

---

# Théorie de la relativité générale et applications

---

Auteurs :

Léo Bernus (Observatoire de Paris, IMCCE (bientôt))

Loïc Chantry (Observatoire de Paris, LUTH)

Olivier Coquand (LPTHE)

Raphaël D. Lasserri (IPN)

6 mars 2016



# Préface

Préface de Léo.

Léo Bernus, 6 mars 2016, Dresde.

Préface d'Olivier.

Olivier Coquand, 6 mars 2016, Paris.

Préface de Loïc.

Loïc Chantry, 6 mars 2016, Meudon.

Préface de Raphaël.

Raphaël Lassery, 6 mars 2016, Orsay.

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Théorie de la Relativité Générale : généralités.</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Introduction à théorie de la relativité restreinte</b>	<b>15</b>
1.1 Principe de relativité et propagation du champ . . . . .	15
1.2 Description mathématique de l'espace-temps : première approche naïve . . . . .	18
<b>II Applications physiques, développements</b>	<b>21</b>
<b>2 Problème à <math>N</math> corps en relativité générale</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Description géométrique relativiste du problème à $N$ corps . . . . .	23
2.3 Template . . . . .	32
<b>3 Titre</b>	<b>33</b>
3.1 Template . . . . .	33
<b>4 Titre</b>	<b>35</b>
4.1 Template . . . . .	35
<b>5 Titre</b>	<b>37</b>
5.1 Template . . . . .	37
<b>Conclusion</b>	<b>39</b>





# Introduction

Corps de l'introduction.



Première partie

# Théorie de la Relativité Générale : généralités.



# Introduction

corps de l'introduction.



# Chapitre 1

## Introduction à théorie de la relativité restreinte

### 1.1 Principe de relativité et propagation du champ

Pour décrire les phénomènes de la nature, nous avons besoin de systèmes de références, c'est-à-dire d'objets physiques (parfois imaginaires) que l'on suppose fixes et par rapport auxquels nous mesurons la dynamique d'autres objets physiques. Mathématiquement, ces objets physiques sont conceptualisés par des systèmes de coordonnées dans lesquels la dynamique des objets physiques est décrite. La théorie mécanique selon Newton postule l'existence de certains systèmes de références dans lesquels les objets dont la résultante des actions qu'ils subissent est nulle ont un mouvement soit immobile, soit rectiligne uniforme (se déplaçant en ligne droite à vitesse constante). Ceci constitue la première loi de Newton, qui est très importante. Une conséquence des deux premières lois de Newton bien connue est que si un référentiel est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen, alors ce référentiel est aussi galiléen. De là, il suit que ce second référentiel peut être choisi comme système de référence, et c'est alors l'autre référentiel, initialement immobile, qui sera vu en mouvement par rapport au second référentiel. Ainsi, et cela est (normalement) enseigné depuis le collège, le mouvement des corps n'a de sens que s'il est défini par rapport à un système de référence. Continuons notre réflexion : l'affirmation "le Soleil tourne autour de la Terre" n'est ni vraie, ni fausse, puisque le système de référence par rapport auquel le mouvement "tourne" n'a pas été précisé. Pour ceux qui pensent que cette affirmation est fausse : de mon point de vue, je vois, chaque jour, depuis l'aube au crépuscule, en passant par midi, le Soleil tourner autour de moi. Dans le système de référence lié à mon bureau, le Soleil tourne autour de la Terre. Pour ceux qui pensent que cette affirmation est vraie : si on pouvait placer un observatoire sur le Soleil, on y observerait la Terre tourner autour.

Ce principe a d'abord été énoncé par Galilée avant d'être formalisé et unifié par les lois de Newton. Pour passer d'un référentiel galiléen à un autre selon la théorie de Newton, il faut effectuer une transformation galiléenne, décrite formellement par la transformation suivante<sup>1</sup> :

$$t'(t, \mathbf{x}) = t \quad (1.1)$$

$$\mathbf{x}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{C}_0 + \mathbf{v}t \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{C}_0$  et  $\mathbf{v}$  sont des vecteurs constants. Les lois de la physique sont invariantes par une telle transformation : si l'on exprime les lois de la physique dans l'un ou dans l'autre des référentiels galiléens, on trouvera les mêmes équations. La théorie Newtonienne, qui postule un temps universel séparé de l'espace, fonctionnait redoutablement bien jusqu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle... tant que l'on n'essayait pas d'y inclure l'électromagnétisme. En effet, les équations de Maxwell, qui elles aussi sont terriblement efficaces pour décrire les phénomènes électriques, ne sont pas invariantes par une transformation

---

1. Les vecteurs spatiaux sont notés en gras.

galiléenne! Au début du XXème siècle, cela fait déjà deux cents ans que la théorie de la mécanique de Newton explique moult phénomènes avec une précision démoniaque; il est donc hors de question de la remettre en cause, c'est à la théorie électromagnétique, qui n'a qu'une trentaine d'années, de se plier à son aînée. Un autre fait important est que les physiciens de l'époque postulaient l'existence d'un éther, substance dans laquelle se déplaçaient les ondes électromagnétiques. Cet éther était supposé être absolument immobile, ce qui supposait la prévalence de certains référentiels sur d'autres.

C'est alors qu'un jeune moustachu, sans poste de professeur ou chercheur dans aucun laboratoire ni université, qui travaillait à l'office des brevets de Berne, eut des considérations fortement esthétiques sur la théorie. Albert Einstein tenait à cette invariance des lois de la physique par changements de référentiels, et décida d'abandonner l'Ether, donnant ainsi naissance à la théorie des champs. De plus, le jeune Albert (qui avait 26 ans en 1905) décida d'abandonner l'idée de temps absolu, pour lui préférer l'idée qu'il existait autant de temps propres que d'observateurs (réels ou fictifs).

Le principe de relativité affirme donc que les lois de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens. Cependant, les transformations de Galilée ne semblent pas permettre de passer correctement d'un référentiel galiléen à un autre puisque les lois de l'électromagnétisme ne sont plus valables. Einstein fut le premier à oser remettre en cause les lois de Newton. Une façon simple de comprendre ceci est ce qui suit.

La gravitation de Newton induit l'instantanéité des propagations du champ de gravitation. Selon la loi de gravitation de Newton, si le Soleil disparaît, la Terre cessera immédiatement de tourner et continuera sa vie dans une trajectoire rectiligne uniforme (sans tenir compte des autres planètes, pour simplifier). Or, comme nous le verrons plus bas, la notion de synchronisation ne peut être absolue, donc la notion de temps absolu, qui inclut qu'une synchronisation absolue de toutes les horloges est possible, doit être abandonnée. L'expérience montre que lorsque deux corps interagissent, si l'un subit des modifications, l'autre n'en sera affecté qu'au bout d'un certain temps. En divisant la distance séparant les deux corps par le temps de réaction dont nous venons de parler, une notion de "vitesse de propagation des interactions" émerge. Le second postulat fondamental de la théorie de l'espace-temps (nommée classiquement "relativité restreinte") est que la vitesse de propagation des interactions admet un maximum. Si nous admettons que ces postulats sont vrais, nous pouvons d'emblée montrer qu'aucun corps ne peut se déplacer plus vite que cette vitesse maximale. En effet, si c'était le cas, ce corps pourrait être utilisé pour véhiculer une interaction avec une vitesse plus grande que la vitesse maximale de propagation de ces interactions.

Cette vitesse maximale de propagation des interactions est souvent nommée "vitesse de propagation du signal". Au risque de tuer le suspense, cette vitesse maximale de propagation des interactions est la vitesse de la lumière dans le vide, et sa valeur numérique est exactement :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (1.3)$$

Depuis 1983, la vitesse de la lumière dans le vide est en effet exacte, par définition du mètre, celui-ci étant défini comme la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299\,792\,458$  seconde.

En raison de la grande valeur numérique de cette constante, on peut comprendre que pour des corps se déplaçant lentement par rapport à cette vitesse, la loi de gravitation de Newton, ainsi que le caractère absolu du temps, soient de bonnes approximations. Lorsque l'on suppose que les deux postulats précédents sont vrais, le cadre théorique utilisé est nommé *mécanique relativiste*. Lorsque l'on suppose que les vitesses d'interactions sont infinies et que le temps est absolu, le cadre théorique est nommé *mécanique de Newton*. Il est possible de passer formellement de la mécanique relativiste à la mécanique de Newton en posant  $c \rightarrow \infty$  dans les équations<sup>2</sup>.

En mécanique de Newton, le caractère absolu du temps, *i.e.* son indépendance des systèmes de références, implique que si un observateur attaché à un référentiel observe deux phénomènes simultanés,

---

2. Nous évitons les termes souvent employés de "mécanique classique", qui peuvent porter à confusion. En effet, "mécanique classique" peut signifier "mécanique non quantique" ou "mécanique non relativiste", mais il est possible de formuler des théories relativistes non quantiques, ainsi que des théories quantiques non relativistes, et là, tout le monde est perdu. Nous nous interdisons ainsi les termes "mécanique classique" pour plus de clarté.



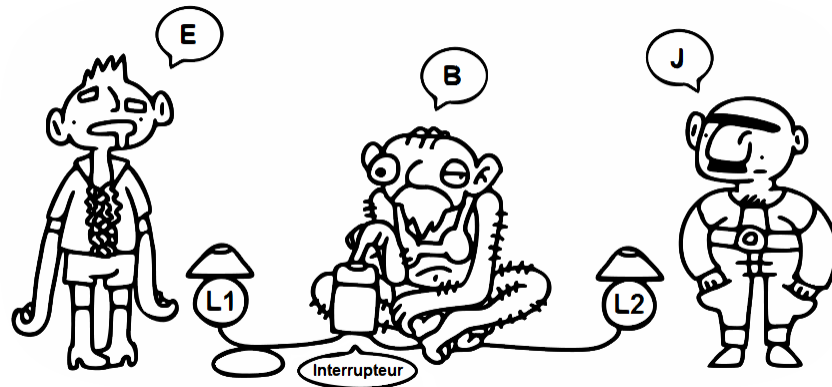


FIGURE 1.1 – Dispositif expérimental mettant en évidence le caractère relatif de la simultanéité.

alors tout observateur dans tout autre référentiel observera également ces deux phénomènes comme simultanés. Or il est facile de s'assurer que le concept de temps absolu est en contradiction avec le principe d'universalité de la vitesse de propagation des phénomènes. En effet, la mécanique de Newton, basée sur le concept de temps absolu, se base sur les transformations de Galilée de composition vectorielle des vitesses. Or, comme cette loi est universelle, elle devrait être vraie pour la vitesse de propagation des informations, et impliquerait qu'il serait possible de dépasser ce maximum, ou encore que cette vitesse maximale dépendrait du référentiel. Mais l'expérience montre que c'est le principe de relativité qui est vrai. En effet, les expériences de Michelson de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle ont montré que la vitesse de propagation de la lumière était indépendante de la direction de propagation dans un référentiel en mouvement par rapport à l'objet qui émet de la lumière.

Pour être plus clairs, imaginons un exemple simple. Soit trois observateurs  $B$  = Bernard,  $J$  = Jean-Jacques,  $E$  = Eudes-Kévin, situés selon la figure 1.1. Les deux lampes  $L_1$  et  $L_2$  sont disposées à égales distances de Bernard. À  $t = 0$ , Bernard appuie sur un interrupteur. Le signal électrique se propage le long des deux fils, et les deux lampes s'allument. Le signal lumineux met  $\Delta t_1 = L_1 B/c = L_2 B/c$  à parvenir à Bernard, celui-ci voit donc les deux lampes s'allumer en même temps. Cependant, pour Jean-Jacques, les choses sont différentes. En effet, comme  $L_1 J > L_2 J$ , ce gars-là verra la lampe  $L_2$  s'allumer avant la lampe  $L_1$ . La situation est inverse pour Eudes-Kévin. Ainsi, la simultanéité pour un observateur n'implique pas la simultanéité pour tous les observateurs en théorie relativiste. Notons à ce stade que le principe de causalité n'est pas remis en question. En effet, l'allumage de la lampe  $L_1$  n'est pas la cause de l'allumage de la lampe  $L_2$ , et réciproquement ; ces événements peuvent donc apparaître dans un ordre quelconque selon le référentiel. En revanche, que ce soit pour Jean-Jacques ou Eudes-Kévin, les deux verront Bernard appuyer sur l'interrupteur toujours avant l'allumage de l'une ou de l'autre lampe, à deux conditions : la vitesse de propagation du courant électrique est plus faible que la vitesse de la lumière, et les deux observateurs (Jean-Jacques et Eudes-Kévin) se déplacent eux-mêmes plus lentement que la lumière<sup>3</sup>. Malgré le caractère relatif du temps, mettons définitivement fin aux faux espoirs : la causalité est absolue dans la théorie relativiste de l'espace-temps. Cela sera aussi vrai en relativité générale. Il est absolument impossible de modifier son passé en théorie relativiste. Enfin, notons que la causalité absolue est une conséquence du caractère fini du maximum de la vitesse des propagations.

Une autre conséquence du principe de relativité est que les solides indéformables n'existent pas. En effet, si c'était le cas, le choc d'un autre solide sur un solide donné impliquerait un mouvement d'ensemble comme conséquence d'un choc en un point de contact. Ainsi, un autre point du solide indéformable, éloigné du point de contact, serait animé d'un mouvement instantanément après le choc,

3. Dans le cas où l'un des trois phénomènes est aussi rapide que la vitesse de la lumière, il peut au mieux y avoir simultanéité apparente.

ce qui est contraire avec la vitesse de propagation finie des informations. Les points du solide éloignés du point de contact doivent "attendre" que l'information de la perturbation du point de contact arrive jusqu'à eux, et cette information ne peut se transmettre instantanément.

Énonçons une bonne fois pour toute le principe de relativité d'Einstein :

Les lois de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. De plus, la propagation des signaux et des interactions entre les corps admet une vitesse maximale universelle qui est la même dans tous les référentiels inertiels.

Discutons un peu des conséquences de ce principe. Une autre façon de l'énoncer est de dire que le mouvement<sup>4</sup> est comme rien. Toutes les expériences physiques donneront strictement les mêmes résultats dans tous les référentiels galiléens. Si vous changez d'un référentiel à un autre, la vitesse de la lumière sera toujours "infiniment" éloignée de vous. En effet, si vous accélérez pour gagner, mettons, 100km/s, vous ne faites que passer d'un référentiel inertiel à un autre. Une fois que vous vous situez dans ce second référentiel inertiel, vous pouvez alors tout remettre à zéro et annuler votre vitesse. Du point de vue d'un observateur, la lumière est donc perpétuellement inatteignable, quels que soient les efforts fournis. Un deuxième observateur qui voit le premier accélérer perpétuellement, ne le verra jamais dépasser la vitesse de la lumière ; il peut au mieux l'observer s'en approcher asymptotiquement, comme nous le montrerons bientôt. Le principe de relativité est une démocratisation des référentiels inertiels : ceux-ci se valent tous.

Il suit aussi que la constante  $c$  est une constante universelle de la physique. La vitesse de la lumière n'est pas le résultat de calculs, elle est profondément ancrée dans les postulats même de la théorie. Nous verrons également abondamment que les seuls protocoles expérimentaux fiables se fondent sur la propagation de la lumière. Les seules mesures fondamentales de distances sont en fait des mesures de temps de propagation de la lumière, que nous multiplions par  $c$  pour obtenir des distances.

Pour finir ce paragraphe d'introduction, discutons de la notion de théorie du champ. Deux objets ne peuvent interagir que via un champ d'interaction dont les modifications ne peuvent se propager que localement de proche en proche, et la vitesse de cette propagation est universellement (dans tous les référentiels inertiels) limitée par la vitesse de la lumière. Comme nous le verrons, le champ lui-même est un objet physique. Conceptuellement, il faut donc comprendre que deux objets qui interagissent constituent en réalité trois objets physiques : les deux objets dont on souhaite déterminer théoriquement la dynamique, et le champ d'interaction entre ces deux objets. En théorie du champ, lorsqu'on place deux objets ensemble, on ne peut les étudier correctement qu'en étudiant trois objets.

## 1.2 Description mathématique de l'espace-temps : première approche naïve

Nous donnons ici une première appréhension de l'espace-temps, en développant le minimum de formalisme mathématique pour rester rigoureux. Les armes mathématiques de destruction massive qui permettent de tuer les problèmes en un battement de cils seront développées plus tard.

Si nous voulons décrire les objets de la nature, nous ne pouvons plus distinguer l'espace et le temps. Chaque événement de l'espace-temps sera donc caractérisé par une position dans l'espace, et une date, toutes ces quantités étant observées par un observateur lié à un système de référence. Comme l'espace est à trois dimensions, il faut trois coordonnées ; en repérage cartésien il est usuel de choisir  $x, y, z$ . Essayons de traduire cela en terme mathématique. Pour un observateur  $\mathcal{O}$  placé au centre d'un repère, chaque événement est repéré par quatre coordonnées d'espace-temps :  $(ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . La coordonnée temporelle a été multipliée par  $c$  pour avoir les mêmes dimensions que les coordonnées spatiales. Puisque la théorie de Newton est inefficace, nous devons traiter l'espace et le temps *a priori* de la même façon. Ainsi, les objets de la nature évoluent dans un espace à quatre dimension que nous nommons espace-temps.

---

4. Sous-entendu rectiligne uniforme.

Essayons d'exprimer le principe de relativité. Soient deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  liés à deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , tous deux inertiels, dans lesquels on peut mesurer des événements à des dates  $t$  et  $t'$ , localisées dans l'espace par les coordonnées  $x, y, z$  et  $x', y', z'$ . Faisons coïncider les axes  $x$  et  $x'$  et faisons de telle sorte que les axes  $y$  et  $y'$  soient parallèles, ainsi que les axes  $z$  et  $z'$ . Supposons que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , à l'événement de coordonnées  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ , un signal électromagnétique se déplaçant à la vitesse de la lumière soit émis, et qu'à la date  $t_2$ , il soit réceptionné au point de coordonnées  $(x_2, y_2, z_2)$ , autrement dit à l'événement de coordonnées  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$ . Comme le signal se propage à la vitesse  $c$ , la distance parcourue sera égale à  $c(t_2 - t_1)$ . D'autre part, cette distance est aussi égale à  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Le lien entre le temps et la distance parcourus par le signal peut donc s'écrire :

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (1.4)$$

L'observateur  $\mathcal{O}'$  peut également observer ces phénomènes dans son référentiel  $\mathcal{R}'$ . Notons  $(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$  et  $(t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$  les coordonnées des événements de l'émission et de la réception du signal dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Comme la vitesse de la lumière est la même que dans le premier référentiel, nous pouvons écrire une expression analogue à (1.4) :

$$-c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = 0. \quad (1.5)$$

Si  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$  sont les coordonnées de deux événements quelconques, alors nous pouvons définir la quantité  $s_{12}$  telle que<sup>5</sup>

$$s_{12}^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (1.6)$$

Cette quantité est nommée *intervalle d'espace-temps* entre les deux événements. Ainsi, le principe de relativité implique que si un intervalle d'espace-temps est nul dans un référentiel inertiel, il le sera également dans tout autre référentiel inertiel. Lorsque deux événements sont infiniment proches dans l'espace-temps, l'intervalle de temps est également infiniment petit et est donné par :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.7)$$

Nous avons montré que si  $ds = 0$  dans  $\mathcal{R}$ , alors  $ds' = 0$  dans  $\mathcal{R}'$ . Lorsque  $ds$  n'est pas nul,  $ds'$  n'est pas nul non plus, sinon  $ds$  le serait aussi puisqu'aucun des deux référentiel n'a de rôle privilégié. Ainsi, il existe un nombre  $a$  tel que

$$ds^2 = a ds'^2. \quad (1.8)$$

Mais comme les référentiels sont équivalents, nous pouvons interchanger  $ds$  et  $ds'$  dans l'équation (1.8). En itérant un coup nous trouvons :

$$a^2 = 1. \quad (1.9)$$

Si  $a$  pouvait être égal à  $-1$ , le principe de relativité serait remis en question. En effet, considérons un objet se déplaçant moins vite que la lumière en mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}$ , et repérons deux points de sa ligne d'espace-temps par  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$ . Il est évident que dans ce cas,  $s_{12}^2 < 0$ . Si nous avions  $a = -1$ , alors dans  $\mathcal{R}'$ , nous aurions  $s_{12}'^2 > 0$  ce qui impliquerait que dans  $\mathcal{R}'$ , notre objet se déplacerait plus vite que la lumière, ce qui entre frontalement en contradiction avec le principe de relativité. Ainsi,  $a = +1$ .

Il en résulte qu'entre deux référentiels inertiels,

$$\boxed{ds^2 = ds'^2}. \quad (1.10)$$

5. Notons que ce la grandeur  $s_{12}^2$  peut être négative malgré le carré. Cette notation avec l'exposant deux n'est là que pour rappeler qu'il s'agit d'une forme quadratique, mais pas qu'il s'agit d'un nombre réel élevé au carré.

À présent, imaginons, dans  $\mathcal{R}$ , un chemin dans l'espace-temps selon une trajectoire à un paramètre  $\lambda$ , ses coordonnées sont donc  $(t(\lambda), x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ . En différentiant, nous pouvons calculer l'intervalle élémentaire  $ds^2$ . Comme  $ds \equiv \sqrt{|ds^2|} = ds'$ , en intégrant le long de ce chemin, nous trouvons que

$$\boxed{s = s'}. \quad (1.11)$$

Ce résultat très important montre que l'intervalle de l'espace-temps est invariant par changement de référentiel inertiel. La forme quadratique  $s^2$  apparaît donc comme un système de mesure universel des intervalles de l'espace-temps. De même, il est simple de montrer que l'invariance de l'intervalle d'espace-temps implique que la vitesse de la lumière est universelle. Le principe de relativité est mathématiquement équivalent à l'invariance de l'intervalle d'espace-temps. En partant de l'invariance de l'intervalle d'espace-temps, nous pouvons dérouler toute la théorie de la relativité restreinte, et c'est précisément ce que nous allons faire dans ce chapitre. Avant de poursuivre la lecture, prenez donc un instant pour saisir la profondeur, la puissance, mais surtout la simplicité, et donc la beauté de ce résultat. Cela mérite d'être médité.

Montrons la grande souplesse que cela autorise vis à vis de la notion d'ordre chronologique. Par exemple, considérons deux événements  $(t_1, \mathbf{x}_1)$  et  $(t_2, \mathbf{x}_2)$  dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Existe-t-il un autre référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel ces deux événements sont observés simultanément ? (Nous renvoyons à nos trois gars de la section précédente avec leurs lampes et invitons le lecteur à se poser la question pour plusieurs événements). Posons  $t_{12} = t_2 - t_1$  et  $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ . Avec des notations primées pour le référentiel  $\mathcal{R}'$ , nous savons que nous devons avoir :

$$-c^2 t_{12}'^2 + \mathbf{x}_{12}'^2 = -c^2 t_{12}^2 + \mathbf{x}_{12}^2. \quad (1.12)$$

Si nous voulons que les événements apparaissent comme simultanés dans  $\mathcal{R}'$ , il faut que  $t_{12}' = 0$ , ce qui implique que  $s_{12}^2 > 0$ . Un tel référentiel n'existe donc que pour les formes quadratiques d'intervalles d'espace-temps positifs. De tels intervalles sont nommés *intervalles de genre espace*. Dans le référentiel où les deux événements apparaissent comme simultanés, la distance les séparant vaut  $x_{12}' \equiv |\mathbf{x}_{12}'| = \sqrt{-c^2 t_{12}^2 + \mathbf{x}_{12}^2} = s_{12}$ .

Répondons à l'autre question : deux événements dans  $\mathcal{R}$  peuvent-ils être perçus comme se déroulant en un même point de l'espace ? Avec le même raisonnement, nous voyons que cela n'est possible que si  $s_{12}^2 < 0$ . De tels intervalles sont nommés *intervalles de genre temps*. Dans le référentiel dans lequel les deux événements sont perçus comme se déroulant au même point de l'espace, le temps qui s'écoule entre les deux événements vaut précisément  $t_{12}' = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - \mathbf{x}_{12}^2}/c = s_{12}/c$ .

Nous savons également que les intervalles de longueur (au sens de la forme quadratique (1.6)) nulle sont de longueur nulle dans tous les référentiels inertiels. De tels intervalles sont dit *intervalles de genre lumière*.

Remarquons que pour deux événements donnés, la nature (espace, temps, ou lumière) de l'intervalle d'espace-temps qui les sépare a un caractère absolu, car en changeant de référentiel inertiel, il est impossible de changer le signe de la forme quadratique de l'intervalle d'espace-temps. Ainsi, pour un observateur  $\mathcal{O}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , plusieurs zones caractéristiques émergent de ces raisonnements. Si vous n'avez pas déjà deviné la raison du choix des noms des genres des intervalles, cela va s'éclaircir immédiatement.

À suivre...

Deuxième partie

Applications physiques,  
développements



## Chapitre 2

# Problème à $N$ corps en relativité générale

### 2.1 Introduction

Le problème à  $N$  corps gravitationnel consiste à prédire le mouvement de  $N$  corps en interaction gravitationnelle connaissant leurs positions et vitesses à un instant donné. Dans ce chapitre, nous allons montrer comment traiter ce problème avec le cadre de la théorie de la relativité générale. Contrairement à la théorie newtonienne, la première étape du problème à  $N$  corps qui consiste à obtenir les équations du mouvement est beaucoup moins aisée. C'est surtout à cela que sera consacré ce chapitre. Une fois les équations du mouvement obtenues, leur résolution est un problème purement mathématique (ou numérique). L'objet de cet ouvrage se concentrant plus sur la théorie de la relativité générale, nous n'exposerons pas les méthodes de résolutions des équations du mouvement dans le détail. La dernière section de ce chapitre résumera les dernières avancées en terme de résolution, en accentuant l'aspect relativiste de la chose. Des références seront données pour qui compte approfondir ce problème.

### 2.2 Description géométrique relativiste du problème à $N$ corps

#### 2.2.1 Introduction et notations

Avant tout calcul prédictif il faut préciser le cadre géométrique dans lequel nous travaillons. En effet, les hypothèses physiques ont des manifestations géométriques, ce qui est très naturel dans une théorie comme la relativité générale.

Les lettres grecques minuscules  $\alpha, \beta, \dots$  désignent les 4 coordonnées 0, 1, 2, 3 de l'espace temps alors que les lettres latines minuscules  $a, b, \dots$  renvoient aux coordonnées spatiales 1, 2, 3. Les conventions de sommation d'Einstein sont bien évidemment adoptées sur les lettres grecques, mais aussi sur les lettres latines : ainsi,

$$A_i B^i \equiv A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (2.1)$$

mais nous posons également

$$A^i B^i \equiv \delta_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (2.2)$$

Nous serons amenés à faire des développements limités en  $1/c$ . C'est pourquoi nous adoptons les notations compactes suivantes. Pour tout champ scalaire  $\Phi$ ,

$$\Phi = O(c^{-n}) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = O(n). \quad (2.3)$$

Pour tout 4-vecteur de coordonnées  $A^\mu$ ,

$$A^0 = O(p) \quad \text{et} \quad A^i = O(q) \quad \Leftrightarrow \quad A^\mu = O(p, q). \quad (2.4)$$

Pour tout tenseur de rang 2 et de coordonnées  $T^{\mu\nu}$ ,

$$T^{00} = O(p), \quad T^{0i} = O(q), \quad T^{i0} = O(q) \quad T^{ij} = O(r) \quad \Leftrightarrow \quad T^{\mu\nu} = O(p, q, r). \quad (2.5)$$

Enfin, nous utilisons la convention des parenthèses pour symétriser un tenseur et des crochets pour l'antisymétriser :

$$T^{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) \quad (2.6)$$

$$T^{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Choix du système de coordonnées

Dans le cadre d'une théorie relativiste, nous faisons l'hypothèse (forte) que les corps évoluent dans une variété  $\mathcal{V}$  différentiable de dimension 4 parcourue par  $N$  lignes d'univers  $\mathcal{L}_A$ ,  $A \in \{1, \dots, N\}$ . Soit  $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{V}$  un voisinage ouvert de  $\mathcal{L}_A$ . Soit  $X_A^\mu$  un système de coordonnées décrivant  $\mathcal{T}_A$  adapté à  $\mathcal{L}_A$ , c'est-à-dire qu'un paramétrage possible de  $\mathcal{L}_A$  dans  $\mathcal{T}_A$  est  $X^\mu(P(s) \in \mathcal{L}_A) = (s, 0, 0, 0)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . La base naturelle associée à ce système de coordonnées le long de  $\mathcal{L}_A$  est définie de la façon suivante :

$$e_\mu^A(s) = \left. \frac{\partial}{\partial X_A^\mu} \right|_{P(s) \in \mathcal{L}_A}. \quad (2.8)$$

Nous ajoutons aux  $N$  systèmes de coordonnées adaptés aux  $N$  lignes d'univers le système de coordonnées suivant. Nous supposons qu'il existe un système de coordonnées global décrivant tout  $\mathcal{V}$  (donc incluant tous les  $\mathcal{T}_A$ ) que nous noterons  $x^\mu$ . L'objet de toute cette section sera de décrire le changement de coordonnées de  $X_A^\mu$  à  $x^\mu$ . À présent, considérons les  $N$  changements de coordonnées :

$$x^\mu = f_A^\mu(X_A^\nu). \quad (2.9)$$

Nous allons paramétriser ce changement de coordonnées en posant les définitions suivantes :

$$z_A^\mu(s) \equiv f_A^\mu(s, 0, 0, 0) \quad (2.10)$$

$$e_{A,\nu}^\mu(s) \equiv \left. \frac{\partial f_A^\mu}{\partial X_A^\nu} \right|_{X^\mu=(s,0,0,0)} = \left. \frac{\partial f_A^\mu}{\partial X_A^\nu} \right|_{P(s) \in \mathcal{L}_A} \quad (2.11)$$

$$\xi_A^\mu(X_A^\nu) \equiv f_A^\mu(X_A^\nu) - f_A^\mu(s, 0, 0, 0) - e_{A,j}^\mu X_A^j \quad (2.12)$$

$z_A^\mu(s)$  n'est donc rien d'autre que la représentation paramétrique, dans le système de coordonnées  $x^\mu$ , de la ligne d'univers  $\mathcal{L}_A$  paramétrisée par  $s$ .

De ce fait, nous remarquons que

$$e_\mu^A(s) = \left. \frac{\partial}{\partial X_A^\mu} \right|_{\mathcal{L}_A} = e_{A,\mu}^\nu e_\nu^A(s) = e_{A,\mu}^\nu \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_{\mathcal{L}_A}. \quad (2.13)$$

Remarquons également que

$$e_{A,0}^\mu = \frac{dz_A^\mu}{ds}. \quad (2.14)$$

Avec ces notations, le changement de coordonnées s'écrit de la façon suivante :

$$x^\mu(X^\nu) = z^\mu(X^0) + e_{A,i}^\mu X^i + \xi^\mu(X^\nu) \quad (2.15)$$



où nous avons sous-entendu l'indice  $A$  pour éviter d'alourdir les notations. Comme nous supposons que toutes les fonctions considérées sont différentiables<sup>1</sup>, cette dernière relation combinée avec la partie spatiale de la définition 2.11 nous prouvent que

$$\xi^\mu(X^\nu) = O((X^i)^2) \quad (2.16)$$

quand  $X^i \rightarrow 0$  pour  $X^0$  fixé. La matrice jacobienne de ce changement de variables, dont nous définissons les coordonnées ainsi :

$$A^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \quad (2.17)$$

s'écrit

$$A^\mu{}_0 = e^\mu{}_0(s) + \frac{de^\mu{}_i(s)}{ds} X^i + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial s} \quad (2.18)$$

$$A^\mu{}_k = e^\mu{}_k(s) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial X^k} \quad (2.19)$$

Remarquons que jusqu'ici toutes les définitions se passent du tenseur métrique et sont purement topologiques. À présent il est temps d'introduire les hypothèses physiques du modèle et leur manifestations dans la courbure de l'espace-temps.

### 2.2.3 Hypothèses physiques du modèle

Nous supposons que les corps sont lents devant la vitesse de la lumière, et aussi qu'ils génèrent de faibles champs gravitationnels, c'est-à-dire modifiant peu le tenseur métrique par rapport au tenseur métrique de Minkowski dont nous notons les coordonnées  $\eta_{\mu\nu}$ . L'hypothèse du mouvement lent s'écrit

$$\frac{dz^i}{ds} = \frac{dz^i}{c d\tau} = O(1) \quad (2.20)$$

où  $\tau \equiv s/c$ . L'hypothèse du champ faible combinée avec l'hypothèse du mouvement lent nous amène à supposer qu'il existe  $N + 1$  systèmes de coordonnées  $x^\mu$  et  $X^\mu_A$ ,  $A \in \{1, \dots, N\}$  tels qu'en chacun de ces systèmes de coordonnées, le tenseur métrique vérifie :

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^\alpha) = O(2, 3, 2), \quad (2.21)$$

$$G^A_{\mu\nu}(X^\alpha_A) - \eta_{\mu\nu} = H^A_{\mu\nu} = O(2, 3, 2). \quad (2.22)$$

Remarquons que nous adoptons ici un système de coordonnées cartésien, de telle sorte que le tenseur métrique de Minkowski a les mêmes composantes dans tous les systèmes de coordonnées, comme suggéré ci-dessus. Les composantes du tenseur métrique forment la matrice de Minkowski qui a déjà été discutée dans le cours<sup>2</sup>. L'hypothèse du mouvement lent s'écrit ainsi :

$$A^\mu{}_\nu = O(0, 1, 0). \quad (2.23)$$

Ces hypothèses peuvent d'emblée mener à quelques résultats intéressants. La loi de transformation des composantes du tenseur métrique s'écrit

$$G_{\alpha\beta} = A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Les hypothèses 2.21 et 2.22 conduisent immédiatement à

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} + O(2, 3, 2). \quad (2.25)$$

---

1. Probablement l'hypothèse la plus lourde de toute la théorie de la relativité générale...

2. à venir...

Le tenseur métrique ayant disparu, cette relation ne donne que des contraintes sur la structure mathématique du changement de coordonnées  $x^\mu = f^\mu(X^\nu)$ . La relation 2.25 étant vraie pour tous  $X^i$ , nous pouvons effectuer un développement limité et obtenir des égalités qui correspondent aux ordres  $O((X^i)^0)$ ,  $O((X^i)^1)$  et  $O((X^i)^2)$ . Pour simplifier les notations, nous notons  $O((X^i)^n) \equiv O(X^n)$ . Comme nous avons

$$A^\mu_\nu = e^\mu_\nu + O(X) \quad (2.26)$$

l'ordre  $O(X^0)$  de l'équation 2.25 implique que

$$\eta_{\mu\nu} e^\mu_\alpha e^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} + O(2, 3, 2). \quad (2.27)$$

La composante  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  de 2.27 donne

$$-e^0_0{}^2 + e^i_0 e^i_0 = -1 + O(2) \quad (2.28)$$

mais comme  $e^i_0 = dz^i/ds = O(1)$ , nous pouvons oublier le deuxième terme du membre de gauche et obtenir  $e^0_0{}^2 = 1 + O(2)$  ce qui équivaut à

$$e^0_0 = 1 + O(2) \quad (2.29)$$

La composante  $0a$  de la relation 2.27 nous donne

$$-e^0_a e^0_0 + e^i_a e^i_0 = O(3) \quad (2.30)$$

Mais comme  $e^0_a = O(1)$ , nous avons, en vertu de 2.29,

$$e^0_a e^0_0 = e^0_a + O(3) \quad (2.31)$$

et donc

$$e^0_a = e^i_a e^i_0 + O(3) = e^i_a \frac{dz^i}{ds} + O(3). \quad (2.32)$$

La composante  $ab$  de 2.27 donne, grâce à  $e^0_a e^0_b = O(2)$  :

$$e^i_a e^i_b = \delta_{ab} + O(2). \quad (2.33)$$

Ensuite, la composante  $00$  de l'équation 2.25 s'écrit

$$-\left(e^0_0 + \frac{de^i_a}{ds} X^a\right)^2 + \left(e^i_0 + \frac{de^i_a}{ds} X^a\right) \left(e^i_0 + \frac{de^i_a}{ds} X^a\right) = -1 + O(2). \quad (2.34)$$

L'ordre  $O(X)$  de cette équation s'écrit :

$$-e^0_0 \frac{de^i_a}{ds} X^a + 2e^i_0 \frac{de^i_a}{ds} X^a = O(2) \quad (2.35)$$

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{c d\tau} = O(1). \quad (2.36)$$

et  $e^i_0 = O(1)$  donc  $e^i_0 de^i_a/ds = O(2)$ ; de plus,  $e^0_0 = 1 + O(2)$ ; nous en déduisons :

$$\frac{de^i_a}{ds} = O(2). \quad (2.37)$$

La composante  $ab$  de l'équation 2.34 s'écrit :

$$-\left(e^0_a + \frac{\partial \xi^0}{\partial X^a}\right) \left(e^0_b + \frac{\partial \xi^0}{\partial X^b}\right) + \left(e^i_a + \frac{\partial \xi^i}{\partial X^a}\right) \left(e^i_b + \frac{\partial \xi^i}{\partial X^b}\right) = \delta_{ab} + O(2). \quad (2.38)$$

L'ordre  $O(X)$  de cette équation s'écrit :

$$-2e^0_{(a} \frac{\partial \xi^0}{\partial X^{b)}} + 2e^i_{(a} \frac{\partial \xi^i}{\partial X^{b)}} = O(2) \quad (2.39)$$

où la notation de symétrisation 2.6 a été utilisée. Mais comme  $A^0_i = O(1)$ , cela est vrai à l'ordre  $O(X^0)$  et l'ordre  $O(X)$ , donc  $e^0_i = O(1)$  et  $\partial \xi^0 / \partial X^i = O(1)$ , et ainsi le premier terme de 2.39 est de l'ordre  $O(2)$  et peut être négligé. D'après 2.33,  $e^i_j = O(0)$ . Nous en déduisons que  $\partial \xi^i / \partial X^a = O(2)$ , et comme la dérivation selon  $X^a$  ne change pas l'ordre en  $1/c$  et que  $\xi^\mu$  est quadratique en  $X^a$ , nous en déduisons que  $\xi^i = O(2)$ . La composante  $a0$  de l'équation 2.34 s'écrit :

$$-\left(e^0_a + \frac{\partial \xi^0}{\partial X^a}\right) \left(e^0_0 + \frac{de^0_j}{ds} X^j + \frac{\partial \xi^0}{\partial s}\right) + \left(e^i_a + \frac{\partial \xi^i}{\partial X^a}\right) \left(e^i_0 + \frac{de^i_j}{ds} X^j + \frac{\partial \xi^i}{\partial s}\right) = O(3). \quad (2.40)$$

Cette fois, nous ne gardons que l'ordre  $O(X^2)$  de cette équation pour finalement obtenir :

$$-\frac{\partial \xi^0}{\partial X^a} \frac{de^0_j}{ds} X^j - e^0_a \frac{\partial \xi^0}{\partial s} + e^i_a \frac{\partial \xi^i}{\partial s} + \frac{\partial \xi^i}{\partial s} \frac{de^i_j}{ds} X^j = O(3) \quad (2.41)$$

Mais un instant d'analyse montre que le premier terme est de l'ordre  $O(3)$  ( $de^0_a/ds = O(2)$  et  $\partial \xi^0 / \partial X^i = O(1)$ ), ainsi que le troisième ( $\partial \xi^i / \partial s = O(3)$ ) alors que le dernier terme est de l'ordre  $O(4)$  ( $\partial \xi^i / \partial s = O(2)$  et  $de^i_a/ds = O(2)$ ). Ainsi, il ne reste que

$$e^0_a \frac{\partial \xi^0}{\partial s} = O(3) \quad (2.42)$$

ce qui prouve que  $\partial \xi^0 / \partial s = O(2)$  et donc que  $\xi^0 = O(3)$ .

Résumons les résultats de tout ce paragraphe. Le changement de coordonnées pour passer du repérage local au repérage global est paramétrisé de la façon suivante, ordre par ordre en  $O(X)$  :

$$x^\mu(X^\nu) = z^\mu(s) + e^\mu_i(s) X^i + \xi^\mu(X^\nu). \quad (2.43)$$

Avec  $s \equiv X^0$ . Dans cette paramétrisation, les approximations post-newtoniennes 2.21, 2.22 et 2.23 sont mathématiquement équivalentes à la suite d'égalités suivantes :

$$e^0_0(s) \equiv \frac{dz^0}{ds} = 1 + O(2) \quad (2.44)$$

$$e^0_a(s) = e^i_a(s) \frac{dz^i}{ds} + O(3) \quad (2.45)$$

$$e^i_0 \equiv \frac{dz^i}{ds} \quad (2.46)$$

$$e^i_a(s) e^i_b(s) = \delta_{ab} + O(2) \quad (2.47)$$

$$\frac{de^i_a}{ds} = O(2) \quad (2.48)$$

$$\xi^0 = O(3) \quad (2.49)$$

$$\xi^i = O(2). \quad (2.50)$$

Remarquons que l'effet du terme en  $\xi$  n'affecte aucune quantité observable à l'ordre 1-PN sur le temps global  $t \equiv x^0/c$ , puisque  $\xi^0/c = O(4)$ .

#### 2.2.4 Coordonnées spatiales cartésiennes, contraintes sur les paramètres

$$z - e - \xi$$

Pour donner des contraintes géométriques supplémentaires, nous allons devoir anticiper un tout petit peu et considérer les équations d'Einstein.

Dans toute la suite, nous posons

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \quad (2.51)$$

où  $\det(g_{\mu\nu})$  est le déterminant de la matrice formée par les composantes du tenseur métrique dans une base donnée. De plus, nous posons

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

Nous notons  $R_{\mu\nu}$  le tenseur de Ricci et  $R$  sa trace selon le tenseur métrique ( $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ). Comme nous l'avons vu<sup>3</sup> dans le chapitre ??, nous avons

$$2g \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) = (\mathbf{g}^{\mu\nu}\mathbf{g}^{\rho\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho}\mathbf{g}^{\nu\sigma})_{,\rho\sigma} + Q^{\mu\nu}(\partial g) \quad (2.53)$$

où  $Q^{\mu\nu}$  est une forme quadratique des dérivées du tenseur métrique. Il est clair que  $Q^{\mu\nu} = O(4)$ . En se souvenant que  $\partial_0 = O(1)$  et  $h_{\mu\nu} = O(2, 3, 2)$ , nous pouvons montrer que

$$2g(R^{ij} + \frac{1}{2}Rg^{ij}) = (\mathbf{g}^{ij}\mathbf{g}^{kl} - \mathbf{g}^{ik}\mathbf{g}^{jl})_{,kl} + O(4) \quad (2.54)$$

Le tenseur énergie-impulsion décrivant un ensemble de corps aussi compliqué que des planètes et une étoile a une expression bien plus compliquée que celle du fluide parfait qu'utilisent nombre de publications, mais nous pouvons tout de même faire quelques hypothèses. En effet, la composante 00 du tenseur énergie représente la densité d'énergie contenue dans l'espace temps. Aussi, il semble légitime de supposer que  $T^{00} = O(c^2)$ . Les composantes spatiales du tenseur énergie impulsion devraient être de l'ordre du carré tensoriel des composantes spatiales des vitesses des corps, supposées faibles, multipliées par la densité d'énergie, il s'ensuit donc que l'on suppose  $T^{ij} = O(c^2) \times O(c^{-2}) = O(c^0)$ . Enfin, les composantes mixtes seront de l'ordre de la moyenne géométrique des composantes temporelles et spatiales, ce qui donne  $T^{0i} = O(c)$ . En résumé, l'approximation du champ faible et des faibles vitesses pour le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T^{\mu\nu} = O(c^2, c^1, c^0). \quad (2.55)$$

À cause du facteur  $8\pi\mathcal{G}/c^4$  de l'équation d'Einstein, nous avons :

$$g \left( R^{ij} + \frac{1}{2}Rg^{ij} \right) = O(4). \quad (2.56)$$

Cela nous conduit à étudier la géométrie d'une variété différentiable tridimensionnelle de métrique  $\gamma_{ij}$  définie par

$$\sqrt{\gamma}\gamma^{ij} = \mathbf{g}^{ij} = \sqrt{-g}g^{ij}. \quad (2.57)$$

Attention :  $\gamma^{ij}$  sont les coefficients de la matrice  $3 \times 3$  inverse de celle formée par les coefficients  $\gamma_{ij}$ , alors que  $g^{ij}$  sont les composantes spatiales de  $g^{\mu\nu}$ , matrice  $4 \times 4$  inverse de celle formée par les coefficients  $g_{\mu\nu}$ . De même,  $\gamma = \det_3(\gamma_{ij})$  alors que  $g = \det_4(g_{\mu\nu})$  où l'indice de  $\det_n$  précise la dimension de l'espace dans lequel l'opération est effectuée. Pour trouver les coefficients  $\gamma_{ij}$ , il faut d'abord calculer la matrice  $3 \times 3$  inverse de celle formée par les composantes  $g_{ij}$ , autrement dit, nous cherchons  $\tilde{\gamma}_{ij}$  telle que  $g^{ik}\tilde{\gamma}_{kj} = \delta_j^i$ . Mais quand nous écrivons l'égalité  $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$  composante par composante :

$$g^{0k}g_{k0} + g^{00}g_{00} = 1 \quad (2.58)$$

$$g^{ik}g_{kj} + g^{i0}g_{0j} = \delta_j^i \quad (2.59)$$

$$g^{ik}g_{k0} + g^{i0}g_{00} = 0 \quad (2.60)$$

et extrayant  $g^{i0}$  de la dernière égalité et en l'injectant dans la deuxième, nous obtenons :

$$g^{ik} \left( g_{ik} - \frac{g_{0k}g_{0j}}{g_{00}} \right) = \delta_j^i \quad (2.61)$$

---

3. En attendant l'écriture du cours, nous pouvons nous référer au paragraphe 95 du célèbre cours de Landau [1].

donc l'inverse en dimension 3 de  $g^{ij}$  est

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}. \quad (2.62)$$

Ainsi, le  $\gamma_{ij}$  recherché doit être proportionnel à  $\tilde{\gamma}_{ij}$ . Par un calcul dont j'ignore le secret, il se trouve que

$$\det_3(\tilde{\gamma}_{ij}) \equiv \tilde{\gamma} = \frac{\det_4(g_{\mu\nu})}{g_{00}} = \frac{g}{g_{00}}. \quad (2.63)$$

où  $\det_3$  désigne le déterminant en dimension 3 et  $\det_4$  le déterminant en dimension 4. Or en calculant le déterminant de l'égalité 2.57, sachant que  $\tilde{\gamma}^{ij} = g^{ij}$ , nous obtenons

$$\gamma = -g_{00}^3 \tilde{\gamma}. \quad (2.64)$$

Or comme  $\gamma$  doit être proportionnel à  $\tilde{\gamma}^{ij}$ , il est clair que la seule solution possible est

$$\gamma_{ij} = -g_{00}g_{ij} + g_{0i}g_{0j}. \quad (2.65)$$

D'après 2.54, si nous considérons uniquement l'espace tridimensionnel riemannien de métrique  $\gamma_{ij}$ , nous pouvons former un tenseur de Ricci tridimensionnel à partir des  $\gamma_{ij}$ , noté  ${}^3R_{ij}$ , et nous trouvons que

$$g \left( R^{ij} + \frac{1}{2} R g^{ij} \right) = \gamma \left( {}^3R_{ij} + \frac{1}{2} R \gamma_{ij} \right) + O(4). \quad (2.66)$$

D'après l'équation d'Einstein et des approximations faites sur le tenseur énergie-impulsion, nous voyons que l'espace tri-dimensionnel est plat jusqu'à l'ordre  $O(4)$ . Il existe donc un système de coordonnées privilégié, que nous appelons cartésien isotrope, dans lequel nous avons

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + O(4). \quad (2.67)$$

Comme  $g_{0i} = O(3)$ , nous en déduisons que nous pouvons imposer, dans tous les systèmes de coordonnées, les conditions spatiales isotropes :

$$-g_{00}g_{ij} = \delta_{ij} + O(4), \quad (2.68)$$

$$\forall A \in \{1, \dots, N\}, -G_{00}^A G_{ij}^A = \delta_{ij} + O(4). \quad (2.69)$$

Nous allons voir que ces conditions déterminent complètement le changement de coordonnées  $x^\mu = f^\mu(X^\nu)$  aux ordres nécessaires pour la suite. En effet, 2.69 doit se déduire de 2.68 par le changement de coordonnées et cela suffira à contraindre la matrice jacobienne du changement de variables. Récrivons 2.68 (nous omettons les indices  $A$ ) :

$$-G_{00}G_{ab} = -g_{\alpha\beta}A_0^\alpha A_0^\beta g_{\mu\nu}A_a^\mu A_b^\nu \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} &= -g_{00}A_0^0 A_0^0 g_{ij}A_a^i A_b^j - g_{ij}A_0^i A_0^j g_{00}A_a^0 A_b^0 \\ &\quad - g_{00}A_0^0 A_0^0 g_{00}A_a^0 A_b^0 - g_{ij}A_0^i A_0^j g_{kl}A_a^k A_b^l \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dans 2.71, nous utilisons les conditions d'isotropie spatiale pour simplifier la première ligne. Notons que d'après les hypothèse 1-PN sur le tenseur métrique et sur la matrice jacobienne, la deuxième ligne peut se simplifier si l'on néglige l'ordre  $O(4)$ . De telle sorte que nous avons

$$\begin{aligned} -G_{00}G_{ij} &= A_0^0 A_0^0 \delta_{ij} A_a^i A_b^j + \delta_{ij} A_0^i A_0^j A_a^0 A_b^0 \\ &\quad - A_0^0 A_0^0 A_a^0 A_b^0 - \delta_{ij} A_0^i A_0^j \delta_{kl} A_a^k A_b^l + O(4) \end{aligned} \quad (2.72)$$

de telle sorte que les conditions d'isotropie spatiale peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$-\eta_{\mu\nu}A_0^\mu A_0^\nu \eta_{\alpha\beta}A_a^\alpha A_b^\beta = \delta_{ab} + O(4). \quad (2.73)$$

De même que dans le paragraphe précédent, nous avons éliminé les dépendances en tenseur métrique, si bien que nous avons obtenu une contrainte sur la structure mathématique du changement de variables. Selon les mêmes méthodes que précédemment, nous allons analyser cette égalité ordre par ordre en  $O(X)$ . L'ordre zéro donne immédiatement

$$\eta_{\mu\nu} e^\mu_0 e^\nu_0 \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b = -\delta_{ab} + O(4). \quad (2.74)$$

Cette équation va nous permettre de caractériser précisément les  $e^i_j$ . En effet, tenant compte des résultats du paragraphe précédent et en négligeant les termes d'ordre  $O(4)$ , nous obtenons

$$e^0_0{}^2 \left( e^j_a e^j_b - e^j_a e^j_b \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} - e^j_a v^j e^i_b v^i \right) = \delta_{ab} + O(4) \quad (2.75)$$

où  $\mathbf{v}^2 \equiv v^k v^k = c^2 e^k_0 e^k_0 + O(4)$ . Notons que nous avons artificiellement multiplié le terme  $e^j_a e^j_b \mathbf{v}^2 / c^2$  par  $e^0_0{}^2 = 1 + O(2)$  ce qui ne change l'équation qu'à l'ordre  $O(4)$ , négligé ici. En se souvenant que  $e^0_a = e^i_a v^i / c + O(3)$ , nous pouvons écrire la dernière équation comme suit

$$e^0_0 \left( e^j_a \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^i_a \right) e^0_0 \left( e^j_b \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^i_b \right) = \delta_{ab} + O(4) \quad (2.76)$$

Cela signifie qu'au moins à l'ordre  $O(4)$ , la matrice  $3 \times 3$  dont les composantes  $ja$  sont

$$R^j_a = e^0_0 \left( e^j_a \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^i_a \right) \quad (2.77)$$

vérifie

$$R^j_a R^j_b = \delta_{ab} + O(4) \quad (2.78)$$

donc que les composantes de la matrice sont les vecteurs d'une base orthonormée. Ainsi, les nombres  $R^j_a$  sont les composantes d'une matrice orthogonale. Or, si l'on déplace continuellement la ligne d'univers  $\mathcal{L}_A$  (l'indice  $A$  a été omis dans les calculs) jusqu'à ce que  $X^\mu = x^\mu$ , alors  $e^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$  et le déterminant de cette matrice de rotation vaut 1. Par transformation continue jusqu'à une ligne d'univers quelconque, le déterminant ne peut changer brutalement de 1 à  $-1$ , donc le déterminant de la matrice de composantes  $R^j_a$  vaut 1 : c'est une matrice de rotation. Ajoutons à cela que comme  $e^0_0 = 1 + O(2)$ , la rotation est lente à l'ordre  $O(2)$  puisque nous avons

$$\frac{dR^j_a}{dt} = O(2). \quad (2.79)$$

Pour continuer notre analyse, nous allons essayer d'isoler les  $e^i_j$ . À ce titre, remarquons que

$$e^j_a \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^i_a = e^i_a \left( \delta^{ji} - \delta^{ji} \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) = e^i_a \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) \left( \delta^{ji} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) + O(4) \quad (2.80)$$

Autrement dit

$$e^0_0 e^i_a \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) \left( \delta^{ji} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) = R^j_a + O(4) \quad (2.81)$$

Notons que  $(1 - \mathbf{v}^2/2c^2)^{-1} = 1 + \mathbf{v}^2/2c^2 + O(4)$  et que l'inverse de la matrice dont les composantes  $ji$  sont  $\delta^{ji} - v^j v^i/2c^2$  est la matrice dont les composantes  $ij$  sont  $\delta^{ij} + v^i v^j/2c^2 + O(4)$ . Nous obtenons finalement

$$e^0_0 e^i_a = \left( 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) \left( \delta^{ij} + \frac{v^i v^j}{2c^2} \right) R^j_a + O(4). \quad (2.82)$$

À présent nous voulons obtenir des contraintes sur  $\xi^i$ . Pour ce faire, nous allons analyser l'ordre  $O(X)$  de l'équation 2.73. Cela s'écrit

$$-2\eta_{\mu\nu} \left( \frac{de_i^{(\mu}}{ds} X^i + \frac{\partial \xi^{(\mu}}{\partial s} \right) e_0^{\nu)} \eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - \eta_{\mu\nu} e_0^\mu e_0^\nu \eta_{\alpha\beta} \left( e_a^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial X^b} + e_b^\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^a} \right) = O(4) + O(X^2). \quad (2.83)$$

Mais comme  $\partial \xi^\mu / \partial s = O(4, 3)$  et  $e_0^\nu = O(1)$ , le produit des deux est de l'ordre  $O(4)$ . De même, nous pouvons négliger les termes  $e_a^0 \partial \xi^0 / \partial X^b$  dans le deuxième terme. De plus,  $\eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = \delta_{ab} + O(2)$  et la parenthèse du premier terme est au moins de l'ordre  $O(2)$ . De même, nous avons  $\eta_{\mu\nu} e_0^\mu e_0^\nu = -1 + O(2)$  et la parenthèse du dernier terme est au moins de l'ordre  $O(2)$ . Ainsi, l'expression ci-dessus se simplifie en

$$-2\eta_{\mu\nu} e_0^\mu \frac{de_i^\nu}{ds} X^i + 2e_{(a}^i \frac{\partial \xi^i}{\partial X^b)} = O(4). \quad (2.84)$$

Développons le premier terme :

$$-\eta_{\mu\nu} e_0^\mu \frac{de_i^\nu}{ds} X^i = e_0^0 \frac{de_i^0}{ds} X^i - e_0^j \frac{de_i^j}{ds} X^i = \frac{d}{ds} \left( e_i^j \frac{dz^j}{ds} \right) X^i - \frac{dz^j}{ds} \frac{de_i^j}{ds} X^i + O(4) = e_i^j \frac{d^2 z^j}{ds^2} X^i + O(4) \quad (2.85)$$

où nous avons utilisé 2.45, 2.46 et 2.48. À présent, définissons  $\Xi^i$

$$\xi^a = e_a^i(s) \Xi^i, \quad (2.86)$$

nous obtenons

$$e_a^i e_b^j \frac{\partial \Xi^b}{\partial X^a} + e_a^i e_b^j \frac{\partial \Xi^a}{\partial X^b} = -2e_i^j \frac{d^2 z^j}{ds^2} X^i + O(4) = -\frac{2}{c^2} A_i X^i \delta_{ab} + O(4) \quad (2.87)$$

où nous avons posé

$$A_i \equiv c^2 e_i^j \frac{d^2 z^j}{ds^2} = e_i^j \frac{d^2 z^j}{d\tau^2} \quad (2.88)$$

Finalement, en utilisant la contrainte 2.47, nous obtenons une équation différentielle pour  $\Xi^i$  :

$$\frac{\partial \Xi^a}{\partial X^b} + \frac{\partial \Xi^b}{\partial X^a} = -\frac{2}{c^2} A_i X^i \delta_{ab} + O(4). \quad (2.89)$$

En intégrant les composantes  $ab = jj$ , nous trouvons

$$\Xi^j = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2} A_j X_i X^i - X^j A_i X^i \right) + h^j + O(4) \quad (2.90)$$

où  $h^j$  est solution de l'équation 2.89 sans second membre.  $h^j$  est donc un vecteur de Killing de l'espace euclidien, c'est-à-dire la composition d'une translation, d'une rotation et d'une réflexion. Autrement dit,

$$h^i = C^i + \Omega_{ij} X^j \quad (2.91)$$

où  $C^i$  est constant et  $\Omega_{ij}$  est la matrice d'une rotation ou une réflexion. Mais nous savons que  $\Xi^a$  doit être au moins quadratique en  $X^i$ , donc il n'y a pas de contribution en  $h^i$ . Ainsi,

$$\Xi^a = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2} A_a X_i X^i - X^a A_i X^i \right) + O(4). \quad (2.92)$$

Nous pouvons résumer tous nos résultats dans le théorème suivant.

□figures/figure.jpg

FIGURE 2.1 – Figure

**Theorème 2.2.1.** *Les approximations post-newtoniennes 2.21, 2.22, 2.23 et les conditions spatiales isotropes 2.68 et 2.69 sont mathématiquement équivalentes aux contraintes suivantes sur les paramètres  $z - e - \xi$  de chaque transformation des coordonnées (l'indice  $A$  étant omis) paramétrisée selon 2.92, 2.18 et 2.19 :*

$$e^0_0 \equiv \frac{dz^0}{ds} = 1 + O(2) \quad (2.93)$$

$$e^i_0 \equiv \frac{dz^i}{ds} = O(1) \quad (2.94)$$

$$e^0_a = e^i_a \frac{dz^i}{ds} + O(3) = O(1) \quad (2.95)$$

$$e^0_0 e^i_a = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(\delta^{ij} + \frac{v^i v^j}{2c^2}\right) R^j_a + O(4) \quad (2.96)$$

$$\xi^0 = O(3) \quad (2.97)$$

$$\xi^i = \frac{1}{c^2} e^i_j \left( \frac{1}{2} A_j X^k X^k - X^j A_k X^k \right) \quad (2.98)$$

où les nombres  $R^i_a(s)$  sont les composantes d'une matrice de rotation de l'espace lentement variable :

$$R^i_a R^i_b = \delta_{ab}, \quad (2.99)$$

$$\det(R^i_a) = +1, \quad (2.100)$$

$$\frac{dR^i_a}{dt} = O(2), \quad (2.101)$$

et où

$$A_i \equiv c^2 e^j_i \frac{d^2 z^j}{ds^2} = e^j_i \frac{d^2 z^j}{d\tau^2} \quad (2.102)$$

## 2.3 Template

**Postulat 2.3.1.** *postulat*

**Theorème 2.3.1.** *théorème*

*Démonstration.* preuve

*Q.E.D.*



# Chapitre 3

## Titre

### 3.1 Template

**Postulat 3.1.1.** *postulat*

**Theorème 3.1.1.** *théorème*

*Démonstration.* preuve

*Q.E.D.*

❑figures/figure.jpg

FIGURE 3.1 – Figure



# Chapitre 4

## Titre

### 4.1 Template

**Postulat 4.1.1.** *postulat*

**Theorème 4.1.1.** *théorème*

*Démonstration.* preuve

*Q.E.D.*

❑figures/figure.jpg

FIGURE 4.1 – Figure



# Chapitre 5

## Titre

### 5.1 Template

**Postulat 5.1.1.** *postulat*

**Theorème 5.1.1.** *théorème*

*Démonstration.* preuve

*Q.E.D.*

❑figures/figure.jpg

FIGURE 5.1 – Figure



# Conclusion





# Bibliographie

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Théorie des champs*. Physique théorique. Mir, 1989.