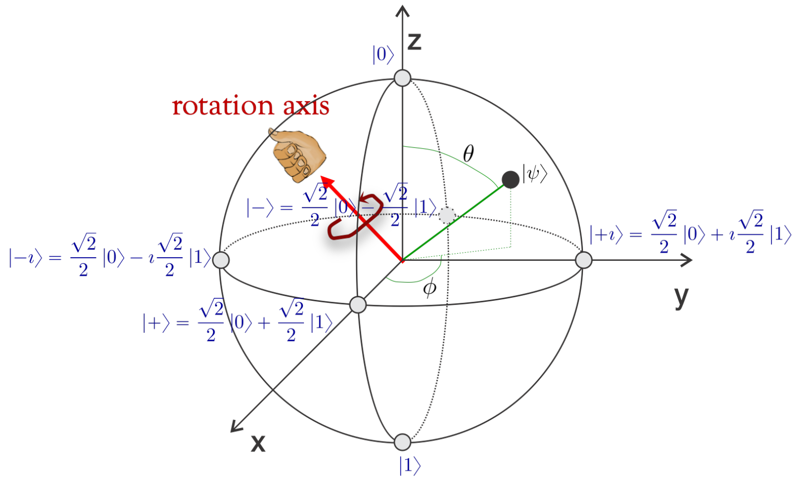

Figura 11: La compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$ sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del eje definido por sus *eigen-vectors*.

derecha, como se muestra a continuación en la figura 3.12 de la página 55:

En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{H}}$ es Diagonizable, de forma dada por $\sqrt{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\sqrt{\mathbf{H}} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \tag{116}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$.

Como $\sqrt{\mathbf{H}}$ es una matriz Unitaria, podemos derivar una matriz de Hermite $\mathbf{H}_1$ asociada, tal que $\sqrt{\mathbf{H}} = e^{+\imath \mathbf{H}_1}$. Una posible matriz $\mathbf{H}_1$ que cumple esta propiedad se calcula como:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\pi}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}+2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix} \tag{117}$$

Nótese en esta expresión del producto de matrices en los extremos las matrices formadas por los *eigen-vectors* y su conjugada transpuesta... Obsérvese también la matriz diagonal del centro, con valores $\frac{\pi}{2}$ y 0, asociados a los *eigen-values* $+\imath$ y $+1$, puesto que $e^{+\imath\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2} = \imath$ y $e^{+\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0 = +1$.

En efecto, el lector atento debiera verificar que:

$$e^{+\imath\frac{\pi}{8}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}+2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix}} = \sqrt{\mathbf{H}}$$

Finalmente, es importante destacar que:

$$\sqrt{\mathbf{H}}\,\sqrt{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$$

Es decir, la matriz $\sqrt{\mathbf{H}}^2$ y la matriz $\mathbf{H}$ son completamente equivalentes[38]. En efecto, esta matriz $\sqrt{\mathbf{H}}$ se calculó utilizando la ecuación 39 de la página 19, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{H}} = \frac{1+\imath}{2}\left(\mathbf{I} - \imath\mathbf{H}\right) = \frac{1+\imath}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right) \\
= \frac{1+\imath}{2}\begin{bmatrix}1-\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \\
= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}(1+\imath)\left(2-\imath\sqrt{2}\right) & (1+\imath)\left(-\imath\sqrt{2}\right)\\ (1+\imath)\left(-\imath\sqrt{2}\right) & (1+\imath)\left(2+\imath\sqrt{2}\right)\end{bmatrix} \\
= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2-\imath\sqrt{2}+2\imath-\imath^2\sqrt{2} & -\imath\sqrt{2}-\imath^2\sqrt{2}\\ -\imath\sqrt{2}-\imath^2\sqrt{2} & 2+\imath\sqrt{2}+2\imath+\imath^2\sqrt{2}\end{bmatrix} \\
= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\left(1-\imath\right)+2+2\imath & \sqrt{2}\left(1-\imath\right)\\ \sqrt{2}\left(1-\imath\right) & \sqrt{2}\left(\imath-1\right)+2+2\imath\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

[38] Esta es la razón por la que la interpretación geométrica sugiere un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Aplicar dos veces la compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$ correspondería a dos giros sucesivos, cada uno de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje formado por los *eigen-vectors*... lo que sería equivalente a un único giro de π radianes.

3.13 *Las compuertas Rotaciones sobre ejes*

Si tenemos una matriz $\mathbf{M}$ Unitaria (por lo tanto Normal), de Hermite y Involutoria, esta matriz sugiere un giro de γ radianes alrededor de un eje implícito en la matriz. Un posible giro arbitrario sobre este eje implícito se puede definir como:

$$\mathbf{R_M}\left(\gamma\right) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{M}} = \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{M} \tag{120}$$

Esta matriz así definida, es Unitaria, por lo tanto Normal[39], no es una matriz de Hermite[40] y no es Involutoria[41].

[39] $\mathbf{R_M}\left(\gamma\right)\ \mathbf{R_M}\left(\gamma\right)^\dagger = \mathbf{R_M}\left(\gamma\right)^\dagger\ \mathbf{R_M}\left(\gamma\right) = \mathbf{I}$

[40] $\mathbf{R_M}\left(\gamma\right) \neq \mathbf{R_M}\left(\gamma\right)^\dagger$

[41] $\mathbf{R_M}\left(\gamma\right)^2 \neq \mathbf{I}$.

Nótese que dependiendo del ángulo γ, esta expresión ofrece diferentes expresiones para la matriz. Por ejemplo,

$$\gamma = 0 \ldots \quad \mathbf{R_M}\left(0\right) = \cancelto{1}{\cos\frac{0}{2}}\mathbf{I} - \imath \cancelto{0}{\sin\frac{0}{2}}\mathbf{M} = \mathbf{I},$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \ldots \quad \mathbf{R_M}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{I} - \imath \sin\frac{\pi}{4}\mathbf{M} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{I} - \imath\,\mathbf{M}\right),$$

$$\gamma = \pi \ldots \quad \mathbf{R_M}\left(\pi\right) = \cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}\mathbf{I} - \imath \cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\mathbf{M} = -\imath\,\mathbf{M} \underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \mathbf{M}.$$

Es posible aplicar rotaciones consecutivas de esta matriz con diferentes ángulos y el resultado final sería equivalente a la aplicación de una sola rotación con un ángulo equivalente a la suma de los ángulos individuales... Es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{R_M}\left(\gamma_1\right)\ \mathbf{R_M}\left(\gamma_2\right)\ \ldots\ \mathbf{R_M}\left(\gamma_n\right) &= e^{-\imath\frac{\gamma_1}{2}\mathbf{M}}\ e^{-\imath\frac{\gamma_2}{2}\mathbf{M}}\ \ldots\ e^{-\imath\frac{\gamma_n}{2}\mathbf{M}} \\ &= e^{-\imath\frac{\gamma_1+\gamma_2+\ \ldots\ +\gamma_n}{2}\mathbf{M}} = \mathbf{R_M}\left(\gamma_1+\gamma_2+\ \ldots\ +\gamma_n\right)\ \blacksquare\end{aligned}$$

A continuación analizaremos las matrices de rotación de los ejes X, Y, Z y H:

La compuerta $R_\mathbf{X}\left(\gamma\right)$ de giro alrededor del eje X se definiría como:

$$\mathbf{R_X}\left(\gamma\right) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}} \tag{123}$$

O alternativamente, como:

$$\mathbf{R_X}\left(\gamma\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{124}$$

En efecto, es sencillo pasar de una expresión a la otra:

$$\begin{aligned}\mathbf{R_X}\left(\gamma\right) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}} = \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{X} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|0\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|1\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|+\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} \left|+\right\rangle$$

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|-\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} \left|-\right\rangle$$

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|+\imath\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_X}(\gamma)\left|-\imath\right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\mathbf{R_X}(\gamma)$ tenemos que:

$$\mathbf{R_X}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}}, \qquad \mathbf{R_X}(\gamma)^{\dagger} = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}}$$

O en el formato de matrices

$$\mathbf{R_X}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{R_X}(\gamma)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & \imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ \imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\mathbf{R_X}(\gamma)$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

con los *eigen-values* asociados $e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}$ y $e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}$ respectivamente.

Nótese que estos *eigen-vectors* son idénticos a los *eigen-vectors* que ya habíamos encontrado para las matrices $\mathbf{X}$ y $\sqrt{\mathbf{X}}$ y con los cuales concluíamos que se trataba de un giro alrededor del eje X. Todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido, sólo que el ángulo de giro es variable y definido por el parámetro γ. En efecto es fácil ver que una Rotación de 0 radianes corresponde a la matriz identidad (no giro), una Rotación de π radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\mathbf{X}$ clásica, mientras que una Rotación de $\frac{\pi}{2}$ corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\sqrt{\mathbf{X}}$, siempre siguiendo la regla de la mano derecha alrededor del eje X:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R_X}(0) &= \begin{bmatrix} \cos\frac{0}{2} & -\imath\sin\frac{0}{2} \\ -\imath\sin\frac{0}{2} & \cos\frac{0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \\
\mathbf{R_X}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\imath\sin\frac{\pi}{4} \\ -\imath\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2\imath}}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \\
&= -\imath\sqrt{\imath}\frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = -\imath\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\imath)\right)\frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\imath-\imath^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\imath+1)\frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \\
&\underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{X}} \\
\mathbf{R_X}(\pi) &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\imath\sin\frac{\pi}{2} \\ -\imath\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ -\imath & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\imath\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}
\end{aligned}$$

Esta última afirmación de «unitariamente equivalente a» se justifica más fácilmente si tenemos en cuenta que si $\mathbf{U}$ es una matriz Unitaria, de nuestra discusión de la ecuación 26 en la página 13, entonces la matriz $z\,\mathbf{U}$, con $z \in \mathbb{C}$, y $|z|^2 = 1$ también lo es[42].

[42] El lector atento notará que en esta prueba hemos usado la expresión para $\sqrt{\imath}$ de la ecuación 30 en la página 15: $\sqrt{\imath} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\imath)$.

En efecto, esta matriz $\mathbf{R_X}(\gamma)$ es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{R_X}(\gamma) = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{R_X}(\gamma) = \underset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{130}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Esta parte se puede probar fácilmente como:

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & -\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} - \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} + \cos\frac{\gamma}{2} + \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} & \cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} - \left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} - \left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\frac{\gamma}{2} - \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} + \cos\frac{\gamma}{2} + \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 2\cos\frac{\gamma}{2} & -2\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -2\imath\sin\frac{\gamma}{2} & 2\cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} & -\imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right] = \mathbf{R_X}\left(\gamma\right)
\end{aligned}
$$

Es claro que $\mathbf{R_X}\left(\gamma\right)$ se definió en la ecuación 123 de la página 57 como $\mathbf{R_X}\left(\gamma\right) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}}$. Siendo una matriz Unitaria, la correspondiente matriz de Hermite **H** asociada, tal que $\mathbf{R_X}\left(\gamma\right) = e^{+\imath\mathbf{H}}$, es simplemente la matriz $\mathbf{H} = -\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}$.

To Do, una reflexión acerca del efecto que tiene la compuerta rotación sobre una matriz de Hermite…

La compuerta $R_\mathbf{Y}\left(\gamma\right)$ de giro alrededor del eje Y se definiría como:

$$\mathbf{R_Y}\left(\gamma\right) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}} \tag{132}$$

O alternativamente, como:

$$\mathbf{R_Y}\left(\gamma\right) = \left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right] \tag{133}$$

En efecto, es sencillo pasar de una expresión a la otra:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R_Y}\left(\gamma\right) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}} = \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y} \\
&= \left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right] - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R_Y}(\gamma)|0\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_Y}(\gamma)|1\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_Y}(\gamma)|+\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_Y}(\gamma)|-\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_Y}(\gamma)|+\imath\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \\
&= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |+\imath\rangle \\
\mathbf{R_Y}(\gamma)|-\imath\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \\
&= e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |-\imath\rangle
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\mathbf{R_Y}(\gamma)$ tenemos que:

$$
\mathbf{R_Y}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}}, \qquad \mathbf{R_Y}(\gamma)^\dagger = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}}
$$

O en el formato de matrices

$$
\mathbf{R_Y}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{R_Y}(\gamma)^\dagger = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & \sin\frac{\gamma}{2} \\ -\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}
$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\mathbf{R_Y}(\gamma)$ son los vectores columna:

$$
\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

con los *eigen-values* asociados $e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}$ y $e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}$ respectivamente.

Nótese que estos *eigen-vectors* son idénticos a los *eigen-vectors* que ya habíamos encontrado para las matrices $\mathbf{Y}$ y $\sqrt{\mathbf{Y}}$ y con los cuales concluíamos que se trataba de un giro alrededor del eje Y. Todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido, sólo que el ángulo de giro es variable y definido por el parámetro γ. En efecto es fácil ver que una Rotación de 0 radianes corresponde a la matriz identidad (no giro), una Rotación de π radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta **Y** clásica, mientras que una Rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\sqrt{\mathbf{Y}}$, siempre siguiendo la regla de la mano derecha alrededor del eje Y:

$$\mathbf{R_Y}(0) = \begin{bmatrix} \cos\frac{0}{2} & -\sin\frac{0}{2} \\ \sin\frac{0}{2} & \cos\frac{0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R_Y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\imath+1}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\imath+1}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix} \underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \imath+1 & -\imath-1 \\ \imath+1 & \imath+1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\mathbf{Y}}$$

$$\mathbf{R_Y}(\pi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\imath\begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \mathbf{Y}$$

Esta última afirmación de «unitariamente equivalente a» se justifica más fácilmente si tenemos en cuenta que si **U** es una matriz Unitaria, de nuestra discusión de la ecuación 26 en la página 13, entonces la matriz $z\,\mathbf{U}$, con $z \in \mathbb{C}$, y $|z|^2 = 1$ también lo es.

En efecto, esta matriz $\mathbf{R_Y}(\gamma)$ es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{R_Y}(\gamma) = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{R_Y}(\gamma) = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{139}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**.

Esta parte se puede probar fácilmente como:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \imath & -\imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\imath \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ \imath\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) & -\imath\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\imath \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} + \cos\frac{\gamma}{2} + \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}} & -\imath\left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) + \imath\left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \imath\left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) - \imath\left(\cancel{\cos\frac{\gamma}{2}} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) & \left(\cos\frac{\gamma}{2} - \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}}\right) + \left(\cos\frac{\gamma}{2} + \cancel{\imath\sin\frac{\gamma}{2}}\right) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos\frac{\gamma}{2} & -2\sin\frac{\gamma}{2} \\ 2\sin\frac{\gamma}{2} & 2\cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{R_Y}(\gamma)
\end{aligned}
$$

Es claro que $\mathbf{R_Y}(\gamma)$ se definió en la ecuación 132 de la página 60 como $\mathbf{R_Y}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}}$. Siendo una matriz Unitaria, la correspondiente matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\mathbf{R_Y}(\gamma) = e^{+\imath\mathbf{H}}$, es simplemente la matriz $\mathbf{H} = -\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}$.

To Do, una reflexión acerca del efecto que tiene la compuerta rotación sobre una matriz de Hermite…

La compuerta $R_\mathbf{Z}(\gamma)$ de giro alrededor del eje Z se definiría como:

$$\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}} \tag{141}$$

O alternativamente, como:

$$\mathbf{R_Z}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{142}$$

En efecto, es sencillo pasar de una expresión a la otra:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R_Z}(\gamma) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}} = \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |0\rangle$$

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$= e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle$$

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|+\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|-\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|+\imath\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_Z}(\gamma)|-\imath\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\mathbf{R_Z}(\gamma)$ tenemos que:

$$\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}}, \qquad \mathbf{R_Z}(\gamma)^{\dagger} = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}}$$

O en el formato de matrices

$$\mathbf{R_Z}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{R_Z}(\gamma)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\mathbf{R_Z}(\gamma)$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con los *eigen-values* asociados $e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}$ y $e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}$ respectivamente.

Nótese que estos *eigen-vectors* son idénticos a los *eigen-vectors* que ya habíamos encontrado para las matrices $\mathbf{Z}$ y $\sqrt{\mathbf{Z}}$ y con los cuales concluíamos que se trataba de un giro alrededor del eje Z. Todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido, sólo que el ángulo de giro es variable y definido por el parámetro γ. En efecto es fácil ver que una Rotación de 0 radianes corresponde a la matriz identidad (no giro), una Rotación de π radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\mathbf{Z}$ clásica, mientras que una Rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\sqrt{\mathbf{Z}}$, siempre siguiendo la regla de la mano derecha alrededor del eje Z:

$$\mathbf{R_Z}(0) = \begin{bmatrix} \cos\frac{0}{2} - \imath\sin\frac{0}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{0}{2} + \imath\sin\frac{0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R_Z}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} - \imath\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1-\imath & 0 \\ 0 & 1+\imath \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1+\imath}\begin{bmatrix} 1-\imath^2 & 0 \\ 0 & (1+\imath)^2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1+\imath}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\imath \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{1+\imath}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix} \underset{\text{equivalente a}}{\sim} \sqrt{\mathbf{Z}}$$

$$\mathbf{R_Z}(\pi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} - \imath\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix}$$
$$= -\imath\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{equivalente a}}{\sim} \mathbf{Z}$$

Esta última afirmación de «unitariamente equivalente a» se justifica más fácilmente si tenemos en cuenta que si $\mathbf{U}$ es una matriz Unitaria, de nuestra discusión de la ecuación 26 en la página 13, entonces la matriz $z\,\mathbf{U}$, con $z \in \mathbb{C}$, y $|z|^2 = 1$ también lo es.

En efecto, esta matriz $\mathbf{R_Z}(\gamma)$ es trivialmente Diagonizable[43], de forma dada por $\mathbf{R_Z}(\gamma) = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

[43] ya es una matriz Diagonal

$$\mathbf{R_Z}(\gamma) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^{-1}} = \begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix} \qquad (148)$$

que es realmente trivial de verificar y -por supuesto- de muy limitada utilidad.

Es claro que $\mathbf{R_Z}(\gamma)$ se definió en la ecuación 141 de la página 63 como $\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}}$. Siendo una matriz Unitaria, la correspondiente matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{+\imath\mathbf{H}}$, es simplemente la matriz $\mathbf{H} = -\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}$.

To Do, una reflexión acerca del efecto que tiene la compuerta rotación sobre una matriz de Hermite...

La compuerta $R_{\mathbf{H}}(\gamma)$ de giro alrededor del eje $'h'$ se definiría como:

$$\mathbf{R_H}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}} \tag{149}$$

O alternativamente, como:

$$\mathbf{R_H}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{150}$$

En efecto, es sencillo pasar de una expresión a la otra:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_H}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}} &= \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{H} \\ = &\begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|0\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|1\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|+\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|-\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|+\imath\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \imath\cos\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R_H}(\gamma)\,|-\imath\rangle &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \imath\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos la transpuesta conjugada de $\mathbf{R_H}(\gamma)$ tenemos que:

$$\mathbf{R_H}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}}, \qquad \mathbf{R_H}(\gamma)^{\dagger} = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}}$$

O en el formato de matrices:

$$\mathbf{R_H}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R_H}(\gamma)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\mathbf{R_H}(\gamma)$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

con los *eigen-values* asociados $e^{-\imath\frac{\gamma}{2}}$ y $e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}$ respectivamente.

Nótese que estos *eigen-vectors* son idénticos a los *eigen-vectors* que ya habíamos encontrado para las matrices **H** y $\sqrt{\mathbf{H}}$ y con los cuales concluíamos que se trataba de un giro alrededor del eje $'h'$. Todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido, sólo que el ángulo de giro es variable y definido por el parámetro γ. En efecto es fácil ver que una Rotación de 0 radianes corresponde a la matriz identidad (no giro), una Rotación de π radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta **H** clásica, mientras que una Rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes podría corresponder a un giro equivalente a la compuerta $\sqrt{\mathbf{H}}$, siempre siguiendo la regla de la mano derecha alrededor del eje $'h'$:

$$\mathbf{R_H}(0) = \begin{bmatrix} \cos\frac{0}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{0}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{0}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{0}{2} & \cos\frac{0}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R_H}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \imath\right) & -\imath\frac{1}{2} \\ -\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \imath\right) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - 2\imath & -2\imath \\ -2\imath & 2\sqrt{2} + 2\imath \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{R_H}(\pi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{unitariamente equivalente a}}{\sim} \mathbf{H}$$

Esta última afirmación de «unitariamente equivalente a» se justifica más fácilmente si tenemos en cuenta que si **U** es una matriz

Unitaria, de nuestra discusión de la ecuación 26 en la página 13, entonces la matriz $z\,\mathbf{U}$, con $z \in \mathbb{C}$, y $|z|^2 = 1$ también lo es.

En efecto, esta matriz $\mathbf{R_H}(\gamma)$ es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{R_H}(\gamma) = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{R_H}(\gamma) = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \tag{156}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) & \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) & -\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por razones de espacio y legibilidad de la prueba, debemos considerar cada elemento individual de la matriz producto por separado: $\mathbf{R_H}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
a_{1,1} = \frac{1}{4}&\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\left(2 + \cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{2}}\right) - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cancel{2} + \sqrt{2} - \cancel{2} + \sqrt{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}(2+2) - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\right) = \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cancel{\sqrt{2^2-2}} - \cancel{\sqrt{2^2-2}}\right) - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{2^2-2} + \sqrt{2^2-2}\right)\right) = -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

$$a_{2,1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cancel{\sqrt{2^2-2}} - \cancel{\sqrt{2^2-2}}\right) - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{2^2-2} + \sqrt{2^2-2}\right)\right) = -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$a_{2,2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\left(2 - \cancel{\sqrt{2}} + 2 + \cancel{\sqrt{2}}\right) + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(-\cancel{2} + \sqrt{2} + \cancel{2} + \sqrt{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{2}(2+2) + \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\right) = \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Reuniendo los elementos $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ en una matriz obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{R_H}(\gamma)$$

Es claro que $\mathbf{R_H}(\gamma)$ se definió en la ecuación 149 de la página 66 como $\mathbf{R_H}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}}$. Siendo una matriz Unitaria, la correspondiente matriz de Hermite $\mathbf{H_1}$ asociada, tal que $\mathbf{R_H}(\gamma) = e^{+\imath\mathbf{H_1}}$, es simplemente la matriz $\mathbf{H_1} = -\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}$.

To Do, una reflexión acerca del efecto que tiene la compuerta rotación sobre una matriz de Hermite…

3.14 *La compuerta Rotación sobre un eje arbitrario $\vec{n}$*

Dado un vector $\vec{n}$ de tres coordenadas, es posible definir una compuerta de giro alrededor del eje definido por el vector $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, con $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{R}$, $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. La matriz asociada estaría definida como:

$$\mathbf{R_{\tilde{n}}}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(n_x\mathbf{X} + n_y\mathbf{Y} + n_z\mathbf{Z}\right)} \tag{163}$$

O alternativamente, como:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} - \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} - n_y\sin\frac{\gamma}{2} \\ -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} + n_y\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{164}$$

En efecto, es sencillo pasar de una expresión a la otra:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(n_x\mathbf{X}+n_y\mathbf{Y}+n_z\mathbf{Z}\right)} &= \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\sin\frac{\gamma}{2}\left(n_x\mathbf{X}+n_y\mathbf{Y}+n_z\mathbf{Z}\right)\\
&= \cos\frac{\gamma}{2}\mathbf{I} - \imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{X} - \imath\, n_y\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y} - \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}\end{aligned}$$

$$= \cos\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \imath\, n_y\sin\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}0 & -\imath\\ \imath & 0\end{bmatrix} - \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} + \imath^2\, n_y\sin\frac{\gamma}{2}\\ -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} - \imath^2 n_y\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2} - \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2} & -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} - n_y\sin\frac{\gamma}{2}\\ -\imath\, n_x\sin\frac{\gamma}{2} + n_y\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} + \imath\, n_z\sin\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Como casos especiales tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\gamma) = \mathbf{R}_{(1,0,0)}(\gamma) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}(1\mathbf{X}+0\mathbf{Y}+0\mathbf{Z})} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{X}},\\
\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}(\gamma) = \mathbf{R}_{(0,1,0)}(\gamma) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}(0\mathbf{X}+1\mathbf{Y}+0\mathbf{Z})} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Y}},\\
\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(\gamma) = \mathbf{R}_{(0,0,1)}(\gamma) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}(0\mathbf{X}+0\mathbf{Y}+1\mathbf{Z})} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}},\\
\mathbf{R}_{\mathbf{H}}(\gamma) = \mathbf{R}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}(\gamma) &= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{X}+0\mathbf{Y}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{Z}\right)} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{X}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{Z}\right)}.\end{aligned}$$

Estos casos especiales son triviales de verificar... por ejemplo, el último:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{X}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{Z}\right)} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)}$$

$$= e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}} = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{H}} \blacksquare$$

Estas expresiones sugieren la posibilidad que cualquier compuerta de un qubit puede ser expresada como una rotación alrededor de un eje dado por el vector $\vec{n}$ usando la matriz definida por $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma)$.

Es posible intentar diagonalizar esta matriz en el producto de una matriz unitaria formada por sus *eigen-vectors* en columnas, una matriz diagonal con sus *eigen-values* y la inversa de la primera matriz, de acuerdo con la ecuación 8 de la página 5.

Para este fin necesitamos recordar la ecuación 6 de la página 4, en la que concluíamos que cada *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$ es también un *eigen-vector* de la matriz $e^{\mathbf{A}}$ y que si el correspondiente *eigen-value* de $\mathbf{A}$ es λ, la matriz $e^{\mathbf{A}}$ tendrá como *eigen-value* e^{λ}.

En este caso concreto, dado que $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\left(n_x\mathbf{X}+n_y\mathbf{Y}+n_z\mathbf{Z}\right)}$, los *eigen-vectors* de la matriz $-\imath\frac{\gamma}{2}\left(n_x\mathbf{X}+n_y\mathbf{Y}+n_z\mathbf{Z}\right)$, serán también los *eigen-vectors* de la matriz $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma)$.

Recordando que el vector $\vec{v} = \left(n_x, n_y, n_z\right)$ define el eje del giro de la compuerta $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma)$, entonces tendremos dos *eigen-vectors* correspondientes al punto definido en coordenadas Cartesianas por $\left(n_x, n_y, n_z\right)$ y su correspondiente antípoda $\left(-n_x, -n_y, -n_z\right)$.

Al convertir estas coordenadas de Cartesianas a Esféricas, tenemos la siguiente equivalencia:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} = 1 \\
\theta &= \arccos\left(\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}\right] = \arccos\left(n_z\right), \\
\phi &= \arctan 2\left(n_y, n_x\right).
\end{aligned}
$$

Con estos valores de θ y ϕ calculados[44], podemos expresar este eje de giro en términos de un ket con la combinación lineal usada ya frecuentemente antes:

[44] Hay que tener presente, sin embargo, los ángulos de interés. La esfera de Bloch define $0 \leq \theta \leq \pi$, mientras que en nuestra conversión de coordenadas θ es el resultado de un $\arctan 2$ y por lo tanto los posibles resultados para el cálculo de θ son $-\pi < \theta \leq \pi$. Hay que hacer los ajustes manuales del caso.

$$
|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\imath\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle
$$

Estos kets así expresados corresponden a los *eigen-vectors* de la compuerta $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\gamma)$.

Por ejemplo, la compuerta **H** tiene asociado un significado geométrico de giro alrededor de un eje medio entre el eje X y el eje Z que lo definíamos como $\left(n_x = \frac{\sqrt{2}}{2}, n_y = 0, n_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y su correspondiente antípoda $\left(n_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n_y = 0, n_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pasando a coordenadas polares el punto del eje de giro tenemos:

$$
\begin{aligned}
r = \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \\
\theta = \arccos\left(\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}\right) &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \\
\phi = \arctan 2\left(n_y, n_x\right) &= \arctan 2\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo que este eje de giro equivale al ket:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\imath\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{8}|0\rangle + e^{\imath 0}\sin\frac{\pi}{8}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{8}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{8}|1\rangle \\
= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Y pasando a coordenadas polares la antípoda asociada tenemos:

$$
r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1
$$

$$
\theta = \arccos\left(\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}
$$

$$
\phi = \arctan 2\left(n_y, n_x\right) = \arctan 2\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0
$$

Por lo que este eje de giro equivale al ket:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{\imath\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = \cos\frac{5\pi}{8}|0\rangle + e^{\imath 0}\sin\frac{5\pi}{8}|1\rangle = \cos\frac{5\pi}{8}|0\rangle + \sin\frac{5\pi}{8}|1\rangle \\
= \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle \\
= \left(\cancelto{-1}{\cos(\pi)}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cancelto{0}{\sin(\pi)}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)|0\rangle + \left(\cancelto{0}{\sin(\pi)}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cancelto{-1}{\cos(\pi)}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)|1\rangle \\
= -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle = -\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)|1\rangle\right) \\
= \left[- \begin{matrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

Es decir, encontramos que los *eigen-vectors* de la matriz **H** son:

$$
\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
$$

y que sus correspondientes *eigen-values* son $+1$ y -1, algo completamente acorde con los valores que ya habíamos encontrado previamente como *eigen-vectors* y *eigen-values* de la matriz **H**.

3.15 *La compuerta cambio de fase*

Existe otra función paramétrica que cambia la fase de un qubit de acuerdo con un ángulo γ. Esta compuerta está -por supuesto- estrechamente ligada con la compuerta **Z** y se define como:

$$\mathbf{P}(\gamma) = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}\mathbf{R_Z}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{\frac{\gamma}{\pi}} \tag{174}$$

En efecto:

$$e^{+\imath\frac{\gamma}{2}}\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} e^{-\imath\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}$$

Los correspondientes productos con los diferentes kets base son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\gamma)|0\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle \\
\mathbf{P}(\gamma)|1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = e^{+\imath\gamma}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{observable}}{\sim} |1\rangle \\
\mathbf{P}(\gamma)|+\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}(\gamma)|-\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}(\gamma)|+\imath\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2}e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \imath e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}(\gamma)|-\imath\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2}e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\imath e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\mathbf{P}(\gamma)$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con los *eigen-values* asociados $+1$ y $e^{+\imath\gamma}$ respectivamente.

Nótese que estos *eigen-vectors* son idénticos a los *eigen-vectors* que ya habíamos encontrado para las matrices $\mathbf{Z}$ y $\sqrt{\mathbf{Z}}$ y con los cuales concluíamos que se trataba de un giro alrededor del eje Z. Todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido, sólo que el ángulo de giro es variable y definido por el parámetro γ. En efecto es fácil ver que una Rotación de 0 radianes corresponde a la matriz identidad (no giro), una Rotación de π radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\mathbf{Z}$ clásica, una Rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta $\sqrt{\mathbf{Z}} = \mathbf{S}$, mientras que una Rotación de $\frac{\pi}{4}$ radianes corresponde a un giro equivalente a la compuerta

$\mathbf{T} = \sqrt{\mathbf{S}}$, siempre siguiendo la regla de la mano derecha alrededor del eje Z:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{P}(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}$$
$$\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +\imath \end{bmatrix} = \mathbf{S}$$
$$\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}$$

En efecto, esta matriz $\mathbf{P}(\gamma)$ es también trivialmente Diagonizable[45], de forma dada por $\mathbf{P}(\gamma) = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

[45] ya es una matriz Diagonal

$$\mathbf{P}(\gamma) = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+\imath\gamma} \end{bmatrix} \tag{178}$$

que es realmente trivial de verificar y -por supuesto- de muy limitada utilidad.

Es claro que $\mathbf{R_Z}(\gamma)$ se definió en la ecuación 141 de la página 63 como $\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{-\imath\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}}$. Siendo una matriz Unitaria, la correspondiente matriz de Hermite $\mathbf{H}$ asociada, tal que $\mathbf{R_Z}(\gamma) = e^{+\imath\mathbf{H}}$, es simplemente la matriz $\mathbf{H} = -\frac{\gamma}{2}\mathbf{Z}$.

3.16 *La compuerta* **SWAP**

La compuerta **SWAP** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{179}$$

Dado que:

$$\mathbf{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{SWAP}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **SWAP** es una matrix Normal ($\mathbf{SWAP}\ \mathbf{SWAP}^\dagger = \mathbf{SWAP}^\dagger\ \mathbf{SWAP}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{SWAP} = \mathbf{SWAP}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **SWAP** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, -1 y $+1$ respectivamente.

En efecto esta matriz **SWAP** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{SWAP} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{SWAP} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{180}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{SWAP}$$

Adicionalmente, siendo **SWAP** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{SWAP} = (+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$
(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}
$$

$$
+(-1)\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{SWAP}
$$

Siendo además **SWAP** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{SWAP}}$:

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{\imath} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\imath}\end{bmatrix} \tag{184}
$$

La raíz cuadrada de la matriz **SWAT** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta** $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$.

3.17 *La compuerta* $\imath$**SWAP**

La compuerta $\imath$**SWAP** es una matriz Normal, pero no Unitaria ni Involutoria ni de Hermite. Se representa como:

$$
\imath\mathbf{SWAP} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & \imath & 0\\0 & \imath & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{185}
$$

Dado que:

$$\imath\mathbf{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \imath\mathbf{SWAP}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\imath\mathbf{SWAP}$ es una matrix Normal ($\imath\mathbf{SWAP}\ \imath\mathbf{SWAP}^{\dagger} = \imath\mathbf{SWAP}^{\dagger}\ \imath\mathbf{SWAP}$), pero no es una matriz de Hermite ($\imath\mathbf{SWAP} \neq \imath\mathbf{SWAP}^{\dagger}$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\imath\mathbf{SWAP}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+\imath$, $-\imath$ y $+1$ respectivamente.

En efecto esta matriz $\imath\mathbf{SWAP}$ es Diagonizable, de forma dada por $\imath\mathbf{SWAP} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\imath\mathbf{SWAP} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{186}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) & \imath\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \imath\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) & \imath\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \imath\mathbf{SWAP}$$

La raíz cuadrada de la matriz $\imath$**SWAP** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta** $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$.

3.18 *La compuerta* CNOT

La compuerta **CNOT** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{188}$$

Dado que:

$$\mathbf{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{CNOT}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CNOT** es una matrix Normal ($\mathbf{CNOT}\ \mathbf{CNOT}^\dagger = \mathbf{CNOT}^\dagger\ \mathbf{CNOT}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CNOT} = \mathbf{CNOT}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CNOT** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CNOT** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CNOT} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CNOT} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{189}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{CNOT}
\end{aligned}$$

Adicionalmente, siendo **CNOT** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CNOT} = (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+ (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$
.

Que se puede probar fácilmente como:

$$(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+ (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} = \mathbf{CNOT}.$$

Siendo además **CNOT** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CNOT}}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{\imath} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\imath} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath} & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath} & \frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath}\end{bmatrix} \tag{193}$$

3.19 *La compuerta* **CY**

La compuerta **CY** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix} \tag{194}$$

Dado que:

$$\mathbf{CY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{CY}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CY** es una matrix Normal ($\mathbf{CY}\,\mathbf{CY}^{\dagger} = \mathbf{CY}^{\dagger}\,\mathbf{CY}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CY} = \mathbf{CY}^{\dagger}$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CY** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CY** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CY} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CY} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{195}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\imath\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \imath\frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{CY}$$

Adicionalmente, siendo **CY** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CY} = (+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$
(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix}
$$

$$
+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\imath\frac{1}{2}\\0&0&\imath\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\imath\frac{1}{2}\\0&0&-\imath\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-\imath\\0&0&\imath&0\end{bmatrix}=\mathbf{CY}
$$

Siendo además **CY** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U}=e^{\imath\ \mathbf{CY}}$:

$$
\mathbf{U}=\begin{bmatrix}e^{\imath}&0&0&0\\0&e^{\imath}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath}&-\frac{1}{2}\imath\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath}\\0&0&\frac{1}{2}\imath\left(e^{2\imath}-1\right)e^{-\imath}&\frac{1}{2}\left(e^{2\imath}+1\right)e^{-\imath}\end{bmatrix}\tag{199}
$$

3.20 *La compuerta* CZ

La compuerta **CZ** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$
\mathbf{CZ}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\tag{200}
$$

Dado que:

$$
\mathbf{CZ}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{CZ}^{\dagger}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}
$$

Es fácil ver que **CZ** es una matrix Normal ($\mathbf{CZ}\,\mathbf{CZ}^\dagger = \mathbf{CZ}^\dagger\,\mathbf{CZ}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CZ} = \mathbf{CZ}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CZ** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que corresponden a los kets $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$, mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CZ** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CZ} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CZ} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{201}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{CZ} \end{aligned}$$

Adicionalmente, siendo **CZ** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CZ} = (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+ (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+ (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \mathbf{CZ}$$

Siendo además **CZ** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CZ}}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}e^{\imath} & 0 & 0 & 0\\0 & e^{\imath} & 0 & 0\\0 & 0 & e^{\imath} & 0\\0 & 0 & 0 & e^{-\imath}\end{bmatrix} \tag{205}$$

3.21 La compuerta **CH**

La compuerta **CH** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se represента como:

$$\mathbf{CH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{206}$$

Dado que:

$$\mathbf{CH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{CH}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CH** es una matrix Normal ($\mathbf{CH}\,\mathbf{CH}^\dagger = \mathbf{CH}^\dagger\,\mathbf{CH}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CH} = \mathbf{CH}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CH** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CH** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CH} = \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CH} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}} \overbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\Delta}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}^{-1}} \tag{207}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right) & \frac{1}{4}\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{4-2}\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{4-2}\right) & \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}\right) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{CH}
$$

Adicionalmente, siendo **CH** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$
\mathbf{CH} = (+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}
$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}&\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}&-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)&\frac{1}{4}\sqrt{4-2}\\0&0&\frac{1}{4}\sqrt{4-2}&\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)&-\frac{1}{4}\sqrt{4-2}\\0&0&-\frac{1}{4}\sqrt{4-2}&\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\mathbf{CH}$$

Siendo además **CH** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U}=e^{\imath\ \mathbf{CNOT}}$:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}e^{\imath}&0&0&0\\0&e^{\imath}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+2\right)e^{2\imath}-\sqrt{2}+2\right)e^{-\imath}&\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}e^{2\imath}-\sqrt{2}\right)e^{-\imath}\\0&0&\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}e^{2\imath}-\sqrt{2}\right)e^{-\imath}&-\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}-2\right)e^{2\imath}-\sqrt{2}-2\right)e^{-\imath}\end{bmatrix}\tag{211}$$

3.22 *La compuerta* $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$

La compuerta $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$ es una matriz Normal, pero no es Unitaria ni de Hermite ni Involutoria. Se representa como:

$$\sqrt{\mathbf{SWAP}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}(\imath+1)&-\frac{1}{2}(\imath-1)&0\\0&-\frac{1}{2}(\imath-1)&\frac{1}{2}(\imath+1)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{212}$$

Dado que:

$$\sqrt{\mathbf{SWAP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\imath+1) & -\frac{1}{2}(\imath-1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\imath-1) & \frac{1}{2}(\imath+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\mathbf{SWAP}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(-\imath+1) & -\frac{1}{2}(-\imath-1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(-\imath-1) & \frac{1}{2}(-\imath+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$ es una matrix Normal ($\sqrt{\mathbf{SWAP}}\ \sqrt{\mathbf{SWAP}}^{\dagger} = \sqrt{\mathbf{SWAP}}^{\dagger}\ \sqrt{\mathbf{SWAP}}$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+\imath$ y $+1$ respectivamente.

En efecto esta matriz $\sqrt{\mathbf{SWAP}}$ es Diagonizable, de forma dada por $\sqrt{\mathbf{SWAP}} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\sqrt{\mathbf{SWAP}} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{213}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\imath+1) & -\frac{1}{2}(\imath-1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\imath-1) & \frac{1}{2}(\imath+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{SWAP}}$$

3.23 *La compuerta* $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$

La compuerta $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$ es una matriz Normal, pero no es Unitaria ni de Hermite ni Involutoria. Se representa como:

$$\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (215)$$

Dado que:

$$\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$ es una matrix Normal ($\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}\ \sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}^{\dagger} = \sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}^{\dagger}\ \sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$ son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)$, $+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath)$ y $+1$ respectivamente.

En efecto esta matriz $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$ es Diagonizable, de forma dada por $\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\sqrt{\imath\mathbf{SWAP}} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{216}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\imath) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\imath\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\imath\mathbf{SWAP}}$$

3.24 *La compuerta* **Sycamore**

La compuerta **Sycamore** es una matriz Normal, pero no es Unitaria ni de Hermite ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{Sycamore} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-\imath\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{218}$$

Dado que:

$$\mathbf{Sycamore} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \imath\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Sycamore}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \imath\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **Sycamore** es una matrix Normal (**Sycamore Sycamore**† = **Sycamore**† **Sycamore**).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **Sycamore** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $-\imath$, $+\imath$ y $+\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath$ respectivamente.

En efecto esta matriz **Sycamore** es Diagonizable, de forma dada por **SWAP** $=$ **U** **Δ** **U**$^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{Sycamore} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}} \left[\overbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath \end{bmatrix}}^{\mathbf{\Delta}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}^{-1}} \right] \tag{219}$$

Nótese la matriz Diagonal **Δ** formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias **U** y **U**$^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz **U** corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz **U**. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2} & -\imath\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\imath\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2} & -\imath\frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \imath\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \textbf{Sycamore}$$

3.25 *La compuerta* **CCNOT** *o Toffoli*

La compuerta **CCNOT** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CCNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{221}$$

Dado que:

$$\mathbf{CCNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CCNOT}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CCNOT** es una matrix Normal ($\mathbf{CCNOT}\ \mathbf{CCNOT}^\dagger = \mathbf{CCNOT}^\dagger\ \mathbf{CCNOT}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CCNOT} = \mathbf{CCNOT}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CCNOT** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CCNOT** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CCNOT} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CCNOT} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{222}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{CCNOT}$$

Adicionalmente, siendo **CCNOT** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CCNOT} = (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{CCNOT}$$

Siendo además **CCNOT** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CCNOT}}$:

$$\mathbf{U} = e^{\begin{bmatrix} \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix}} \tag{226}$$

La raíz cuadrada de la matriz **CCNOT** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta $\sqrt{\mathbf{CCNOT}}$**.

3.26 La compuerta **CCY**

La compuerta **CCY** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CCY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix} \tag{227}$$

Dado que:

$$\mathbf{CCY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CCY}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CCY** es una matrix Normal ($\mathbf{CCY}\ \mathbf{CCY}^\dagger = \mathbf{CCY}^\dagger\ \mathbf{CCY}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CCY} = \mathbf{CCY}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CCY** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CCY** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CCY} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CCY} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{228}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \imath\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{CCY}$$

Adicionalmente, siendo **CCY** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CCY} = (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\imath\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$

$$
-
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \imath\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\imath \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0
\end{bmatrix}
= \mathbf{CCY}
$$

Siendo además **CCY** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CCY}}$:

$$
\mathbf{U} = e^{\begin{bmatrix}
\imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}} \tag{232}
$$

La raíz cuadrada de la matriz **CCY** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta** $\sqrt{\mathbf{CCY}}$.

3.27 *La compuerta* **CCZ**

La compuerta **CCZ** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CCZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{233}$$

Dado que:

$$\mathbf{CCZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CCZ}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CCZ** es una matrix Normal ($\mathbf{CCZ}\ \mathbf{CCZ}^\dagger = \mathbf{CCZ}^\dagger\ \mathbf{CCZ}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CCZ} = \mathbf{CCZ}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CCZ** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CCZ** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CCZ} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CCZ} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&+1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&+1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&+1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&+1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&+1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&+1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}} \tag{234}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&+1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&+1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&+1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&+1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&+1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&+1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} = \mathbf{CCZ}$$

Adicionalmente, siendo $\mathbf{CCZ}$ una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$\mathbf{CCZ} = (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} = \mathbf{CCZ}$$

Siendo además **CCZ** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CCZ}}$:

$$\mathbf{U} = e^{\begin{bmatrix} \imath&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\imath&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\imath&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\imath&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\imath&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\imath&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\imath&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\imath \end{bmatrix}} \tag{238}$$

La raíz cuadrada de la matriz **CCZ** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta** $\sqrt{\mathbf{CCZ}}$.

3.28 La compuerta **CCH**

La compuerta **CCH** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CCH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{239}$$

Dado que:

$$\mathbf{CCH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CCH}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CCH** es una matrix Normal ($\mathbf{CCH}\ \mathbf{CCH}^\dagger = \mathbf{CCH}^\dagger\ \mathbf{CCH}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CCH} = \mathbf{CCH}^\dagger$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CCH** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$ y -1 respectivamente.

En efecto esta matriz **CCH** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CCH} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CCH} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}} \tag{240}$$

Nótese la matriz Diagonal $\mathbf{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2} & \sqrt{4-2}+\sqrt{4-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4-2}+\sqrt{4-2} & 2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{CCH}
$$

Adicionalmente, siendo **CCH** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$
\mathbf{CCH} = (+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+(+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)&\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}$$

$$+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)&-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{bmatrix}$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$(+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)&\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{bmatrix}$$

$$+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)&-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{bmatrix}$$

$$= (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+(+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}&\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})\end{bmatrix}$$

$$+(-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) & \frac{1}{4}\sqrt{4-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{4-2} & \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) & -\frac{1}{4}\sqrt{4-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{4-2} & \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{CCH}$$

Siendo además **CCH** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CCH}}$:

$$\mathbf{U} = e^{\begin{bmatrix} \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{259}$$

La raíz cuadrada de la matriz **CCH** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta $\sqrt{\mathbf{CCH}}$**.

3.29 *La compuerta* **CSWAP** *o Fredkin*

La compuerta **CSWAP** es una matriz de Hermite, por lo tanto Normal, pero no es Unitaria ni Involutoria. Se representa como:

$$\mathbf{CSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{260}$$

Dado que:

$$\mathbf{CSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CSWAP}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que **CSWAP** es una matrix Normal ($\mathbf{CSWAP}\ \mathbf{CSWAP}^{\dagger} = \mathbf{CSWAP}^{\dagger}\ \mathbf{CSWAP}$), y es también una matriz de Hermite ($\mathbf{CSWAP} = \mathbf{CSWAP}^{\dagger}$).

Los *eigen-vectors* de esta matriz **CSWAP** son los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$$

mientras que los *eigen-values* asociados son $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, $+1$, -1 y $+1$ respectivamente.

En efecto esta matriz **CSWAP** es Diagonizable, de forma dada por $\mathbf{CSWAP} = \mathbf{U}\ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{U}^{-1}$, o específicamente:

$$\mathbf{CSWAP} = \overset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}} \overset{\boldsymbol{\Delta}}{\begin{bmatrix} +1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&+1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&+1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&+1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&+1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&+1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&+1 \end{bmatrix}} \overset{\mathbf{U}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}} \tag{261}$$

Nótese la matriz Diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ formada por los *eigen-values* y las matrices Unitarias $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{-1}$ formadas por los *eigen-vectors* en sus columnas. Nótese también como el inverso de la matriz $\mathbf{U}$ corresponde a la transpuesta conjugada de la matriz $\mathbf{U}$. Esta propiedad se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{CSWAP}$$

Adicionalmente, siendo **CSWAP** una matriz de Hermite se puede descomponer como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{CSWAP} = {} & (+1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\
& + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\\
& + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}\\
& + (-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix} + (+1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Que se puede probar fácilmente como:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \mathbf{CSWAP}$$

Siendo además **CSWAP** una matriz de Hermite, podemos derivar una matriz Unitaria **U** asociada, definida por $\mathbf{U} = e^{\imath\ \mathbf{CSWAP}}$:

$$\mathbf{U} = e^{\begin{bmatrix} \imath&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\imath&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\imath&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\imath&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\imath&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\imath&0\\ 0&0&0&0&0&\imath&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\imath \end{bmatrix}} \tag{265}$$

La raíz cuadrada de la matriz **CSWAP** está definida más adelante, en la subsección **La compuerta $\sqrt{\mathbf{CSWAP}}$**.

3.30 La compuerta $\sqrt{\mathbf{CCNOT}}$

To Do

3.31 La compuerta $\sqrt{\mathbf{CCY}}$

To Do

3.32 *La compuerta* $\sqrt{\mathbf{CCZ}}$

To Do

3.33 *La compuerta* $\sqrt{\mathbf{CCH}}$

To Do

3.34 *La compuerta* $\sqrt{\mathbf{CSWAP}}$

o Fredkin To Do

4 *Código Sagemath*

Por propósitos de discusión, la función «**attribForMatrix**», usada para encontrar las propiedades mostradas en este documento es:

```
def attribForMatrix(titleName, M):
  acmm="Atributos para la matriz "+titleName+"\n"
  acmm=acmm+"\nEs "+titleName+" una matrix Diagonizable?: "
  if M.is_diagonalizable(QQbar):
    acmm=acmm+"verdadero"
    Delta,Q=M.diagonalization(QQbar) #ojo Sagemath no entrega los eigenvectors normalizados...
    Q=normalizeColumnsMatrix(Q) # Aqui los normalizamos...
    acmm=acmm+".  Double-check: "+str(M==Q*Delta*Q^-1)+".\n"
    acmm=acmm+titleName+"="+latex(M)+"="+latex(Q)+latex(Delta)+latex(Q^-1)+".\n"
    acmm=acmm+"\nEs "+titleName+" Normal? (A A^\dag == A^\dag A)?: "
    if M*M.conjugate_transpose() == M.conjugate_transpose()*M:
      acmm=acmm+"true.\n"+latex(M)+latex(M.conjugate_transpose())+"="+latex(M.conjugate_transpose())+latex(M)+".\n"
      acmm=acmm+"\nEs "+titleName+" Unitaria? (A A^\dag == A^\dag A == I)?: "
      if M*M.conjugate_transpose() == M.conjugate_transpose()*M and M*M.conjugate_transpose() == I:
        acmm=acmm+"verdadero.\n"+latex(M)+latex(M.conjugate_transpose())+"="
        acmm=acmm+latex(M.conjugate_transpose())+latex(M)+"="+latex(M*M.conjugate_transpose())+".\n"
        acmm=acmm+"La correspondiente matriz de Hermite H tal que e^(iH) = "+titleName+" es:"
        Theta=matrix(RR,Delta.nrows())
        for indiceElemento in range(0, Delta.nrows()):
          thetaElement = N( -i*ln(Delta[indiceElemento,indiceElemento]) )
          Theta[indiceElemento,indiceElemento] = abs(thetaElement)*sgn(thetaElement.real_part())
          acmm=acmm+"H="+latex(Q)+latex(Theta)+latex(Q^-1)+" = "+latex(Q*Theta*Q^-1)+".\n"
          acmm=acmm+"Sanity Check, e^(iH) = U?\t"+latex(N(M))+"="+latex( N(e^(i*Q*Theta*Q^-1)) )+"??????????.\n"
        else: # No es unitaria la matriz
          acmm=acmm+"falso. No es Unitaria.\n"
          acmm=acmm+"\nEs "+titleName+" de Hermite ("+titleName+"=="+titleName+"^\dag)?: "
          if M == M.conjugate_transpose():
            acmm=acmm+"true.\n"+latex(M)+"="+latex(M.conjugate_transpose())+".\n"
```

```
            acmm=acmm+"La correspondiente matriz unitaria U es: U=e^(i*"+
    titleName+")="+latex(e^(i*M))+".\n"
          else: # No es de Hermite
            acmm=acmm+"falso. No es de Hermite.\n"
      else: # No es una matriz Normal
        acmm=acmm+"falso. No es Normal.\n"
        acmm=acmm+"Es "+titleName+" Involutoria ("+titleName+"^2 == I)?: "
        if M*M == I:
          acmm=acmm+"Verdadero.\n"+titleName+"^2="+latex(M*M)+".\n"
        else: # No es una matriz involutoria
          acmm=acmm+"Falso. No es Involutoria.\n"

  return acmm  # una cadena de caracteres larga, lista para interpretar con
    latex
```

Sagemath 1: *Función para el Análisis de Matrices*

Referencias

Scott Aaronson. *Quantum Computing since Democritus*. Cambridge University Press, 1st edition, 2013. ISBN 978-0-521-19956-8.

Sarah Kaiser and Christopher Granade. *Learn Quantum Computing with Python and Q#*. Manning Publications Co., 1st edition, 2021. ISBN 9781617296130.

Seth Lloyd. *Programming the Universe*. Alfred A. Knopf, Random House, 1st edition, 2006. ISBN 978-0-307-26471-8.

Isaac L. Chuang Michael A. Nielsen. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, tenth edition, May 2010. ISBN 978-1-107-00217-3.

K.A. Stroud. *Engineering Mathematics*. McMillan Education, seventh edition, 2013. ISBN 978-1-137-03120-4.

Colin P. Williams. *Explorations in Quantum Computing*. Springer-Verlag, 2nd edition, May 2011. ISBN 978-1-84628-886-9.