

# Nota de Clase 1: an eigen-interpretation<sup>1</sup>

Milton q.

Julio 18, 2025

Una buena parte del comportamiento cuántico de un objeto se puede describir con elementos formales tomados del álgebra lineal, en particular los conceptos asociados a los *eigen-values* y *eigen-vectors* de una matriz. Este documento es un conjunto de «Notas de Clase» para introducir estos conceptos de una manera gráfica, de manera que los estudiantes puedan tener algún tipo de intuición acerca de su significado geométrico, al menos en espacios bi-dimensionales.

## 1 Introducción

De todas las temáticas que se abordan en el álgebra lineal, estamos especialmente interesados en los conceptos asociados a las transformaciones lineales. La definición formal es quizás un tanto estéril. En “Engineering Mathematics” de K.A. Stroud<sup>2</sup> se dice que:

«*a linear map (aka. a linear mapping, linear transformation, vector space homomorphism, or in some contexts linear function) is a mapping  $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{W}$  between two vector spaces that preserves the operations of vector addition and scalar multiplication*».

Bueno, se trata de una definición bastante precisa, que desafortunadamente no deja mucho juego a la imaginación para tratar de intuir su significado.

En este documento se busca tratar de introducir los conceptos asociados a las transformaciones lineales usando una figura bidimensional que llamaremos nuestro perro «Descartes», que conceptualmente se parece a la figura 1.

Nótese como «Descartes» está formado por una serie de noventa y un puntos conectados por líneas, de los cuales podemos identificar fácilmente en la figura el punto con coordenadas (0,17), pero en realidad se trata de un conjunto de noventa y un puntos definidos como  $((0,17), (1,10), \dots, (13,18))$ , o de una manera más compacta, diríamos que se trata de un conjunto de noventa y un vectores definidos como:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{P}_{90} = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

O mejor aún, si unimos estos vectores columnas, obtenemos una matriz de dos filas y noventa y un columnas como se muestra a

<sup>1</sup> Este documento fue elaborado en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X utilizando una plantilla inspirada en el trabajo de Edward R. Tufte.

<sup>2</sup> K.A. Stroud. *Engineering Mathematics*. McMillan Education, seventh edition, 2013. ISBN 978-1-37-03120-4

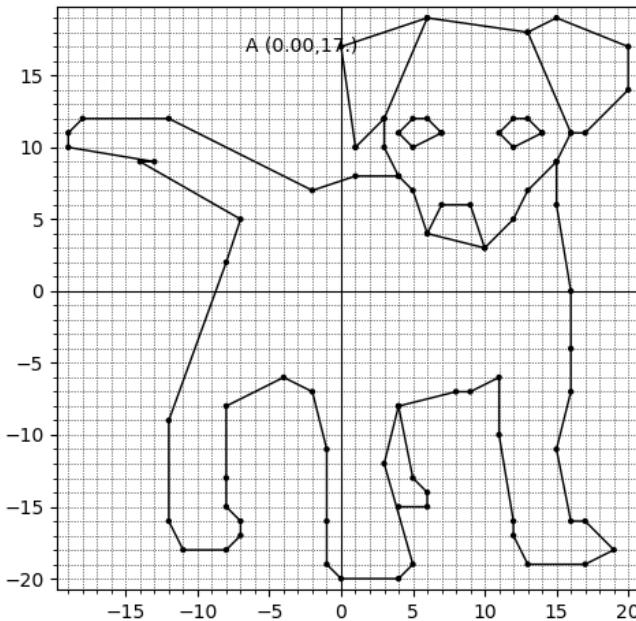


Figura 1: Nuestro perro Descartes

continuación:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 13 \\ 17 & 10 & \dots & 18 \end{bmatrix}$$

Pero ¿qué sucede si multiplicamos esta matriz de puntos  $\mathbf{P}$  recién obtenida con una serie de matrices de dimensiones  $2 \times 2$ ? El lector atento notará que el resultado será también una matriz de dimensiones  $2 \times 91$ , pero dependiendo de la matriz escogida de  $2 \times 2$  tendrá cierta similitud o grandes diferencias con la gráfica original representada por la matriz  $\mathbf{P}$ .

Por ejemplo, si la matriz  $\mathbf{P}$  la multiplicamos por la matriz identidad  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  obtendremos:

$$\mathbf{I}_{2 \times 2} \mathbf{P}_{2,91} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 13 \\ 17 & 10 & \dots & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 13 \\ 17 & 10 & \dots & 18 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{2,91}$$

Lo que no debiera sorprendernos... estamos aplicando una transformación lineal definida por la matriz identidad, intuitivamente sabemos que debiera dejar sin cambios la figura.

Sin embargo, hay otras transformaciones con otro tipo de matrices que ofrecen resultados más interesantes y que presentaremos a continuación en las siguientes secciones. El resto de este documento está organizado como sigue:

1. en la sección «**Algunos ejemplos**», se presentan algunos ejemplos básicos de transformaciones lineales y su interpretación intuitiva geométrica,
2. en la sección «**Algunos ejemplos analizados más formalmente**», se introducen los conceptos de *eigen-values* y *eigen-vectors* de una matriz que define una transformación lineal y veremos qué interpretación geométrica se le puede dar a estos conceptos,
3. finalmente, en la sección «**Epílogo**», se presentan algunas conclusiones e ideas genéricas que resultarán posteriormente muy útiles en el curso de Computación Cuántica.

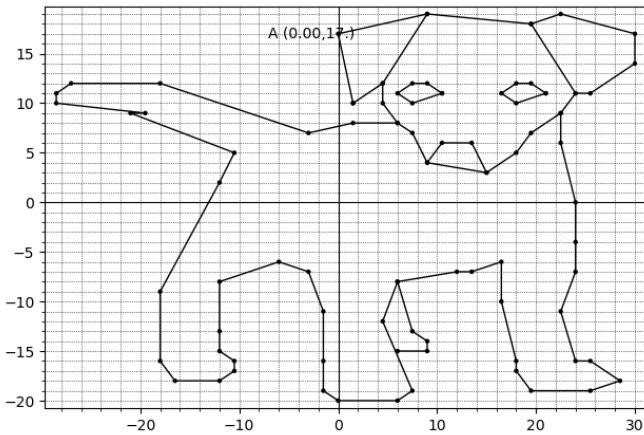
## 2 Algunos ejemplos

Veamos qué sucede cuando nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  que representa a Descartes es multiplicado por diferentes matrices  $2 \times 2$  y cuál es el resultado gráfico en nuestra figura.

### 2.1 Un poco de stretching horizontal

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Nótese cómo la figura es 'estirada horizontalmente' en un 50 %, mientras mantiene su proporción de altura. El lector atento notará que precisamente este 50 % adicional surge como resultado del valor  $\frac{3}{2}$  de la matriz y que en general para la transformación lineal definida por la matriz:

Figura 2: Un *stretch* en  $X$ , la figura no está a escala

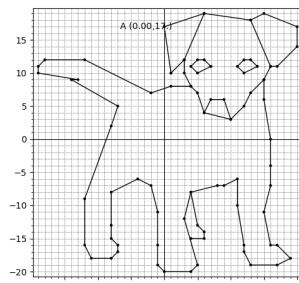


Figura 3: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tendrá un estiramiento horizontal definida por el parámetro  $p$ .

## 2.2 Un poco de stretching vertical

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

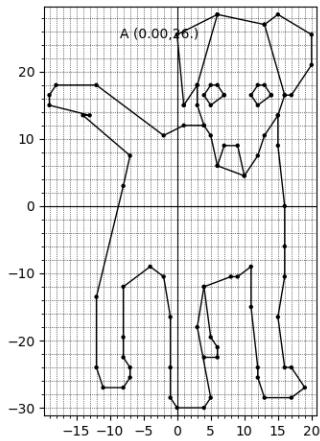


Figura 4: Un *stretch* en  $Y$ , la figura no está a escala

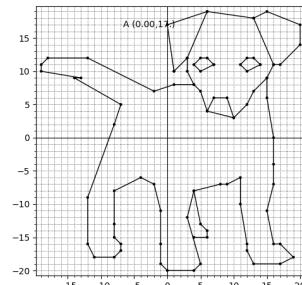


Figura 5: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

tendrá a su vez también un estiramiento vertical definida por el parámetro  $p$ .

## 2.3 Un poco de squeezing horizontal

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

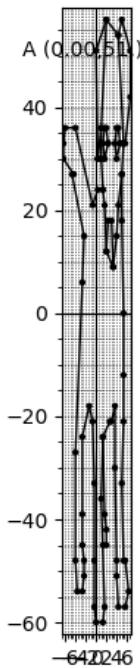


Figura 6: Un *squeeze* en  $X$ , la figura no está a escala

Nótese cómo la figura es 'estirada verticalmente' en un 50 %, mientras simultáneamente su proporción de ancho es 'comprimida' también en un 50 %. El lector atento notará que precisamente esta proporción del 50 % de modificación surge de los valores de la matriz y que -en general- para la transformación lineal definida por la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

se tendrá un valor de '*squeezing*' en el eje  $x$  definido por  $p$ .

#### 2.4 Un poco de *squeezing* vertical

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

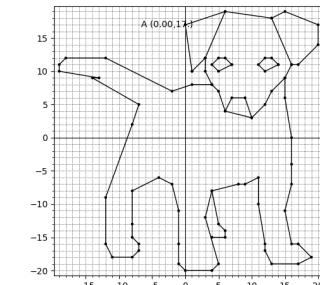


Figura 7: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

Figura 8: Un *squeeze* en  $Y$ , la figura no está a escala

Nótese cómo, similarmente, la figura es 'estirada horizontalmente' en un 50 %, mientras simultáneamente su proporción de ancho es 'comprimida' también en un 50 %. El lector atento notará que precisamente esta proporción del 50 % de modificación surge también de los valores de la matriz y que, en general, para la transformación lineal definida por la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

se tendrá un valor de '*squeezing*' en el eje *y* definido por *p*.

## 2.5 Un poco de shearing horizontal

Hasta ahora hemos estado aplicando modificaciones y 'jugando' con cambios aplicados a la diagonal principal de la matriz. Apliquemos ahora cambios en la otra diagonal de la matriz y veamos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

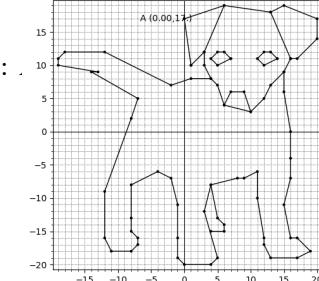
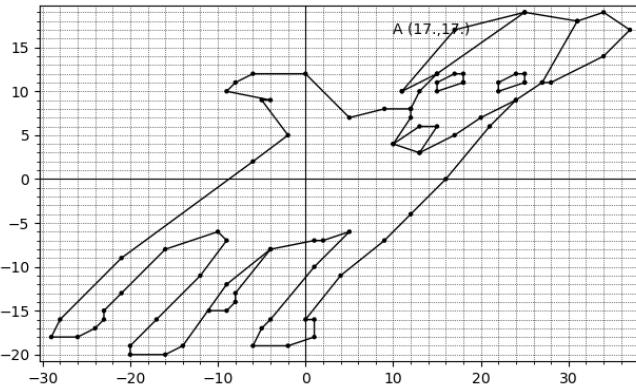


Figura 9: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

Nótese cómo la figura resulta ahora con una 'inclinación' hacia la derecha de unos  $45^\circ$ , mientras mantiene su altura sin cambios. El lector atento notará que precisamente esta inclinación con pendiente 1 surge de la coordenada (1,2) de la matriz y que, en general, para la transformación lineal definida por la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tendrá un valor de '*shearing*' en el eje *x* definido por el valor *p*.

Figura 10: Un *shear* en *X*, la figura no está a escala

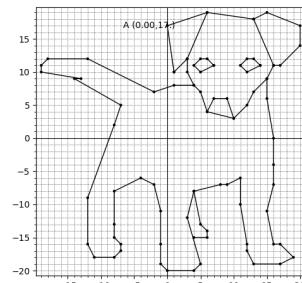


Figura 11: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

## 2.6 Un poco de shearing vertical

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

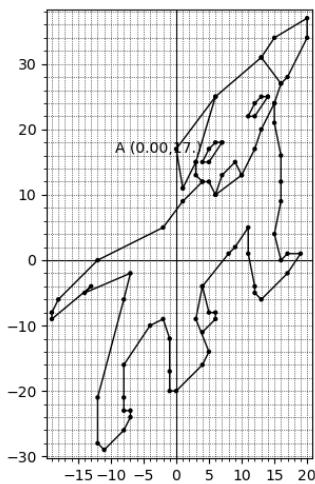


Figura 12: Un *shear* en  $Y$ , la figura no está a escala

Nótese cómo ahora la figura resulta con una 'inclinación' hacia arriba de unos  $45^\circ$ , mientras mantiene su ancho sin cambios. El lector atento notará que precisamente esta inclinación con pendiente 1 surge de la coordenada (2,1) de la matriz y que, en general, para la transformación lineal definida por la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}$$

se tendrá un valor de '*shearing*' en el eje  $y$  definido por el valor  $p$ .

## 2.7 Rotaciones

Observemos qué sucede cuando multiplicamos nuestro conjunto de puntos  $\mathbf{P}$  por la matriz definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

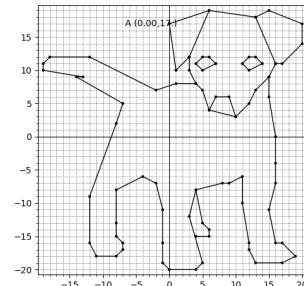


Figura 13: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

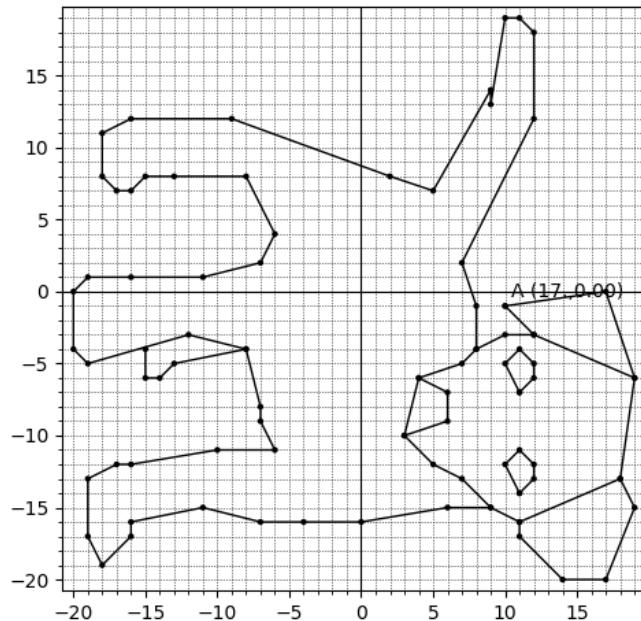


Figura 14: Una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  radianes, la figura está a escala

Nótese cómo ahora la figura rota  $90^\circ$  alrededor de su centro en el sentido de las manecillas del reloj. En general la transformación lineal descrita por la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

define una rotación de  $\theta$  radianes en sentido horario horario.

## 2.8 Reflejos en un eje

Es posible definir un reflejo de 'Descartes' alrededor de un eje. La matriz genérica que define un reflejo de una figura en el eje definido por el vector  $\vec{l} = (l_x, l_y)$  es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{|\vec{l}|^2} \begin{bmatrix} l_x^2 - l_y^2 & 2l_x l_y \\ 2l_x l_y & l_y^2 - l_x^2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el reflejo alrededor del eje dado por  $\vec{l} = (3, 4)$  está definido por la matriz:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 - 16 & 2 \times 3 \times 4 \\ 2 \times 3 \times 4 & 16 - 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

Y el resultado sobre 'Descartes' es como sigue:

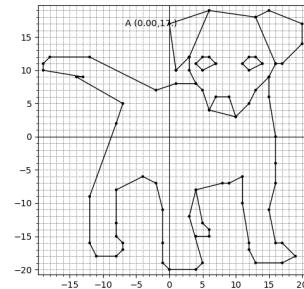


Figura 15: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

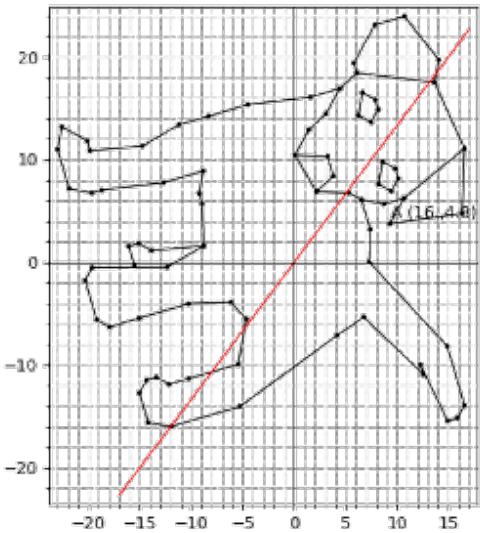


Figura 16: Reflejo en un eje, la figura no está a escala

## 2.9 Combinación de transformaciones lineales

Dado que cada transformación lineal está representada por matrices cuadradas de  $2 \times 2$ , es posible multiplicar las matrices para obtener un efecto combinado, cual sea el resultado que se quiera alcanzar.

Así por ejemplo, si tomamos los puntos que definen el perro 'Descartes' y primero hacemos un *stretching* horizontal, seguido de un *stretching* vertical, seguido luego de un *squeezing* horizontal, seguido luego de un *squeezing* vertical, seguido luego de una rotación horaria de  $\frac{\pi}{2}$  radianes, seguido de un *shearing* horizontal, seguido luego de un *shearing* vertical, seguido de un reflejo en el eje definido por el vector  $(3, 4)$ , nos da como resultado la siguiente figura:

$$\begin{matrix}
 \text{Reflejo} & \text{Shear Y} & \text{Shear X} & \text{Rotación} & \text{Squeeze Y} & \text{Squeeze X} & \text{Stretch Y} & \text{Stretch X} & \text{puntos} \\
 \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 13 \\ 17 & 10 & \dots & 18 \end{bmatrix} \\
 & & & & & & & &
 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7,74 & 17,34 & \dots & -13,62 \\ 16,32 & 31,62 & \dots & 3,84 \end{bmatrix}$$

obtenemos la figura combinada que se muestra a continuación:

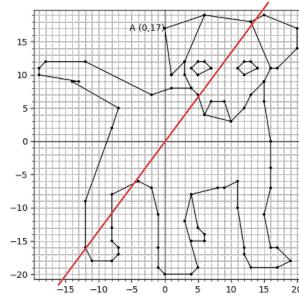


Figura 17: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' y el eje de giro antes de la transformación.

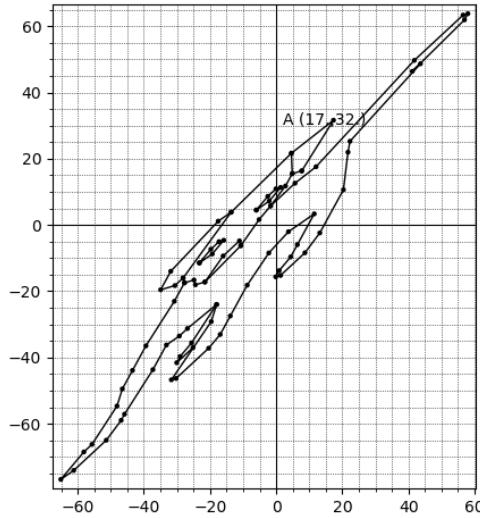


Figura 18: Todas las transformaciones, la figura no está a escala

El lector debe recordar que el producto de matrices, aún cuando es asociativo -i.e.  $\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\mathbf{M}) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\mathbf{M}$ -, no es commutativo -i.e.  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{M} \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{M}$ -, por lo que siempre y cuando mantengamos el orden de los operandos podemos asociarlos cómo nos resulte más conveniente para simplificar los cálculos o disminuir las necesidades de almacenamiento en los algoritmos.

### 3 'Descartes' revisitado

Analicemos ahora en esta sección más formalmente los efectos de estas transformaciones lineales, interpretando los resultados en términos de los *eigen-values* y *eigen-vectors* de la matriz que representa la transformación lineal.

#### 3.1 Un strecth genérico

Analicemos una transformación lineal sobre 'Descartes' definida por la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que:

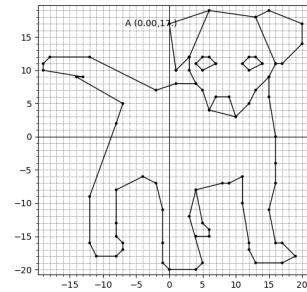


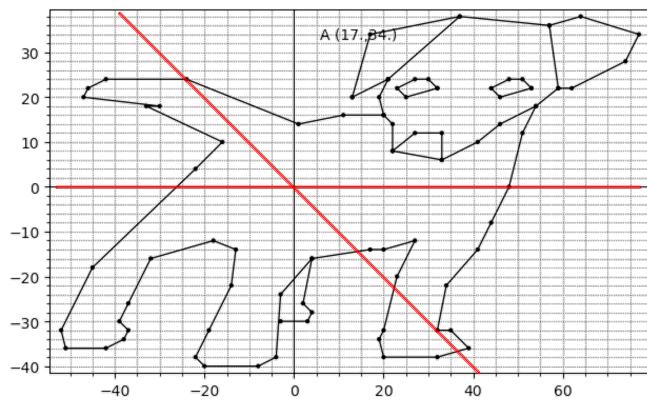
Figura 19: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors*<sup>3</sup> de la matriz  $\mathbf{A}$  y sus correspondientes *eigen-values* son 3 y 2.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Nótese como el efecto de la transformación lineal es un estiramiento horizontal (*eigen-value* 3) de un 300 %, junto con un estiramiento a la derecha y abajo (*eigen-value* 2) de un 200 %. Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

### 3.2 Otro ejemplo

Analicemos una transformación lineal sobre 'Descartes' definida por la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que:

<sup>3</sup> Recordar la definición que vimos en el primer acerca de los *eigen-vectors* y *eigen-values*... Un vector  $\vec{v}$  es un *eigen-vector* de  $\mathbf{A}$  si para un real que llamaremos  $\lambda$ , se cumple que  $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .

Figura 20: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

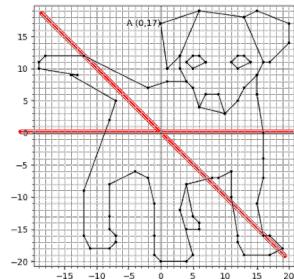


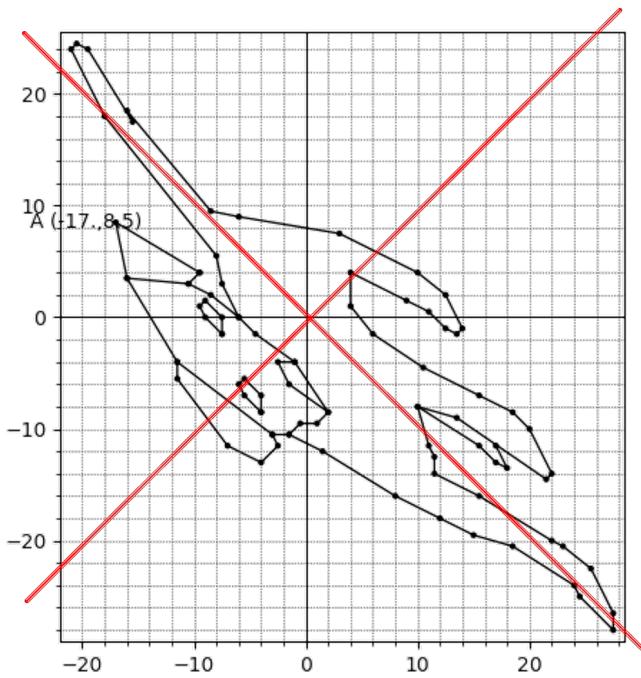
Figura 21: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz **A** y sus correspondientes *eigen-values* son  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$ .

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

### 3.3 Otro ejemplo más

Analicemos una transformación lineal sobre 'Descartes' definida por la siguiente matriz:

Figura 22: Transformación lineal definida por la matriz **A** junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

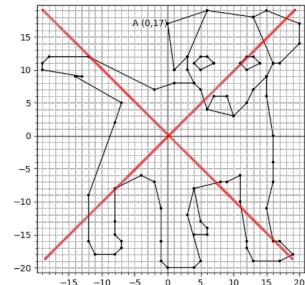


Figura 23: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

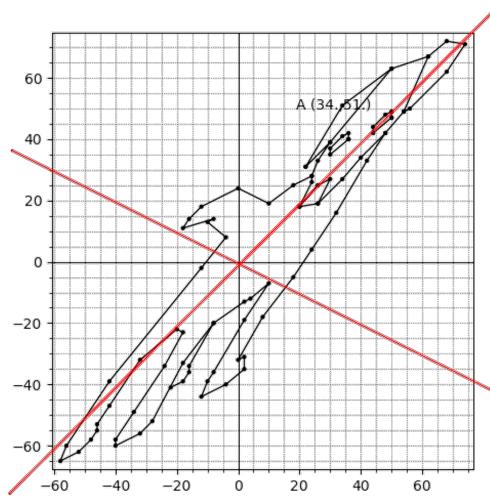
Obsérvese que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$  y sus correspondientes *eigen-values* son 1 y 4.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

### 3.4 Stretching horizontal formalmente

Si recordamos cómo definimos el *stretch* horizontal con la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 24: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

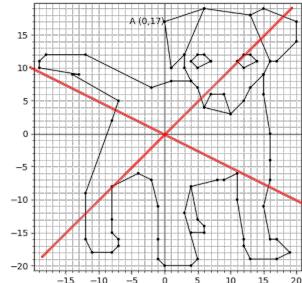


Figura 25: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

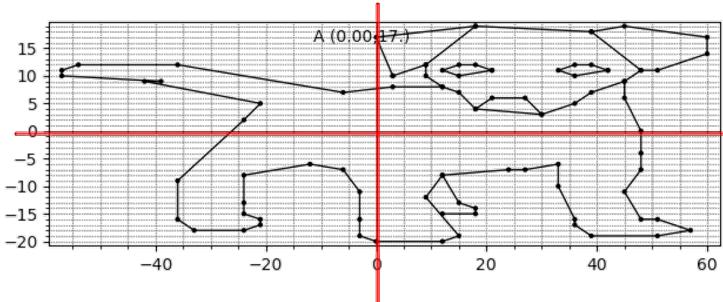
Vemos que:

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz **A** y sus correspondientes *eigen-values* son 1 y *p*.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

Nótese también que cualquier vector de la forma  $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz **A**, luego en realidad estamos hablando de infinitos *eigen-vectors* que expresan el *stretching* horizontal.

### 3.5 Stretching vertical formalmente

Si recordamos como definimos el *stretch* horizontal con la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

Vemos que:

Figura 26: Transformación lineal definida por la matriz **A** junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

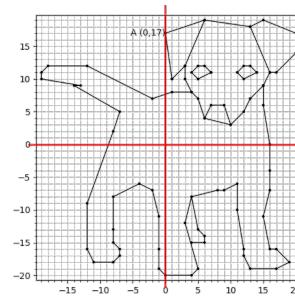


Figura 27: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz **A**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz **A** y sus correspondientes *eigen-values* son  $p$  y 1.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:

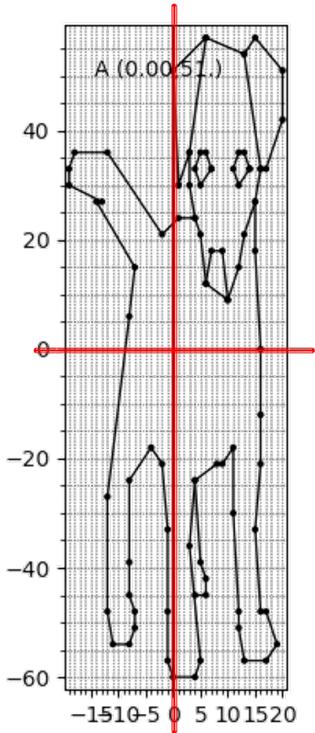


Figura 28: Transformación lineal definida por la matriz **A** junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

Nótese también que cualquier vector de la forma  $\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz **A**, luego en realidad estamos hablando de infinitos *eigen-vectors* que expresan el *stretching* vertical.

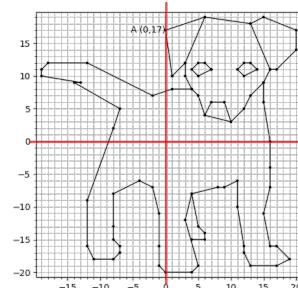


Figura 29: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz **A**.

### 3.6 Squeezing horizontal formalmente

Si recordamos como definimos el *squeeze* horizontal con la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

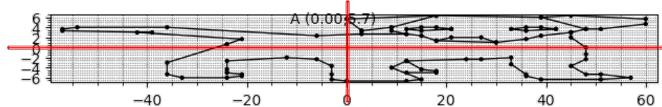
Vemos que:

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$  y sus correspondientes *eigen-values* son  $\frac{1}{p}$  y  $p$ .

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio diferente a la escala definida por los correspondientes *eigen-values*.

Nótese también que cualquier vector de la forma  $\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix}$  o  $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$ , luego en realidad estamos hablando de infinitos *eigen-vectors* que expresan la transformación *squeezing* horizontal.

### 3.7 Shearing horizontal formalmente

Si recordamos como definimos el *shearing* horizontal con la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 30: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

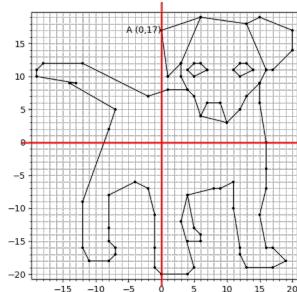


Figura 31: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Vemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que el vector  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  es el único *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$  y su correspondiente *eigen-value* es 1.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:

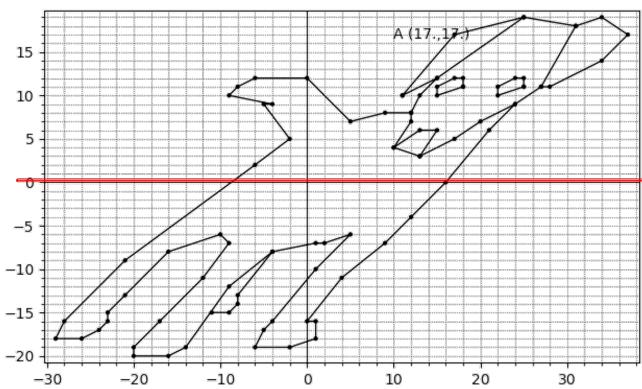


Figura 32: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

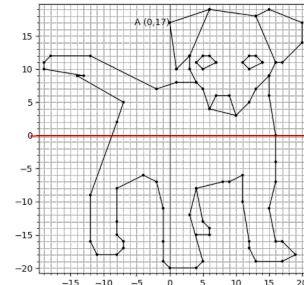


Figura 33: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Si nos fijamos detenidamente en la línea roja de la figura que representa el único *eigen-vector*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio.

Nótese también que cualquier vector de la forma  $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$ , luego en realidad estamos hablando de infinitos *eigen-vectors* que expresan la transformación *shearing* horizontal.

### 3.8 Shearing vertical formalmente

Si recordamos como definimos el *shearing* vertical con la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que el vector  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  es el único *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$  y su correspondiente *eigen-value* es 1.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:

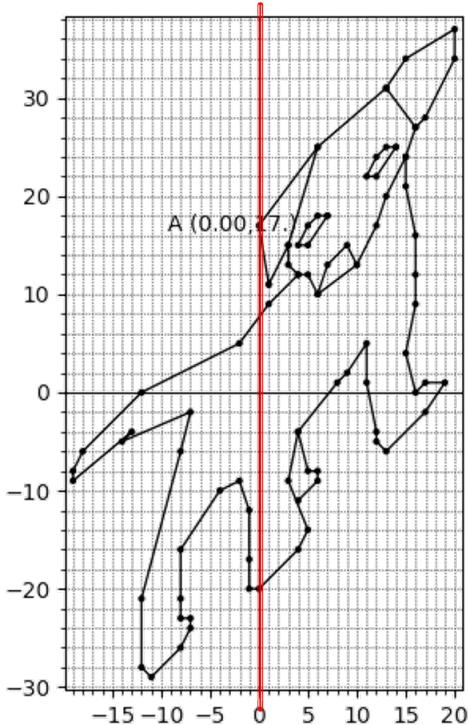


Figura 34: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

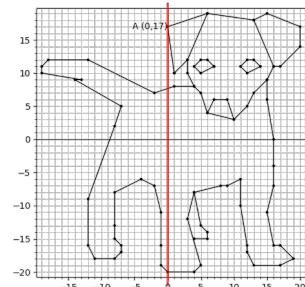


Figura 35: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Si nos fijamos detenidamente en la línea roja de la figura que representa el único *eigen-vector*, veremos que los puntos de 'Descartes' ubicados en estas líneas mantienen su posición relativa sin ningún cambio.

Nótese también que cualquier vector de la forma  $\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$ , luego en realidad estamos hablando de infinitos *eigen-vectors* que expresan la transformación *shearing* vertical.

### 3.9 Un nuevo ejemplo

Suponga la transformación lineal definida con la matriz:

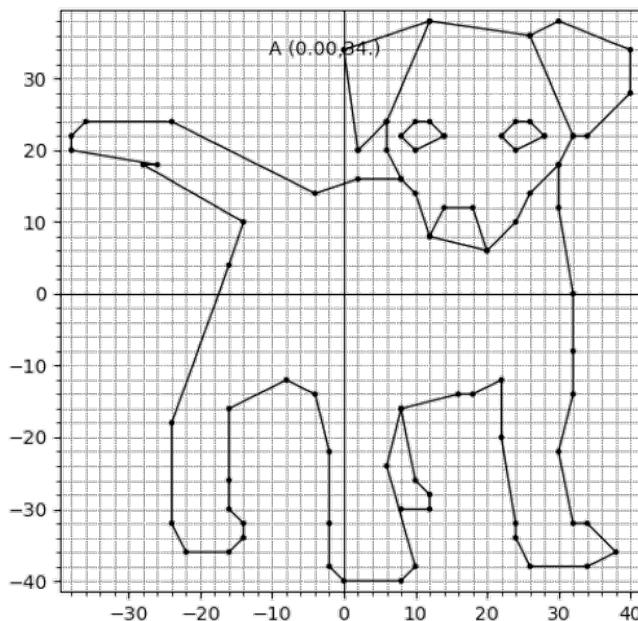
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por lo que cualquier vector  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  es un *eigen-vector* de la matriz  $\mathbf{A}$  y su correspondiente *eigen-value* es 2.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:



Que simplemente se trata de una transformación lineal que duplica el tamaño de la figura y que altera todos y cada uno de los puntos de 'Descartes'.

### 3.10 Reflejo en un eje formalmente

Si recordamos como definimos el reflejo en un eje definido por  $\vec{l} = (3, 4)$  con la matriz:

Figura 36: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

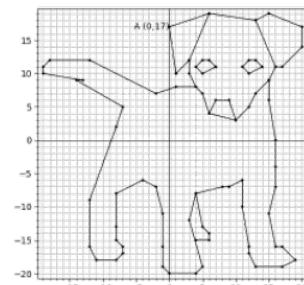


Figura 37: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

Vemos que:

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -\frac{21}{4} + 24 \\ 18 + 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} \frac{75}{4} \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} \frac{28}{3} + 24 \\ -32 + 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} \frac{100}{3} \\ -25 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$  y sus correspondientes *eigen-values* son 1 y -1.

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:

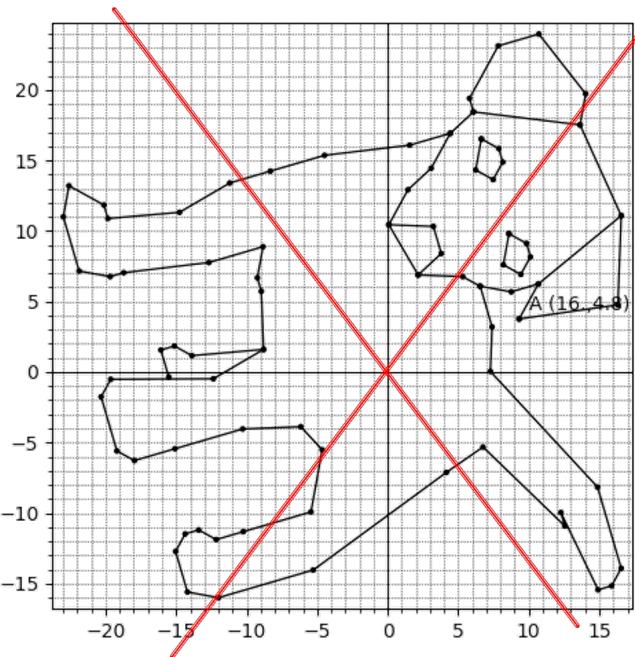


Figura 38: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

Si nos fijamos detenidamente en las líneas rojas de la figura que representan los dos *eigen-vectors*, veremos que...

### 3.11 Rotación formalmente

Si recordamos como definimos la rotación en sentido horario de  $\frac{3\pi}{2}$  con la matriz:

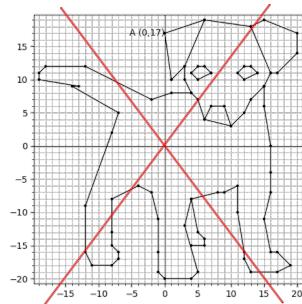


Figura 39: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 \\ -i \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$  son los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$  y sus correspondientes *eigen-values* son  $i$  y  $-i$ .

La figura resultante de aplicar esta transformación lineal a 'Descartes' es como sigue:

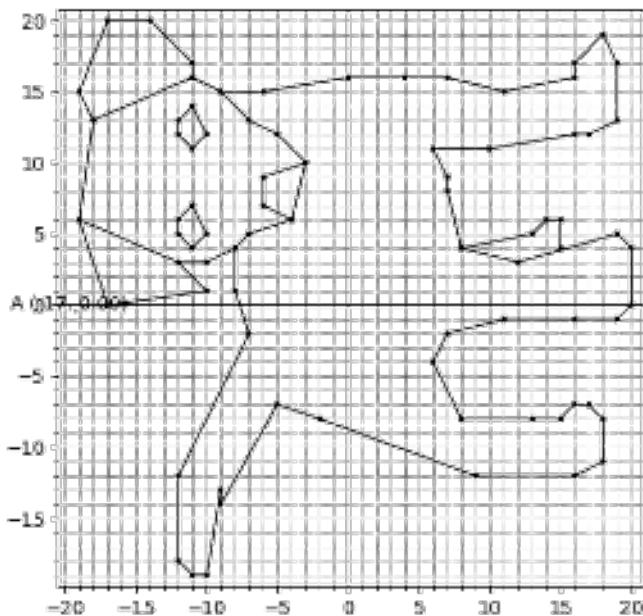


Figura 40: Transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{A}$  junto con los ejes definidos por sus *eigen-vectors*. La figura no está a escala.

Sin embargo, nótese que los valores complejos obtenidos tienen una interpretación geométrica: como cada punto de la figura gira, nada permanece con esta transformación, el eje de giro está definido por un eje perpendicular a la hoja de papel donde reside la figura bidimensional 'Descartes'. Esta es la razón por la que ni los *eigen-vectors* ni los *eigen-values* son números reales.

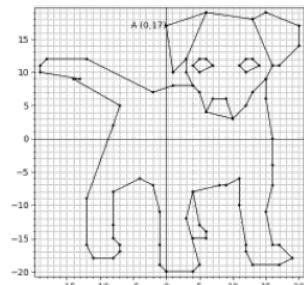


Figura 41: Para más fácil referencia del lector, este era 'Descartes' antes de la transformación, junto con los ejes definidos por los *eigen-vectors* de la matriz  $\mathbf{A}$ .

#### 4 Cálculo de eigen-vectors y eigen-values

Quizás el lector quisiera recordar cómo se calculan estos *eigen-vectors* y *eigen-values*. En realidad el cálculo es sencillo<sup>4</sup> como se muestra a continuación.

Nuestra definición original de *eigen-vectors* y *eigen-values* es  $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ :

O equivalentemente:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \vec{v}_{n \times 1} = \lambda \vec{v}_{n \times 1} = \lambda \mathbf{I}_{n \times n} \vec{v}_{n \times 1}$$

siendo  $\mathbf{I}_{n \times n}$  la matriz identidad, por lo que

$$\lambda \mathbf{I}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup> existe una algoritmo eficiente polinomial que lo calcula

Recordando la ecuación original:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \vec{v}_{n \times 1} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n} \vec{v}_{n \times 1} = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

$$(\mathbf{A}_{n \times n} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n}) \vec{v}_{n \times 1} = \mathbf{0}_{n \times 1},$$

Por lo tanto,

$$\det(\mathbf{A}_{n \times n} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n}) = 0.$$

Luego entonces calcular los *eigen-vectors* y *eigen-values* de una matriz  $\mathbf{A}$  se reduce a calcular el determinante de una matriz bidimensional, para lo cual existen algoritmos eficientes polinomiales.

Por ejemplo, suponga que se desean calcular los *eigen-vectors* y *eigen-values* de la matriz  $\mathbf{A}$  definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

de lo calculado anteriormente sabemos que  $\det(\mathbf{A}_{n \times n} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n}) = 0$ , por lo que:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) - 0 \times 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

Por lo tanto  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$

Ahora reemplazando estos valores recién calculados de  $\lambda$  tenemos que:

$$\lambda_1 = 3, \quad \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ así que } y = 0,$$

Por lo que cualquier vector de la forma  $a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , es un *eigen-vector* válido.

Por otro lado,

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ así que } x + y = 0,$$

Por lo que cualquier vector de la forma  $a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , es un *eigen-vector* válido.

Finalmente, es importante destacar que el polinomio que surge de la ecuación de arriba<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> en nuestro ejemplo:  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$p(\lambda) = \det (\mathbf{A}_{n \times n} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n}) = 0$$

Se conoce como el «polinomio característico» de la matriz  $\mathbf{A}$  y se define formalmente como el polinomio cuyas raíces son los *eigen-values* de la matriz. Este polinomio tiene múltiples usos de interés en la computación cuántica.

## 5 Proyecciones

Ya habíamos introducido en «Notas de Clase» previas la notación de **Dirac** y habíamos definido que un estado cuántico definido como una superposición de estados  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , se tiene que:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \langle\psi| = \begin{bmatrix} \alpha^*, \beta^* \end{bmatrix}. \quad (16)$$

donde la notación  $\alpha^*$  denota el conjugado complejo<sup>6</sup>.

Supongamos un ket arbitrario definido como

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

y analicemos el resultado de calcular la operación 'braket' definida como  $\langle u| |u\rangle$ :

$$\langle u| |u\rangle = \langle u| u\rangle = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1^*u_1 + u_2^*u_2 = |u_1|^2 + |u_2|^2$$

que tiene varias interpretaciones. La primera observación tiene que ver con que la operación 'braket' define el producto punto entre dos vectores. En este caso como se trata de un ket consigo mismo y si recordamos que el módulo o magnitud de un número complejo  $\alpha \in \mathbb{C}$  se define como  $|\alpha| = \sqrt{\alpha\alpha^*}$ , entonces notaremos que en realidad  $\langle u| u\rangle$  calcula la dimensión del ket, un escalar... es decir,  $\langle u| u\rangle = ||u\rangle|^2$ , con  $\langle u| u\rangle \in \mathbb{R}$ , puesto que el producto de un complejo por su conjugado es un número real.

Ahora agreguemos una nueva condición y consideremos un ket  $|u\rangle$  cuya dimensión es 1... (i.e.  $\langle u| u\rangle = 1$ ) y consideremos la operación  $|u\rangle \langle u|$  sobre este ket unitario.

$$|u\rangle \langle u| = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1u_1^* & u_1u_2^* \\ u_2u_1^* & u_2u_2^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

Una matriz de  $2 \times 2$ , que puede tener una interpretación geométrica, como veremos a continuación.

Supongamos que operamos la matrix  $|u\rangle \langle u|$  con un ket  $|v\rangle$ ... es decir, calculemos  $(|u\rangle \langle u|) |v\rangle$ . Si recordamos que en esencia estamos trabajando con producto de matrices y vectores y esta operación es asociativa, podemos ver que  $|u\rangle \langle u| |v\rangle = |u\rangle (\langle u| |v\rangle)$ .

Como sabemos que  $\langle u| v\rangle$  es un producto punto cuyo resultado es un escalar -más generalmente- complejo, podemos mover este producto a la izquierda y obtener que:

<sup>6</sup> además de la notación  $\alpha^*$ , también se usa la notación  $\bar{\alpha}$

$$|u\rangle \langle u| |v\rangle = \langle u|v\rangle |u\rangle \quad (18)$$

Es decir, el resultado final de esta operación consiste en conseguir prolongar (o achicar) el  $|v\rangle$  sobre  $|u\rangle$ . Es decir,  $|u\rangle \langle u| |v\rangle$  'proyecta' el ket  $|v\rangle$  en el  $|u\rangle$ .

Gráficamente tiene la apariencia de la figura 5:

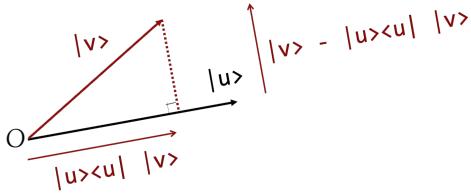


Figura 42: 'Projection' & 'Rejection'

En la figura se observa la descomposición del ket  $|v\rangle$  en un componente paralelo y un componente perpendicular al ket  $|u\rangle$ . El componente paralelo está dado precisamente por el valor que acabamos de encontrar  $|u\rangle \langle u| |v\rangle$ . Recordando la adición de vectores, es fácil concluir que el componente perpendicular equivale a  $|v\rangle - |u\rangle \langle u| |v\rangle$ .

Esta operación "proyección"<sup>7</sup>. debe ser **idempotente** para que sea en realidad una proyección... Es decir, el resultado de calcular la proyección de la proyección debe ser igual al resultado original de solo calcular **una vez** la proyección.

Es decir, se debe cumplir que siendo  $|u\rangle$  un ket de dimensión 1:

$$(|u\rangle \langle u|)^2 = |u\rangle \langle u| \quad (19)$$

La prueba es sencilla, teniendo en cuenta que se trata de producto de matrices y este producto cumple la propiedad asociativa, tenemos que:

$$(|u\rangle \langle u|)^2 = (|u\rangle \langle u|) (|u\rangle \langle u|) = |u\rangle \langle u| |u\rangle \langle u| = |u\rangle \langle u|$$

Basados en esta propiedad de **idempotencia** y también por observación es fácil ver que la matriz  $|u\rangle \langle u|$  tiene solo dos *eigen-values*, exactamente 0 y 1.

En efecto, cualquier matriz  $\mathbf{P}$  que represente una proyección es idempotente y por lo tanto  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ .

Los *eigen-values* y *eigen-vectors* de  $\mathbf{P}$  cumplen la condición que  $\mathbf{P}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Multiplicando esta ecuación a izquierda y derecha por  $\mathbf{P}$  tenemos que  $\mathbf{P}^2\vec{v} = \mathbf{P}\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ . Resumiendo  $\mathbf{P}^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ .

Dado que  $\vec{v} \neq 0$ , por fuerza  $\lambda$  tiene dos valores posibles: 0 y 1 y nada más que estos<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> puede ser extendida a kets  $|u\rangle$  de tamaño arbitrario y no solamente unitarios. Solo tenemos que ajustar la fórmula usual a  $\frac{1}{\langle u|u\rangle} \langle u|v\rangle |u\rangle$ , puesto que en efecto el ket definido por  $\frac{1}{\langle u|u\rangle} |u\rangle$  es de dimensión 1

<sup>8</sup> El lector atento notará que el valor de  $\lambda = 1$  corresponde al valor paralelo a  $\vec{v}$ , mientras que el valor de  $\lambda = 0$  corresponde al valor perpendicular a  $\vec{v}$

## 6 Epílogo

En este documento se presentaron algunas transformaciones lineales y sus matrices asociadas, junto con su interpretación en términos geométricos de sus *eigen-vectors* y *eigen-values*. Estas técnicas de transformaciones lineales son vitales en el campo de la computación gráfica y el software gráfico... Nada más en la lista de comandos de PowerPoint® aparecen opciones como las de la figura 6 que nos recuerdan algunas de las técnicas que vimos en las anteriores secciones.

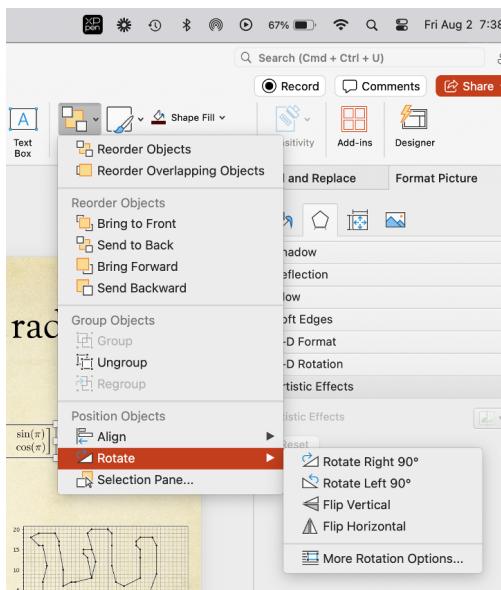


Figura 43: Transformaciones lineales en PowerPoint®

De los muchos ejemplos presentados en este documento, podemos intuir que geométricamente -al menos en dos dimensiones-, que los *eigen-vectors* son aquellos vectores que la matriz que resume la transformación lineal alarga o reduce en una proporción dada por el correspondiente *eigen-value*, sin alterar en ningún momento la dirección de estos vectores.

Sin embargo esta interpretación no es exclusiva a geometría 2D... Por ejemplo, una rotación 3D se define mediante tres parámetros *yaw* (*alpha*), *pitch* (*beta*) y *roll* (*gamma*), que medidos en radianes y combinados<sup>9</sup> nos permiten definir una matriz como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

<sup>9</sup> El lector atento notará la combinación de tres movimientos que se describen como el producto de tres matrices.

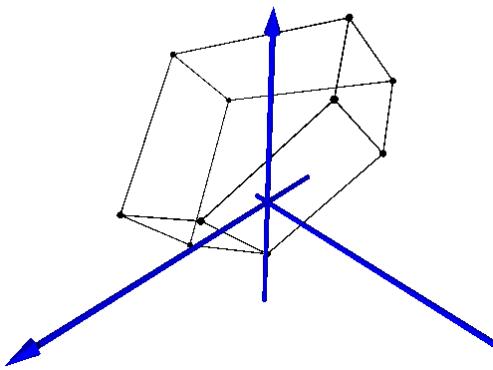


Figura 44: Transformación lineal definida por la matriz  $A$  como una rotación 3D con  $yaw=\frac{\pi}{6}$ ,  $pitch=\frac{\pi}{5}$  y  $roll=\frac{\pi}{7}$ . La figura no está a escala.

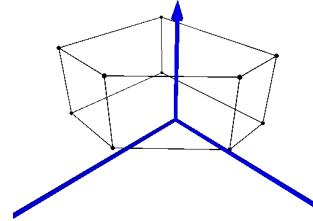


Figura 45: Figura original antes del giro 3D definido por la matriz  $A$ .

Un poco más adelante, en cuánto avancemos más en nuestro conocimiento de las compuertas cuánticas, veremos que hay fenómenos cuánticos que son descritos matemáticamente usando matrices unitarias<sup>10</sup> y que en general estos fenómenos físicos pueden ser entendidos como transformaciones lineales representadas como matrices unitarias que operan sobre vectores que representan un estado cuántico.

Esta es la razón de ser de este documento... conseguir una percepción intuitiva en el lector del concepto de los *eigen-vectors* y los *eigen-values*, que permita más adelante tener algún tipo de comprensión adicional sobre las compuertas cuánticas y su interpretación.

## Referencias

K.A. Stroud. *Engineering Mathematics*. McMillan Education, seventh edition, 2013. ISBN 978-1-137-03120-4.

<sup>10</sup> son matrices unitarias para garantizar que las probabilidades de todos los posibles estados cuánticos sigan sumando 1 después de aplicada la transformación lineal.