Notas de Clase 0: la matemática básica de la QC[1]

Milton q.

Marzo 3, 2025

[1] Este documento fue elaborado en LaTeX utilizando una plantilla inspirada en el trabajo de Edward R. Tufte.

Este documento presenta los rudimentos matemáticos básicos necesarios para describir y entender la algorítmica de la computación cuántica. Está dirigido a programadores de computadores clásicos, que desean entender y capitalizar la promesa de mejoras exponenciales en la capacidad de procesamiento de los computadores cuánticos.

1 *Introducción*

Se dice que revolución informática está basada en una serie de procesos constituidos por pasos individuales que se modelan mediante matemática discreta, mientras que la revolución industrial está basada en una serie de procesos continuos que cambian gradualmente y que se modelan matemáticamente utilizando herramientas del cálculo infinitesimal.

Sin embargo, esta idea válida por muchos años deja de ser tan precisa con el advenimiento de la computación cuántica. En efecto, el lenguaje para entender la computación cuántica está fuertemente basado en la habilidad del lector para manipular cierto tipo de matemática que desafortunadamente no es la matemática usual de la programación de computadores. Es decir, mientras la computación clásica está más basada en variable discreta que en variable continua, en la algorítmica cuántica se utiliza variable continua junto con formalismos tomados del álgebra lineal y números complejos.

Este breve documento busca familiarizar a los estudiantes del curso "QC" de UniAndes en los conceptos matemáticos básicos sobre los cuales se describen los fenómenos cuánticos.

Aún si alguna de estas ideas le resulta familiar al lector, se recomienda una lectura completa del documento, toda vez que la matemática aquí descrita se considerará ya presentada desde el inicio del curso.

Si bien el profesor del curso estará muy atento a preguntas y comentarios de parte de los estudiantes, en el caso en que el lector sienta que debe afianzar mejor algunos de los conceptos, se recomienda el libro de referencia clásico "Engineering Mathematics" de K.A. Stroud ([2]), con especial énfasis en los capítulos de la Parte II de la séptima edición.

[2] K.A. Stroud. *Engineering Mathematics*. McMillan Education, seventh edition, 2013. ISBN 978-1-137-03120-4

Para el lector interesado en entender a profundidad los conceptos físicos detrás de la computación cuántica, la referencia recomendada es el libro de "mike and ike" [3], aunque buena parte de los conceptos allí presentados se estudiarán como parte del contenido del curso.

[3] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, tenth edition, May 2010. ISBN 978-1-107-00217-3

El resto de este documento está organizado como sigue:

1. en la sección «**Los Números Complejos**», se presentan los conceptos asociados a la aritmética compleja y su utilidad para descubrir fenómenos físicos,

2. en la sección «**Vectores y Matrices**», se presentan brevemente algunos conceptos de álgebra lineal, matrices y vectores con especial énfasis en las matrices cuyos elementos son variables complejas,

3. en la sección «**Vectores y Matrices en $\mathbb{C}$**», se discuten algunos de las particularidades de vectores y matrices cuyos elementos son números complejos,

4. finalmente, en la seccion «**Sagemath**», se presentan alguna de la funcionalidad software **sagemath** sage que puede ser usada para explorar este tipo de construcciones matemáticas.

2 *Los Números Complejos*

En la medida en que las necesidades de cálculo de una sociedad se hacen más sofisticadas, es necesario recurrir a conceptos e ideas que al principio pueden ser un tanto esquivas. Imagine por ejemplo un pastor de ovejas al cuál se le habla de fracciones. Para este pastor muchas de sus necesidades de cómputo se suplen con números enteros y suma y resta. Si nace una oveja, hay que sumar 1 a la cantidad que representa el rebaño o restar 1 si una de las ovejas es devorada por lobos. Pero conceptos como "mitad" o "cuarto" sólo aparecen cuando se necesita dividir, una operación que quizás le pareciera un tanto 'esotérica' para las necesidades básicas de un pastor.

Aunque la frase "números complejos" podría sugerir un nivel de sofisticación excesivo, veremos que en realidad este no es el caso, toda vez que podemos pensar en los números complejos simplemente como parejas de números reales, con algunas operaciones especiales definidas.

Pero antes de pensar en definiciones formales y operaciones es deseable recordar la aritmética real y la definición de la raíz cuadrada. Se dice que si $y = x \times x = x^2$, entonces equivalentemente, $x = \pm\sqrt{y}$. Nótese que x puede ser positivo o negativo, ya que $(-x) \times (-x) = x^2$.

Por ejemplo,

$$y = 1 \mapsto \sqrt{y} = \pm 1,$$
$$y = 4 \mapsto \sqrt{y} = \pm 2,$$
$$y = 7 \mapsto \sqrt{y} = \pm 2{,}64575.$$

Pero, ¿qué pasa si $y < 0$? No existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Los números reales son positivos o negativos y al elevarlos al cuadrado, siempre da un número positivo. Esto significa que aún una ecuación tan sencilla como esta:

$$x^2 + 1 = 0, \mapsto ¿x = ?$$

no puede ser resuelta con números reales.

De la misma manera que la ecuación $x^2 - 3 = 0$ no puede ser resuelta con números enteros o que ciertos decretos no pueden ser cumplidos [4] , no podemos resolver para x la ecuación $x^2 + 1 = 0$, sin recurrir a un concepto más allá de los números reales, necesitamos un número imaginario, que llamamos $\imath$ y que se define como:

[4] En la costa Colombiana, el compositor Antonio María Peñaloza se burlaba de las alcaldadas de algún mandatario local que ordenó en un serio decreto municipal el "mátese media vaca"

$$\imath^2 = -1, \mapsto \imath = \sqrt{-1}$$

Así la solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es $x = \pm\imath$. Como quiera que $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, tenemos que $\sqrt{-y} = \sqrt{-1}\sqrt{y} = \pm\imath\sqrt{y}$.

Por ejemplo,

$$y = -1 \mapsto \sqrt{y} = \pm\imath,$$
$$y = -4 \mapsto \sqrt{y} = \pm 2\imath,$$
$$y = -7 \mapsto \sqrt{y} = \pm 2{,}64575\imath.$$

El número imaginario $\imath$ (usualmente descrito como $\jmath$ en algunas ramas de ingeniería) tiene varias propiedades, en particular:

$$\imath = \sqrt{-1},$$
$$\imath^2 = -1,$$
$$\imath^3 = \imath^2\sqrt{-1} = -\imath,$$
$$\imath^4 = \imath^2\imath^2 = (-1)(-1) = 1.$$

y así sucesivamente $\imath^7 = \imath^4\imath^3 = -\imath, \quad \imath^{10} = \imath^7\imath^3 = -1\ldots$

Este número $\imath$ combinado con números reales resulta ser supremamente útil para resolver algunas ecuaciones que resultaban esquivas en el álgebra de bachillerato… Quizás el lector recuerde que para la ecuación cuadrática:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

Se tienen dos soluciones, dadas por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nótese que cuando $b^2 - 4ac < 0$ se requiere el uso de números imaginarios, posiblemente combinados con números reales. . . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} y(x) = x^2 - 4 = 0 \quad &\mapsto x = \pm 2 && \text{solución real} \\ y(x) = x^2 + 9 = 0 \quad &\mapsto x = \pm 3\imath && \text{solución imaginaria} \\ y(x) = x^2 - x + 1 = 0 \quad &\mapsto x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} && \text{solución real e imaginaria} \end{aligned}$$

Nótese que esta combinación de números reales y números imaginarios, no es un número ni imaginario puro, ni real puro. . . en efecto esta combinación de números se conoce como número complejo y se consideran que tienen una parte real y una parte imaginaria y comúnmente se denotan como:

$$z = a + \imath b \in \mathbb{C}, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Para un número complejo $z = a + \imath b$, se dice que su parte real es $a = \Re(z)$, mientras que su parte imaginaria es dada por $b = \Im(z)$. Nótese que tanto los números reales como los números imaginarios son subconjuntos del conjunto de números complejos denotado por $\mathbb{C}$. . . basta con hacer $a = 0$ para obtener todos los números imaginarios o hacer $b = 0$ para obtener todos los números reales ($\mathbb{R}$).

2.1 *Aritmética básica con números complejos*

De la misma manera en que podemos realizar operaciones aritméticas sobre números reales, también podemos extender estas operaciones a números complejos. La suma es particularmente sencilla de definir, basta con definir que la suma de dos números complejos es la suma individual de los componentes reales y los componentes imaginarios.

Es decir, si $z_1 = a_1 + \imath b_1$ y $z_2 = a_2 + \imath b_2$ entonces $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \imath(b_1 + b_2)$.

Claramente $\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$ y $\Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$, por lo tanto la suma de dos números complejos puede arrojar un resultado real o un resultado imaginario o más generalmente un resultado complejo.

Intuitivamente podemos interpretar un número complejo como una pareja de números reales. Así la multiplicación de dos números complejos $z_1 = a_1 + \imath b_1$ y $z_2 = a_2 + \imath b_2$ se define como $z_1 z_2 = a_1 a_2 + \imath(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \imath^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 + \imath(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2$.

En general el producto de dos números complejos es siempre un número complejo, pero hay un caso especial de interés... Cuando $z_1 = a + \imath b$ y $z_2 = a - \imath b$ se tiene que $z_1 z_2 = a^2 - \imath^2 b = a^2 + b^2$ que es un número real. En estos casos se dice que z_2 es *el conjugado complejo* de z_1 (o viceversa) y se denota como $z_2 = z_1^*$, $z_1 = z_2^*$ o también $z_2 = \overline{z_1}$, $z_1 = \overline{z_2}$.

Esta operación *el conjugado complejo* tiene varias propiedades sencillas de verificar. Por ejemplo:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \tag{8}$$

La verificación es sencilla, si $z_1 = x_1 + \imath y_1$ y $z_2 = x_2 + \imath y_2$, entonces

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{x_1 + \imath y_1 \pm x_2 \pm \imath y_2} = x_1 \pm x_2 \mp \imath\,(y_1 + y_2) = x_1 \mp \imath y_1 + x_2 \mp \imath y_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

Una operación interesante tiene que ver con el valor absoluto o módulo o magnitud de un complejo. Esta se define como:

$$|z| = |a + \imath b| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{9}$$

Es fácil ver que para un número complejo $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + \imath b$ y $\overline{z} = a - \imath b$, se tiene que $z\,\overline{z} = a^2 - \imath^2\, b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

La definición de la división es un poco más elaborada. Pero sólo un poco. Basta con recordar que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \imath b_1}{a_2 + \imath b_2} \times \cancelto{1}{\frac{z_2^*}{z_2^*}} = \frac{a_1 + \imath b_1}{a_2 + \imath b_2} \times \frac{a_2 - \imath b_2}{a_2 - \imath b_2} = \frac{(a_1 + \imath b_1)(a_2 - \imath b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \tag{10}$$

Por ejemplo, si $z_1 = 5 + 5\imath$ y $z_2 = 2 - \imath$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 5\imath}{2 - \imath}\frac{2 + \imath}{2 + \imath} = \frac{(5 + 5\imath)(2 + \imath)}{2^2 + 1^2} = \frac{10 - 5 + \imath(10 + 5)}{5} = 1 + 3\imath$$

2.2 *Representación gráfica de números complejos*

Dado que un número complejo es fundamentalmente una pareja de números reales (parte real, parte imaginaria) es fácil pensar en representar un número complejo como un punto en el plano cartesiano,

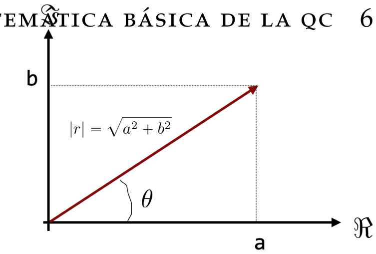

Figura 1: Un número complejo como un punto en el plano Cartesiano.

con la parte real en el eje horizontal y la parte imaginaria en el eje vertical.

Este tipo de diagramas se conoce como diagramas *'Argand'* y permiten representar números reales puros (van en el eje horizontal), números imaginarios puros (van en el eje vertical) y números complejos (en algún lugar de los cuatro cuadrantes) que definen los ejes. Nótese como lo que hemos definido como *el conjugado complejo* en el diagrama de *'Argand'* consiste simplemente en la reflexión en el eje horizontal del punto que representa el número complejo.

Esta forma de representar un número complejo $z = a + b\imath$ como un par de coordenadas cartesianas (a, b) evoca inmediatamente las coordenadas polares como mecanismo alternativo de representación de un punto en el plano. En esta representación definimos cada número complejo en el diagrama de *'Argand'* con la distancia desde el origen r $(r > 0)$ y el correspondiente ángulo θ que forma con el eje real.

Así un número real puro $c \in \mathbb{R}$ corresponde en el diagrama de *'Argand'* a un ángulo $\theta = 0$ y un $r = c$. Su contraparte negativa $-c$ se representará en el diagrama con un ángulo $\theta = \pi$ y $r = c$. Un número puramente imaginario como $\imath$ tendrá un ángulo $\theta = \pi/2$, mientras que $-\imath$ tendrá un ángulo $\theta = 3\pi/2$.

De esta manera para el número complejo $z = a + b\imath$ las fórmulas correspondientes que vinculan la representación cartesiana y polar son:

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta, \tag{11a}$$

$$r^2 = a^2 + b^2, \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}, \tag{11b}$$

$$z = a + b\imath = r\left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right). \tag{11c}$$

La notación 'polar' para números complejos resulta particularmente útil si recordamos "la ecuación más bella del Universo" de Euler que demostraremos en clase y que afirma que:

$$r\left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right) = re^{\imath\theta} \tag{12}$$

Esta notación polar es particularmente conveniente para la multiplicación y división de números complejos . Por ejemplo, dados dos números complejos $z_1 = r_1 e^{\imath\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{\imath\theta_2}$, su producto se calcula fácilmente como $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\imath(\theta_1+\theta_2)}$, y su cociente se calcula como $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\imath(\theta_1-\theta_2)}$.

2.3 Potenciación de números complejos

Así mismo la potenciación de números complejos se simplifica notablemente con la notación polar, toda vez que:

$$z^n = \left(re^{\imath\theta}\right)^n = r^n e^{n\imath\theta} \tag{13}$$

Finalmente es importante notar que encontrar el *conjugado complejo* sigue siendo sencillo en esta notación. Ya previamente habíamos notado que el conjugado complejo es simplemente el reflejo del número en el eje real, que es equivalente a negar el valor del ángulo. Es decir, dado un número complejo $z = re^{\imath\theta}$, su conjugado complejo es $z^* = re^{-\imath\theta}$.

Notese además que $zz^* = re^{\imath\theta}re^{-\imath\theta} = r^2e^0 = r^2$.

3 Vectores y Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números, organizados en torno a filas y columnas que se usan para representar un objeto matemático puro o ciertas propiedades interrelacionadas de un objeto físico.

Por ejemplo, son matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -13 \\ 20 & 5 & -6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las dimensiones de una matrix corresponden a la pareja señalada por el número de filas y el número de columnas. Así las matrices de los ejemplos tienen dimensiones 2×3, 2×2, 2×1, y 1×2 .

3.1 Operaciones sobre matrices

De la misma manera en que definimos operaciones básicas sobre números complejos, también podemos definir sumas y multiplicaciones de matrices, aunque con algunas particularidades específicas.

En primer lugar la suma de matrices sólo está definida si las matrices a sumar tienen las mismas dimensiones. Con esta condición, la adición de matrices es bastante intuitiva: sume cada elemento correspondiente asociado a la misma fila/columna.

Es decir:

$$\text{Si} \quad \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}, \quad \text{entonces} \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}. \tag{15}$$

O más específicamente,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Es posible multiplicar una matriz por un escalar (una constante). La definición es intuitiva, el resultado es equivalente a si la constante multiplica cada elemento de la matriz. Es decir:

$$\text{Para} \quad \mathbf{C}_{m\times n} = r\mathbf{A}_{m\times n} \quad \text{se tiene que} \quad c_{i,j} = ra_{i,j}. \tag{16}$$

El producto de matrices tiene una particularidad adicional relacionada también con las dimensiones de las matrices a multiplicar. Solo se pueden multiplicar dos matrices si el número de las columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. Es decir, el producto $\mathbf{A}_{m_1\times n_1}\mathbf{B}_{m_2\times n_2}$ sólo está definido si $n_1 = m_2$.

Con esta restricción, la multiplicación procede operando sobre cada **fila** de la primera matriz y cada **columna** de la segunda matriz, haciendo que cada elemento $c_{i,j}$ de la matriz producto $\mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n_1}\mathbf{B}_{n_1\times n}$ sea la suma de los productos de cada elemento de la fila i de la matriz $\mathbf{A}$ con la columna j de la matriz $\mathbf{B}$ [5] .

[5] Esto se conoce también como el *producto punto*.

Por ejemplo, para calcular el elemento $(1,1)$ del producto de las matrices se procede por la primera fila de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

El resultado del elemento $(1,1)$ es $1\times 7 + 2\times 9 + 3\times 11 = 58$. Así mismo, para el elemento $(1,2)$ del producto, se procede por la primera fila de la primera matriz y la segunda columna de la segunda matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & 64 \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

El resultado del elemento $(2,1)$ es entonces $1 \times 8 + 2 \times 10 + 3 \times 12 = 64$.

Nótese que por la misma definición del producto de matrices, en general se trata de una operación no conmutativa, i.e. en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

3.2 *Transposiciones e inversos multiplicativos*

Otra operación que podemos definir para matrices es la **transposición**. En esta operación -coloquialmente- las filas se vuelven columnas y las columnas se vuelven filas. Es decir, la transpuesta de una matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ es la matriz $\mathbf{A}^T_{m\times n}$ de dimensión $n \times m$:

$$\text{Para} \quad \mathbf{A}_{m\times n} \quad \text{se tiene que} \quad a^T_{i,j} = a_{j,i}. \tag{17}$$

Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Cuando una matriz tiene las mismas dimensiones ($\mathbf{A}_{m\times n}, \ \text{with} \ m = n$) se dice que se trata de una matriz cuadrada.

Es posible definir una matriz cuadrada especial llamada **la matriz identidad** cuyos elementos son 0 con excepción de la diagonal que está formada por 1.

Por ejemplo, la matriz identidad de dimensión 3×3 está dada por:

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, para algunas matrices cuadradas $\mathbf{A}$ existen una matriz especial denotada por $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Se dice que en estos casos $\mathbf{A}$ es una matriz invertible y que $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Se dice que una matrix $\mathbf{A}$ es ortogonal si su correspondiente matriz transpuesta es igual a su matriz inversa. Es decir:

$$\mathbf{A}^T_{n\times n} = \mathbf{A}^{-1}_{n\times n}. \text{ Equivalente, } \mathbf{A}^T_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{A}^T_{n\times n} = \mathbf{I}_{n\times n}. \tag{18}$$

Existen diversos algoritmos para calcular la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz $\mathbf{A}$[6] . No definiremos ninguno acá, toda vez que **sagemath**, tiene ya incluida funcionalidad para este tipo de cálculos.

[6] Notoriamente la eliminación de Gauss.

3.3 *El producto tensor*

En computación cuántica es de especial interés un producto de matrices llamado *tensor product*. Digamos que se trata de una definición de producto que no tiene la restricción de multiplicación de matrices tradicional que exige que el número de las columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz (el producto $\mathbf{A}_{m_1 \times n_1} \mathbf{B}_{m_2 \times n_2}$ sólo está definido si $n_1 = m_2$).

El *tensor product* (denotado por $\otimes$) busca multiplicar cada elemento de la primera matriz por todos y cada uno de los elementos de la segunda matriz. Por ejemplo, dados dos vectores $\mathbf{U}, \mathbf{V}$, su *tensor product* está dado por:

$$\mathbf{U}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{V}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \; \mathbf{U}_{3\times 1} \otimes \mathbf{V}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1\times 4 \\ 1\times 5 \\ 2\times 4 \\ 2\times 5 \\ 3\times 4 \\ 3\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Esta operación[7], no está sin embargo limitada solo a vectores. Por ejemplo, el *tensor product* de las dos matrices de abajo puede calcularse como:

[7] Formalmente, si $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \in \mathbb{R}^6$

$$\mathbf{A}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\times 7 & 1\times 8 & 2\times 7 & 2\times 8 \\ 1\times 9 & 1\times 10 & 2\times 9 & 2\times 10 \\ 3\times 7 & 3\times 8 & 4\times 7 & 4\times 8 \\ 3\times 9 & 3\times 10 & 4\times 9 & 4\times 10 \\ 5\times 7 & 5\times 8 & 6\times 7 & 6\times 8 \\ 5\times 9 & 5\times 10 & 6\times 9 & 6\times 10 \end{bmatrix}.$$

[8] Nótese como el primer factor de cada caja corresponde a cada elemento de la matriz **A**

El lector atento[8] observará que el *tensor product* de $\mathbf{A}_{m_1 \times n_1}$ y $\mathbf{B}_{m_2 \times n_2}$ es una matriz de dimensiones $(m_1 \times m_2, n_1 \times n_2)$. Es decir, una matriz de 2×2, después de un *tensor product* se convierte en una matriz de dimensiones $2^2 \times 2^2$, mientras que una matriz de 2×2, después de k *tensor products* se convertirá en una matriz de dimensiones $2^k \times 2^k$[9] .

Obsérvese también que el *tensor product* es en general no-conmutativo.

[9] Este número crece rápidamente con k... en efecto veremos más adelante que para simular clásicamente el chip cuántico «Osprey» de IBM® que está formado por 433 qubits, se requerirían matrices de $2^{433} \times 2^{433}$... una matriz gigantesca teniendo en cuenta que $2^{433} \approx 2{,}2 \times 10^{130}$ y se dice que el Universo tiene un estimado de 10^{77} átomos.

4 Vectores y Matrices con complejos

Los mismos principios e ideas que se han presentado para matrices con números reales, pueden ser extendidos a operaciones con números complejos. Por ejemplo, las compuertas cuánticas **S** y **T** que veremos en el curso se definen como:

$$\mathbf{S}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\imath\pi/4} \end{bmatrix}.$$

Y las mismas operaciones de suma, producto, transpuesta, inverso multiplicativo y *tensor product* se siguen manteniendo. Por ejemplo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \ \mathbf{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \ \ \mathbf{S}\,\mathbf{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, es de particular importancia una nueva operación, llamada la **transpuesta conjugada** o *Hermitian adjoint* o *Hermitian transpose*.

La transpuesta conjugada de una matriz $\mathbf{A_{m\times n}}$ se denota como $\mathbf{A}^{\dagger}_{n\times m}$ y se obtiene transponiendo la matriz original **A** y aplicando el conjugado complejo a cada elemento de la matriz. Es decir:

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{i,j} = \overline{\mathbf{A}_{j,i}} \tag{19}$$

Por ejemplo,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \ \mathbf{S}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\imath\pi/4} \end{bmatrix}, \ \mathbf{T}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\pi/4} \end{bmatrix}.$$

Nótese que para matrices con números reales, la operación transpuesta conjugada corresponde simplemente a la operación transposición.

Son de interés las siguientes tres propiedades de la transpuesta conjugada:

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{B}^{\dagger}$,
- $(z\mathbf{A})^{\dagger} = \overline{z}\mathbf{A}^{\dagger}$,
- $(\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$.

Es fácil mostrar que $(\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$. Basta con considerar cada elemento i, j de la matriz producto $(\mathbf{AB})$ y transponerlo-conjugarlo [10] .

[10] si analizamos el elemento i, j de la matriz $(\mathbf{AB})^{\dagger}$, vemos que: $(\mathbf{AB})^{\dagger}_{i,j} = \overline{\sum_k \mathbf{A}_{j,k}\mathbf{B}_{k,i}} = \sum_k \overline{\mathbf{B}_{k,i}\mathbf{A}_{j,k}} = \sum_k \overline{\mathbf{B}_{k,i}}\,\overline{\mathbf{A}_{j,k}} = \left((\mathbf{B})^{\dagger}(\mathbf{A})^{\dagger}\right)_{i,j}$ ■

Hay algunas otras definiciones que aparecen con alguna frecuencia en la literatura y que pueden ser útil tenerlas presentes. Algunas son:

- **matriz Ortogonal**: cuando $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\dagger}$,
- **matriz de Hermite o auto-adjunta**: cuando $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$,
- **matriz Normal**: cuando $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$,
- **matriz Involutoria**: cuando $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$,
- **matriz Unitaria**: cuando $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}}$, o equivalentemente $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz Identidad[11] .

[11] este tipo de matrices unitarias son de particular importancia en computación cuántica. En efecto, durante el curso veremos que la evolución del estado cuántico, cuando se aplica una matriz unitaria «preserva» la magnitud (norma) del estado cuántico

Finalmente es importante notar que cada número complejo tiene una representación como matrix 2×2 que resulta en ocasiones bastante útil para facilitar algunos cálculos. Este número complejo representado como matriz y con las operaciones suma y multiplicación de matrices, preserva las mismas operaciones suma y multiplicación de números complejos. Nótese que si:

$$a_1 + \imath b_1 \equiv \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad a_2 + \imath b_2 \equiv \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$

la multiplicación de los dos complejos es equivalente a la multiplicación de matrices:

$$a_1 + \imath b_1 + a_2 + \imath b_2 = (a_1 + a_2) + \imath(b_1 + b_2) \equiv \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}.$$

$$(a_1 + \imath b_1)(a_2 + \imath b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \imath(b_1 a_2 + a_1 b_2) \equiv \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix}.$$

4.1 *Eigen-values & Eigen-vectors*

Suponga una matriz cuadrada de tamaño n denotada por $\mathbf{A}_{n \times n}$ y sea un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$ y sea λ un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Decimos que el vector $\mathbf{x}$ es un *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$ con *eigen-value* λ si se cumple que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{20}$$

Por ejemplo, considere la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}$$

y los vectores:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es sencillo verificar que:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4\mathbf{x},$$

$$\mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\mathbf{y},$$

$$\mathbf{Aw} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{w},$$

$$\mathbf{Az} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 14 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\mathbf{z}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}$ es un *eigen-vector* de $\mathbf{A}$ con *eigen-value* $\lambda = 4$, $\mathbf{y}$ es un *eigen-vector* de $\mathbf{A}$ con *eigen-value* $\lambda = 0$, $\mathbf{w}$ es un *eigen-vector* de $\mathbf{A}$ con *eigen-value* $\lambda = 2$ y $\mathbf{z}$ es un *eigen-vector* de $\mathbf{A}$ con *eigen-value* $\lambda = 2$.

Para encontrar los *eigen-vectors & eigen-values* de una matriz $\mathbf{A}$ es fácil ver que:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{I_n}\mathbf{x} = \mathbf{0_n}, \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n})\,\mathbf{x} = \mathbf{0_n}$$

El lector atento debiera verificar que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Estos seis productos de matrices y sus propiedades *eigen* se expresarán más adelante durante el curso en notación **Dirac** y diremos que:

$$\mathbf{X}\left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle, \quad \mathbf{X}\left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle,$$

$$\mathbf{Y}\left|+\imath\right\rangle = \left|+\imath\right\rangle, \quad \mathbf{Y}\left|-\imath\right\rangle = -\left|-\imath\right\rangle,$$

$$\mathbf{Z}\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle, \quad \mathbf{Z}\left|1\right\rangle = -\left|1\right\rangle.$$

O más coloquialmente:

- la base $\left|+\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **X** de Pauli, con *eigen-value* 1,
- la base $\left|-\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **X** de Pauli, con *eigen-value* -1,
- la base $\left|+\imath\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **Y** de Pauli, con *eigen-value* 1,
- la base $\left|-\imath\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **Y** de Pauli, con *eigen-value* -1,
- la base $\left|0\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **Z** de Pauli, con *eigen-value* 1,
- la base $\left|1\right\rangle$ es un *eigen-vector* de la compuerta **Z** de Pauli, con *eigen-value* -1.

Así mismo debiera también el lector verificar que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\imath\frac{1}{2} \\ \imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \imath\frac{1}{2} \\ -\imath\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Estos resultados se expresarán más adelante durante el curso en notación **Dirac** y diremos que:

$$\mathbf{X} = |+\rangle\langle+| \;-\; |-\rangle\langle-|\,,$$

$$\mathbf{Y} = |+\imath\rangle\langle+\imath| \;-\; |-\imath\rangle\langle-\imath|\,,$$

$$\mathbf{Z} = |0\rangle\langle 0| \;-\; |1\rangle\langle 1|\,,$$

O más coloquialmente diremos que las compuertas de Pauli $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ pueden descomponerse en sus *eigenstates* y las fases aplicadadas a cada *eigenstate* (también conocida como *spectral decomposition*), términos que nos resultarán más familiares a medida que avancemos con el curso.

4.2 *Exponenciación de Matrices*

Si hacemos memoria de las series de Taylor y su expresión para la función exponencial, recordaremos que para $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{24}$$

Análogamente, podemos extender esta definición de las series de Taylor, ya no para variables x, sino para matrices cuadradas $\mathbf{X}$ con la expresión:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} \tag{25}$$

donde calculamos $\mathbf{X}^n$ con multiplicaciones sucesivas de la matriz $\mathbf{X}$ consigo misma y definiendo $\mathbf{X}^0 = \mathbf{I}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de las mismas dimensiones que la matriz $\mathbf{X}$.

Esta operación sobre matrices así definida, tiene una serie de propiedades interesantes que vamos a estar usando con alguna frecuencia durante el curso:

- $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$,
- $\left(e^{\mathbf{X}}\right)^{\dagger} = e^{\left(\mathbf{X}^{\dagger}\right)}$,
- if $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, then $e^{\mathbf{X}}\, e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$,
- if $\mathbf{X}$ is diagonizable como $\mathbf{X} = \mathbf{U}\,\mathbf{D}\,\mathbf{U}^{-1}$, entonces $e^{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\, e^{\mathbf{D}}\, \mathbf{U}^{-1}$.

5 *Sagemath*

La herramienta *open-source* sage incluye funcionalidad supremamente interesante disponible, que hace que mucho de los conceptos matemáticos mencionados en este documento se puedan experimentar sin escribir código nuevo. Por ejemplo, definir matrices en **sagemath** es tan sencillo como:

```
ZERO = Matrix([1, 0]) # row vector, Bra?

ONE = Matrix([  # column vector (Ket)
[0],
[1]
])

Y_Pauli = Matrix([   # matriz con elementos complejos
[0 , -i],
[i , 0]
])
```

Sagemath 1: Definiendo matrices

Multiplicar dos matrices o calcular el inverso de una matriz es tan sencillo como:

```
H = 1/sqrt(2)*Matrix([  # multiplicacion por un escalar
[1, 1],
[1, -1]
])

S = Matrix([  # matriz con elementos complejos
[1, 0],
[0, i]
])
```

```

T = Matrix([   # matriz con elementos complejos
[1, 0],
[0, e^(i*pi/4)]
])

print T^2 == S   # T^2 es equivalente a la multiplicacion de matrices T*T
print H*H^-1 == identity_matrix(2)  # H^-1 calcula la inversa de la matriz H
print H^0 == identity_matrix(2)     # Una matriz a la 0 debe dar I
```

Sagemath 2: Operaciones simples con matrices

Así mismo, calcular el *tensor product* es particularmente simple, así como también calcular la transpuesta conjugada:

```
S = Matrix([  # matriz con elementos complejos
[1, 0],
[0, i]
])

S_raised_4 = S.tensor_product(S).tensor_product(S).tensor_product(S)
print S.conjugate_transpose()
```

Sagemath 3: *Tensor product* y transpuesta conjugada (*Hermitian*)

Y calcular los respectivos *eigen-vectors & eigen-values* de una matriz se realiza así:

```
A = Matrix([
    [1,1,0],
    [0,2,0],
    [0,0,3]])

print A.eigenvalues()
print
print A.eigenvectors_right()
```

Sagemath 4: *eigen-vectors & eigen-values*

Sin embargo, es importante resaltar que los *eigen-vectors* así calculados por *sagemath* rara vez son normalizados (i.e. su tamaño no es 1). Para aquellas aplicaciones en las que se necesita que los *eigen-vectors* sean de tamaño 1, es posible normalizarlos con el método `norm()` así:

```
  vector = vector/vector.norm()
```

Sagemath 5: normalizando *eigen-vectors*

Esta normalización de los *eigen-vector* no altera en ningún momento el valor del correspondiente *eigen-value*. Para entender por qué, suponga que los valores calculados por *sagemath* para *eigen-value* y *eigen-vector* para una matriz $\mathbf{A}$ son respectivamente λ y $\mathbf{x}$, donde el vector $\mathbf{x}$ tiene una dimensión a y por lo tanto $\mathbf{x} = a\mathbf{v}$, con $|\mathbf{v}| = 1$

y $a \in \mathbb{C}$. Por definición sabemos que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, si reemplazamos la expresión $\mathbf{x}$ por $a\mathbf{v}$, obtenemos que:

$$\mathbf{A}\,\cancel{a}\mathbf{v} = \lambda\,\cancel{a}\mathbf{v}$$

Es decir el vector $\mathbf{v}$ de tamaño 1 sigue siendo un *eigen-vector* de la matriz $\mathbf{A}$ con el mismo *eigen-value* λ.

6 *Ejercicios*

Para realizar estos ejercicios se recomienda instalar *sagemath* (disponible en `https://www.sagemath.org`) o alternativamente una cuenta en cocalc (disponible en `https://cocalc.com`).

Una vez tenga funcionando sagemath, realice los siguientes ejercicios:

6.1 *Ejercicio 1*

Dadas las matrices:

$$\mathbf{SN_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\imath & 1-\imath \\ 1-\imath & 1+\imath \end{bmatrix}, \quad \mathbf{SN_2} = \frac{1}{\sqrt{2\imath}}\begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix}.$$

Calcule $\mathbf{SN_1}^2$ y $\mathbf{SN_2}^2$.

6.2 *Ejercicio 2*

Dadas las matrices:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{XYZ} = \imath\mathbf{I}$.

6.3 *Ejercicio 3*

Dadas las matrices $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$, definidas en el ejercicio anterior, verifique que son matrices involutorias... i.e. $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}^2 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{I}$.

6.4 *Ejercicio 4*

Dada la matriz:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Verifique que la matriz $\mathbf{H}$ es una matriz de Hermite, normal, involutoria y unitaria.

6.5 *Ejercicio 5*

Dadas las matrices:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Calcule los *tensor product* $\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}$ y $\mathbf{I} \otimes \mathbf{H}$ y compárelos.

Referencias

Scott Aaronson. *Quantum Computing since Democritus*. Cambridge University Press, 1st edition, 2013. ISBN 978-0-521-19956-8.

Sarah Kaiser and Christopher Granade. *Learn Quantum Computing with Python and Q#*. Manning Publications Co., 1st edition, 2021. ISBN 9781617296130.

Seth Lloyd. *Programming the Universe*. Alfred A. Knopf, Random House, 1st edition, 2006. ISBN 978-0-307-26471-8.

Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, tenth edition, May 2010. ISBN 978-1-107-00217-3.

K.A. Stroud. *Engineering Mathematics*. McMillan Education, seventh edition, 2013. ISBN 978-1-137-03120-4.

Colin P. Williams. *Explorations in Quantum Computing*. Springer-Verlag, 2nd edition, May 2011. ISBN 978-1-84628-886-9.