Théorie de la relativité générale et applications

Auteurs :
Léo Bernus (Observatoire de Paris, IMCCE (bientôt))
Loïc Chantry (Observatoire de Paris, LUTH)
Olivier Coquand (LPTHE)
Raphaël D. Lasseri (IPN)
1er février 2016

Préface

Préface de Léo.

Léo Bernus, 1er février 2016, Dresde.

Préface d'Olivier.

Olivier Coquand, 1er février 2016, Paris.

Préface de Loïc.

Loïc Chantry, 1er février 2016, Meudon.

Préface de Raphaël.

Raphaël Lassery, 1er février 2016, Orsay.

Table des matières

Introduction

Corps de l'introduction.

Première partie

Théorie de la Relativité Générale : généralités.

Introduction

Corps de l'introduction.

Corps du cours.

Deuxième partie

Applications physiques, développements

Chapitre 1

Problème à N corps en relativité générale

1.1 Introduction

Le problème à N corps gravitationnel consiste à prédire le mouvement de N corps en interaction gravitationnelle connaissant leurs positions et vitesses à un instant donné. Dans ce chapitre, nous allons montrer comment traîter ce problème avec le cadre de la théorie de la relativité générale. Contrairement à la théorie newtonienne, la première étape du problème à N corps qui consiste à obtenir les équations du mouvement est beaucoup moins aisée. C'est surtout à cela que sera consacré ce chapitre. Une fois les équations du mouvement obtenues, leur résolution est un problème purement mathématique (ou numérique). L'objet de cet ouvrage se concentrant plus sur la théorie de la relativité générale, nous n'exposerons pas les méthodes de résolutions des équations du mouvement dans le détail. La dernière section de ce chapitre résumera les dernières avancées en terme de résolution, en accentuant l'aspect relativiste de la chose. Des références seront données pour qui compte approfondir ce problème.

1.2 Description géométrique relativiste du problème à N corps

1.2.1 Introduction et notations

Avant tout calcul prédictif il faut préciser le cadre géometrique dans lequel nous travaillons. En effet, les hypothèses physiques ont des manifestations géométriques, ce qui est très naturel dans une théorie comme la relativité générale.

Les lettres grecques minuscules $\alpha, \beta, \ldots$ désignent les 4 coordonnées $0, 1, 2, 3$ de l'espace temps alors que les lettres latines minuscules $a, b, \ldots$ renvoient aux coordonnées spatiales $1, 2, 3$. Les conventions de sommation d'Einstein sont bien évidemment adoptées sur les lettres grecques, mais aussi sur les lettres latines : ainsi,

$$A_i B^i \equiv A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \tag{1.1}$$

mais nous posons également

$$A^i B^i \equiv \delta_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \tag{1.2}$$

Nous serons amenés à faire des développements limités en $1/c$. C'est pourquoi nous adoptons les notations compactes suivantes. Pour tout champ scalaire Φ,

$$\Phi = O(c^{-n}) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = O(n). \tag{1.3}$$

Pour tout 4-vecteur de coordonnées A^μ,

$$A^0 = O(p) \quad \text{et} \quad A^i = O(q) \quad \Leftrightarrow \quad A^\mu = O(p,q). \tag{1.4}$$

Pour tout tenseur de rang 2 et de coordonnées $T^{\mu\nu}$,

$$T^{00} = O(p), \quad T^{0i} = O(q), \quad T^{i0} = O(q) \quad T^{ij} = O(r) \quad \Leftrightarrow \quad T^{\mu\nu} = O(p,q,r). \tag{1.5}$$

Enfin, nous utilisons la convention des parenthèses pour symétriser un tenseur et des crochets pour l'antisymétriser :

$$T^{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) \tag{1.6}$$

$$T^{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \tag{1.7}$$

1.2.2 Choix du système de coordonnées

Dans le cadre d'une théorie relativiste, nous faisons l'hypothèse (forte) que les corps évoluent dans une variété $\mathscr{V}$ différentiable de dimension 4 parcourue par N lignes d'univers $\mathscr{L}_A$, $A \in \{1, \ldots, N\}$. Soit $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{V}$ un voisinage ouvert de $\mathscr{L}_A$. Soit X^μ_A un système de coordonnées décrivant $\mathscr{T}_A$ adapté à $\mathscr{L}_A$, c'est-à-dire qu'un paramétrage possible de $\mathscr{L}_A$ dans $\mathscr{T}_A$ est $X^\mu(P(s) \in \mathscr{L}_A) = (s, 0, 0, 0)$, $s \in \mathbb{R}$. La base naturelle associée à ce système de coordonnées le long de $\mathscr{L}_A$ est définie de la façon suivante :

$$e^A_\mu(s) = \left.\frac{\partial}{\partial X^\mu_A}\right|_{P(s)\in\mathscr{L}_A}. \tag{1.8}$$

Nous ajoutons aux N systèmes de coordonnées adaptés aux N lignes d'univers le système de coordonnées suivant. Nous supposons qu'il existe un système de coordonnées global décrivant tout $\mathscr{V}$ (donc incluant tous les $\mathscr{T}_A$) que nous noterons x^μ. L'objet de toute cette section sera de décrire le changement de coordonnées de X^μ_A à x^μ. À présent, considérons les N changements de coordonnées :

$$x^\mu = f^\mu_A(X^\nu_A). \tag{1.9}$$

Nous allons paramétriser ce changement de coordonnées en posant les définitions suivantes :

$$z^\mu_A(s) \equiv f^\mu(s, 0, 0, 0) \tag{1.10}$$

$$e^\mu_{A,\nu}(s) \equiv \left.\frac{\partial f^\mu_A}{\partial X^\nu_A}\right|_{X^\mu=(s,0,0,0)} = \left.\frac{\partial f^\mu_A}{\partial X^\nu_A}\right|_{P(s)\in\mathscr{L}_A} \tag{1.11}$$

$$\xi^\mu_A(X^\nu_A) \equiv f^\mu_A(X^\nu_A) - f^\mu_A(s, 0, 0, 0) - e^\mu_{A,j} X^j_A \tag{1.12}$$

$z^\mu_A(s)$ n'est donc rien d'autre que la représentation paramétrique, dans le système de coordonnées x^μ, de la ligne d'univers $\mathscr{L}_A$ paramétrisée par s.

De ce fait, nous remarquons que

$$e^A_\mu(s) = \left.\frac{\partial}{\partial X^\mu_A}\right|_{\mathscr{L}_A} = e^\nu_{A,\mu} e^A_\nu(s) = e^\nu_{A,\mu} \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{\mathscr{L}_A}. \tag{1.13}$$

Remarquons également que

$$e^\mu_{A,0} = \frac{\mathrm{d}z^\mu_A}{\mathrm{d}s}. \tag{1.14}$$

Avec ces notations, le changement de coordonnées s'écrit de la façon suivante :

$$x^\mu(X^\nu) = z^\mu(X^0) + e^\mu{}_i X^i + \xi^\mu(X^\nu) \tag{1.15}$$

où nous avons sous-entendu l'indice A pour éviter d'alourdir les notations. Comme nous supposons que toutes les fonctions considérées sont différentiables [1], cette dernière relation combinée avec la partie spatiale de la définition 1.11 nous prouvent que

$$\xi^\mu(X^\nu) = O((X^i)^2) \tag{1.16}$$

quand $X^i \to 0$ pour X^0 fixé. La matrice jacobienne de ce changement de variables, dont nous définissons les coordonnées ainsi :

$$A^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \tag{1.17}$$

s'écrit

$$A^\mu{}_0 = e^\mu{}_0(s) + \frac{\mathrm{d}e^\mu{}_i(s)}{\mathrm{d}s} X^i + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial s} \tag{1.18}$$

$$A^\mu{}_k = e^\mu{}_k(s) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial X^k} \tag{1.19}$$

Remarquons que jusqu'ici toutes les définitions se passent du tenseur métrique et sont purement topologiques. À présent il est temps d'introduire les hypothèses physiques du modèle et leur manifestations dans la courbure de l'espace-temps.

1.2.3 Hypothèses physiques du modèle

Nous supposons que les corps sont lents devant la vitesse de la lumière, et aussi qu'ils génèrent de faibles champs gravitationnels, c'est-à-dire modifiant peu le tenseur métrique par rapport au tenseur métrique de Minkowski dont nous notons les coordonnées $\eta_{\mu\nu}$. L'hypothèse du mouvement lent s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}z^i}{c\,\mathrm{d}\tau} = O(1) \tag{1.20}$$

L'hypothèse du champ faible combinée avec l'hypothèse du mouvement lent nous amène à supposer qu'il existe $N+1$ systèmes de coordonnées x^μ et $X^\mu_A,\ A \in \{1,\ldots,N\}$ tels qu'en chacun de ces systèmes de coordonnées, le tenseur métrique vérifie :

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^\alpha) = O(2,3,2), \tag{1.21}$$

$$G^A_{\mu\nu}(X^\alpha_A) - \eta_{\mu\nu} = H^A_{\mu\nu} = O(2,3,2). \tag{1.22}$$

Remarquons que nous adoptons ici un système de coordonnées cartésien, de telle sorte que le tenseur métrique de Minkowski a les mêmes composantes dans tous les systèmes de coordonnées, comme suggéré ci-dessus. Les composantes du tenseur métrique forment la matrice de Minkowski qui a déjà été discutée dans le cours [2]. L'hypothèse du mouvement lent s'écrit ainsi :

$$A^\mu{}_\nu = O(0,1,0). \tag{1.23}$$

Ces hypoythèses peuvent d'emblée mener à quelques résultats intéressants. La loi de transformation des composantes du tenseur métrique s'écrit

$$G_{\alpha\beta} = A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} \tag{1.24}$$

Les hypothèses 1.21 et 1.22 conduisent immédiatement à

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} + O(2,3,2). \tag{1.25}$$

1. Probablement l'hypothèse la plus lourde de toute la théorie de la relativité générale...
2. à venir...

Le tenseur métrique ayant disparu, cette relation ne donne que des contraintes sur la structure mathématique du changement de coordonnées $x^\mu = f^\mu(X^\nu)$. La relation 1.25 étant vraie pour tous X^i, nous pouvons effectuer un développement limité et obtenir des égalités qui correspondent aux ordres $O((X^i)^0)$, $O((X^i)^1)$ et $O((X^i)^2)$. Pour simplifier les notations, nous notons $O((X^i)^n) \equiv O(X^n)$. Comme nous avons

$$A^\mu{}_\nu = e^\mu{}_\nu + O(X) \tag{1.26}$$

l'ordre $O(X^0)$ de l'équation 1.25 implique que

$$\eta_{\mu\nu} e^\mu{}_\alpha e^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} + O(2,3,2). \tag{1.27}$$

La composante $(\alpha, \beta) = (0,0)$ de 1.27 donne

$$-e^0{}_0{}^2 + e^i{}_0 e^i{}_0 = -1 + O(2) \tag{1.28}$$

mais comme $e^i{}_0 = \mathrm{d}z^i/\mathrm{d}s = O(1)$, nous pouvons oublier le deuxième terme du membre de gauche et obtenir $e^0{}_0{}^2 = 1 + O(2)$ ce qui équivaut à

$$e^0{}_0 = 1 + O(2) \tag{1.29}$$

La composante $0a$ de la relation 1.27 nous donne

$$-e^0{}_a e^0{}_0 + e^i{}_a e^i{}_0 = O(3) \tag{1.30}$$

Mais comme $e^0{}_a = O(1)$, nous avons, en vertu de 1.29,

$$e^0{}_a e^0{}_0 = e^0{}_a + O(3) \tag{1.31}$$

et donc

$$e^0{}_a = e^i{}_a e^i{}_0 + O(3) = e^i{}_a \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} + O(3). \tag{1.32}$$

La composante ab de 1.27 donne, grâce à $e^0{}_a e^0{}_b = O(2)$:

$$e^i{}_a e^i{}_b = \delta_{ab} + O(2). \tag{1.33}$$

Ensuite, la composante 00 de l'équation 1.25 s'écrit

$$-\left(e^0{}_0 + \frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} X^a\right)^2 + \left(e^i{}_0 + \frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} X^a\right)\left(e^i{}_0 + \frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} X^a\right) = -1 + O(2). \tag{1.34}$$

L'ordre $O(X)$ de cette équation s'écrit :

$$-e^0{}_0 \frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} X^a + 2e^i{}_0 \frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} X^a = O(2) \tag{1.35}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{c\,\mathrm{d}\tau} = O(1). \tag{1.36}$$

et $e^i{}_0 = O(1)$ donc $e^i{}_0 \mathrm{d}e^i{}_a/\mathrm{d}s = O(2)$; de plus, $e^0{}_0 = 1 + O(2)$; nous en déduisons :

$$\frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} = O(2). \tag{1.37}$$

La composante ab de l'équation 1.34 s'écrit :

$$-\left(e^0{}_a + \frac{\partial \xi^0}{\partial X^a}\right)\left(e^0{}_b + \frac{\partial \xi^0}{\partial X^b}\right) + \left(e^i{}_a + \frac{\partial \xi^i}{\partial X^a}\right)\left(e^i{}_b + \frac{\partial \xi^i}{\partial X^b}\right) = \delta_{ab} + O(2). \tag{1.38}$$

L'ordre $O(X)$) de cette équation s'écrit :

$$-2e^0{}_{(a}\frac{\partial\xi^0}{\partial X^{b)}} + 2e^i{}_{(a}\frac{\partial\xi^i}{\partial X^{b)}} = O(2) \tag{1.39}$$

où la notation de symétrisation 1.6 a été utilisée. Mais comme $A^0{}_i = O(1)$, cela est vrai à l'ordre $O(X^0)$ et l'ordre $O(X)$, donc $e^0{}_i = O(1)$ et $\partial\xi^0/\partial X^i = O(1)$, et ainsi le premier terme de 1.39 est de l'ordre $O(2)$ et peut être négligé. D'après 1.33, $e^i{}_j = O(0)$. Nous en déduisons que $\partial\xi^i/\partial X^a = O(2)$, et comme la dérivation selon X^a ne change pas l'ordre en $1/c$ et que ξ^μ est quadratique en X^a, nous en déduisons que $\xi^{\mathrm{i}} = O(2)$. La composante $a0$ de l'équation 1.34 s'écrit :

$$-\left(e^0{}_a + \frac{\partial\xi^0}{\partial X^a}\right)\left(e^0{}_0 + \frac{\mathrm{d}e^0{}_j}{\mathrm{d}s}X^j + \frac{\partial\xi^0}{\partial s}\right) + \left(e^i{}_a + \frac{\partial\xi^i}{\partial X^a}\right)\left(e^i{}_0 + \frac{\mathrm{d}e^i{}_j}{\mathrm{d}s}X^j + \frac{\partial\xi^i}{\partial s}\right) = O(3). \tag{1.40}$$

Cette fois, nous ne gardons que l'ordre $O(X^2)$ de cette équation pour finalement obtenir :

$$-\frac{\partial\xi^0}{\partial X^a}\frac{\mathrm{d}e^0{}_j}{\mathrm{d}s}X^j - e^0{}_a\frac{\partial\xi^0}{\partial s} + e^i{}_a\frac{\partial\xi^i}{\partial s} + \frac{\partial\xi^i}{\partial s}\frac{\mathrm{d}e^i{}_j}{\mathrm{d}s}X^j = O(3) \tag{1.41}$$

Mais un instant d'analyse montre que le premier terme est de l'ordre $O(3)$ ($\mathrm{d}e^0{}_a/\mathrm{d}s = O(2)$ et $\partial\xi^0/\partial X^i = O(1)$), ainsi que le troisième ($\partial\xi^i/\partial s = O(3)$) alors que le dernier terme est de l'ordre $O(4)$ ($\partial\xi^i/\partial s = O(2)$ et $\mathrm{d}e^i{}_a/\mathrm{d}s = O(2)$). Ainsi, il ne reste que

$$e^0{}_a\frac{\partial\xi^0}{\partial s} = O(3) \tag{1.42}$$

ce qui prouve que $\partial\xi^0/\partial s = O(2)$ et donc que $\xi^0 = O(3)$.

Résumons les résultats de tout ce paragraphe. Le changement de coordonnées pour passer du repérage local au repérage global est paramétrisé de la façon suivante, ordre par ordre en $O(X)$:

$$x^\mu(X^\nu) = z^\mu(s) + e^\mu{}_i(s)X^i + \xi^\mu(X^\nu). \tag{1.43}$$

Avec $s \equiv X^0$. Dans cette paramétrisation, les approximation post-newtoniennes 1.21, 1.22 et 1.23 sont mathématiquement équivalentes à la suite d'égalités suivantes :

$$e^0{}_0(s) \equiv \frac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}s} = 1 + O(2) \tag{1.44}$$

$$e^0{}_a(s) = e^i{}_a(s)\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} + O(3) \tag{1.45}$$

$$e^i{}_0 \equiv \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} \tag{1.46}$$

$$e^i{}_a(s)e^i{}_b(s) = \delta_{ab} + O(2) \tag{1.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}e^i{}_a}{\mathrm{d}s} = O(2) \tag{1.48}$$

$$\xi^0 = O(3) \tag{1.49}$$

$$\xi^i = O(2). \tag{1.50}$$

Remarquons que l'effet du terme en ξ n'affecte aucune quantité observable à l'ordre 1-PN sur le temps global $t \equiv x^0/c$, puisque $\xi^0/c = O(4)$.

1.2.4 Coordonnées spatiales cartésiennes, contraintes sur les paramètres $z - e - \xi$

Pour donner des contraintes géométriques supplémentaires, nous allons devoir anticiper un tout petit peu et considérer les équations d'Einstein.

Dans toute la suite, nous posons

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \tag{1.51}$$

où $\det(g_{\mu\nu})$ est le déterminant de la matrice formée par les composantes du tenseur métrique dans une base donnée. De plus, nous posons

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \tag{1.52}$$

Nous notons $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci et R sa trace selon le tenseur métrique ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$). Comme nous l'avons vu [3] dans le chapitre **??**, nous avons

$$2g\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right) = \left(\mathbf{g}^{\mu\nu}\mathbf{g}^{\rho\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho}\mathbf{g}^{\nu\sigma}\right)_{,\rho\sigma} + Q^{\mu\nu}(\partial g) \tag{1.53}$$

où $Q^{\mu\nu}$ est une forme quadratique des dérivées du tenseur métrique. Il est clair que $Q^{\mu\nu} = O(4)$. En se souvenant que $\partial_0 = O(1)$ et $h_{\mu\nu} = O(2,3,2)$, nous pouvons montrer que

$$2g(R^{ij} + \frac{1}{2}Rg^{ij}) = (\mathbf{g}^{ij}\mathbf{g}^{kl} - \mathbf{g}^{ik}\mathbf{g}^{jl})_{,kl} + O(4) \tag{1.54}$$

Le tenseur énergie-impulsion décrivant un ensemble de corps aussi compliqué que des planètes et une étoile a une expression bien plus compliquée que celle du fluide parfait qu'utilisent nombre de publications, mais nous pouvons tout de même faire quelques hypothèses. En effet, la composante 00 du tenseur énergie représente la densité d'énergie contenue dans l'espace temps. Aussi, il semble légitime de supposer que $T^{00} = O(c^2)$. Les composantes spatiales du tenseur énergie impulsion devraient être de l'ordre du carré tensoriel des composantes spatiales des vitesses des corps, supposées faibles, multipliées par la densité d'énergie, il s'ensuit donc que l'on suppose $T^{ij} = O(c^2) \times O(c^{-2}) = O(c^0)$. Enfin, les composantes mixtes seront de l'ordre de la moyenne géométrique des composantes temporelles et spatials, ce qui donne $T^{0i} = O(c)$. En résumé, l'approximation du champ faible et des faibles vitesses pour le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T^{\mu\nu} = O(c^2, c^1, c^0). \tag{1.55}$$

À cause du facteur $8\pi\mathscr{G}/c^4$ de l'équation d'Einstein, nous avons :

$$g\left(R^{ij} + \frac{1}{2}Rg^{ij}\right) = O(4). \tag{1.56}$$

Cela nous conduit à étudier la géométrie d'une variété différentiable tridimensionnelle de métrique γ_{ij} définie par

$$\sqrt{\gamma}\gamma^{ij} = \mathbf{g}^{ij} = \sqrt{-g}g^{ij}. \tag{1.57}$$

Attention : γ^{ij} sont les coefficients de la matrice 3×3 inverse de celle formée par les coefficients γ_{ij}, alors que g^{ij} sont les composantes spatiales de $g^{\mu\nu}$, matrice 4×4 inverse de celle formée par les coefficients $g_{\mu\nu}$. De même, $\gamma = \det_3(\gamma_{ij})$ alors que $g = \det_4(g_{\mu\nu})$ où l'indice de $\det_n$ précise la dimension de l'espace dans lequel l'opération est effectuée. Pour trouver les coefficients γ_{ij}, il faut d'abord calculer la matrice 3×3 inverse de celle formée par les composantes g_{ij}, autrement dit, nous cherchons $\tilde{\gamma}_{ij}$ telle que $g^{ik}\tilde{\gamma}_{kj} = \delta^i_j$. Mais quand nous écrivons l'égalité $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$ composante par composante :

$$g^{0k}g_{k0} + g^{00}g_{00} = 1 \tag{1.58}$$

$$g^{ik}g_{kj} + g^{i0}g_{0j} = \delta^i_j \tag{1.59}$$

$$g^{ik}g_{k0} + g^{i0}g_{00} = 0 \tag{1.60}$$

et extrayant g^{i0} de la dernière égalité et en l'injectant dans la deuxième, nous obtenons :

$$g^{ik}\left(g_{ik} - \frac{g_{0k}g_{0j}}{g_{00}}\right) = \delta^i_j \tag{1.61}$$

3. En attendant l'écriture du cours, nous pouvons nous référer au paragraphe 95 du célèbre cours de Landau [1].

donc l'inverse en dimension 3 de g^{ij} est

$$\tilde{\gamma}_{ij} \equiv g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}. \tag{1.62}$$

Ainsi, le γ_{ij} recherché doit être proportionnel à $\tilde{\gamma}_{ij}$. Par un calcul dont j'ignore le secret, il se trouve que

$$\det_3(\tilde{\gamma}_{ij}) \equiv \tilde{\gamma} = \frac{\det_4(g_{\mu\nu})}{g_{00}} = \frac{g}{g_{00}}. \tag{1.63}$$

où $\det_3$ désigne le déterminant en dimension 3 et $\det_4$ le déterminant en dimension 4. Or en calculant le déterminant de l'égalité 1.57, sachant que $\tilde{\gamma}^{ij} = g^{ij}$, nous obtenons

$$\gamma = -g_{00}^3\tilde{\gamma}. \tag{1.64}$$

Or comme γ doit être proportionnel à $\tilde{\gamma}^{ij}$, il est clair que la seule solution possible est

$$\gamma_{ij} = -g_{00}g_{ij} + g_{0i}g_{0j}. \tag{1.65}$$

D'après 1.54, si nous considérons uniquement l'espace tridimensionnel riemannien de métrique γ_{ij}, nous pouvons former un tenseur de Ricci tridimensionnel à partir des γ_{ij}, noté ${}^3R_{ij}$, et nous trouvons que

$$g\left(R^{ij} + \frac{1}{2}Rg^{ij}\right) = \gamma\left({}^3R_{ij} + \frac{1}{2}{}^3R\gamma_{ij}\right) + O(4). \tag{1.66}$$

D'après l'équation d'Einstein et des approximations faites sur le tenseur énergie-impulsion, nous voyons que l'espace tri-dimensionnel est plat jusqu'à l'ordre $O(4)$. Il existe donc un système de coordonnées privilégié, que nous appelons cartésien isotrope, dans lequel nous avons

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + O(4). \tag{1.67}$$

Comme $g_{0i} = O(3)$, nous en déduisons que nous pouvons imposer, dans tous les systèmes de coordonnées, les conditions spatiales isotropes :

$$\begin{aligned} -g_{00}g_{ij} &= \delta_{ij} + O(4), && (1.68)\\ \forall A \in \{1,\ldots,N\},\ -G^A_{00}G^A_{ij} &= \delta_{ij} + O(4). && (1.69) \end{aligned}$$

Nous allons voir que ces conditions déterminent complètement le changement de coordonnées $x^\mu = f^\mu(X^\nu)$ aux ordres nécessaires pour la suite. En effet, 1.69 doit se déduire de 1.68 par le changement de coordonnées et cela suffira à contraindre la matrice jacobienne du changement de variables. Récrivons 1.68 (nous omettons les indices A) :

$$\begin{aligned} -G_{00}G_{ab} &= -g_{\alpha\beta}A^\alpha{}_0A^\beta{}_0g_{\mu\nu}A^\mu{}_aA^\nu{}_b && (1.70)\\ &= -g_{00}A^0{}_0A^0{}_0g_{ij}A^i{}_aA^j{}_b - g_{ij}A^i{}_0A^j{}_0g_{00}A^0{}_aA^0{}_b \\ &\quad -g_{00}A^0{}_0A^0{}_0g_{00}A^0{}_aA^0{}_b - g_{ij}A^i{}_0A^j{}_0g_{kl}A^k{}_aA^l{}_b && (1.71) \end{aligned}$$

Dans 1.71, nous utilisons les conditions d'isotropie spatiale pour simplifier la première ligne. Notons que d'après les hypothèse 1-PN sur le tenseur métrique et sur la matrice jacobienne, la deuxième ligne peut se simplifier si l'on néglige l'ordre $O(4)$. De telle sorte que nous avons

$$\begin{aligned} -G_{00}G_{ij} &= A^0{}_0A^0{}_0\delta_{ij}A^i{}_aA^j{}_b + \delta_{ij}A^i{}_0A^j{}_0A^0{}_aA^0{}_b \\ &\quad -A^0{}_0A^0{}_0A^0{}_aA^0{}_b - \delta_{ij}A^i{}_0A^j{}_0\delta_{kl}A^k{}_aA^l{}_b + O(4) && (1.72) \end{aligned}$$

de telle sorte que les conditions d'isotropie spatiale peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$-\eta_{\mu\nu}A^\mu{}_0A^\nu{}_0\eta_{\alpha\beta}A^\alpha{}_aA^\beta{}_b = \delta_{ab} + O(4). \tag{1.73}$$

De même que dans le paragraphe précédent, nous avons éliminé les dépendances en tenseur métrique, si bien que nous avons obtenu une contrainte sur la structure mathématique du changement de variables. Selon les mêmes méthodes que précédemment, nous allons analyser cette égalité ordre par ordre en $O(X)$. L'ordre zéro donne immédiatement

$$\eta_{\mu\nu} e^{\mu}{}_{0} e^{\nu}{}_{0}\, \eta_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{a} e^{\beta}{}_{b} = -\delta_{ab} + O(4). \tag{1.74}$$

Cette équation va nous permettre de caractériser précisément les $e^{i}{}_{j}$. En effet, tenant compte des résultats du paragraphe précédent et en négligeant les termes d'ordre $O(4)$, nous obtenons

$$e^{0}{}_{0}{}^{2} \left(e^{j}{}_{a} e^{j}{}_{b} - e^{j}{}_{a} e^{j}{}_{b} \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} - e^{j}{}_{a} v^j e^{i}{}_{b} v^i \right) = \delta_{ab} + O(4) \tag{1.75}$$

où $\boldsymbol{v}^2 \equiv v^k v^k = c^2 e^{k}{}_{0} e^{k}{}_{0} + O(4)$. Notons que nous avons artificiellement multiplié le terme $e^{j}{}_{a} e^{j}{}_{b} \boldsymbol{v}^2/c^2$ par $e^{0}{}_{0}{}^{2} = 1 + O(2)$ ce qui ne change l'équation qu'à l'ordre $O(4)$, négligé ici. En se souvenant que $e^{0}{}_{a} = e^{i}{}_{a} v^i/c + O(3)$, nous pouvons écrire la dernière équation comme suit

$$e^{0}{}_{0} \left(e^{j}{}_{a} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^{i}{}_{a} \right) e^{0}{}_{0} \left(e^{j}{}_{b} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^{i}{}_{b} \right) = \delta_{ab} + O(4) \tag{1.76}$$

Cela signifie qu'au moins à l'ordre $O(4)$, la matrice 3×3 dont les composantes ja sont

$$R^{j}{}_{a} = e^{0}{}_{0} \left(e^{j}{}_{a} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) - \frac{v^j v^i}{2c^2} e^{i}{}_{a} \right) \tag{1.77}$$

vérifie

$$R^{j}{}_{a} R^{j}{}_{b} = \delta_{ab} + O(4) \tag{1.78}$$

donc que les composantes de la matrice sont les vecteurs d'une base orthonormée. Ainsi, les nombres $R^{j}{}_{a}$ sont les composantes d'une matrice orthogonale. Or, si l'on déplace continuement la ligne d'univers $\mathscr{L}_A$ (l'indice A a été omis dans les calculs) jusqu'à ce que $X^\mu = x^\mu$, alors $e^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ et le déterminant de cette matrice de rotation vaut 1. Par transformation continue jusqu'à une ligne d'univers quelconque, le déterminant ne peut changer brutalement de 1 à -1, donc le déterminant de la matrice de composantes $R^{j}{}_{a}$ vaut 1 : c'est une matrice de rotation. Ajoutons à cela que comme $e^{0}{}_{0} = 1 + O(2)$, la rotation est lente à l'ordre $O(2)$ puisque nous avons

$$\frac{\mathrm{d}R^{j}{}_{a}}{\mathrm{d}t} = O(2). \tag{1.79}$$

Pour continuer notre analyse, nous allons essayer d'isoler les $e^{i}{}_{j}$. À ce titre, remarquons que

$$e^{j}{}_{a} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) - \frac{v^i v^j}{2c^2} e^{i}{}_{a} = e^{i}{}_{a} \left(\delta^{ji} - \delta^{ji} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) = e^{i}{}_{a} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) \left(\delta^{ji} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) + O(4) \tag{1.80}$$

Autrement dit

$$e^{0}{}_{0} e^{i}{}_{a} \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) \left(\delta^{ji} - \frac{v^j v^i}{2c^2} \right) = R^{j}{}_{a} + O(4) \tag{1.81}$$

Notons que $(1 - \boldsymbol{v}^2/2c^2)^{-1} = 1 + \boldsymbol{v}^2/2c^2 + O(4)$ et que l'inverse de la matrice dont les composantes ji sont $\delta^{ji} - v^j v^i/2c^2$ est la matrice dont les composantes ij sont $\delta^{ij} + v^i v^j/2c^2 + O(4)$. Nous obtenons finalement

$$e^{0}{}_{0} e^{i}{}_{a} = \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right) \left(\delta^{ij} + \frac{v^i v^j}{2c^2} \right) R^{j}{}_{a} + O(4). \tag{1.82}$$

À présent nous voulons obtenir des contraintes sur ξ^i. Pour ce faire, nous allons analyser l'ordre $O(X)$ de l'équation 1.73. Cela s'écrit

$$-2\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}e^{(\mu}{}_i}{\mathrm{d}s}X^i+\frac{\partial\xi^{(\mu}}{\partial s}\right)e^{\nu)}{}_0\,\eta_{\alpha\beta}\,e^{\alpha}{}_a e^{\beta}{}_b-\eta_{\mu\nu}\,e^{\mu}{}_0 e^{\nu}{}_0\,\eta_{\alpha\beta}\,\left(e^{\alpha}{}_a\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial X^b}+e^{\beta}{}_b\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial X^a}\right)=O(4)+O(X^2). \tag{1.83}$$

Mais comme $\partial\xi^\mu/\partial s=O(4,3)$ et $e^{\nu}{}_0=O(1)$, le produit des deux est de l'ordre $O(4)$. De même, nous pouvons négliger les termes $e^0{}_a\partial\xi^0/\partial X^b$ dans le deuxième terme. De plus, $\eta_{\alpha\beta}\,e^{\alpha}{}_a e^{\beta}{}_b=\delta_{ab}+O(2)$ et la parenthèse du premier terme est au moins de l'ordre $O(2)$. De même, nous avons $\eta_{\mu\nu}\,e^{\mu}{}_0 e^{\nu}{}_0=-1+O(2)$ et la parenthèse du dernier terme est au moins de l'ordre $O(2)$. Ainsi, l'expression ci-dessus se simplifie en

$$-2\eta_{\mu\nu}\,e^{\mu}{}_0\frac{\mathrm{d}e^{\nu}{}_i}{\mathrm{d}s}X^i+2e^i{}_{(a}\frac{\partial\xi^i}{\partial X^{b)}}=O(4). \tag{1.84}$$

Développons le premier terme :

$$-\eta_{\mu\nu}\,e^{\mu}{}_0\frac{\mathrm{d}e^{\nu}{}_i}{\mathrm{d}s}X^i=e^0{}_0\frac{\mathrm{d}e^0{}_i}{\mathrm{d}s}X^i-e^j{}_0\frac{\mathrm{d}e^j{}_i}{\mathrm{d}s}X^i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^j{}_i\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}s}\right)X^i-\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}e^j{}_i}{\mathrm{d}s}X^i+O(4)=e^j{}_i\frac{\mathrm{d}^2z^j}{\mathrm{d}s^2}X^i+O(4) \tag{1.85}$$

où nous avons utilisé 1.45, 1.46 et 1.48. À présent, définissons Ξ^i

$$\xi^a=e^a{}_i(s)\,\Xi^i, \tag{1.86}$$

nous obtenons

$$e^i{}_a e^i{}_b\frac{\partial\Xi^b}{\partial X^a}+e^i{}_a e^i{}_b\frac{\partial\Xi^a}{\partial X^b}=-2e^j{}_i\frac{\mathrm{d}^2z^j}{\mathrm{d}s^2}X^i+O(4)=-2A_iX^i\delta_{ab}+O(4) \tag{1.87}$$

où nous avons posé

$$A_i\equiv c^2e^j{}_i\frac{\mathrm{d}^2z^j}{\mathrm{d}s^2}=e^j{}_i\frac{\mathrm{d}^2z^j}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{1.88}$$

où $\tau=s/c$. Finalement, en utilisant la contrainte 1.47, nous obtenons une équation différentielle pour Ξ^i :

$$\frac{\partial\Xi^a}{\partial X^b}+\frac{\partial\Xi^b}{\partial X^a}=-\frac{2}{c^2}A_iX^i\delta_{ab}+O(4). \tag{1.89}$$

En intégrant les composantes $ab=jj$, nous trouvons

$$\Xi^j=\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}A_jX_iX^i-X^jA_iX^i\right)+h^j+O(4) \tag{1.90}$$

où h^j est solution de l'équation 1.89 sans second membre. h^j est donc un vecteur de Killing de l'espace euclidien, c'est-à-dire la composition d'une translation, d'une rotation et d'une réflexion. Autrement dit,

$$h^i=C^i+\Omega_{ij}X^j \tag{1.91}$$

où C^i est constant et Ω_{ij} est la matrice d'une rotation ou une réflexion. Mais nous savons que Ξ^a doit être au moins quadratique en X^i, donc il n'y a pas de contribution en h^i. Ainsi,

$$\Xi^a=\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}A_aX_iX^i-X^aA_iX^i\right)+O(4). \tag{1.92}$$

Nous pouvons résumer tous nos résultats dans le théorème suivant.

figures/figure.jpg

FIGURE 1.1 – Figure

Theorème 1.2.1. *Les approximations post-newtoniennes 1.21, 1.22, 1.23 et les conditions spatiales isotropes 1.68 et 1.69 sont mathématiquement équivalentes aux contraintes suivantes sur les paramètres $z - e - \xi$ de chaque transformation des coordonnées (l'indice A étant omis) paramétrisée selon 1.92, 1.18 et 1.19 :*

$$e^0{}_0 \equiv \frac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}s} = 1 + O(2) \tag{1.93}$$

$$e^i{}_0 \equiv \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} = O(1) \tag{1.94}$$

$$e^0{}_a = e^i{}_a \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}s} + O(3) = O(1) \tag{1.95}$$

$$e^0{}_0 e^i{}_a = \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2c^2}\right)\left(\delta^{ij} + \frac{v^i v^j}{2c^2}\right) R^j{}_a + O(4) \tag{1.96}$$

$$\xi^0 = O(3) \tag{1.97}$$

$$\xi^i = \frac{1}{c^2} e^i{}_j \left(\frac{1}{2} A_j X^k X^k - X^j A_k X^k\right) \tag{1.98}$$

où les nombres $R^i{}_a(s)$ sont les composantes d'une matrice de rotation de l'espace lentement variable :

$$R^i{}_a R^i{}_b = \delta_{ab}, \tag{1.99}$$

$$\det(R^i{}_a) = +1, \tag{1.100}$$

$$\frac{\mathrm{d}R^i{}_a}{\mathrm{d}t} = O(2), \tag{1.101}$$

et où

$$A_i \equiv c^2 e^j{}_i \frac{\mathrm{d}^2 z^j}{\mathrm{d}s^2} = e^j{}_i \frac{\mathrm{d}^2 z^j}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{1.102}$$

1.3 Template

Postulat 1.3.1. *postulat*

Theorème 1.3.1. *théorème*

Démonstration. preuve *Q.E.D.*

Chapitre 2

Titre

2.1 Template

Postulat 2.1.1. *postulat*

Theorème 2.1.1. *théorème*

Démonstration. preuve *Q.E.D.*

`figures/figure.jpg`

FIGURE 2.1 – Figure

Chapitre 3

Titre

3.1 Template

Postulat 3.1.1. *postulat*

Theorème 3.1.1. *théorème*

Démonstration. preuve *Q.E.D.*

`figures/figure.jpg`

FIGURE 3.1 – Figure

Chapitre 4

Titre

4.1 Template

Postulat 4.1.1. *postulat*

Theorème 4.1.1. *théorème*

Démonstration. preuve *Q.E.D.*

`figures/figure.jpg`

FIGURE 4.1 – Figure

Conclusion

Bibliographie

[1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Théorie des champs*. Physique théorique. Mir, 1989.