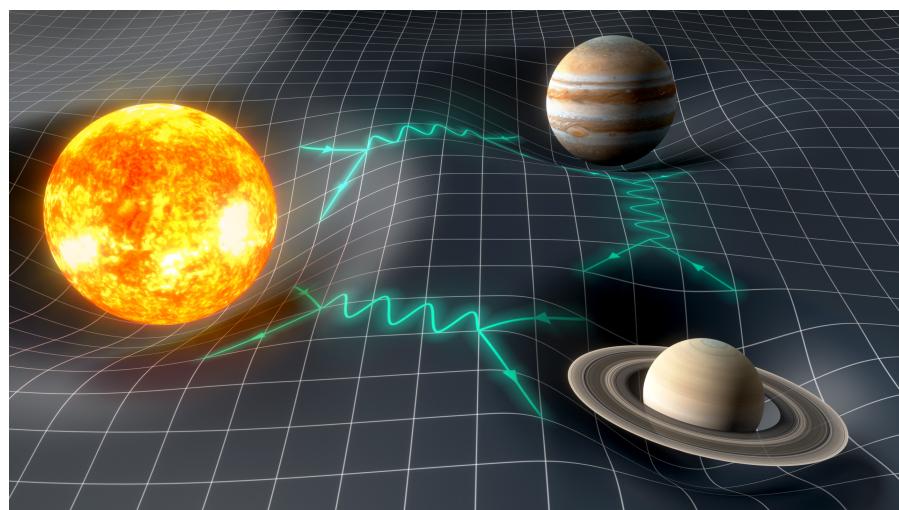


## TESTS DE GRAVITATION À L'ÉCHELLE DU SYSTÈME SOLAIRE



LÉO BERNUS

THÈSE DIRIGÉE PAR JACQUES LASKAR ET AGNÈS FIENGA

Léo Bernus<sup>1</sup> : *Tests de gravitation à l'échelle du système solaire.*

Thèse dirigée par Jacques Laskar<sup>1</sup> et Agnès Fienga<sup>2</sup>.

Image de couverture par Yohann Gominet<sup>1</sup> (textures de la Nasa).

<sup>1</sup>IMCCE, Observatoire de Paris, PSL University, CNRS, Sorbonne Université, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>2</sup>Géoazur, Observatoire de la Côte d'Azur, Université Côte d'Azur, IRD, 250 Rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France

## ABSTRACT

---

We constrain alternative theories to general relativity using the planetary ephemerides INPOP.

First, we give the conditions for realizing such constraints. These constraints are always obtained by perturbation of general relativity, so that the constraint appears as confidence intervals on hypothetical new fundamental constants of physics which parameterize the alternative effect. We show that it is crucial to constrain these new constants to the observations at the same time as we fit all the other parameters of INPOP. If it is not the case, the strength of the constrain can be overestimated – by more than one order of magnitude in a case we work on. We give a general statistical criterion for constraining these alternative theories : the likelihood associated to the  $\chi^2$  reduced to sensitive observations. We give an example of application of this test in constraining the possible position of the planet P9 in the solar system.

We then constrain the possible Yukawa suppression of Newton's potential, generically associated with the theory of massive graviton. Two constraints are posed : one with the ephemeris INPOP17b, the other with the ephemeris INPOP19a. This theory having only one additional parameter, it is particularly simple to constrain with the method of the likelihood associated to the  $\chi^2$  reduced to the sensitive data. Only a grid of values is then necessary. The most recent and strongest constraint (obtained with INPOP19a) is :  $m_g < 3.62 \times 10^{-23} \text{eV}/c^2$  or  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13} \text{km}$  with a confidence level of 99.7%.

Finally, we constrain the theory of light dilaton (or massless dilaton). We derive this theory from an action. It is a tensor-scalar theory with non-universal coupling to matter, which gives rise to a violation of the weak equivalence principle. Coupling to matter can be determined as a function of the atomic composition of bodies, so that telluric bodies have roughly the same coupling coefficients and the same for gaseous bodies. This reduces the number of alternative parameters to 4 : 2 universal coupling parameters (which return to the classic parameters  $\beta$  and  $\gamma$  of parametrized post-Newtonian formalism) and 2 non-universal coupling parameters. We use a rejection algorithm to constrain these four parameters. The principle is to calculate the likelihood function associated with the  $\chi^2$  reduced to the sensitive data and to reject the solutions with the corresponding probability, so that the remaining populations give the posterior distribution of the parameters, which, in itself, constitutes a constraint on the parameters.

## RÉSUMÉ

---

Nous contraignons des théories alternatives à la relativité générale en utilisant les éphémérides planétaires INPOP.

D'abord, nous donnons les conditions de réalisation de telles contraintes. Il s'agit toujours de procéder par perturbation de la relativité générale, de telle sorte que la contrainte apparaît comme des intervalles de confiance sur d'hypothétiques nouvelles constantes fondamentales de la physique qui paramétreraient l'effet alternatif. Nous montrons qu'il est crucial de contraindre ces nouvelles constantes aux observations en même temps que nous ajustons tous les autres paramètres d'INPOP, sous peine de surestimer grandement la force de la contrainte (de plus d'un ordre de grandeur dans un cas que nous traitons). Nous donnons un critère statistique général permettant de contraindre ces théories alternatives : la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  réduit aux observations sensibles. Nous montrons un exemple d'application de ce test à la contrainte de la possible position de la planète P9 dans le système solaire.

Ensuite nous contraignons l'éventuelle suppression Yukawa du potentiel de Newton, génériquement associée à la théorie du graviton massif. Deux contraintes sont posées : l'une avec l'éphéméride INPOP17b, l'autre avec l'éphéméride INPOP19a. Cette théorie n'ayant qu'un seul paramètre supplémentaire, elle est particulièrement simple à contraindre avec la méthode de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  réduit aux observations sensibles. Il suffit d'effectuer une grille de valeurs. La contrainte la plus récente et la plus forte (obtenue avec INPOP19a) est :  $m_g < 3.62 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  ou  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13} \text{ km}$  avec un degré de confiance de 99.7%.

Enfin, nous contraignons la théorie du dilaton léger (ou sans masse). Nous dérivons cette théorie à partir d'une action. C'est une théorie tenseur-scalaire avec couplage non universel à la matière, ce qui donne lieu à une violation du principe d'équivalence faible. Le couplage à la matière peut être déterminé en fonction de la composition atomique des corps, de telle sorte que les corps telluriques ont à peu près les mêmes coefficients de couplage et de même pour les corps gazeux. Ce qui réduit le nombre de paramètres alternatifs à 4 : 2 paramètres de couplage universel (qui reviennent aux paramètres classiques du formalisme post-newtonien paramétrisé) et 2 paramètres de couplage non universel. Nous utilisons un algorithme de rejet pour contraindre ces quatre paramètres. Le principe est de calculer la fonction de vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit et de rejeter les solutions avec la probabilité correspondante, de telle sorte que les populations restantes donnent la distribution postérieure des paramètres, qui, en elle-même, constitue une contrainte sur les paramètres.

## REMERCIEMENTS

---

Je remercie d'abord mon premier directeur de thèse, Jacques Laskar, qui m'a proposé ce beau sujet déjà en décembre 2014 pour mon stage de M2, et qui m'a permis de poursuivre ces travaux en thèse depuis septembre 2016. Je remercie ma directrice de thèse, Agnès Fienga, dont le savoir théorique et pratique sur les éphémérides m'a énormément apporté. Je remercie Olivier Minazzoli, car il s'est énormément investi pour m'aider dans cette thèse sans compter son temps. Son érudition sur tous les aspects théoriques de la relativité générale et des théories alternatives m'a énormément apporté.

Je remercie les membres du jury pour avoir accepté de considérer et juger mes travaux : Éric Gourgoulhon, Clifford Will, Sergei Klioner, et Jean-Philippe Uzan.

Je remercie mon comité de suivi de thèse, Luc Blanchet et Alexandre Le Tiec, pour avoir observé le déroulement de mes travaux avec intérêt et bienveillance.

Je remercie l'ensemble de mes collègues, notamment pour toutes les discussions (scientifiques ou autres). Que les gens que j'oublie me pardonnent : Pierre Deram, dont les discussions sur les statistiques furent très utiles, Andrea di Ruscio, qui a réanalysé les données Cassini, améliorant considérablement la finesse possible des tests de relativité, Nicolas Rambaux, qui fut mon premier maître à l'Observatoire de Paris en 2014, Laurent Niederman, avec qui j'ai eu la chance d'enseigner les mathématiques, Aurélien Hees, Philippe Robutel, Frédéric Dauvergne, Timothée Vaillant, Mickaël Gastineau, Stéphane Vaillant, Hervé Manche, Alain Chanciner, Alain Albouy, Christelle Saliby, Nathan Hara, Gwenaël Boué, Jacques Féjoz, Antoine Petit. Je remercie aussi Guowei Yu, Louis Guillot, Federico Mogavero, Nam Hoang, qui ont agréablement partagé mon bureau pendant de longs mois voire de nombreuses années. Je remercie l'ensemble du personnel de l'Observatoire de Paris, rien ne fonctionnerait sans leur travail.

Je remercie quelques grands professeurs qui m'ont formé et passionné : Gilles Desclaux, Pierre Gissot, Paul Colin, Alain Comtet, Jacques Laskar, Gwenaël Boué (tant pis pour les doublons).

Je remercie mes camarades, à leur insu ou non ils contribuent chaque jour à me remplir de joie et de combativité (par ordre d'ancienneté) : Loïc Chantry, Michel-Andrès Breton, Agnès Patu, Didier Patu, Léa Chaufoureau, Laure de Chancel, Yannick Duterte, Pauline Detuncq, Bernard Friot, Julie Dott, Dominique Mazuet, Dominique Pagani, Pierre Wolinski. J'en oublie tant, pardonnez-moi.

Et je remercie ma famille, qui a contribué à produire l'individu que je suis, et qui continue (néanmoins) à me supporter.

Ces travaux ont bénéficié d'un accès aux moyens de calcul de Me-  
soPSL financés par la Région Ile de France et le projet Equip@Meso  
(référence ANR-10-EQPX-29-01) du programme Investissements d'Ave-  
nir géré par l'Agence Nationale pour la Recherche.

Ce document a été produit en utilisant le paquet *classicalthesis* dé-  
veloppé par André Miede et Ivo Pletikosić. Ce style a été inspiré par  
le livre de Robert Bringhurst sur la typographie : *The Elements of  
Typographic Style*. *classicthesis* est disponible pour L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X et LyX :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Les utilisateurs de *classicthesis* envoient usuellement une carte  
postale à son auteur, une collection de carte postales reçue jusqu'à  
présent est présentée ici :

<http://postcards.miede.de/>

## TABLE DES MATIÈRES

---

Notations	1
1	Introduction <span style="color: #0070C0;">3</span>
1.1	Principes de la relativité générale <span style="color: #0070C0;">3</span>
1.1.1	L'espace-temps est une variété différentiable <span style="color: #0070C0;">3</span>
1.1.2	Principe d'équivalence faible <span style="color: #0070C0;">4</span>
1.1.3	Principe d'équivalence d'Einstein <span style="color: #0070C0;">5</span>
1.1.4	Principe d'équivalence fort <span style="color: #0070C0;">9</span>
1.1.5	Couplage entre la matière et l'énergie <span style="color: #0070C0;">11</span>
1.1.6	Intérêt de tester des théories alternatives <span style="color: #0070C0;">11</span>
1.1.7	Résumé des principes de la relativité générale <span style="color: #0070C0;">14</span>
1.2	Comment tester une théorie alternative ? <span style="color: #0070C0;">15</span>
1.2.1	Comparaison d'INPOP aux observations <span style="color: #0070C0;">16</span>
1.2.2	Critique des tests dans le système solaire <span style="color: #0070C0;">20</span>
1.3	Contenu de la thèse <span style="color: #0070C0;">21</span>
2	Test d'un effet mesurable avec INPOP <span style="color: #0070C0;">23</span>
2.1	Fonctionnement des éphémérides INPOP <span style="color: #0070C0;">23</span>
2.1.1	À quoi sert une éphéméride planétaire ? <span style="color: #0070C0;">23</span>
2.1.2	Modèle dynamique d'INPOP <span style="color: #0070C0;">24</span>
2.1.3	Observations <span style="color: #0070C0;">26</span>
2.1.4	Procédure d'ajustement des paramètres <span style="color: #0070C0;">27</span>
2.1.5	Résumé du fonctionnement d'INPOP <span style="color: #0070C0;">30</span>
2.1.6	Solution de référence et solution testée <span style="color: #0070C0;">30</span>
2.2	Analyse critique des méthodes de tests <span style="color: #0070C0;">32</span>
2.2.1	Insuffisance de l'analyse post-ajustement <span style="color: #0070C0;">32</span>
2.2.2	Insuffisance de l'algorithme de Gauss-Newton <span style="color: #0070C0;">35</span>
2.3	Critères quantitatifs pour tester une théorie <span style="color: #0070C0;">37</span>
2.3.1	Vraisemblance associée au $\chi^2$ réduit <span style="color: #0070C0;">38</span>
2.3.2	Deuxième solution proposée : propagation de la covariance <span style="color: #0070C0;">44</span>
2.4	Applications physiques <span style="color: #0070C0;">47</span>
2.4.1	Comparaison de INPOP19a et INPOP17a par propagation de covariance <span style="color: #0070C0;">47</span>
2.4.2	Contraintes sur la position de P9 <span style="color: #0070C0;">49</span>
2.5	Résumé et perspectives <span style="color: #0070C0;">56</span>
3	Test du graviton massif <span style="color: #0070C0;">57</span>
3.1	Phénoménologie du graviton massif <span style="color: #0070C0;">57</span>
3.1.1	Qu'est-ce qu'un "graviton" ? <span style="color: #0070C0;">57</span>
3.1.2	Équations du mouvement dans le système solaire <span style="color: #0070C0;">59</span>
3.1.3	Propagation des signaux électromagnétiques <span style="color: #0070C0;">60</span>
3.2	Insuffisance de l'analyse post-ajustement <span style="color: #0070C0;">62</span>
3.2.1	La prédiction de Clifford Will <span style="color: #0070C0;">62</span>

3.2.2	De l'importance des corrélations – une analyse post-ajustement	66
3.3	Contrainte sur la masse du graviton avec INPOP17b	70
3.3.1	Principe et méthode	71
3.3.2	Résidus obtenus avec INPOP17b	71
3.3.3	Contrainte avec le $\chi^2$ de Pearson	73
3.3.4	Contrainte avec le $\chi^2$ observationnel réduit	75
3.4	Contrainte sur la masse du graviton avec INPOP19a	75
3.4.1	Résidus d'INPOP19a	75
3.4.2	Mise à jour de la contrainte	78
3.5	Extension à la 5ème force	79
3.6	Conclusion, résumé des résultats	79
4	Test du dilaton léger dans le système solaire	83
4.1	Intérêt de tester le dilaton léger	83
4.2	Phénoménologie du dilaton léger	85
4.2.1	Cadre général de la théorie	86
4.2.2	Action du champ de gravité couplé au champ scalaire	86
4.2.3	Action de la matière : couplage universel et non universel avec le champ scalaire	89
4.2.4	Approximation post-newtonienne	94
4.2.5	Résolution post-newtonienne des équations du champ	98
4.2.6	Équations du mouvement	99
4.2.7	Effet Nordtvedt et dilaton	106
4.2.8	Électromagnétisme en théorie tenseur-scalaire	108
4.2.9	Résumé pratique	115
4.3	Contraintes avec la télémétrie laser-Lune	117
4.3.1	Dynamique du système Soleil-Terre-Lune	117
4.3.2	Incertitudes liées au modèle de la structure interne de la Lune et aux effets thermiques	118
4.3.3	Contrainte avec l'algorithme Jackknife, résultats	119
4.3.4	Comparaison avec MICROSCOPE, discussion	120
4.4	Contrainte sur le dilaton avec INPOP19a	120
4.4.1	Réduction à quatre paramètres	120
4.4.2	Méthode numérique	123
4.4.3	Résultats pour un couplage linéaire	124
4.4.4	Résultats préliminaires en théorie dilaton non linéaire	131
4.5	Conclusion	137
5	Conclusion	139
5.1	Critère objectif pour tester la modélisation d'une théorie	139
5.2	INPOP <i>versus</i> les théories alternatives à la relativité	139
5.3	Perspectives futures	141

**Bibliographie 143****Annexes**

A (Notes scientifiques) L'éphéméride INPOP19a	153
B (Article) Contraintes sur P9 avec INPOP19a	191
C (Article) Contrainte sur le graviton avec INPOP17b	205
D (Article) Contrainte sur le graviton avec INPOP19a	215
E Dérivation des équations d'Euler-Lagrange	223
E.1 Équations d'Euler-Lagrange à partir du lagrangien global	
E.1.1 Quantités utiles	223
E.1.2 Dérivation des équations d'Euler-Lagrange	223
E.2 Équations d'Einstein-Infeld-Hoffmann-Lorentz-Droste	225



## NOTATIONS

---

- On travaillera souvent dans une variété deux fois différentiable  $\mathcal{M}$ , pseudo-riemannienne, de dimension 4, munie d'une métrique  $g$  de signature  $(-, +, +, +)$ . On note  $T\mathcal{M}$  le fibré tangent de  $\mathcal{M}$ ,  $T^*\mathcal{M}$  son fibré cotangent, et  $T_s^r\mathcal{M}$  l'ensemble des champs de tenseurs de type  $(r, s)$  sur  $\mathcal{M}$ .
- Les tenseurs de rang supérieur ou égal à deux sont notés en gras :  $g \in T_2^0\mathcal{M}$ .
- Les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont aussi notés en gras :  $v \in \mathbb{R}^3$ .
- Les matrices de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  (ensemble des matrices réelles à  $m$  lignes et  $n$  colonnes) ou  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (matrices carrées réelles de taille  $n$ ) sont notées en gras :  $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le contexte permettra de distinguer les trois cas précédents.
- On utilise la convention d'Einstein de sommation des indices répétés en haut et en bas :  $a_i b^i = \sum_{i=1}^3 a_i b^i$ , et  $u_\mu v^\mu = \sum_{\mu=0}^4 u_\mu v^\mu$ .
- $\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta^{ij}$  vaut 1 si  $i = j$ , 0 sinon. Valable également avec des incices grecs.
- $\cdot$  est le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  : si  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , que  $u = u^i e_i$  et  $v = v^i e_i$ , alors  $u \cdot v = \delta_{ij} u^i v^j$ .
- $\|\cdot\|$  représente la norme 2 dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ .
- Les vecteurs colonne de  $\mathbb{R}^n$  où  $n > 4$  ne sont pas en gras :  $R \in \mathbb{R}^N$ .
- La transposée d'une matrice  $W$  ou d'un vecteur colonne  $R$  est notée avec  ${}^t$  : on notera  ${}^t W$  la matrice transposée de  $W$  et  ${}^t R$  le vecteur ligne transposé du vecteur colonne  $R$ .
- Les indices des composantes des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont en exposants, appartiennent à l'alphabet latin, et parcourent l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . Ainsi, si  $(e_i)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , on notera  $v = v^i e_i$ .
- $\times$  est le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  lorsque des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont mis en jeu (par exemple  $J = mx \times v$ ), sinon c'est la multiplication lorsque des valeurs numériques sont en jeu (par exemple  $c \approx 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ).
- Les champs de vecteurs de  $T\mathcal{M}$  sont notés en gras avec une flèche sur le dessus :  $\overrightarrow{u} \in T\mathcal{M}$ . Les champs de formes linéaires de  $T^*\mathcal{M}$  sont notés en gras et sont soulignés :  $\underline{u} \in T^*\mathcal{M}$ .
- $\otimes$  représente le produit tensoriel à antécédents dans  $T_s^r\mathcal{M} \times T_q^p\mathcal{M}$  et à valeurs dans  $T_{s+q}^{r+p}\mathcal{M}$ .
- Les indices des tenseurs/vecteurs/formes linéaires de  $T_s^r\mathcal{M}$  appartiennent à l'alphabet grec et parcourent l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Les indices contravariants sont en exposants alors que les indices covariants sont en indices. Par exemple, si  $(\underline{dx}^\mu)$  est une base de  $T^*\mathcal{M}$ , on aura  $g = g_{\mu\nu} \underline{dx}^\mu \otimes \underline{dx}^\nu$ .

- Par abus de langage, on identifie les cartes de  $\mathcal{M}$  avec la liste de leurs coordonnées : si  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$  est un ouvert et que  $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \Omega$ ,  $x \mapsto \Phi(x) = (x^\mu)_{\mu \in \{0,1,2,3\}}$  est un  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme, on identifiera  $(x^\mu)$  et  $\Phi$ . “Carte” et “système de coordonnées” sont synonymes.
- Il peut arriver que nous notions les dérivées partielles ordinaires avec une virgule :  $\partial_\mu \varphi = \varphi_{,\mu}$ .
- Les dérivées covariantes sont notées avec le symbole  $\nabla$ , et leurs composantes covariantes (resp. contravariantes)  $\nabla_\mu$  (resp.  $\nabla^\mu$ ). Il peut arriver que nous notions les dérivées covariantes avec un point-virgule : si  $(\overset{\rightarrow}{\partial}_\mu)$  est la base naturelle de  $T\mathcal{M}$  et  $(\underline{dx}^\mu)$  sa base duale sur  $T^*\mathcal{M}$ , alors pour  $T \in T_0^2\mathcal{M}$  on a  $\nabla T(\overset{\rightarrow}{\partial}_\mu, \underline{dx}^\alpha, \underline{dx}^\beta) = \nabla_\mu T^{\alpha\beta} = T_{;\mu}^{\alpha\beta}$ .

$(\overset{\rightarrow}{\partial}_\mu)$  est associée à  
la carte  $(x^\mu)$

# 1

## INTRODUCTION

---

### 1.1 PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

L'objectif de toute théorie physique est de réduire la multiplicité de la réalité empirique à quelques concepts simples compréhensibles par un esprit humain raisonnable et studieux. Accumuler des données empiriques est indispensable, mais insuffisant pour faire des sciences. Mettre de l'ordre dans ces données, trouver des concepts simples qui unifient ces données, et leur donner un aspect rationnel, est ce que cherche à faire la science physique.

De ce point de vue, la relativité générale est aujourd'hui une excellente théorie physique pour décrire les phénomènes à l'échelle du système solaire. La théorie de la relativité générale repose en effet sur des principes simples que nous allons rappeler. Même si les développements mathématiques issus de ces principes simples sont complexes, les principes en eux-mêmes ne sont pas difficiles à comprendre. Un des intérêts de cette simplicité est qu'il est facile de concevoir des expériences pour contredire ces principes – et renforcer la théorie lorsque ces tentatives de réfutation échouent les unes après les autres depuis plus de cent ans en ce qui concerne la relativité générale.

Pour entrer tout de suite dans le vif du sujet, énonçons les principes de la relativité générale.

#### 1.1.1 *L'espace-temps est une variété différentiable*

Construire la théorie de la relativité générale nécessite un postulat aussi fort qu'indispensable dont il est assez peu souvent question dans la littérature :

**POSTULAT** L'espace-temps, c'est-à-dire l'étendue qui contient toute la matière existante, peut être décrit par une variété deux fois différentiable de dimension 4.

Le simple fait de pouvoir repérer des événements à l'aide de cartes qui établissent un difféomorphisme entre des ouverts de  $\mathbb{R}^4$  et une variété lisse globale  $\mathcal{M}$  que l'on appelle "espace-temps" et dont on postule qu'elle est identique à l'étendue objective dans laquelle existent tous les objets matériels à étudier, n'a rien d'innocent. Pourtant, un tel postulat est indispensable pour repérer les événements matériels réels dans un support géométrique qui jouit de propriétés mathématiques convenables pour travailler – notamment le caractère deux fois différentiable est indispensable pour pouvoir parler d'accélération. Certaines théories vont jusqu'à contredire ce postulat à une échelle

microscopique, de telle sorte que la continuité et la différentiabilité macroscopiques de l'espace-temps apparaissent comme des phénomènes émergents et non fondamentaux. Il n'en sera pas question ici. Notons simplement qu'à partir de ce postulat, désormais, et ce sera le cas dans toute cette thèse, nous identifions l'espace-temps à une variété deux fois différentiable que nous notons  $\mathcal{M}$ . À ce stade, nous ne munissons pas encore l'espace-temps d'une métrique car le caractère métrique de l'espace-temps provient d'autres principes.

### 1.1.2 Principe d'équivalence faible, ou universalité de la chute libre

Le principe d'universalité de la chute libre a été énoncé théoriquement de façon claire et distincte par Galilée par sa célèbre démonstration par l'absurde. Plus tard, Newton constatait que dans sa théorie universelle de la gravitation, on pouvait simplifier de façon accidentelle les masses inerte et grave de chacun des deux côtés de l'équation du mouvement. Chez Newton, le principe d'équivalence apparaît comme une loi additionnelle : les masses graves et les masses inertes ont le même rapport quantitatif quelle que soit la composition interne des corps, et par un choix d'unité approprié, on peut les poser égales.

En relativité générale, l'universalité de la chute libre est élevée à un principe phénoménologique à partir duquel le reste de la théorie est construite.

**POSTULAT** (Principe d'équivalence faible, ou universalité de la chute libre) Considérons une particule test : une particule de dimension et de masse négligeables par rapport à tous les autres objets du système physique qui engendre le champ de gravitation dans lequel se meut cette particule. Si cette particule test ne subit aucune action autre que celle du champ de gravité, alors sa trajectoire ne dépend que de sa position et sa vitesse dans l'espace-temps, et est indépendante de sa composition interne.

Si ce principe est réfuté expérimentalement, alors la relativité générale est contredite par les faits. Récemment, l'expérience MICROSCOPE a testé ce principe en utilisant un paramètre  $\eta$  qui encode la différence possible entre le rapport des masses inerte et grave, entre deux cylindres composés respectivement de platinum et rhodium, d'une part, et de titaniun, d'aluminium et de vanadium, d'autre part. Le dernier résultat est [1]  $\eta = (-1 \pm 9(stat) \pm 9(syst)) \times 10^{-15}$ .

Une façon plus théorique d'exprimer le postulat d'universalité de la chute libre est de dire que la matière se couple de façon universelle avec le champ de gravité. La théorie de la relativité générale peut se dériver à partir d'un principe de moindre action qui contient, d'une part, l'action d'Einstein-Hilbert qui décrit le champ de gravité (ou, ce qui revient au même, la géométrie de l'espace-temps), et d'autre part, la densité lagrangienne du modèle standard, qui décrit le comportement de la matière. Ces deux densités lagrangiennes ne font que

s'additionner, si bien que le couplage qui apparaît entre la matière et le champ de gravité est minimal et donc universel et ne dépend pas de la composition interne des corps. Cependant, certaines théories alternatives à la relativité générale postulent l'existence d'un champ scalaire supplémentaire qui apparaît à trois niveaux dans l'action. Premièrement, une fonction de ce champ se couple à l'action du champ de gravité. Deuxièmement, ce champ apparaît de façon autonome. Et troisièmement, ce champ se couple à la matière. Avec les deux premiers couplages, le principe d'équivalence faible est respecté. Cependant, un couplage particulier avec la matière peut induire des comportements différents selon la composition interne des objets matériels – par exemple dans la théorie du dilaton avec couplage non universel [2; 3]. Par la médiation du champ scalaire, la chute libre dépend de la composition interne des corps et le principe d'universalité de la chute libre est contredit. Dans le chapitre 4, nous aurons affaire à une telle théorie tenseur-scalaire qui viole le principe d'équivalence faible.

### 1.1.3 Principe d'équivalence d'Einstein

Avant Einstein, on concevait la gravitation comme une force qui déviait les particules de leur trajectoire inertie, au même titre qu'un champ électrique fait accélérer des particules chargées. C'est en 1908 qu'Einstein a formulé une première version de son principe d'équivalence [4], avant d'en tirer toutes les conséquences pour donner une formulation définitive de sa théorie en 1915 [5]. Bien que le principe d'équivalence d'Einstein reproduise la phénoménologie de Newton dans un certain domaine, le changement de point de vue d'Einstein est radical puisque l'on cesse de considérer la gravitation comme une force mais qu'elle est vue comme un effet inertiel local. On peut exprimer le principe d'équivalence dit d'Einstein, de la façon suivante [6].

#### POSTULAT (Principe d'équivalence d'Einstein)

1. Le principe d'universalité de la chute libre, autrement dit le principe d'équivalence faible, est vérifié.
2. Considérons un laboratoire de dimensions négligeables par rapport aux échelles en jeu dans le champ de gravitation. Si ce laboratoire est en chute libre, alors le résultat de toute expérience de physique non gravitationnelle au sein de ce laboratoire est indépendant de la *vitesse* de la chute libre de ce laboratoire. En outre, les lois de la physique régissant ces expériences locales sont celles de la relativité restreinte.
3. Dans les mêmes conditions expérimentales, le résultat de toute expérience de physique non gravitationnelle est indépendant de la *position et la date* dans l'espace-temps à laquelle elle est effectuée.

Le premier point semble étrange mais si le principe d'équivalence faible était faux, celui d'Einstein ne pourrait pas être vrai. En effet, s'il était réfuté, alors les différentes particules du laboratoire chuteraient différemment selon différentes circonstances alors même qu'elles auraient localement les mêmes conditions initiales, et ces différences seraient mesurables localement dans le même laboratoire. Le principe d'équivalence faible se présente donc comme une condition de réalisation du principe d'équivalence d'Einstein.

Le second point du principe d'équivalence d'Einstein est aussi appelé l'invariance de Lorentz – car un changement local de vitesse du laboratoire constitue une transformation de Lorentz. Signalons l'existence de théories qui remettent en question l'invariance de Lorentz, la plus emblématique d'entre elle étant une théorie d'extension du modèle standard [7; 8; 9]. Nous n'étudions pas cette théorie ici.

Le troisième point est aussi appelé l'invariance locale de position. Ce point peut être violé par des théories tenseur-scalaire qui font intervenir une dépendance spatio-temporelle de la gravitation elle-même, surtout si l'on postule une anisotropie à l'échelle cosmique de certains champs [10]. C'est même dans l'objectif de faire dépendre la gravitation du lieu dans l'espace-temps afin de respecter le principe de Mach qu'est née la publication inaugurale de Brans & Dicke [11] sur les théories tenseur-scalaire.

Ce principe est une extension du principe de relativité. Il exprime qu'en tout point de l'espace-temps, tout laboratoire localement en chute libre observe en son sein les mêmes lois physiques. Comme la variété dont on a postulé qu'elle définissait l'espace-temps est deux fois différentiable, en tout point de l'espace-temps il est possible d'effectuer une transformation locale qui annule les effets d'accélération dus à la gravitation et donc de se placer du point de vue d'un observateur qui n'est soumis qu'à la gravitation, c'est-à-dire en chute libre. En vertu du principe d'équivalence d'Einstein, ces observateurs ne mesurent localement que les lois de la relativité restreinte et donc ne mesurent localement aucun effet de la gravitation.

La gravitation peut donc toujours être annulée localement par un changement d'observateur, puisque les observateurs en chute libre ne ressentent pas la gravitation, mais peuvent seulement constater les lois de la physique qui concernent les trois autres interactions fondamentales non gravitationnelles. La gravitation n'est donc localement<sup>1</sup> pas une force, c'est un effet d'inertie que l'on peut compenser localement par un changement d'observateur. Avec cette vision des choses, on peut aussi interpréter le principe d'équivalence d'Einstein comme fondement du principe d'équivalence faible. En effet, si la gravitation n'est qu'un effet inertiel, ou un effet purement géométrique, alors il est naturel que les trajectoires des objets en chute libre ne dépendent pas

---

<sup>1</sup>. Ce n'est vrai qu'à l'ordre 1 lorsque l'on considère les effets inertIELS locaux sur une particule ponctuelle. À l'ordre 2 la gravitation produit des effets locaux de marée.

de leur composition interne. Considérons deux particules voisines en positions, vitesses et dates, de compositions internes différentes, et en chute libre toutes deux. Si l'on considère le théorème précédent, il est toujours possible de les considérer comme immobiles en effectuant un changement d'observateur adéquat, et de ce point de vue, ce ne sont pas ces particules en chute libre qui sont en mouvement accéléré, c'est au contraire le reste de la matière qui est éventuellement accélérée, par des forces physiques, par rapport à ces particules inertielles. De ce point de vue, le principe d'équivalence faible est évident : deux particules immobiles inertielles ne subissant aucune force ne vont pas se mettre à bouger toutes seules même si leurs compositions internes sont différentes. Pour construire la théorie de la relativité générale, on peut donc également partir de ce théorème et l'éléver au rang de postulat, la théorie construite sera exactement la même.

Pour illustrer ce renversement de postulat, permettons-nous une petite digression. Une conséquence amusante du principe d'équivalence d'Einstein est que si la gravitation est équivalente à l'accélération des observateurs, alors il faut conclure que toute personne fixe dans un référentiel attaché à la croûte terrestre accélère vers le haut. En effet, un tel observateur constaterait que les observateurs inertiels qui mesurent localement les lois de la relativité restreinte, chutent vers le bas. Mais ce sont ces observateurs en chute libre qui sont dans le "bon" système de référence local et non celui attaché à la croûte terrestre. Il faut donc observer le mouvement des observateurs attachés à la croûte terrestre du point de vue des observateurs en chute libre pour savoir qui est accéléré et donc qui subit une force, et de ce point de vue, ces observateurs attachés au sol accélèrent vers le haut. Pourquoi accélèrent-ils vers le haut ? Parce qu'ils subissent la force exercée par le sol sous leur pieds – en étant attentif, on sent en permanence la pression exercée sous nos pieds, ou sur une moitié de notre corps lorsque nous sommes allongés. Parce que la Terre dans son ensemble est un amas de matière qui subit des pressions internes, mais cela est compensé par la géométrie globale de l'espace-temps qui s'effondre localement lorsque des objets contiennent de l'énergie sous forme de masse inerte ou d'interactions de toute sorte. Ajoutons que de ce point de vue, ce ne sont pas les objets qui chutent, mais le sol qui accélère vers le haut. Dit comme cela, le principe d'équivalence faible apparaît comme une évidence : deux particules de compositions différentes toutes deux en chute libre à partir de la même condition initiale vers la Terre ne subissent aucune force. C'est le sol qui va remonter jusqu'à les percuter. Il est évident que le sol les percutera en même temps quelles que soient les compositions internes des objets qui chutent.

Toutefois, nous préférons distinguer le principe d'équivalence faible et celui d'Einstein, car cela permet de concevoir des violations de la théorie à différents niveaux.

Considérons un observateur dans un référentiel terrestre local attaché à la croûte de la planète. Considérons, au voisinage de cet observateur, un autre observateur dans une boîte en chute libre. Au sein de cette boîte, l'observateur en question observe les lois de la relativité restreinte dont l'intervalle de mesure est donné par la métrique de Minkowski. Mettons que cette boîte rectangulaire soit munie d'un repère cartésien  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ , alors l'intervalle d'espace-temps est

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

où  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  est la métrique de Minkowski. À présent considérons l'observateur attaché à la croûte terrestre. Localement, les événements qu'il observe sont repérés par le système de coordonnées quelconques  $X^\mu = (ct, X^1, X^2, X^3)$ . Mais comme son référentiel local n'est pas en chute libre, il faut se ramener à l'observateur en chute libre pour pouvoir effectuer des mesures d'un point de vue d'un observateur inertiel et ainsi espérer obtenir des résultats expérimentaux indépendants de l'observateur. Supposons que l'on connaisse les lois de passage de la carte  $(X^\mu)$  à la carte  $(x^\mu)$ . On veut exprimer l'intervalle de temps (1) dans la carte  $(X^\mu)$ . En différentiant  $x^\mu$  comme fonction de  $X^\mu$ , il n'est pas difficile de se convaincre que la solution est

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} dX^\alpha dX^\beta = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \quad (2)$$

avec

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta}. \quad (3)$$

*Sans la différentiabilité de la variété  $\mathcal{M}$ , nous n'aurions pas le droit de différentier  $x^\mu$  comme fonction de  $X^\mu$ .*

À partir de cette équation on peut déduire toutes les propriétés mathématiques canoniques, et décrites dans tout cours de relativité générale, que doit faire un tenseur métrique  $g \in T_2^0 \mathcal{M}$  dont les composantes dans une carte quelconque sont celles de l'équation (3) (composantes formant une matrice symétrique de signature  $(-, +, +, +)$ , tenseur de type  $(0, 2)$  dont les composantes vérifient les lois de transformation adéquates à tout tenseur). En vertu du principe d'équivalence d'Einstein, on peut toujours trouver un observateur inertiel pour qui l'espace de Minkowski est une bonne approximation de l'espace-temps local, à partir duquel on peut localement déduire la métrique pour un observateur non inertiel, en fonction de son mouvement relatif par rapport à l'observateur inertiel. De là, on pourrait retrouver tous les aspects géométriques et cinématiques de la relativité générale. Voilà pourquoi l'on dit que les théories qui vérifient ce principe sont ce qu'on appelle des *théories métriques* : la géométrie pseudo-riemannienne (c'est-à-dire dont la métrique a une signature  $(-, +, +, +)$ ) est la seule qui permet de décrire correctement les phénomènes de gravitation. Le caractère global pseudo-riemannien est nécessaire car il est en général impossible de trouver un changement d'observateur qui annule globalement le champ de gravité. Ainsi, le principe d'équivalence d'Einstein permet de poser le formalisme mathématiques de la relativité générale.

Les théories tenseur-scalaire pour lesquelles le champ scalaire se couple de façon conforme avec la matière sont des théories métriques. Les particules test y suivent les géodésiques de l'espace-temps<sup>2</sup>. Dans le formalisme post-newtonien, pour la plupart des théories tenseur-scalaire métriques, il suffit de modifier le tenseur métrique de la relativité générale en affectant chaque terme du développement limité en  $1/c^2$  d'un coefficient qui doit valoir 1 en relativité générale, et qui peut prendre d'autres valeurs dans d'autres théories tenseur-scalaires [13; 14].

On peut signaler des expériences à base d'horloges atomiques qui mesurent la violation d'invariance locale. Si le principe d'invariance locale est respecté, alors deux horloges atomiques de composition différente devraient mesurer le même décalage en fréquence dû à une modification du champ de gravité. Si ce n'est pas le cas, alors on peut encoder cette violation dans un paramètre  $\alpha$ , où au lieu de mesurer un décalage fréquentiel  $z = \Delta U/c^2$ , on aurait  $z = (1 + \alpha)\Delta U/c^2$  [6]. La dernière contrainte est  $\alpha = (0.19 \pm 2.48) \times 10^{-5}$  [15].

#### 1.1.4 Principe d'équivalence fort

Il existe une autre version du principe d'équivalence encore plus forte que celle énoncée plus haut.

**POSTULAT** (Principe d'équivalence fort)

1. Le principe d'universalité de la chute libre, autrement dit le principe d'équivalence faible, est vrai.
2. Considérons un laboratoire de dimensions négligeables par rapport aux échelles en jeu dans le champ de gravitation. Si ce laboratoire est en chute libre, alors le résultat de toute expérience de physique, *y compris gravitationnelle*, au sein de ce laboratoire, est indépendant de la *vitesse* de la chute libre de ce laboratoire.
3. Dans les mêmes conditions expérimentales, le résultat de toute expérience de physique, *y compris gravitationnelle*, est indépendant de la *position et la date* dans l'espace-temps à laquelle elle est effectuée.

Ce dernier principe se distingue du précédent en ce que dans le principe d'équivalence d'Einstein, les *expériences non gravitationnelles* supposent que les masses graves mises en jeu dans les expériences (en incluant la masse du laboratoire lui-même) engendrent des effets négligeables par rapport à tous les autres effets à mesurer au sein du laboratoire. Mais avec ce dernier principe, même un laboratoire dont les éléments internes auraient des effets gravitationnels observables, mesurerait des résultats indépendants de la chute libre du laboratoire.

---

2. Si on se place dans la trame conforme de Jordan. Pour plus de détails, voir [12] ou le chapitre 4.

Par ailleurs, ce principe implique que les effets internes de gravitation du laboratoire en chute libre ne modifient pas le caractère inertiel du système de référence local attaché à ce laboratoire. Ainsi, quelles que soient les masses mises en jeu, la trajectoire d'un corps massif d'étendue négligeable par rapport aux dimensions des objets qui engendrent le champ de gravitation externe doit être *formellement* la même quels que soient les effets internes de gravitation de ce corps. Nous disons *formellement* et non *exactement*. En effet, la masse grave totale du corps en mouvement peut modifier les trajectoires des corps externes qui engendrent le champ de gravitation externe, et donc en retour modifier le champ de gravitation externe. Ainsi, les équations du mouvement prennent la même *forme* quels que soient les effets gravitationnels internes, mais le résultat du mouvement dépend indirectement de la masse grave du corps en mouvement. C'est déjà le cas en gravitation newtonienne, où par exemple la position de Jupiter influe sur les mouvements des autres astres, qui en retour modifient la trajectoire de Jupiter elle-même – et cela sans que le principe d'équivalence ne soit violé.

La violation d'un tel principe impliquerait que les corps seraient capables d'auto-graviter et ainsi de modifier la forme de leur trajectoire par leur propre masse. Cela se fait indépendamment de la composition interne des corps. Il existe donc des théories alternatives qui maintiennent le principe d'équivalence faible, le principe d'équivalence d'Einstein, mais qui violent le principe d'équivalence fort. Nordtvedt a proposé d'encoder cette violation dans un terme proportionnel à l'énergie d'auto-gravitation [16; 17]. Dans ce cas, le rapport entre masse inerte et masse grave serait

$$\frac{m^g}{m^i} = 1 + \eta_N \frac{\Omega}{mc^2} \quad (4)$$

où  $\eta_N$  est le paramètre de Nordtvedt (qui n'a pas d'unité), et

$$\Omega = -G \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3r d^3r' \quad (5)$$

est l'énergie d'auto gravitation du corps considéré. La plupart des théories tenseur-scalaire contiennent également une violation du principe d'équivalence fort qui se présente sous la forme d'un terme de Nordtvedt, nous y reviendrons au chapitre 4.

La télémétrie laser-Lune (LLR<sup>3</sup>) est particulièrement adaptée pour tester le principe d'équivalence fort, car le système Terre-Lune-Soleil présente des coefficients de Nordtvedt potentiellement beaucoup plus élevés que dans l'expérience MICROSCOPE – nous y reviendrons au chapitre 4 section 4.3.4. La dernière contrainte publiée par notre équipe encode la violation du principe d'équivalence fort dans un

---

<sup>3</sup>. En anglais, LLR désigne "Lunar Laser Ranging". Nous adoptons cet acronyme car il est très utilisé dans la littérature.

paramètre  $\Delta$  qui exprime la différence des coefficients de Nordtvedt entre la Terre et la Lune. Cette contrainte est actuellement [18]  $\Delta = (-3.8 \pm 7.1) \times 10^{-14}$ .

### 1.1.5 Couplage entre la matière et l'énergie

Dans l'état actuel de la recherche théorique, il semblerait que seule la relativité générale satisfait les trois précédents principes – c'est ce qu'affirme Clifford Will dans un article de *Living Reviews in Relativity* [6] et je n'ai pas connaissance d'une théorie alternative qui les respecte tous les trois et qui passe les tests expérimentaux. En eux-mêmes, ces principes sont insuffisants pour construire toute la théorie. Il faut encore postuler une forme particulière des densités lagrangiennes du champ de gravité et de la matière pour pouvoir donner une forme univoque à la dynamique gravitationnelle de la matière. Une façon de formuler un cinquième principe pour décrire le couplage entre la géométrie de l'espace-temps est de postuler que l'action du champ gravitationnel est décrite par la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_g = R/2\kappa c$ , où  $R$  est le scalaire de Ricci et  $\kappa = 8\pi G/c^4$ . En intégrant sur l'élément de volume invariant  $\sqrt{-g}d^4x$ , on obtient l'action d'Einstein-Hilbert [21; 22]. À cela il suffit d'ajouter la densité lagrangienne du modèle standard  $\mathcal{L}_{MS}$  pour obtenir le couplage de la relativité générale. La dérivation d'une telle action donne les équations d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{MS})}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (6)$$

*La théorie de Nordström vérifie les principes d'équivalence mais ne passe pas les tests expérimentaux dans le système solaire [19; 20].*

Une intégration mésoscopique du lagrangien du modèle standard est nécessaire pour obtenir un modèle de matière continue et non quantique dans le membre de droite de l'équation (6). Cela donne le tenseur énergie-impulsion non quantique dans le membre de droite. Nous reviendrons le calcul du tenseur énergie-impulsion à partir d'une action dans le chapitre 4, effectué à partir des travaux de Damour & Donoghue (2010) [2] et de Damour & Esposito-Farèse (1992) [23]. D'un point de vue moins fondamental, on peut aussi postuler qu'à une échelle non quantique, la matière se comporte comme en relativité restreinte du point de vue des observateurs inertIELS, ce qui revient à postuler la forme usuelle de la densité lagrangienne ou du tenseur énergie-impulsion. C'est le point de vue usuel des manuels de relativité générale [20; 22].

### 1.1.6 Intérêt de tester des théories alternatives

Il existe de nombreuses motivations théoriques pour concevoir des théories alternatives à la relativité générale, mais ce n'est pas l'objet de cette thèse que de les étudier. Nous ne ferons donc pas le rappel des possibles défauts de la relativité générale que certaines théories

tentent de résoudre et que tout astrophysicien connaît bien. Cette phrase était évidemment ironique : aucun théoricien ne connaît toutes les théories alternatives ni leurs motivations pour concurrencer la relativité générale. En réalité il existe autant voire plus de motivations différentes d'améliorer la relativité générale qu'il y a de théoriciens qui travaillent sur ce sujet. Pour ma part, j'estime qu'à l'heure actuelle et étant donné l'état de développement des théories physiques et des techniques instrumentales, ces problèmes relèvent plus de la métaphysique que de la physique, et je préfère ne pas entrer dans ces débats qui sont loin de faire consensus. On peut toutefois consulter l'ouvrage de Clifford Will pour une revue des principales théories alternatives à tester [13], ou son article de revue [6]. Loin de ces débats certes intéressants, mais sur lesquels je ne revendique aucune prise de position<sup>4</sup>, l'objet de cette thèse consiste à *tester* ces théories, en particulier celles qui présentent une phénoménologie mesurable par notre éphéméride INPOP<sup>5</sup>.

Tout au long de cette thèse, nous ne témoignerons donc d'aucun préjugé plus ou moins favorable à telle ou telle théorie alternative à la relativité générale. Les théoriciens qui les proposent ont certainement d'excellentes raisons de penser que leurs théories ont une chance d'être plus adéquate que la relativité générale, ou de présenter un intérêt pour résoudre une éventuelle contradiction que contient la relativité générale d'Einstein. Lorsqu'ils font bien leur travail, ces théoriciens conçoivent des postulats nouveaux et ils en déduisent des lois phénoménologiques qui peuvent être différentes de la phénoménologie de la relativité générale, et d'estimer dans quel domaine expérimental cette théorie a le plus d'intérêt pour être testée. Leur travail en tant que théoricien (mais pas forcément en tant que chercheur) s'arrête là.

À l'opposé, le travail minutieux des ouvriers, des techniciens, des ingénieurs, et des observateurs du domaine spatial, consiste à produire des données réelles qui traduisent la réalité empirique du système solaire (pour ce qui nous concerne).

Mon travail se situe à l'intermédiaire de ces deux pôles – théorique et empirique. Même s'il y a d'emblée des préjugés théoriques dans la construction d'expériences de physique, les résultats empiriques de celles-ci peuvent servir à déterminer, à limiter, et à contraindre les différentes interprétations théoriques possibles – c'est à ce niveau que j'ai travaillé. La démarche adoptée dans cette thèse peut se schématiser en trois étapes.

---

4. Cette non prise de position est cohérente avec le caractère "agnostique" de mes tests de théories alternatives – nous reviendrons sur ce caractère "agnostique" plus loin.

5. INPOP signifie Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris. Ces éphémérides sont disponibles, documentées, et mises à jour régulièrement sur le site de l'IMCCE : <https://www.imcce.fr/recherche/equipes/asd/inpop/>. Nous y reviendrons au chapitre 2.

1. Chercher des théories alternatives à la relativité générale qui intéressent les communautés scientifiques des théoriciens, et qui contiennent une phénoménologie du système solaire éventuellement différente de celle de la relativité générale.
2. À partir de la théorie, dériver cette phénoménologie à l'échelle du système solaire et l'intégrer systématiquement dans notre éphéméride INPOP.
3. Confronter cette phénoménologie à la réalité empirique observée dans le système solaire.

Le travail de cette thèse n'est donc ni purement théorique ni purement expérimental, mais à l'interface des deux. Il s'agit donc d'un travail phénoménologique. Il n'est pas purement expérimental car mon travail n'a pas consisté à produire les données utilisées par INPOP mais à les confronter aux théories alternatives testées. Il n'est pas purement théorique car je n'ai conçu aucune des théories testées. J'ai cependant dû les étudier pour comprendre et exprimer leur phénoménologie dans le système solaire. En outre, autant que possible, les théories alternatives à la relativité générale sont considérées d'un point de vue "agnostique", au sens où seul leur caractère phénoménologique est considéré. Leur caractère ontologique – c'est-à-dire, se demander si les objets comme le "graviton" ou le "dilaton" existent réellement – est laissé de côté dans cette thèse. Lorsque par exemple dans le chapitre 3 nous parlons de la "masse du graviton", cela ne veut pas dire que nous croyons que la gravité est une interaction véhiculée par un boson qui contient la propriété d'avoir une masse ; cela veut dire que nous considérons l'apparition formelle d'un terme de masse dans les équations qui décrivent la phénoménologie du système solaire, sans préjuger de l'éventuelle réalité ontologique de cette masse. Nous laissons aux théoriciens le travail difficile de discriminer et trier les théories en fonction de leurs intérêts théoriques (qui, à notre époque historique, sont bien souvent plus subjectifs qu'objectifs, vu que jusqu'à présent aucune théorie alternative à la relativité générale n'a pu se poser comme plus efficace pour décrire la réalité empirique). Ainsi, pour retenir notre attention, une théorie alternative à la relativité générale doit contenir au moins trois propriétés.

1. Cette théorie présente un intérêt pour une communauté significative de chercheurs en théories alternatives à la relativité générale – on pourrait dire que c'est un critère d'utilité sociale de notre travail.
2. Cette théorie est bien formulée mathématiquement, c'est-à-dire qu'elle prédit de façon non ambiguë une phénoménologie différente de la relativité générale dans le système solaire, et dont notre outil INPOP permet en principe de contraindre l'extension des paramètres. C'est un critère théorique.

TABLE 1 – Liste des principes de la relativité générale, et de quelques théories qui peuvent les violer. Les théories avec une dague † sont celles dont il ne sera pas question dans cette thèse.

Principes de la théorie	Théories alternatives qui contredisent ce principe
Universalité de la chute libre	Dilaton (couplage non universel) [3; 2]
Principe d'équivalence d'Einstein	
invariance locale	Fréquences † $Z = (1 + \alpha) \frac{\Delta U}{c^2}$ [6; 13; 15]
invariance de Lorentz	Extension du modèle standard† [7; 8; 9]
Principe d'équivalence fort	Théories tenseur-scalaire [11; 13; 23] Paramètres post-Newtoniens [13; 14]
Couplage particulier du champ de gravité et de la matière	Toutes les théories ci-dessus Graviton massif [24; 25; 26]
Action d'Einstein-Hilbert : $S = \int (R/2\kappa c + \mathcal{L}_{MS}) \sqrt{-g} d^4x$	Ex. : action de Brans-Dicke [11] : $S = \int \left[ \frac{\phi R}{2\kappa c} + \frac{\omega}{2\kappa c\phi} (\nabla\phi)^2 + \mathcal{L}_{MS} \right] \sqrt{-g} d^4x$

3. Cette théorie est simple. Quantitativement, cela veut dire qu'elle ne contient pas de nombreuses nouvelles constantes fondamentales de la physique à inclure dans son expression phénoménologique formelle. Autrement tout test réaliste serait difficile, étant donné les moyens numériques et observationnels dont nous disposons. C'est un critère pratique. Typiquement nous avons limité ce nombre à quatre pour des raisons pratiques que nous expliquons dans les chapitres 2 et 4.

Considérant l'outil dont nous disposons, l'éphéméride INPOP, seules les théories qui contiennent ces propriétés nous intéressent. Cette confrontation nécessite un détour théorique du côté des sciences statistiques car des conclusions de natures différentes peuvent en émerger selon les méthodes de tests utilisées.

### 1.1.7 Résumé des principes de la relativité générale

Dans le tableau 1, nous résumons les principes de la relativité générale et nous listons les théories alternatives qui peuvent contredire ces principes.

Dans le tableau 2, nous montrons quelques expériences et les principes testés correspondants. Un tel tableau est délicat à réaliser car il est souvent difficile de découpler tel ou tel principe et ils sont de fait testés un peu tous en même temps – par exemple, une violation du principe d'équivalence faible détruirait toute la théorie et tous les autres principes. Ou encore, le résultat de la télémétrie laser-Lune peut s'interpréter comme contraignant certaines théories dilaton qui ne font pas apparaître une violation du principe d'équivalence fort [3] comme nous le montrerons au chapitre 4 section 4.3. La revue de

TABLE 2 – Tests des principes effectués par les expériences de gravitation.

“WEP” signifie “principe d’équivalence faible”, “IS” signifie “invariance spatiale” (ou locale), “IL” signifie “invariance de Lorentz”, “SEP” signifie “principe d’équivalence fort”, et “couplage” correspond à la forme postulée du lagrangien qui couple le champ de gravité et la matière. Les cases rouges indiquent que l’expérience est adaptée pour ce test. Les cases bleues indiquent que cette expérience peut contraindre la violation du principe correspondant sous réserve de certaines hypothèses théoriques. Une case vide indique que ce test n’est pas conçu pour tester ce principe, mais n’exclut pas qu’une interprétation théorique permette de dire le contraire.

Expériences	Principe testé explicitement				
	WEP	IS	IL	SEP	Couplage
Balances de torsion					
Éphéméride planétaire	■	■	■	■	■
LLR			■		■
MICROSCOPE	■	■	■		
Shapiro Cassini		■			
Horloges atomiques		■	■		
Déflexion lumineuse	■			■	■

Clifford Will [6] fait une liste exhaustive de ces expériences avec les valeurs des limites – même si depuis la parution de cet article (2014), il y a du nouveau, il permet de bien se représenter quelle expérience permet de tester quel principe.

## 1.2 COMMENT TESTER UNE THÉORIE ALTERNATIVE ?

Contraindre des effets physiques ou des théories alternatives demande une certaine finesse méthodologique. Pour confronter l’état historique présent des théories physiques et des méthodes déjà utilisées, il faut d’abord connaître leur étendue et leurs succès passés pour pouvoir prétendre les remettre en question. Mais, sachant que toute découverte scientifique importante est contre-intuitive, il faut éviter le dogmatisme pour pouvoir sortir du cadre théorique et pratique dans lequel la science s’est construite jusqu’ici, tout en gardant une grande prudence. L’objectif est de construire un critère statistique arbitraire et quantitatif, au sens où l’utilisateur peut choisir arbitrairement un degré de certitude quantifié à partir duquel il peut déterminer les contraintes sur les paramètres des modèles ou théories physiques alternatives à tester.

L’ensemble des théories qu’il est possible de concevoir est surdéterminé par l’état des techniques expérimentales et observationnelles,

caractérisées ici par l'incertitude instrumentale. "Surdéterminé" est à considérer ici au sens de délimitation d'un ensemble, et non de détermination causale. Car l'activité expérimentale seule ne suffit pas à produire toute la science ; l'activité théorique, bien que conditionnée par la précision expérimentale, apporte des choses originales que l'expérimentation seule ne saurait produire. En effet, la compréhension du monde par un sujet inclut nécessairement une activité de la pensée, et contient donc un élément intrinsèquement théorique.

La question de savoir s'il existe des théories physiques "vraies" n'appartient pas à la discipline de la science physique, c'est une question de philosophie à laquelle je préfère ne pas répondre dans le cadre d'une thèse de science physique, bien que j'aie mon opinion là-dessus. En fait, chaque scientifique en physique a une opinion plus ou moins précise à ce sujet qui le motive à étudier la physique d'une certaine manière ; ces opinions varient souvent d'un individu à l'autre, et peuvent même entrer en contradiction. Pourtant, tous utilisent le même formalisme, peuvent travailler ensemble et produisent des résultats semblables dans des conditions semblables malgré des opinions variées, voire en contradiction, sur leur interprétation philosophique. C'est sans doute parce qu'il y a quand même un concensus sur le fait que certaines théories et modélisations sont plus adéquates que d'autres étant donné l'état historique des techniques expérimentales. Dans cette thèse, je dis qu'une théorie, conjointe à une certaine modélisation physique, est plus *adéquate*, ou plus *satisfaisante* qu'une autre lorsqu'elle permet de faire des prédictions plus proches des observations réelles – la notion de "proximité" d'une théorie et sa modélisation, par rapport à un ensemble d'observations réelles, sera développée dans le chapitre 2. Bien sûr, cette adéquation dépend de l'état historique des techniques expérimentales et donc évolue dans le temps. À un certain stade du développement des techniques expérimentales, les observations réelles entrent en contradiction avec la théorie dominante, et ces contradictions deviennent trop importantes pour que l'on puisse les ignorer. Ainsi s'ouvrent les périodes de recherche et des tests de nouvelles théories plus adéquates. Toutefois, malgré les récents progrès techniques, à ce jour la théorie de la relativité générale demeure la théorie la plus adéquate pour modéliser le système solaire, et comme nous le verrons, les tests que nous avons effectués ne permettent pas de déclarer qu'une théorie alternative est plus adéquate que la relativité générale.

### 1.2.1 Comparaison d'INPOP aux observations, conséquences pratiques

Pour pouvoir tester des théories, il faut les confronter à des objets réels, et pour cela, il faut modéliser ces objets réels à partir des principes de la théorie en vue de prédire des mesures qui sont conditionnées par le développement de la technique – on ne teste pas la

relativité aujourd’hui de la même façon qu’il y a un siècle. Lorsqu’une théorie alternative à la relativité générale est proposée, il faut donc qu’elle se présente face aux observations réelles. Pour cela, les observations sont simulées à l’aide d’une modélisation dans le cadre de la théorie à tester et on soustrait ces simulations aux observations réelles. Le résultat de cette soustraction constitue ce qu’on appelle les *résidus*. Ces résidus sont déjà calculés avec la relativité générale dans nos éphémérides planétaires INPOP – tout cela est détaillé dans le chapitre 2. En fonction de ces résidus, deux cas de figure extrêmes peuvent se présenter ainsi qu’un cas intermédiaire, et cela a des conséquences pratiques pour les tests des théories alternatives.

1. Les résidus présentent des signaux irréductibles et incompréhensible dans la théorie ou la modélisation actuelle.
2. Les résidus ont une distribution centrée en zéro dont l’écart-type est similaire à l’incertitude instrumentale.
3. Les résidus présentent des signaux potentiellement compréhensibles par la théorie actuelle mais non réduits par l’éphéméride.

Si les résidus obtenus à partir d’une théorie ont un écart-type égal à l’incertitude instrumentale, imaginer une théorie alternative n’a que peu d’intérêt, à moins qu’elle ne simplifie la modélisation des observables. Par exemple, il eût été hors de propos de concevoir la relativité générale à l’époque Ptolémée. À l’époque de Ptolémée, la théorie des épicycles était *la théorie adéquate à ce moment historique*, car elle permettait de prédire les phénomènes célestes avec la même précision que celle des données empiriques.

Avant qu’Einstein n’explique l’anomalie du périhélie de Mercure avec la relativité générale en 1915, nous étions dans le cas n° 1 – résidus contenant des signaux irréductibles et inexplicables dans la théorie ou modélisation en vigueur. En effet, les observations présentaient un signal systématique inexplicable dans la théorie de Newton – l’anomalie de l’avance du périhélie de Mercure était inexplicable avec la théorie newtonienne de la gravitation et a contribué à guider Einstein dans la conception de sa théorie. La découverte de la relativité générale par Einstein a donc été, entre autres, déterminée historiquement par la précision instrumentale de l’époque sur l’orbite de Mercure, même s’il y a souvent un décalage temporel entre le progrès technique et les avancées théoriques. En effet, l’élaboration de la théorie n’a pas suivi immédiatement la détection de cette anomalie de l’orbite de Mercure. Ce cas d’incompatibilité entre la modélisation et les observations a aussi existé à l’époque de Le Verrier lorsque cet astronome a déduit l’existence de Neptune à partir des anomalies observées sur l’orbite d’Uranus. Cette fois-ci, ce n’est pas la théorie qui était inadéquate, mais la modélisation physique du système à étudier. La théorie de Newton n’a pas été réfutée par le signal systématique des résidus, il a suffi d’invoquer l’existence d’un nouvel objet dont on ne tenait pas compte dans la modélisation précédente.

Dans le cas n° 2, il est impossible d'espérer découvrir un effet supplémentaire à ce qui est déjà inclus dans le modèle dynamique, et tout ce que l'on peut espérer, c'est de donner un intervalle de confiance qui limite l'extension des paramètres liés à la théorie alternative proposée. C'est pour l'instant le cas de toutes les expériences de physique quantique pour lesquelles, jusqu'à présent, aucun écart expérimental significatif de la théorie du modèle standard n'est observé.

Les résidus d'INPOP sont dans le cas intermédiaire n° 3. En effet, comme nous le montrerons au chapitre 2, l'éphéméride INPOP est régulièrement améliorée entre autres par un progrès dans la modélisation physique du système solaire, mais la précision de l'éphéméride est quand même suffisante pour effectuer des tests de théories alternatives. À titre d'exemple, nous présentons dans la figure 1 les résidus obtenus pour les données de Messenger avec INPOP19a et dans la figure 2 l'histogramme de ces résidus. Les interruptions dans les données correspondent aux passages de Mercure proche et derrière le Soleil par rapport à l'angle de visée depuis la Terre, configuration géométrique où les mesures sont difficiles et plus brouillées que lorsque Mercure est éloignée du Soleil du point de vue de l'angle de visée depuis la Terre. C'est en effet au voisinage de ces passages derrière le Soleil que les résidus sont les plus dégradés, alors qu'ils sont plus proches de zéro dans les cas contraires. Cette dégradation n'est pas due à un mystère inexplicable de la théorie de la gravitation, mais simplement au fait que l'activité du Soleil est difficile à modéliser. Toutefois, il n'est pas à exclure que l'ajout d'un effet dans le modèle dynamique d'INPOP, qu'il s'agisse d'une théorie alternative à la relativité générale ou à l'ajout d'un objet physique supplémentaire, puisse améliorer ces résidus. À y regarder de près, le résidu n'est pas distribué purement aléatoirement autour de zéro, mais quelques signaux persistent, notamment la dégradation au voisinage des passages derrière le Soleil ne sont pas symétriques ni identiques à chaque fois.

Avec de tels résidus, il est raisonnable de s'attendre à ce que les théories alternatives testées soient contraintes négativement – c'est-à-dire que nos résultats se présentent sous la forme d'intervalles de confiance pour limiter l'extension des paramètres liés aux théories alternatives, mais ne se présenteront pas sous la forme d'une découverte positive d'un effet dû à une théorie alternative. En effet, nous ne nous attendons pas à ce que des théories alternatives puissent améliorer significativement les résidus, même s'il est vraisemblable qu'une légère amélioration soit observée – en effet, l'ajout d'un degré de liberté dans le modèle permet toujours, en principe, d'améliorer les résidus, même si cet effet dynamique ajouté ne correspond pas à un effet réel. Quand bien même cet effet pourrait diminuer la taille des résidus, cela ne suffit pas à donner des intervalles de confiance pour les paramètres supplémentaires de l'effet ajouté que l'on considère. Pour cela il faut des méthodes statistiques fiables – que nous discute-

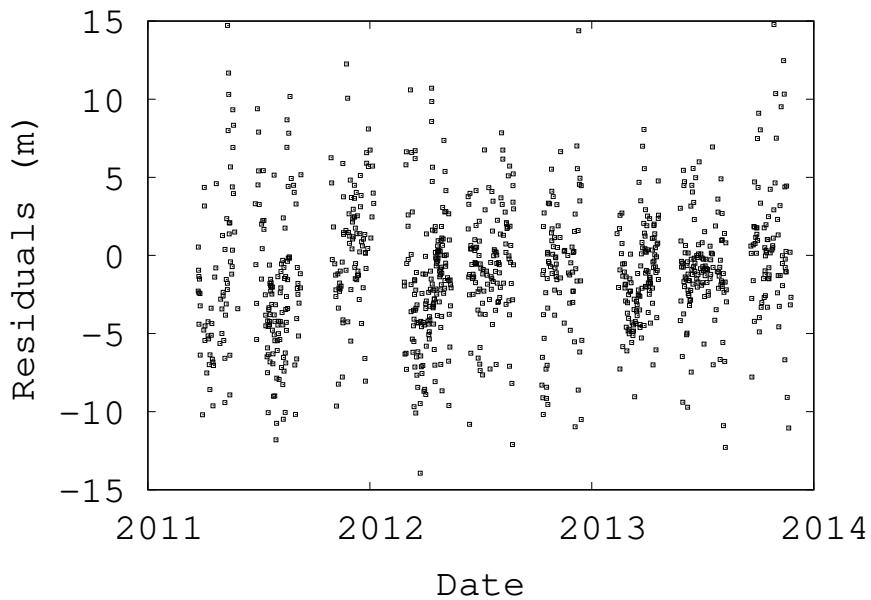


FIGURE 1 – Résidus obtenus sur les données télémétriques de Messenger avec INPOP19a.

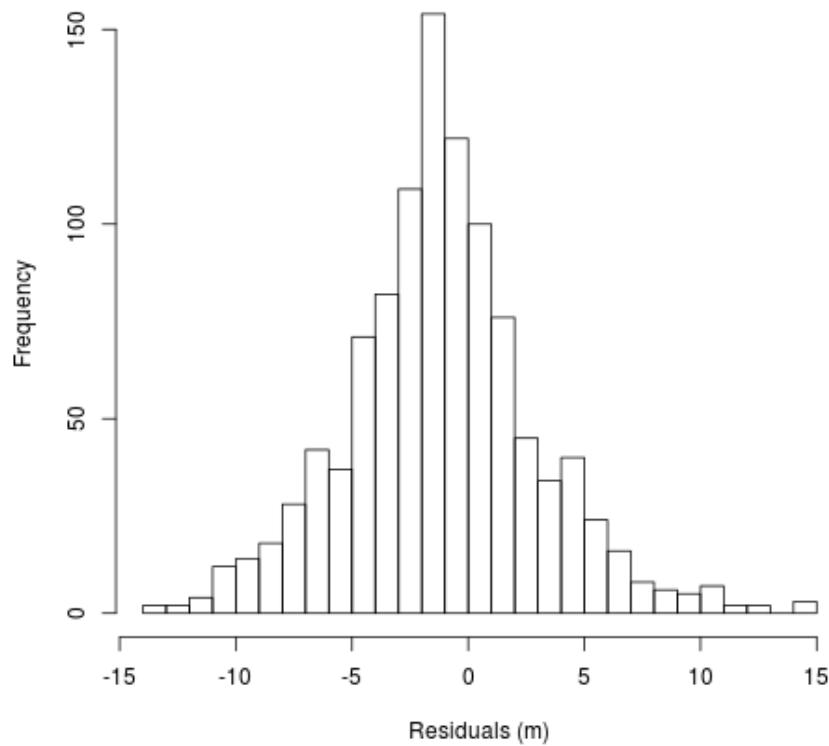


FIGURE 2 – Histogramme des résidus obtenus pour Messenger avec INPOP19a.

rons au chapitre 2. Quand ces méthodes sont utilisées correctement, il arrive souvent que, même lorsqu'un effet améliore légèrement les résidus pour certaines valeurs de ces paramètres, leur intervalle de confiance inclut une compatibilité avec la nullité de cet effet – ce qui se traduit souvent par le fait que l'intervalle de confiance contient 0.

Toutefois, par principe, nous gardons un point de vue agnostique sur le résultat. Il est toujours possible qu'un effet alternatif améliore les résidus de façon inattendue, bien que nous avons de sérieuses raisons d'en douter. En effet, pour notre dernière éphéméride INPOP19a, le  $\chi^2$  observationnel défini par

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_i \frac{(O_i - C_i)^2}{\sigma_{o,i}^2} \quad (7)$$

*Nous reviendrons aux calculs du  $\chi^2$  avec INPOP dans le chapitre 2.*

où  $N$  est le nombre total d'observations,  $O_i$  correspond à l'observation numéro  $i$ ,  $C_i$  à sa simulation par INPOP, et  $\sigma_{o,i}$  est l'incertitude instrumentale de  $O_i$ , est déjà proche de 1. On peut donc difficilement envisager une amélioration spectaculaire des résidus par une découverte éventuelle d'une théorie nouvelle de la gravitation.

### 1.2.2 Critique des tests dans le système solaire

Il existe plusieurs méthodes pour tester la réalité d'un effet physique sur la dynamique planétaire du système solaire. Listons-en quelques unes.

La méthode la plus simple est l'analyse post-ajustement. Elle consiste à chercher l'existence d'un signal dans les résidus après l'ajustement des paramètres de l'éphéméride, et à comparer ce signal résiduel avec ce que prévoit une théorie alternative. C'est de cette manière qu'Einstein a validé sa théorie de la relativité générale en résolvant l'anomalie du périhélie de Mercure. Mais il arrive parfois que les résidus après ajustement ne présentent pas de signal aussi clair – comme les résidus de Mercure que nous avons présentés figure 1. Quand les choses sont ainsi, il arrive que des théoriciens utilisent la dispersion de ces résidus pour borner le maximum de l'amplitude que peut avoir l'effet alternatif qu'ils cherchent alors à contraindre. Nous montrerons dans le chapitre 3 que cette méthode, même si elle peut être utile à titre de travail préliminaire, surestime grandement la force de la contrainte posée sur l'effet alternatif à tester. Dans un cas que nous avons testé (test du graviton massif, chapitre 3 section 3.2), la différence entre une contrainte globale et une contrainte post-ajustement est de plus d'un ordre de grandeur.

Une méthode plus élaborée consiste à inclure l'effet à tester dans la dynamique de l'éphéméride et de contraindre les paramètres de cet effet en même temps que tous les autres à l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton. Cet algorithme indique ce que l'on appelle les erreurs formelles pour les paramètres mis en jeu, et alors la contrainte consiste

à identifier ces erreurs formelles avec l'intervalle de confiance réel des paramètres de la théorie à tester. Cette méthode a des inconvénients. Si l'algorithme de Gauss-Newton est sans doute un bon estimateur de paramètres, il est assez peu efficace pour déterminer les incertitudes des paramètres dans le cas qui nous intéresse. En effet, son domaine de validité requiert des hypothèses fortes comme la gaussianité, la linéarité de la distribution des paramètres à tester, des paramètres peu corrélés ainsi qu'une sensibilité élevée aux observations qui ne fait pas sortir du domaine linéaire. Souvent, ces critères ne sont pas vérifiés pour les effets à peines mesurables ou non mesurables et dont nous cherchons à réfuter ou valider l'existence. Notre équipe l'a déjà démontré pour les paramètres post-Newtoniens  $\beta$  et  $\gamma$  [27; 28].

C'est pourquoi dans cette thèse nous allons proposer des méthodes plus fiables pour déterminer les intervalles de confiance des paramètres qui interviennent dans les théories alternatives que nous voulons tester.

### 1.3 CONTENU DE LA THÈSE

Dans le chapitre 2, les méthodes statistiques que j'ai contribué à développer pour tester un effet physique générique sont exposées. Ces méthodes statistiques s'appliquent dans le cas d'une théorie alternative ou d'un effet physique inconnu mais explicable dans les théories physiques actuelles. Dans la section 2.1, le fonctionnement général de nos éphémérides planétaires est présenté, ainsi qu'une manière générale de poser le problème de test d'une théorie alternative avec notre éphéméride planétaire. Dans la section 2.2, nous faisons une analyse critique de la méthode de Gauss-Newton et de l'analyse post-ajustement pour contraindre des théories ; les possibilités et les limites de ces méthodes sont exposées. Dans la section 2.3, deux solutions présentées sur la forme de critères quantitatifs pour contraindre des théories alternatives sont proposées : la méthode de la vraisemblance associée au  $\chi^2$  observationnel réduit que j'ai développée, et la covariance propagée qui est inspirée des méthodes d'ingénierie spatiale [29], dont j'ai contribué à adapter le formalisme à la dynamique du système solaire. La section 2.4 contient deux applications à ces méthodes : la comparaison entre les deux dernières versions d'INPOP à l'aide de la covariance propagée, et la contrainte des positions possibles d'une éventuelle planète supplémentaire dans le système solaire, notée P9. Ici les deux méthodes sont utilisées et comparées. Nous reportons la documentation complète d'INPOP19a [30], la dernière version d'INPOP, dans l'annexe A. Nous reportons l'article publié dans *Astronomy and Astrophysics* sur la planète P9 [31], dans l'annexe B.

Dans le chapitre 3, nous présentons notre contrainte sur une théorie simple à tester : la suppression Yukawa du potentiel newtonien généralement associée à la théorie du graviton massif. Cette théorie est

simple à tester car elle ne contient qu'un seul paramètre alternatif à contraindre : la masse du graviton, particule associée formellement au champ de Yukawa, ou, ce qui revient au même, sa longueur d'onde de Compton. Dans la section 3.1, après un rapide passage en revue des théories à graviton massif, je présente une phénoménologie possible et testable dans le système solaire : la suppression Yukawa du potentiel newtonien. Dans la section 3.2, une illustration de l'insuffisance de l'analyse post-ajustement est présentée. En utilisant l'éphéméride planétaire INPOP17b, j'ai montré qu'une telle analyse faisait surestimer la force de la contrainte de plus d'un ordre de grandeur. Dans les sections 3.3 et 3.4 j'ai corrigé ce problème en ajustant tous les paramètres en même temps une fois avoir inclus l'accélération additionnelle du graviton massif dans les équations du mouvement d'INPOP. La section 3.3 correspond à la contrainte posée avec l'éphéméride INPOP17b. Nous reproduisons l'article publié dans *Physical Review Letter* [32] dans l'annexe C. La section 3.4 correspond à la contrainte posée avec l'éphéméride INPOP19a. Nous reproduisons l'article publié dans *Physical Review D* [33] dans l'annexe D.

Dans le chapitre 4, nous présentons notre contrainte sur la théorie du dilaton léger qui ne se couple pas universellement avec la matière. Après avoir passé en revue rapidement l'intérêt théorique de tester cette théorie dans la section 4.1, j'expose la phénoménologie du dilaton léger couplé non universellement dans le système solaire dans la section 4.2. Cette phénoménologie dans le système solaire existe déjà dans la littérature de façon dispersée, je propose ici une version unifiée. Ce travail a bénéficié de discussions fructueuses avec Olivier Minazzoli et Aurélien Hees. Dans la section 4.3 nous présentons une interprétation en termes de théorie dilaton de notre contrainte sur le principe d'équivalence que nous avons obtenu en analysant les données de télémétrie laser-Lune [18]. Dans la section 4.4, nous présentons comment la théorie dilaton peut se réduire à trois paramètres lorsque le couplage est linéaire, ou quatre ou six lorsqu'il est quadratique, pour être testé dans le système solaire. La contrainte que j'ai obtenue en utilisant INPOP19a y est présentée.

# 2

## TEST GÉNÉRIQUE D'UN EFFET MESURABLE DANS LE SYSTÈME SOLAIRE AVEC LES ÉPHÉMÉRIDES PLANÉTAIRES INPOP

---

### 2.1 FONCTIONNEMENT GÉNÉRAL DES ÉPHÉMÉRIDES PLANÉTAIRES INPOP

#### 2.1.1 *À quoi sert une éphéméride planétaire ?*

INPOP (Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris) est une éphéméride planétaire développée par l'IMCCE depuis une quinzaine d'années [34]. Elle consiste à modéliser la dynamique des principaux astres du système solaire en s'ajustant à plus d'un siècle de données issues d'observations optiques et de sondes spatiales envoyées dans le système solaire. Son intérêt peut se diviser en deux catégories qu'il faut bien prendre garde à distinguer.

1. La première application des éphémérides est de prédire et décrire dans le passé la position des principaux astres du système solaire avec une très grande précision. Ce premier aspect peut servir pour les missions spatiales comme Gaïa. Afin d'avoir des modèles astrométriques qui requièrent une précision relativiste, la version INPOP10e a été utilisée par Gaïa [35]. Du point de vue de la précision des prédictions, construire une éphéméride peut aussi servir à avoir une vérification du modèle dynamique indépendante d'autres éphémérides déjà existantes. Par exemple, le modèle relativiste du barycentre développé par INPOP [34] a permis aux éphémérides planétaires du JPL de s'améliorer par la suite.
2. La deuxième application des éphémérides, celle qui nous intéresse particulièrement ici, est d'utiliser le système solaire comme laboratoire pour faire de la physique. Les applications sont multiples, elles peuvent couvrir l'étude de la structure interne de la Lune [36], l'aplatissement ou plus généralement la physique du Soleil [28], la physique des astéroïdes [37], la recherche d'une éventuelle planète supplémentaire dans le système solaire [31], ou plus généralement la dynamique du système solaire lointain [38] et bien sûr les tests des théories alternatives à la relativité générale [28].

Les deux aspects sont évidemment liés mais ils ne sont pas confondus. En effet, indépendamment du travail de cette thèse, ces dernières années l'équipe d'INPOP a grandement amélioré le traitement des données de Cassini, sans que l'intention première ne fût de tester des

théories alternatives à la relativité générale ; le premier objectif était l'amélioration globale de l'éphéméride planétaire via une meilleure détermination de l'orbite de Saturne. En soi, augmenter le nombre des données du système solaire est intéressant, mais lorsque nous agissons ainsi nous ne savons pas a priori quelles seront les conséquences sur la physique fondamentale. En revanche, il est tout-à-fait possible d'orienter une mission spatiale en fonction d'objectifs scientifiques précis – c'est évidemment toujours ainsi que les choses se passent. On peut prendre l'exemple de la mission Bepicolombo qui a pour objectif d'étudier la physique de Mercure mais aussi de contraindre son orbite encore plus précisément que son prédecesseur Messenger. On notera également la prédiction d'une dizaine d'alignements entre la sonde, le Soleil et la Terre qui permettront de mesurer précisément les effets relativistes du retard de transmission des signaux électromagnétiques. Mais souvent, en plus de l'investigation ordinaire prévue par la mission, des résultats scientifiques extérieurs aux objectifs de celle-ci sont produits après qu'elle a délivré ses données. Nous pouvons citer le cas de la contrainte du graviton massif dont nous nous traitons au chapitre 3 ; les données Cassini sont déterminantes pour ce test, bien que la mission Cassini n'ait pas été prévue pour cela.

D'un point de vue algorithmique, le premier aspect énuméré (amélioration du modèle dynamique) nécessite un bon *estimateur de paramètre*, alors que le second (test d'effets physiques) nécessite un bon *critère statistique de vraisemblance*. Il est en général impossible d'obtenir les deux en même temps. En effet, nous allons montrer que les estimateurs de paramètres efficaces et peu coûteux en calcul comme l'algorithme de Gauss-Newton sont en général de mauvais algorithmes pour donner des intervalles de confiance réalistes. À l'opposé, les meilleurs algorithmes de tests statistiques sont trop coûteux en calcul pour pouvoir y inclure tous les paramètres de nos éphémérides en même temps. En pratique, pour naviguer entre ces deux exigences contradictoires, nous avons opté pour un algorithme mixte où nous concentrons le critère statistique sur les paramètres qui nous intéressent, et où les autres paramètres sont ajustés par l'estimateur de Gauss-Newton.

Nous commençons par présenter l'éphéméride de référence obtenue par l'estimateur de Gauss-Newton avant de montrer les différentes méthodes statistiques pour tester un effet physique ou une théorie alternative.

### 2.1.2 Modèle dynamique d'INPOP

INPOP est obtenue en résolvant un système d'équations différentielles ordinaires avec condition initiales à J2000<sup>1</sup> : c'est un système de Cauchy-Lipschitz. Le modèle planétaire de référence qui nous in-

---

1. J2000 correspond au 1er janvier 2000 à midi exactement en temps terrestre (TT).

téresse ici comprend la relativité générale poussée au premier ordre post-newtonien. Les équations intégrés numériquement sont les équations d'Einstein–Infeld–Hoffmann–Droste–Lorentz<sup>2</sup>, utilisées depuis longtemps dans les éphémérides planétaires (voir par exemple [44]). Ces équations du mouvement seront retrouvées dans le cadre de la théorie du dilaton léger dans le chapitre 4. À cela s'ajoute le terme d'aplatissement du Soleil dont l'action à ajouter sur l'accélération du corps  $A$  est également bien connue, le potentiel d'interaction entre le Soleil et le corps  $A$  dû à l'aplatissement du Soleil vaut

$$V_{J_{2\odot}} = \frac{Gm_A m_S}{2\|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S\|^3} J_{2\odot} R_S^2 \left[ 3 \left( \frac{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S\|} \right)^2 - 1 \right] \quad (8)$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire normal au plan d'aplatissement du Soleil,  $R_S$  est le rayon du Soleil, et  $J_{2\odot}$  est une constante sans dimension qui mesure l'aplatissement du Soleil. Dans la dernière version d'INPOP, on a  $J_{2\odot} = (2.010 \pm 0.010) \times 10^{-7}$ . Ce terme est important pour l'orbite de Mercure qui y est particulièrement sensible. De nombreux astéroïdes sont également ajoutés à la liste des corps à intégrer. La liste précise dépend de la version des éphémérides. Pour la plus récente, INPOP19a [30; 31; 37; 38], 343 astéroïdes ont été ajoutés, ainsi qu'un anneau d'objets trans-neptuniens. Pour les corps plus légers, seule l'interaction newtonienne a été prise en compte et la correction relativiste a été négligée. Cependant, la correction relativiste a été ajoutée pour les astéroïdes les plus lourds comme Cérès et Vesta. On sait qu'ajouter les corrections relativistes aux astéroïdes ne modifie pas les positions des planètes au delà du seuil de l'observabilité [34], et comme c'est coûteux en temps de calcul nous pouvons nous en passer.

Les équations du mouvement sont intégrées dans une carte cartésienne barycentrique. Pour construire une telle carte, il faut d'abord en choisir une pour laquelle la métrique est celle de Minkowski à l'infini. On sait que dans une telle carte, le barycentre relativiste du système solaire, défini par

$$\mathbf{G} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \sum_A m_A \mathbf{x}_A \left( 1 + \frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}} \right) \quad (9)$$

où

$$\mathcal{E} = \sum_A m_A c^2 \left( 1 + \frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}} \right) \quad (10)$$

varie linéairement avec le temps<sup>3</sup> [45; 46]. Pour peu que l'on redéfinit correctement les conditions initiales à l'aide d'une transformation

2. Ces équations du mouvement ont d'abord été écrites par Lorentz et Droste en 1917 ([39; 40]), pour une traduction en anglais : [41]), puis par Einstein, Infeld et Hoffmann en 1939 [42], ce nom composé de cinq personnalités transcrit mieux l'histoire de la physique que seulement les trois premiers noms [43].

3. Dans le chapitre 4, nous établissons les intégrales premières du mouvement dans la théorie dilaton, pour laquelle la relativité générale est un cas particulier.

de Poincaré qui laisse invariantes les équations du mouvement, on peut fixer  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$  à l'instant initial de telle sorte qu'il reste nul pour tout instant à  $1/c^4$  près. C'est ce qui est fait dans INPOP, ce qui justifie le nom de la carte dans laquelle est intégrée l'équation du mouvement [34].

### 2.1.3 Observations

Seules les quantités observables et leur prédiction relèvent de la science physique. Les équations du mouvement intégrées dans une carte ne sont qu'une vue d'esprit qui nous sert à faciliter les calculs de ces observables. En revanche, les observables sont des grandeurs objectives car elles peuvent se prêter à une mesure expérimentale. Elles sont indépendantes du choix du système de coordonnées.

Les observations sont de trois types : mesures d'angles de visée (VLBI), mesures de durées (télémétrie laser pour la Lune ou radio pour certaines planètes), mesures de fréquences radio (effet Doppler). Pour mesurer les angles, il faut tenir compte de la déviation des rayons lumineux due à la courbure des géodésiques lumières dans l'espace-temps. Pour mesurer des durées et des fréquences, il faut calculer les durées propres éprouvées par les horloges locales. Si l'on prend une carte générique ( $x^\mu$ ) pour représenter  $\mathcal{M}$ , dans laquelle se meut une horloge  $H$  de coordonnées  $x_H^\mu$  dont la trajectoire est paramétrée par sa coordonnée  $t = x^0/c$  et en notant  $v_H^\mu = dx_H^\mu/dt$ , cette durée vaut

$$\Delta\tau_H = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x_H(t))v_H^\mu v_H^\nu} dt. \quad (11)$$

Les quantités représentées peuvent être calculées dans une carte quelconque car le temps propre est un invariant. La modélisation et le calcul précis de ces quantités peut se trouver dans l'ouvrage de référence de Moyer [44]. Dans ce manuscrit, nous nous contenterons de calculer les corrections à apporter dans le cadre des théories alternatives à la relativité générale ou d'autres effets physiques supplémentaires lorsque cela est nécessaire. Les effets des théories alternatives à la relativité générale se font toujours en addition à ce qui est déjà modélisé dans le cadre de la relativité générale pour décrire le système solaire avec INPOP. La modélisation théorique et numérique d'INPOP s'effectue à partir de la documentation de Moyer [44] et est documentée à chaque nouvelle version de l'éphéméride [30].

La totalité des données utilisées dans INPOP19a, la dernière version d'INPOP, sont présentées dans la documentation de l'éphéméride [30] reproduite dans l'annexe A. Nous en faisons un bref résumé ici. Pour sa partie planétaire, INPOP19a contient :

- 64.7% de données télémétriques de sondes spatiales qui orbitent autour des planètes. Ces données contiennent environ 80 mille points qui correspondent à une réduction de la distance du barycentre de la planète à la Terre, calculée à partir de l'orbite de

la sonde détectée par la télémesure radio. La précision de ces données planétaires sont les plus intéressantes pour notre travail. Elles sont de l'ordre du mètre pour les données de Mars (données Mex, MGS, Mars Odyssey), quelques mètres pour Mercure (données de Messenger), Vénus (données de Vex), Saturne (données réduites de Cassini [38]), et quelques dizaines de mètres pour certaines données de Saturne (données Cassini réduites par le JPL) et Jupiter (données de Juno).

- 34.3% de données optiques qui s'étendent sur environ un siècle. L'ancienneté de ces données permet de contraindre les effets à long terme dans le système solaire.
- 0.8% de données d'écho radio direct où une onde radio est réfléchie par la planète elle-même. La précision de ces données est de l'ordre de 1km.
- 0.2% de données VLBI.

Pour sa partie lunaire, nous disposons de cinquante ans de données de télémesure laser-Lune grâce aux réflecteurs posés sur le sol par les missions Apollo. Les plus récentes de ces données ont un écart-type de l'ordre du centimètre.

La grande précision de ces données a déjà prouvé par le passé que le système solaire est un bon laboratoire pour tester des théories alternatives à la relativité générale [18; 27; 28], et nous en montrerons d'autres exemples aux chapitres 3 et 4.

#### 2.1.4 Procédure d'ajustement des paramètres

Lorsque nous produisons une éphéméride, nous ajustons ses paramètres pour minimiser les résidus des différentes observations. Il s'agit d'un algorithme classique dit "des moindres carrés", ou de Gauss-Newton (voir par exemple [47] pour une description détaillée). Pour un jeu d'observations donné, les observations se présentent sous la forme de trois ensembles :

1. Les dates d'observations  $(t_1, \dots, t_n)$ .
2. Les valeurs des observations qui correspondent à ces dates  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ . Si ces observations sont une mesure de direction, alors pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathcal{O}_i \in \mathbb{R}^2$ . Pour les observations de temps de parcours de signaux électromagnétiques,  $\mathcal{O}_i \in \mathbb{R}_+^*$ .
3. La matrice de corrélation de ces observations (ou son inverse, la matrice des poids).

Pour INPOP, les données planétaires les plus précises sont les missions spatiales où l'on mesure le temps de trajet des ondes radio entre une sonde spatiale et une station terrestre. Ces mesures-là sont supposées indépendantes. En fait, d'après le théorème de Gauss-Markov, l'estimateur par les moindres carrés fonctionne, même si les observations ne sont pas indépendantes et ne suivent pas la même loi. Cela est utile

notamment pour les données de Mars. Elles ne sont pas indépendantes car les points sont trop rapprochés. Pour les analyses des chapitres 3 et 4, nous avons dû effectuer une moyenne journalienne des données télémétriques de Mars pour qu'elles soient de même nature que les autres données télémétriques.

La matrice de covariance des données planétaires télémétriques est s'écrit simplement

$$\text{cov}(\mathcal{O}) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \quad (12)$$

et la matrice de poids est  $\mathbf{W} = \text{diag}(\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_n^{-2})$ . Plus généralement, on peut noter  $\mathbf{W} = \mathbf{Cov}(\mathcal{O})^{-1}$  quelque soit le type d'observations contenu dans les données.

L'éphéméride INPOP engendre des trajectoires à partir d'un ensemble de paramètres  $P \in \mathbb{R}^p$ .  $P$  contient les conditions initiales à J2000, ainsi que d'autres paramètres physiques comme l'aplatissement du Soleil. Les équations du mouvement intégrées dans INPOP sont de la forme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; P) \quad (13)$$

où  $\mathbf{X}$  contient les coordonnées cartésiennes en position et vitesse de chacun des astres dont on calcule la trajectoire, ainsi que les angles de rotation de la Terre et de la Lune.  $\mathbf{X}$  contient également la valeur de TT – TDB (temps terrestre moins temps dynamique barycentrique), sachant que le temps coordonné sur lequel les équations sont intégrées est TDB.

À partir de la solution intégrée, on peut simuler les observables, notées  $C_t(P)$ , si nous voulons nous référencer à la date de l'observation, ou  $C_i(P)$  lorsque c'est l'indice de l'observable qui nous intéresse, autrement nous notons  $\mathbf{C}(P) = (C_i(P))_{i \in \text{Observations}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$  étant le nombre total d'observations.

Pour avoir la meilleure éphéméride, nous cherchons à minimiser la norme des résidus

$$\mathbf{R} = \mathcal{O} - \mathbf{C}(P) = (\mathcal{O}_i - C_i(P))_{i \in [1, n]} \quad (14)$$

$\mathbf{R}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Pour définir une norme, la métrique la plus naturelle est la matrice des poids des observations  $\mathbf{W}$ . Cela revient à dire que nous cherchons à minimiser

$$S = {}^t \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{R}. \quad (15)$$

La matrice  $\mathbf{W}$  est toujours symétrique définie positive,  $S$  définit donc bien une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas d'INPOP, lorsque par exemple nous recevons un nouvel ensemble d'observations, nous voulons changer les valeurs des paramètres  $P$  pour diminuer  $S$ . Donnons-nous une valeur des paramètres  $P_0$  et supposons que l'éphéméride en  $P_0$  soit suffisamment réaliste pour que dans un voisinage  $P = P_0 + Q$  suffisamment proche de  $P_0$ , on ait

$$\mathbf{R} = \mathbf{y} + \mathbf{J}_0 Q + O(Q^2) \quad (16)$$

avec  $y = O - C(P_0)$  et  $J_0 = J(P_0)$  la matrice jacobienne de  $y$  évaluée en  $P_0$ . En pratique, les dérivées partielles sont calculées numériquement par différences finies. Supposons que le domaine linéaire soit suffisamment grand pour que l'on puisse avoir  $\|J_0 Q\| > \|y\|$ . Dans ce cas on a  $S = {}^t[y + J_0 Q + O(Q^2)]W[y + J_0 Q + O(Q^2)]$ . Effectuons une variation des paramètres de  $\delta Q$ . On a

$$\begin{aligned} S + \delta S &= {}^t[y + J_0(Q + \delta Q) + O(\delta Q^2) + O(Q^2)] \\ &\quad W[y + J_0(Q + \delta Q) + O(\delta Q^2) + O(Q^2)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$= S + 2 {}^t\delta Q [{}^tJ_0 W y + {}^tJ_0 W J_0 Q] + O(\delta Q^2) + O(Q^2). \quad (18)$$

Pour atteindre le minimum de la somme pondérée il faut que  $\delta S$  soit nul à l'ordre 1 quelque soit  $\delta Q$ , il faut donc que le crochet soit nul. Si  $W$  est une matrice définie positive, qu'il y a plus d'observations que de paramètres, et que les paramètres ne sont pas dégénérés (autrement dit, les colonnes de  $J_0$  sont linéairement indépendantes), alors la matrice  ${}^tJ_0 W J_0$  est inversible.

En effet, la matrice  $J_0$  est formée par les vecteurs colonnes  $-\partial C_i / \partial P$ , et comme  $W$  est définie positive, le nombre qui correspond à la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de  ${}^tJ_0 W J_0$  correspond au produit scalaire  $\langle \partial C_i / \partial P | \partial C_j / \partial P \rangle$  où  $W$  est pris comme métrique du produit scalaire (on pourrait donc même noter  $\langle \partial C_i / \partial P | W | \partial C_j / \partial P \rangle$ ). Comme les  $\partial C_i / \partial P$  sont linéairement indépendants, ils forment une base de l'espace qu'ils engendent. La matrice formée par leurs produits scalaires est une métrique donc une matrice définie positive, donc inversible.

Pour annuler  $S$  à l'ordre 1, il suffit de choisir

$$Q = -({}^tJ_0 W J_0)^{-1} J_0 W y. \quad (19)$$

En itérant, si les hypothèses de départ sont vérifiées empiriquement, l'algorithme converge vers le meilleur estimateur possible pour  $P$ . On en déduit l'incrément des paramètres à effectuer pour passer de l'itération  $i$  à l'itération  $i + 1$  :

$$\delta P = P_{i+1} - P_i = -({}^tJ_i W J_i)^{-1} {}^tJ_i W R_i \quad (20)$$

où chaque terme est évaluée en  $P_i$ . Cette méthode d'ajustement des paramètres est la méthode classique dite des "moindres carrés", ou algorithme de Gauss-Newton, dont on peut trouver une description par exemple dans le cours de traitement du signal de Didier Pelat [47]. L'appellation classique des "moindres carrés" est ambiguë ici, car il existe de nombreuses méthodes statistiques qui fonctionnent par minimisation d'une norme 2 des résidus ou d'une quantité dérivée des résidus, et différentes de l'algorithme de Gauss-Newton. Notamment nous en présentons une dans la section 2.3.1. Nous utilisons donc l'appellation "algorithme de Gauss-Newton" pour désigner cet algorithme d'ajustement.

En admettant que les résidus  $R$  représentent une variable aléatoire dont la distribution est gaussienne, centrée en 0, et de matrice de

covariance  $\mathbf{W}$ , et sous hypothèse de linéarité au voisinage de  $P_0$ , on peut utiliser la relation (20) en remplaçant  $y$  par  $R$  et  $J_0$  par  $J$  pour déduire

$$\mathbf{Cov}P = ({}^t \mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{J})^{-1} \quad (21)$$

Cela découle du théorème suivant.

**THÉORÈME** Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  une variable aléatoire de matrice de covariance  $\mathbf{Cov}X$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  et  $Y = AX \in \mathbb{R}^m$ . Alors on a

$$\mathbf{Cov}Y = A \mathbf{Cov}X {}^t A. \quad (22)$$

*Démonstration.* Composante par composante on a

$$\mathbf{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbf{cov}\left(\sum_k A_{ik} X_k, \sum_\ell A_{j\ell} Y_\ell\right) \quad (23)$$

$$= \sum_{k,\ell} A_{ik} A_{j\ell} \mathbf{cov}(X_k, Y_\ell) \quad (24)$$

$$= \sum_{k,\ell} A_{ik} \mathbf{cov}(X_k, Y_\ell) {}^t A_{\ell j} \quad (25)$$

□

Pour retrouver le résultat sur  $\mathbf{Cov}\delta P$ , il suffit de poser

$$A = -({}^t \mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{J})^{-1} {}^t \mathbf{J} \mathbf{W} \quad (26)$$

et  $X = R$  sachant que  $\mathbf{Cov}R = \mathbf{W}^{-1}$ . Cela nous permet d'établir la matrice de covariance des paramètres issus de la réduction des observations par INPOP.

### 2.1.5 Résumé du fonctionnement d'INPOP

D'un point de vue algorithmique, INPOP fonctionne en plusieurs étapes successives résumées dans le tableau 3. L'étape 4 boucle sur l'étape 1 tant que la convergence n'est pas atteinte. Une fois que nous sommes satisfaits, nous obtenons ce que nous appelons une *solution de référence*. C'est ce qui est publié lorsque nous présentons les éphémérides. Les deux versions des éphémérides utilisées dans notre travail ont été INPOP17a [48; 18] ainsi qu'une petite amélioration INPOP17b [32], et INPOP19a [30; 31; 33]. C'est la méthode classique dite "des moindres carrés" [47] que nous préférons appeler algorithme de Gauss-Newton.

### 2.1.6 Solution de référence et solution testée

Dorénavant nous supposons que la solution de référence a été obtenue selon la méthode qui vient d'être exposée. Nous voulons utiliser le système solaire comme laboratoire pour tester des effets

Étape	fichier d'entrée	programme	fichier de sortie
1	paramètres du modèle	intégrateur numérique	sortie discrète en coordonnées cartésiennes
2	sortie discrète en coordonnées cartésiennes	interpolation de Tchébytchev	sortie interpolable
3	observations réelles ; sortie interpolable	simulations des observables et calcul des résidus	résidus
4	résidus dérivées partielles ; poids	ajustement des paramètres	paramètres du modèle

TABLE 3 – Résumé du fonctionnement d'INPOP

physiques, qu'il s'agisse de phénomènes non encore compris mais qui ne sortent pas de la théorie d'Einstein (comme le modèle intérieur de la Lune [18] ou l'existence d'une planète supplémentaire [31]), ou d'effets dus à une insuffisance hypothétique du cadre théorique de la relativité générale que nous tentons de résoudre en mettant en place une théorie alternative. Comme l'éphéméride de référence reproduit déjà très bien les observations réelles, il est naturel de faire l'hypothèse que tout effet alternatif peut se modéliser par perturbation linéaire de ce qui est modélisé dans l'éphéméride de référence. En général, dans une théorie alternative, toute quantité calculée peut se mettre sous la forme

$$C(t, P, \lambda) = C_r(t, P) + C_a(t, P, \lambda) \quad (27)$$

où  $C_r(t, P)$  est la quantité calculée par le modèle de référence et  $C_a(t, P, \lambda)$  la quantité calculée dans le cadre de l'hypothèse physique alternative à tester.  $\lambda$  représente génériquement le ou les paramètres libres ajoutés par l'hypothèse physique à tester<sup>4</sup>. Ces paramètres peuvent être de nouvelles constantes fondamentales de la physique ou bien représenter des propriétés physiques d'objets dont on cherche à démontrer ou infirmer l'existence. Nous avons toujours  $\|C_r(t, P)\| \gg \|C_a(t, P, \lambda)\|$  (quelle que soit la norme choisie), car globalement les résidus d'INPOP sont déjà comparables aux incertitudes instrumentales, il est donc peu vraisemblable que l'ajout d'un effet diminue drastiquement le résidu à tel point que la simulation d'observable soit beaucoup modifiée. Souvent, il est possible de formuler les hypothèses physiques et définir les paramètres alternatifs de telle sorte

4. Dans quelques cas particuliers il n'y a aucun paramètre physique supplémentaire à ajouter. Par exemple la relativité générale n'ajoute aucun paramètre inconnu par rapport à la théorie de Newton et de l'électromagnétisme. Mais dans les cas que nous avons eus à étudier, il s'est toujours trouvé que des paramètres inconnus apparaissaient.

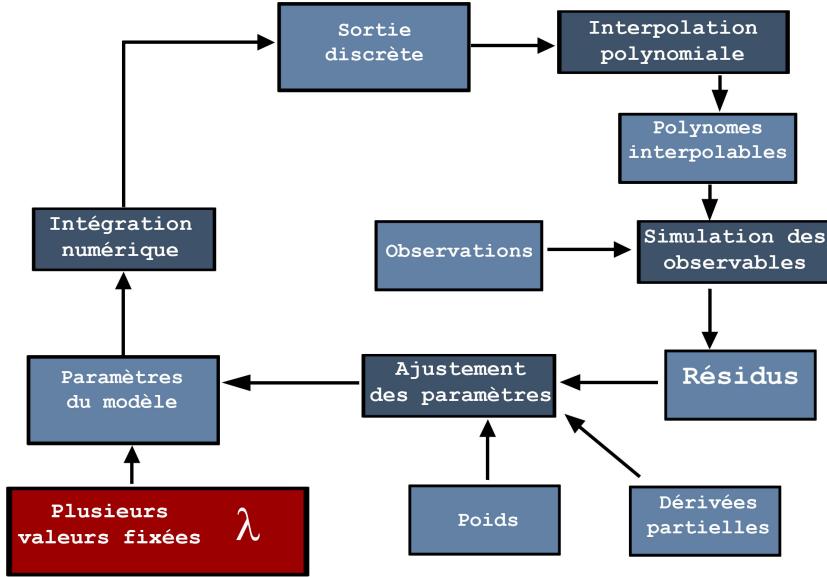


FIGURE 3 – Représentation schématique de la procédure de test d'une théorie générique.

que la dépendance de  $C_a(t, P, \lambda)$  en  $\lambda$  soit linéaire. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas, notamment dans la théorie dilaton où les paramètres fondamentaux à tester apparaissent de façon quadratique.

Notre approche consiste à tirer plusieurs ensembles de paramètres  $\lambda$ . Une fois ces paramètres fixés, pour chaque jeu de paramètre, nous ajustons aux observations tous les autres paramètres  $P$  qui existent dans la solution de référence. L'idée est de permettre à l'éphéméride d'explorer au maximum l'espace des paramètres pour minimiser les résidus, à  $\lambda$  fixé, comme montré sur la figure 3. Avant de justifier positivement l'intérêt cette approche, justifions-la négativement en critiquant d'autres approches souvent proposées dans la littérature.

## 2.2 ANALYSE CRITIQUE DES MÉTHODES DE TESTS

### 2.2.1 Insuffisance de l'analyse post-ajustement

La plupart des théoriciens ne disposent pas d'une éphéméride planétaire complète pour confronter leurs théories à la réalité observationnelle. C'est pourquoi ils proposent souvent une analyse des résidus post-ajustement<sup>5</sup> pour estimer des contraintes sur leurs théories alternatives. Ils utilisent alors les résultats des éphémérides déjà existantes. Ces éphémérides ont déjà ajusté leurs paramètres dynamiques aux observations et leurs auteurs y présentent souvent les résidus, c'est-à-dire

---

5. *Post-fit* en anglais.

la différence entre les simulations d'observations et les observations réelles pour leur meilleure solution, qui est la solution issue du processus d'ajustement décrit plus haut. Ces résidus sont souvent synthétisés par leur écart-type  $\sigma = \sqrt{\langle t(R - \langle R \rangle)(R - \langle R \rangle) \rangle} / \sqrt{n}$  où  $R \in \mathbb{R}^n$  est le résidu et  $n$  est le nombre d'observations.

D'autre part, à partir d'un modèle théorique que l'on peut presque toujours écrire sous forme de perturbation du modèle classique, les théoriciens font des calculs (analytiques ou numériques) de mécanique céleste pour déduire quel peut être l'effet d'une correction hypothétique sur le mouvement des astres puis des observables. Deux cas peuvent se présenter.

- La théorie actuelle a des défauts manifestes. Cela se traduit par un signal dans les résidus dont on peut identifier les fréquences s'il s'agit d'effets à court terme, ou par une dérive des résidus proportionnelle à  $t$  ou un polynôme en  $t$  s'il s'agit d'effets à long terme. De plus, l'ajout de l'effet de la théorie alternative permet de reproduire ce signal ou cette dérive lente.
- L'ajout de l'effet de la théorie alternative ne reproduit pas de fréquence résiduelle ni de dérive lente des résidus.

Lorsque le premier cas se produit, on a de bonnes chances de penser que l'hypothèse théorique est correcte. C'est par exemple de cette façon qu'Einstein a corroboré sa théorie de la relativité générale qui a pu expliquer le déficit de l'avance du périhélie de Mercure prédit par la théorie de Newton par rapport aux observations. Mais ce n'est pas toujours le cas. En effet, il arrive souvent que des fréquences annuelles ou reliées à d'autres périodes orbitales existent de façon résiduelle. Cela est rarement lié à un effet alternatif mais plus souvent à cause de biais observationnels ou plus simplement d'effets physiques non tenus en compte (par exemple les satellites de Saturne ne sont pas intégrés au mouvement pour la détermination de son orbite). Bref, lorsque les résidus présentent un signal, la solution du théoricien consiste à ajuster son effet correctif au signal des résidus pour en déterminer les paramètres libres. Si  $\delta\tilde{C}(\lambda, \omega)$  est la transformée de Fourier de la correction à apporter aux calculs d'observables due à l'effet alternatif, et que  $\tilde{R}(\omega)$  est la transformée de Fourier des résidus, alors pour déterminer la valeur des paramètres de la théorie alternative, il faut les ajuster jusqu'à ce que les deux transformées de Fourier soient les plus proches possibles. Dans le cas d'un effet à long terme, il faut que la théorie alternative puisse reproduire les dérives à long terme qui sont observées dans les résidus. On peut espérer en tirer une première estimation des paramètres pour une éventuelle découverte positive.

Même dans ce cas (que nous n'avons pas rencontré dans cette thèse), il faudrait quand même faire l'ajustement global décrit précédemment en intégrant l'effet ajouté dans l'équation du mouvement de l'éphéméride pour avoir une détermination plus fiable. En effet, le paramètre alternatif peut entrer en corrélation avec les paramètres de

l'éphéméride de référence pendant l'ajustement global aux observations, ce qui peut donner un résultat différent de celui d'une analyse post-ajustement, où l'hypothèse de corrélation nulle entre les paramètres de l'éphéméride et des paramètres de la théorie alternative est implicitement faite. Par exemple, il est bien connu qu'une modification très légère (et bien en deçà des sensibilités des observations) du demi-grand axe d'une orbite peut modifier la fréquence moyenne de son orbite et engendrer ou absorber des effets considérables.

Lorsque le deuxième cas se produit (l'effet supplémentaire se traduit par un signal supplémentaire qui n'est pas présent dans les résidus), c'est encore pire. La plupart des théoriciens utilisent le critère suivant. Ils calculent l'amplitude  $a(\lambda)$  de la correction à apporter au mouvement classique et pour contraindre les paramètres alternatifs, ils posent simplement que

$$|a(\lambda)| \leq \sigma(R) \quad (28)$$

où  $\sigma(R)$  est l'écart-type des résidus. Cette contrainte est erronée. D'abord, elle fait l'hypothèse que tous les résidus sont expliqués par la non prise en compte de l'effet alternatif. Si tel était le cas, on n'observerait dans les résidus uniquement le signal résiduel de l'effet alternatif. De plus cela signifierait que les observations seraient beaucoup trop précises par rapport au modèle.

Il y a d'abord deux contradictions. En effet, cette méthode est utilisée lorsque le signal alternatif n'existe pas dans les résidus, alors qu'elle presuppose que tous les résidus sont expliqués par le signal supplémentaire provoqué par la théorie alternative. Pourtant, on observe empiriquement que les résidus post-ajustements sont à peu près du même ordre que les incertitudes instrumentales, et aucune dérive lente manifeste n'est observée. Cela signifie donc que la première source d'erreur n'est pas la non prise en compte des effets alternatifs, mais l'incertitude intrinsèque des observations due à la limitation de la précision et l'exactitude des instruments de mesure.

La deuxième contradiction est que cette contrainte fait l'hypothèse que le paramètre alternatif n'est absolument pas corrélé aux autres paramètres, ce qui est faux en général. En effet, même s'il y a un effet alternatif dont nous ne tenons pas compte, étant donnée la procédure d'ajustement aux observations, l'éphéméride explore l'espace des paramètres sur un voisinage des paramètres de référence pour minimiser les résidus, quitte à dévier des "vraies" valeurs<sup>6</sup> afin d'absorber le résidu supplémentaire engendré par la nouvelle théorie. Lorsque la théorie alternative est incluse dans les éphémérides avant l'ajustement des paramètres, alors l'ajustement peut absorber une grande partie du signal supplémentaire engendré par l'effet à tester. Ce faisant, les théoriciens sur-estiment largement la force de la contrainte qu'ils posent

---

6. Si l'on considère que la théorie alternative est fausse et que la théorie de référence est vraie, quoi que cela veuille dire.

sur leurs théories alternatives. Nous en montrerons un exemple avec le test du graviton massif dans le chapitre 3.

Cependant, les travaux théoriques sur la contrainte des théories alternatives sans ajustement des autres paramètres en même temps ne doivent pas être rejetés. En effet, ce travail préliminaire permet de donner des indications précieuses sur les effets attendus de telle hypothèse théorique. Même si les contraintes sont en général mal estimées, elles donnent des indications sur ce qu'il est possible de faire avec des éphémérides, quitte à ce que des travaux ultérieurs avec des éphémérides complètes corrigent plus tard la valeur numérique de la contrainte. Nous recommandons donc une approche à la fois libre mais prudente de la production scientifique, chaque contrainte doit être annoncée avec la plus grande prudence lorsque des valeurs numériques sont données. Notamment, dans les analyses post-ajustement, il est recommandé de noter que la force de la *contrainte* est nécessairement surestimée et il faut appeler à ce que des équipes disposant d'éphémérides complètes fassent le test en intégrant l'effet à tester dans les équations du mouvement. Clifford Will a eu la sagesse de faire preuve de cette prudence dans son article sur le graviton massif [49], nous y reviendrons au chapitre 3.

### 2.2.2 Insuffisance de l'algorithme de Gauss-Newton

Dans la littérature des tests de théories alternatives avec les éphémérides, nombreux sont les auteurs qui procèdent en ajoutant le paramètre alternatif dans l'algorithme de Gauss-Newton décrit plus haut. Ils publient ce que l'on appelle les "erreurs formelles" liées à ces paramètres, c'est-à-dire la racine carrée de l'élément diagonal de la matrice de covariance qui correspond au paramètre considéré :

$$\sigma_i = \sqrt{\text{cov} \delta P_{ii}} \quad (29)$$

ce qui correspond à son écart-type. Il y a plusieurs problèmes avec cette approche. Un premier problème est d'ordre mathématique. En effet, l'erreur formelle, ou l'écart-type, ne correspond pas à un intervalle de confiance. On sait que pour une distribution gaussienne à un degré de liberté, il faut prendre 3 fois l'écart-type à gauche et à droite de la moyenne pour être assuré de contenir 99.7% de la distribution. Pour une distribution gaussienne à  $N$  degrés de liberté, en ayant normalisé et diagonalisé la distribution gaussienne, un calcul classique d'intégration<sup>7</sup> montre que la probabilité qu'un point tombe dans une hypersphère à  $N$  dimensions et de rayon  $u$  est

$$P_N(u) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^u e^{-t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1} dt \quad (30)$$

---

7. Voir par exemples les notes de cours de Didier Pelat [47]

où  $\Gamma(t) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dx$ , de telle sorte que le rayon qui contient  $x\%$  de probabilités de la distribution gaussienne à  $N$  dimensions vaut

$$r_N(x) = P_N^{-1}(x). \quad (31)$$

On peut montrer que

$$r_N(x) = \sqrt{\frac{N}{2}}(1 + o(1/\sqrt{N})) \quad (32)$$

quand  $N$  tend vers l'infini. Cela montre que plus le nombre de degrés de liberté est grand, moins l'erreur formelle est proche de l'intervalle de confiance. Cela devient particulièrement vrai pour les éphémérides qui ont de nombreux paramètres libres. Il faut donc faire preuve d'une grande prudence lorsque l'on publie les "erreurs formelles" et ne pas les interpréter hâtivement comme des amplitudes d'intervalles de confiance. Moins encore, par mauvaise habitude, multiplier par trois les erreurs formelles obtenues et croire qu'elles correspondent à un intervalle de confiance de 99.7%. Par exemple, on peut calculer que pour vingt paramètres, le rayon doit être égal à 6.4 pour contenir 99.7% de la distribution. Si on se remet dans des unités physiques, cela veut dire qu'il ne faut non plus prendre 3 fois l'écart-type, mais 6.4, pour atteindre les 99.7% escomptés. Et cela va en s'aggravant lorsque le nombre de paramètres augmente. Cela est dû au fait que le volume de la sphère de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^N$  dépend de  $N$ . Géométriquement, on peut s'en faire une intuition : si on veut être sûr qu'un paramètre a une probabilité élevée d'être dans une zone donnée, il faut supposer le pire pour tous les autres et donc être le plus pessimiste possible. On n'a pas ce problème en dimension 1.

Le deuxième problème est que souvent, lorsque l'on considère une théorie alternative, les hypothèses d'application de la méthode de Gauss-Newton sont certes suffisamment vérifiées pour que l'estimateur soit bon, mais pas suffisamment pour que les erreurs formelles soient réalistes. C'est d'autant plus vrai pour les théories alternatives dont on ne connaît pas a priori la sensibilité des observations. En effet, notre équipe a montré depuis 2014 que lorsque l'on fait une analyse plus globale en ne supposant pas que les hypothèses de linéarité et de gaussianité sont valides, on trouve des distributions au meilleur des cas différentes de ce que donne l'algorithme de Gauss-Newton [28], et au pire des cas, ni la linéarité ni la gaussianité ne sont vérifiées [27].

Les hypothèses de l'algorithme de Gauss-Newton ont une exigence double et contradictoire, au sens où les deux exigences sont opposées entre elles. En effet, pour pouvoir avoir une bonne approximation de  $\partial C / \partial P_i$  par différence finie où cette fois on a intégré  $\lambda$  dans  $P$ , il faut que la différence finie des paramètres, nécessaire pour calculer la variation de la quantité à calculer, soit suffisamment grande pour altérer significativement les résidus, mais aussi qu'elle soit suffisamment petite pour rester dans le domaine de linéarité. L'existence d'un

tel  $\lambda$  est conditionnée par la précision des observations. Et en général, pour des effets hypothétiques à la limite du mesurable, rien n'assure l'existence d'un tel domaine. Au contraire, nous constatons souvent que pour les théories alternatives à la relativité générale, ce domaine n'existe pas dès lors que l'on utilise d'autres critères statistiques plus généraux (voir encore [27; 28]).

Le problème est qu'il est presque toujours possible de mettre en place numériquement un algorithme de Gauss-Newton avec une éphéméride donnée. Un ordinateur répondra aux ordres de son utilisateur et lui donnera des incertitudes formelles qui valent ce qu'elles valent. Mais rien n'assure que les incertitudes formelles produites par l'algorithme correspondent à des intervalles de confiance pour les paramètres – même si on les multiplie par le facteur adéquat pour les faire correspondre formellement aux quantiles associés à la gaussienne à  $N$  dimensions. En fait, l'algorithme de Gauss-Newton donne de bons résultats pour les paramètres bien connus, y compris pour les erreurs formelles – comme par exemple la masse du Soleil ou le rapport des masses de la Terre et la Lune. En effet, quand le paramètre est bien connu, les observations réelles sont sensibles à une modification de ces paramètres, et le calcul précis des dérivées partielles est possible et les hypothèses de linéarité sont bien vérifiées, de telle sorte que l'incertitude formelle donnée dans l'équation (21) est une bonne approximation. Toutefois, une analyse plus poussée du même type que celles présentées dans la section 2.3 serait nécessaire si l'objectif était de connaître les incertitudes précises sur chaque paramètre, même bien connu. Mais pour les paramètres mal connus dont on ignore la pertinence physique (ce qui est le cas des paramètres des théories alternatives), même si l'algorithme donne la valeur qui minimise les résidus, l'erreur formelle fournie est souvent mauvaise.

Pour résumer, on peut dire que l'algorithme de Gauss-Newton est souvent un bon estimateur de paramètres, mais pour tester les théories alternatives il donne rarement les bons intervalles de confiance. C'est problématique car c'est souvent cela que l'on recherche. C'est pourquoi il faut être extrêmement prudent lorsque l'on veut donner une interprétation physique en termes d'incertitudes à partir des erreurs formelles données par un algorithme de Gauss-Newton. Tout au long de notre travail, nous nous sommes efforcés de porter le plus grand soin et la plus grande prudence possibles à la production des intervalles d'incertitudes des paramètres des hypothèses testées.

## 2.3 CRITÈRES QUANTITATIFS POUR TESTER UNE THÉORIE

Deux méthodes de tests de théorie sont présentées. La méthode de la vraisemblance associée au  $\chi^2$  observationnel réduit, que j'ai développée, permet de donner un critère quantitatif choisi arbitrairement par l'utilisateur pour rejeter ou valider une théorie alternative.

La covariance propagée a été inspirée par les méthodes d'ingénierie spatiale et j'ai contribué à adapter le formalisme de cette méthode à la dynamique du système solaire.

### 2.3.1 Première solution proposée : vraisemblance associée au $\chi^2$ observationnel réduit

Nous montrons comment calculer la vraisemblance d'une théorie pour laquelle nous avons identifié quelles observables étaient sensibles. Il aurait été possible de mesurer la fiabilité d'une théorie alternative en prenant le  $\chi^2$  observationnel global, mais l'intérêt de réduire le  $\chi^2$  aux observations sensibles est qu'il est plus rapide à calculer, et que l'on garde une visibilité sur les observables qui sont dégradées ou améliorées par une nouvelle théorie.

Dans les précédentes publications d'INPOP, d'autres méthodes plus empiriques étaient utilisées pour produire des intervalles de confiance pour tester des effets physiques, souvent basées sur la connaissance empirique de la précision des résidus et un seuil de dégradation de ceux-ci à ne pas dépasser [27; 28; 50]. Avec cette méthode nous disposons d'un critère plus facile à interpréter statistiquement.

#### 2.3.1.1 Découpage du $\chi^2$

Définissons le  $\chi^2$  observationnel :

$$\chi^2(P, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \Omega} \frac{(\mathcal{O}(t_i) - C(t_i, P, \lambda))^2}{\sigma_{o,i}^2} \quad (33)$$

où  $\Omega$  désigne l'ensemble des observations,  $n = \text{card}(\Omega)$  (le nombre total d'observations),  $P$  représente les paramètres d'INPOP19a,  $\mathcal{O}(t_i)$  l'observation effectuée à la date  $t_i$ ,  $\lambda$  les paramètres de la théorie alternative, et  $C(t_i, P, \lambda)$  la simulation de l'observable à partir de la théorie à tester. En considérant que les observations réelles sont des variables aléatoires indépendantes,  $X = n\chi^2$  suit une loi de  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté. On sait que d'après le théorème central limite, quand  $n$  tend vers l'infini, la distribution de

$$z = \sqrt{\frac{n}{2}}(\chi^2 - 1) \quad (34)$$

converge vers  $\mathcal{N}(m = 0, \sigma = 1)$  où  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  est la loi normale de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ . Ce théorème nous permet de tester la viabilité d'une solution donnée, mais on peut faire encore plus simple lorsque l'on se compare à une solution de référence et que seules quelques missions sont sensibles aux variations des paramètres. En effet, on constate que seules les données de télémestrie récentes sur les missions planétaires sont sensibles aux variations des paramètres des théories alternatives testées ici (nous ferons une analyse au cas par cas

dans les chapitres suivants). Nous voudrions donc nous concentrer sur les variations des missions : pour Mercure : Messenger ; pour Vénus : Vex ; pour Mars : Odyssey, MGS, Mex ; pour Saturne : Cassini ; pour Jupiter : Juno. Et ne pas considérer toutes les autres données, sans oublier qu'elles ont été utilisées pour ajuster les paramètres. Notamment, les anciennes données, bien que moins précises, sont utiles pour contraindre les effets à long terme. Nous savons aussi que  $\chi_r^2$  pour la solution de référence utilisée ici (INPOP19a) est très proche de 1 : nous avons  $\chi_r^2 = 1.003648356$ . Comme les incertitudes observationnelles  $\sigma_{o,i}$  délivrées par les observateurs sont elles-mêmes soumises à des incertitudes de l'ordre de 10% voire plus (nous apprenons parfois après coup que telle incertitude a mal été estimée et il faut la réadapter), il n'est pas absurde de poser que les dispersions obstinées par la solution de référence pour une mission donnée  $\Omega_j \in \Omega$  sont égales aux incertitudes observationnelles, à savoir nous pouvons poser que

$$\sigma_{r,j}^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in \Omega_j} (\mathcal{O}(t_i) - C(t_i, P_r))^2 = \sigma_{o,j}^2 \quad (35)$$

avec  $n_j = \text{card}(\Omega_j)$  (le nombre d'observations de la mission  $j$ ), sans perdre en généralité. Par la suite, il faudra bien prendre garde à ce que le calcul des  $\chi^2$  des solutions testées, rapportées à ces incertitudes de référence, se fasse sur exactement le même ensemble d'observations que celles utilisées pour produire la solution de référence. Cette opération consiste en fait à renormaliser le  $\chi^2$  de la solution de référence et de poser  $\chi_r^2 = 1$ . Comme chaque mission donnée a un  $\sigma_{o,j}$  constant<sup>8</sup>, nous pouvons récrire  $\chi^2$  ainsi :

$$\chi^2(P, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{\Omega_j \in \Omega} \sum_{i \in \Omega_j} \frac{(\mathcal{O}(t_j) - C(t_j, P, \lambda))^2}{\sigma_{o,j}^2} = \frac{1}{n} \sum_{\Omega_j \in \Omega} n_j \frac{\sigma_j^2(P, \lambda)}{\sigma_{o,j}^2} \quad (36)$$

où  $n_j = \text{card}\Omega_j$  est le nombre d'observations du groupe d'observations  $\Omega_j$ . À présent, les données sensibles énumérées si dessus seront dénotée par une tilde (ex :  $\tilde{\sigma}_j^2$ ) et les autres par une barre (ex :  $\bar{\sigma}_j^2$ ). Nous notons  $\bigcup_j \tilde{\Omega}_j = \tilde{\Omega}$  l'ensemble de ces observations sensibles et

---

8. La constance de  $\sigma_{o,j}$  est une approximation faite par l'algorithme d'ajustement qui prend la moyenne des incertitudes instrumentales de chaque point pour un groupe d'observations.

$\bigcup_j \bar{\Omega}_j = \bar{\Omega}$  les autres observations non sensibles. De là, en décomposant sur ces deux ensembles et en développant  $1 = \chi_r^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \chi^2 - 1 &= \frac{1}{n} \left[ \tilde{n} \left( \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda)}{\tilde{\sigma}_{r,i}^2} \right) + \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda)}{\tilde{\sigma}_{r,j}^2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{n} \left( \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_{r,j}^2}{\tilde{\sigma}_{r,i}^2} + \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_{r,j}^2}{\tilde{\sigma}_{r,j}^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left[ \tilde{n} \left( \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda)}{\tilde{\sigma}_{r,i}^2} - \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_{r,j}^2}{\tilde{\sigma}_{r,i}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda)}{\tilde{\sigma}_{r,j}^2} - \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_{r,j}^2}{\tilde{\sigma}_{r,j}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

où  $\tilde{n}$  est le nombre d'observations sensibles, et  $\bar{n}$  est le nombre d'observations non sensibles. Examinons chacun des termes. Dans la première parenthèse, on peut poser

$$\tilde{\chi}^2(P, \lambda) = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{\bar{\Omega}_j \in \bar{\Omega}} \tilde{n}_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda)}{\tilde{\sigma}_{r,i}^2} \quad (38)$$

Il apparaît que le deuxième terme vaut 1. Dans la deuxième parenthèse, comme nous avons supposé que les données n'étaient pas ou peu sensibles aux variations des théories alternatives, nous avons  $\tilde{\sigma}_j^2(P, \lambda) \approx \tilde{\sigma}_{r,j}^2$ . Ainsi la deuxième parenthèse est nulle. Nous obtenons

$$\chi^2(P, \lambda) - 1 = \frac{\tilde{n}}{n} (\tilde{\chi}^2(P, \lambda) - 1) \quad (39)$$

De là, il suit que

$$\tilde{z}(P, \lambda) = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{2}} (\tilde{\chi}^2(P, \lambda) - 1) \xrightarrow[\tilde{n} \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1) \quad (40)$$

Nous verrons que cette définition nous facilitera les tests de viabilité des théories alternatives.

### 2.3.1.2 Affaiblissement des hypothèses

Parfois il peut arriver que les procédures d'ajustement impliquent que  $\chi_r^2 \neq 1$ . Dans ce cas il faudra affaiblir l'hypothèse sous-jacente. Nous allons voir que cela ne gêne pas trop le calcul.

En effet, dans le développement d'INPOP, afin de tenir compte des observations anciennes peu nombreuses dont les incertitudes sont mal connues, mais dont il faut tenir compte pour avoir une bonne détermination des effets à long terme, certains poids peuvent ne pas correspondre aux incertitudes instrumentales. Un  $\chi^2$  différent de 1

peut persister. Ceci dit, il n'en demeure pas moins que les termes des observations non sensibles ne seront pas modifiés, il suffit donc de remplacer l'équation (40) par celle-ci

$$\chi^2(P, \lambda) - \chi_r^2 = \frac{\tilde{n}}{n} (\tilde{\chi}^2(P, \lambda) - 1) \quad (41)$$

puisque nous savons que ce n'est pas sur les observations précises que ces changements de poids sont effectués. Quand bien même ce serait le cas, nous aurions tout simplement

$$\chi^2(P, \lambda) - \chi_r^2 = \frac{\tilde{n}}{n} (\tilde{\chi}^2(P, \lambda) - \tilde{\chi}_r^2) \quad (42)$$

où  $\tilde{\chi}_r^2$  est calculé sur les observations sensibles pour la solution de référence. Cette différence de  $\chi^2$  suit aussi une loi de  $\chi^2$  qui converge vers une loi normale. Les mêmes tests sont donc en principe possibles. Nous avons donné le cadre de travail dans le cas où il faudrait affaiblir ces hypothèses. Cependant, on montre que dans le cas d'INPOP19a, on peut rester sur la première formulation la plus simple et garder l'hypothèse que  $\sigma_{o,i} = \sigma_{r,i}$ . En effet, on montre que si les  $\sigma_{o,i}$  varient, on a

$$\delta\tilde{\chi}_r^2 = \langle \nabla_{\sigma_o} \tilde{\chi}_r^2 | \delta\sigma_o \rangle + O(\delta\sigma_o^2) = -2\frac{1}{n} \sum n_i \frac{\sigma_{r,i}^2}{\sigma_{o,i}^3} \delta\sigma_{o,i} + O(\delta\sigma_o^2) \quad (43)$$

où  $\sigma_o = (\sigma_{o,1}, \dots, \sigma_{o,n})$ . Il suffit de prendre

$$\delta\sigma_o = \frac{\nabla_{\sigma_o} \tilde{\chi}_r^2}{\|\nabla_{\sigma_o} \tilde{\chi}_r^2\|^2} (1 - \tilde{\chi}_r^2) \quad (44)$$

pour induire que le nouveau  $\tilde{\chi}_r^2$  soit égal à 1. Cela induit pour chaque composante :

$$\delta \ln \sigma_{o,i} = (\tilde{\chi}_r^2 - 1) \frac{n_i \sigma_i^2 / \sigma_{o,i}^4}{2 \sum n_j^2 \sigma_j^4 / \sigma_{o,j}^6} \quad (45)$$

En ordre de grandeur, sachant que l'on a  $\tilde{\chi}_r^2 - 1 \approx 0.003$  et  $\sigma_i / \sigma_{o,i} \approx 1$ ,

$$d \ln \sigma_{o,i} \approx \frac{\tilde{\chi}^2 - 1}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{n_j \sigma_{o,j}^2}{n_i \sigma_{o,i}^2}} < \tilde{\chi}^2 - 1 \approx 0.3\% \quad (46)$$

ce qui signifie qu'il suffit de faire varier les  $\sigma_{o,i}$  d'au plus 0.3% pour avoir exactement  $\tilde{\chi}_r^2 = 1$ . Or aucune incertitude instrumentale n'est connue avec une telle précision. Nous pouvons donc poser  $\tilde{\chi}_r^2 = 1$  sans danger.

### 2.3.1.3 Test générique d'une solution

Définissons la vraisemblance d'une solution testée :

$$L(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tilde{\chi}(\lambda)} e^{-x^2/2} dx \quad (47)$$

En fait, on a  $L(\lambda) = 1 - Ex(\lambda)$  où

$$Ex(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tilde{z}(\lambda)} e^{-x^2/2} dx \quad (48)$$

peut s'interpréter comme la probabilité d'exclusion de la solution testée par rapport à la solution de référence – il s'agit donc d'une probabilité conditionnée par l'éphéméride planétaire à partir de laquelle elle est calculée et donc conditionnée par notre connaissance du système solaire. En effet, si  $Ex(\lambda)$  est proche de 0, cela signifie que  $\tilde{z}(\lambda)$  n'a pas encore atteint le pic de sa distribution gaussienne (de plusieurs fois l'écart-type), parce que les résidus sont très faibles par rapport à la solution de référence. En effet, dans ce cas on a  $\tilde{\chi}^2(\lambda) < \tilde{\chi}_r^2 = 1$  de façon suffisamment significative pour que  $\tilde{z}(\lambda) < m - 3\sigma = -2$  (si l'on veut prendre le critère de  $3\sigma$ , d'autres critères sont possibles). Si  $Ex(\lambda)$  est proche de 1, cela signifie que  $\tilde{z}(\lambda)$  a dépassé le pic de sa distribution gaussienne, de plusieurs fois l'écart-type, c'est-à-dire que les résidus ont une taille significativement plus grande que ceux de la solution de référence – autrement dit, les résidus sont suffisamment dégradés pour que  $\tilde{z}(\lambda) > m + 3\sigma = 2$  (si l'on prend le critère de  $3\sigma$ ), et la solution peut être exclue. Lorsque  $L = Ex = 1/2$ , cela signifie que la solution testée a autant de chance d'être moins bonne ou meilleure que la solution de référence. On calcule que pour la solution de référence elle-même, on a  $\tilde{z}_r = 0$  et donc  $Ex = L = 1/2$ . Cela montre que nous avons bien construit notre critère statistique de façon "agnostique", au sens où nous ne donnons aucun *a priori* positif ou négatif sur les solutions testées ni sur la solution de référence.

Ainsi, le critère de viabilité se construit comme suit : si une solution testée reproduit la même vraisemblance que la solution de référence, alors on ne peut pas affirmer qu'elle est plus ou moins vraisemblable, elle a autant de chances d'être meilleure que d'être pire. Si  $L < 1/2$  la solution a plus de chances d'être mauvaise et si  $L > 1/2$  elle a plus de chances d'être meilleure – au sens où elle reproduit mieux les observations que la solution de référence, puisque les résidus sont plus faibles (en prenant les poids observationnels comme métrique). Pour choisir un critère objectif et déterminer des zones d'acceptabilité nous pouvons raisonner ainsi. Si  $L \leq 0.003$  vela ceut dire que nous sommes en dehors de la zone centrée sur la gaussienne qui contient 99.7% de la distribution. Nous pouvons alors affirmer à 99.7% que la solution testée est significativement plus mauvaise que la solution de référence. De même,  $L \geq 0.997$  impliquerait que la solution testée serait significativement meilleure que la solution de référence avec une certitude de 99.7%. Ce cas est peu probable car nous savons déjà que les résidus obtenus sont de l'ordre de l'incertitude instrumentale. Au niveau de précision atteint dans le système solaire, au mieux nous pouvons inférer des modèles un peu meilleurs que le modèle actuel mais certainement pas avec une certitude de 99.7%. En revanche nous pouvons exclure les solutions dont les observations modélisées

entrent en contradiction avec les observations réelles avec une certitude décidée arbitrairement à l'avance (par exemple 99.7%).

#### 2.3.1.4 *Extension à plusieurs paramètres : algorithme de rejet*

S'il y a un seul paramètre comme la masse hypothétique du graviton que l'on traitera chapitre 3, ou deux paramètres spatiaux comme dans la contrainte sur la possible position de P9 que l'on traite section 2.4.2, il suffit de tracer des cartes de vraisemblances à 1 ou 2 paramètres pour déterminer les zones de viabilités en fonction d'un critère souhaité. Mais dans le cas où il y a au moins trois paramètres, tracer des cartes devient impossible. En effet, faire une grille de valeur demande beaucoup plus de ressources que nous n'en disposons : pour avoir une grille de  $n$  valeurs pour chaque paramètre, il faudrait calculer  $n^3$  paramètres –  $n$  est élevé à la puissance est 3 dans le cas le plus optimiste où il n'y a que trois paramètres à contraindre. Si  $n = 100$  (exigence assez faible), cela demanderait un million de tirages, sachant que chaque éphéméride a besoin de plus d'une heure pour se construire et s'ajuster aux observations par itérations successives (voir figure 3), il faudrait des moyens de calculs considérables dont nous ne disposons pas pour aboutir à une faible résolution. C'est pourquoi il est plus intéressant de procéder par sélection aléatoire des paramètres avec des algorithmes de type Monte-Carlo. Pour un jeu de paramètres sélectionnés, la procédure est similaire. Ce jeu de paramètres, par exemple  $\lambda = (a, b, c)$  reste fixé pendant que l'algorithme ajuste les autres paramètres de l'éphéméride<sup>9</sup> aux observations selon ce qui a été exposé plus haut, et on calcule sa vraisemblance  $L(\lambda)$ . Enfin, chaque solution est sélectionnée ou non avec une probabilité de sélection égale à  $1 - L(\lambda)$ . D'un point de vue technique, pour chaque éphéméride nous tirons aléatoirement un nombre réel  $r$  entre 0 et 1. Si  $r > 1 - L(\lambda)$ , nous sélectionnons l'éphéméride. Si  $r < 1 - L(\lambda)$ , nous la rejetons. Pour moyenner les fluctuations statistiques, nous répétons 1000 fois cette opération. Il s'agit donc d'un algorithme de rejet avec remise. Les jeux de paramètres qui auront survécu au rejet constituent un échantillon statistique représentatif de la distribution que nous cherchons à déterminer. De là, il suffit de tracer l'histogramme des populations qui ont survécu à l'algorithme de rejet avec remise pour chaque paramètre afin de visualiser la distribution finale des paramètres. En elles-mêmes, ces distributions constituent des contraintes sur les paramètres. On obtient l'intervalle de confiance à  $x\%$  de certitude d'un paramètre testé en déterminant le quantile qui contient  $x\%$  de la distribution finale du paramètre donné. Cette méthode sera utilisée au chapitre 4.

Une difficulté de cette méthode est d'estimer le coût en ressources numériques. À nombre égal de tirages aléatoires de jeux de paramètres,

---

9. Ceux qui interviennent dans l'éphéméride de référence.

plus il y a de paramètres, moins il risque d'y avoir de survivants à l'algorithme de rejet. En effet, chaque paramètre contribue à faire baisser la vraisemblance en raison de ce que son effet dévie l'éphéméride de la solution de référence. Considérons le cas où  $\lambda$  suit une distribution gaussienne normalisée (chaque  $\sigma$  vaut 1) centrée en 0 à  $p$  paramètres. Considérons que l'on tire aléatoirement  $n$  jeux de  $p$  paramètres selon une distribution uniforme centrée en 0. Considérons que la distribution uniforme initiale a une largeur de  $y$  (sous-entendu  $y$  fois  $\sigma$ ) et est centrée en 0. Nous faisons fonctionner INPOP, puis nous calculons la vraisemblance, et nous supposons qu'elle suit la loi normale décrite plus haut. Alors, selon l'algorithme de rejet, un jeu de paramètres  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  aura pour probabilité d'être retenu

$$L(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{p(0)} = e^{-\frac{\|\lambda\|_2^2}{2}} = \prod_{k=1}^p e^{-\frac{\lambda_k^2}{2}} \quad (49)$$

La probabilité moyenne de retenir un paramètre vaut

$$\langle L(\lambda) \rangle = \left( \frac{\int_{-y}^y e^{-x^2/2} dx}{2y} \right)^p = q^p \quad (50)$$

où  $q$  est la fraction entre parenthèses. Le nombre total moyen de jeux de paramètres retenus vaut  $nq^p$ . Le nombre de jeux de paramètres retenus diminue donc en raison géométrique du nombre de paramètres à tester alors qu'il n'augmente qu'en raison linéaire du nombre de paramètres tirés initialement. Nous verrons que cela nous posera des limites dans le cas du dilaton (chapitre 4).

### 2.3.2 Deuxième solution proposée : propagation de la covariance

Étant donnée la covariance des paramètres d'INPOP déduite des observations, nous voudrions connaître, à chaque instant, la matrice de covariance de l'orbite. Usuellement, ces méthodes sont utilisées pour propager les incertitudes des orbites des sondes spatiales, les éphémérides planétaires étant connues. Nous nous sommes inspirés des méthodes d'ingénierie spatiale [29] pour les appliquer aux éphémérides planétaires. J'ai contribué à adapter le formalisme de cette méthode à la dynamique du système solaire. Nous avons utilisé cette méthode pour comparer les deux dernières version d'INPOP (voir [30] ou l'annexe A), ainsi que pour contraindre la possible position d'une éventuelle planète P9 dans le système solaire (voir [31] ou l'annexe B).

Rappelons que l'orbite est la solution de l'équation

$$\frac{dX}{dt} = F(X; P) \quad (51)$$

La notation  $F(X; P)$  signifie que la dépendance de  $F$  en  $X$  et en  $P$  n'est pas de même nature. En effet on ne peut pas calculer la dérivée

partielle de  $F$  par rapport à  $X$  à  $P$  constant car  $P$  contient aussi, entre autres, les conditions initiales, dont la variation induirait un changement de  $X$ . Pour pouvoir dériver  $F$  par rapport à  $X$  il faudra donc ne laisser constants que les paramètres qui ne contiennent pas les conditions initiales. En revanche on peut dériver partiellement  $F$  par rapport à  $P$ , ce qui donnerait les équations aux variations. Ici les dérivées partielles sont calculées numériquement. Nous allons nous intéresser directement au flot, c'est-à-dire à la solution du système différentiel exprimée comme fonction de  $P$

$$X(t) = \phi_t(P) \quad (52)$$

Si nous considérons que les fluctuations de  $P$  sont dans un domaine linéaire de variation du flot, nous avons

$$\phi_t(P + \delta P) = \phi_t(P) + d\phi_t(P)\delta P + O(\|\delta P\|^2) \quad (53)$$

Notons  $J_\phi(t)$  la matrice jacobienne représentative de la différentielle  $d\phi_t(P)$ . Les fluctuations de la solution sont données par le deuxième terme du membre de droite, si bien qu'en utilisant l'équation (22) nous obtenons la matrice de covariance de l'orbite elle-même à chaque instant

$$\text{Cov}X(t) = J_\phi(t) \text{Cov}P {}^tJ_\phi(t) \quad (54)$$

Notons que si  $X(t) \in \mathbb{R}^q$ , comme  $R \in \mathbb{R}^p$ , nous avons  $\text{Cov}X(t) \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $\text{Cov}P \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ ,  $J_\phi(t) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tJ_\phi(t) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . INPOP calcule  $J_\phi(t)$  numériquement selon la formule suivante

$$(J_\phi(t))_{ij} = \frac{\phi_t^i(P_1, \dots, P_j + \delta_j, \dots, P_p) - \phi_t^i(P_1, \dots, P_j - \delta_j, \dots, P_p)}{2\delta_j} \quad (55)$$

Le calcul des coefficients de la matrice  $J_\phi(t)$  nécessite donc d'intégrer numériquement l'éphéméride deux fois le nombre de paramètres. Pour avoir leurs valeurs à toute date  $t$  il faudra procéder à l'interpolation de Tchebytchev, ce qu'INPOP peut aussi faire. Avec une telle méthode, on peut par exemple propager l'incertitude d'une trajectoire dans le futur, ce qui est très pratique pour la modélisation de trajectoire de satellites ou d'astéroïdes et la propagation future de son incertitude. Ici nous appliquons cette méthode aux trajectoires des planètes.

En fait on peut calculer la matrice de covariance de n'importe quelle grandeur dynamique à tout instant. En effet, si l'on se donne une fonction dépendant des variables dynamiques  $\Theta(X, t; P)$  alors à l'instant  $t$ , on a

$$\text{cov}\Theta = J_\Theta(t) \text{Cov}P {}^tJ_\Theta(t) \quad (56)$$

où  $J_\Theta(t)$  est la matrice jacobienne de  $\Theta$  prise comme une fonction ne dépendant que des conditions initiales et des paramètres du modèle, tous inclus dans  $P$ , et éventuellement de l'instant  $t$ . Pour calculer

ceci analytiquement, il faudrait considérer  $\Theta$  comme une fonction dépendant explicitement de  $P$  et  $X$ , on aurait explicitement

$$J_\Theta(t)[i, j] = \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial P_j} \right)_{X=cst} + \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial P_j} \left( \frac{\partial \Theta_i}{\partial X_k} \right)_{P=cst} \quad (57)$$

le tout évalué à l'instant  $t$ . Mais en calcul numérique, on considère  $\Theta$  seulement comme une fonction des paramètres  $P$  (qui contiennent les conditions initiales), et de l'instant considéré, cela donne tout simplement

$$J_\Theta[i, j] = \frac{\Theta_i(P_1, \dots, P_j + \delta_j, \dots, P_p, t) - \Theta_i(P_1, \dots, P_j - \delta_j, \dots, P_p, t)}{2\delta_j} \quad (58)$$

Par exemple on peut prendre la simulation des observations de Cassini  $C : (P, t) \mapsto C(P, t)$  comme variable dynamique et appliquer cette formule. Comme  $C(P, t) \in \mathbb{R}$  on a tout simplement

$$\text{Var}(C(P, t)) = J_C(t) \text{Cov}^T J_C(t) \quad (59)$$

Nous n'avons pas encore réussi à déduire de cette technique un critère quantitatif univoque comme dans la section précédente. Nous pouvons en revanche tracer ces quantités propagées comme test complémentaire et vérifier leur cohérence avec le test précédent.

Par exemple lorsqu'il s'agit de comparer des éphémérides on peut se placer en référentiel dit RTN géocentrique (RTN pour Radial-Tangential-Normal). Pour tout corps  $A$ , notons  $\mathbf{x}_A$  son repréage cartésien barycentrique. D'abord nous construisons une base orthonormée adaptée à chaque planète  $A$  :

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}|}, \quad (60)$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{u}_A \times \dot{\mathbf{x}}_A}{|\mathbf{u}_A \times \dot{\mathbf{x}}_A|}, \quad (61)$$

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{u}_A \times \mathbf{v}_A \quad (62)$$

où  $BTL$  représente le barycentre Terre-Lune et  $\times$  le produit vectoriel. Plus rigoureusement, nous devrions donc appeler ce référentiel "RTN barycentre Terre-Lune-centrique" mais nous pensons qu'aucune confusion n'est possible ici. Ensuite pour chaque corps nous construisons les quantités  $R_A, T_A, N_A$  :

$$\begin{aligned} R_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}) \cdot \mathbf{u}_A \\ T_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}) \cdot \mathbf{v}_A \\ N_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}) \cdot \mathbf{w}_A \end{aligned} \quad (63)$$

Pour tenir compte de l'incertitude de la position du barycentre Terre-Lune, désormais l'origine du repère, il suffit d'utiliser l'équation (56), sachant que, en notant  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ ,

$$\text{cov}(\mathbf{x}_{BTL}^A) = \text{cov}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{BTL}) = \text{cov}(\mathbf{x}_A) + \text{cov}(\mathbf{x}_{BTL}) - 2\text{cov}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{BTL}) \quad (64)$$

où  $\text{cov}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{BTL})$  représente la matrice de covariance entre  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_{BTL}$ .

## 2.4 APPLICATIONS PHYSIQUES

Nous exposons ici les deux premières applications que nous avons mises en oeuvre de ces deux principes. À l'origine ces techniques ont été conçues pour tester des théories alternatives à la relativité générale mais il s'est trouvé que des applications étaient possibles dans d'autres domaines liés aux éphémérides. Nous les présentons à titre informatif sans donner tous les détails physiques qui peuvent se trouver dans les publications que nous avons reproduites en annexes A et B. L'objectif de cette section est de tester et comparer les méthodes statistiques.

### 2.4.1 Comparaison de INPOP19a et INPOP17a par propagation de covariance

Nous discutons ici les éléments de la note scientifique d'INPOP19a [30] qui pourront être utiles par la suite. La note scientifique complète est reportée dans l'annexe A.

#### 2.4.1.1 Mises à jour importantes entre INPOP17a et INPOP19a

Les dernières avancées les plus importantes d'INPOP sont les suivantes. Tout d'abord une détermination plus précise des masses des objets de la ceinture d'astéroïdes a été effectuée [37]. Ensuite, un anneau d'objets trans-neptuniens ainsi que les principaux objets trans-neptuniens ont été ajoutés [38]. Ces objets trans-neptuniens améliorent les résidus des données CASSINI fournies par le Jet Propulsion Laboratory (JPL), ainsi que ceux du Grand Finale, comme on peut le voir figure 4. En effet, on observe un redressement des résidus sur les deux extrémités, en 2004 et au Grand Finale en 2017. Avec ces deux améliorations, la distribution des résidus est beaucoup plus centrée en zéro. La grande valeur des résidus du Grand Finale pour INPOP17a s'explique par le fait que nous ne disposions pas des données à l'époque d'INPOP17a, il était donc impossible de les ajuster.

Un autre progrès par rapport à INPOP17a est l'introduction des données de la sonde Juno. Pour l'instant nous n'avons que 9 points mais cette mission est très prometteuse pour la détermination de la position de Jupiter. Nous présentons ces points figure 5. Là encore les grands résidus d'INPOP17a s'expliquent par l'absence des données lors de la construction de l'ancienne éphéméride.

Ces deux ajouts de nouvelles données illustrent à quel point chaque nouvelle éphéméride améliore la détermination des orbites.

Une mise à jour importante est aussi la réanalyse des données Cassini par notre équipe [38], en collaboration avec l'université Sapienza à Rome avec Andrea Di Ruscio. Cette analyse complète s'étend de 2006 à 2016. L'amélioration par rapport aux données fournies par le JPL est significative. En effet, les résidus de Cassini du JPL présentent un

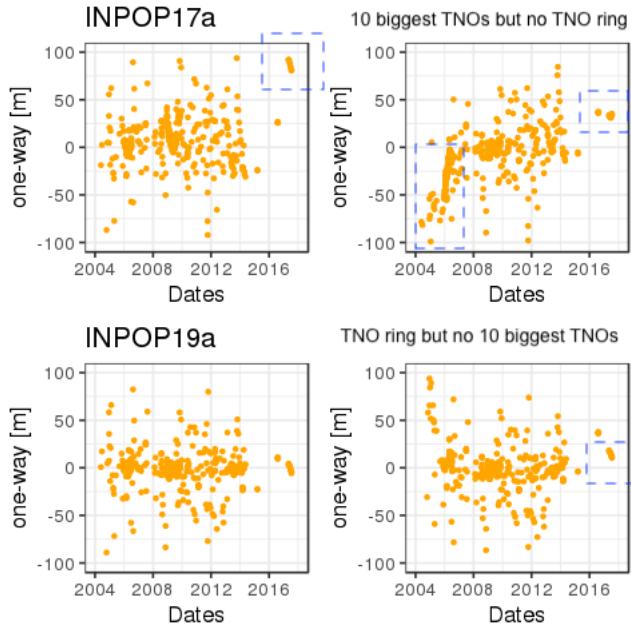


FIGURE 4 – En haut à gauche : résidus de Cassini obtenus avec INPOP17a (pas d'anneau ni d'objets trans-neptuniens). En haut à droite : INPOP19a avec seulement les objets trans-neptuniens connus mais pas d'anneau. En bas à droite : INPOP19a avec l'anneau mais sans les objets. En bas à gauche : INPOP19a complet (anneau plus objets). Les données du grand final de Cassini sont encadrées en bleu. Figure publiée dans les notes scientifiques de l'IMCCE sur INPOP19a ([\[30\]](#) ou annexe A).

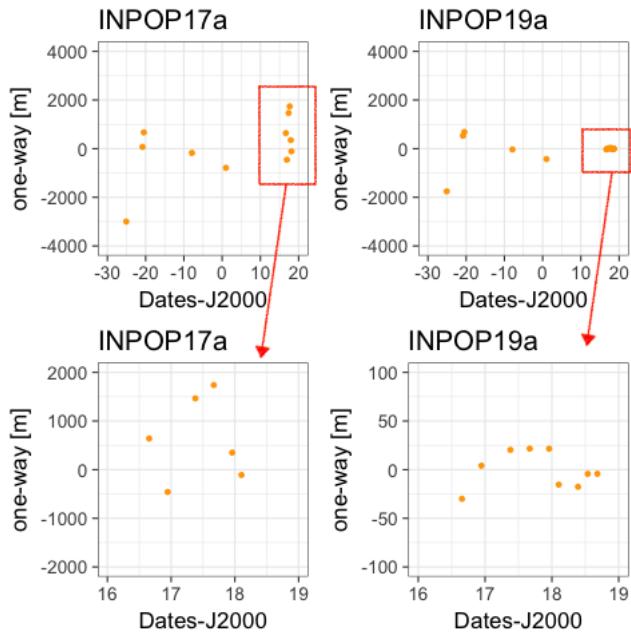


FIGURE 5 – Nous présentons les résidus sur Jupiter. Les nouveaux points de Juno sont entourés et nous montrons une focalisation sur ces points pour INPOP17a et INPOP19a. Figure publiée dans les notes scientifiques de l'IMCCE sur INPOP19a ([\[30\]](#) ou annexe A).

écart-type de 25m sur 166 points alors que nos données présentent un écart-type de seulement 6.1m sur 614 points.

#### 2.4.1.2 Comparaison par propagation de la covariance

Toutes les propagations sont données sur une période couvrant 1980-2020. Les graphes des dispersions standardes propagées – définies comme la racine carrée de la variance propagée – des coordonnées géocentriques RTN sont présentes dans les notes scientifiques de l'IMCCE [30] reportées en annexe A. Nous donnons en résumé le maximum atteint sur la période 1980-2020 dans la table 4.

Dans tous les cas, INPOP19a présente des dispersions standardes propagées plus petites par rapport à INPOP17a dans toutes les directions. Pour Mercure et Vénus nous constatons une amélioration d'un facteur 4 dans la direction  $R$  et 12 dans la direction  $N$ . Sur Jupiter les améliorations vont jusqu'à un facteur 50 pour les directions  $R$  et  $T$ . Pour Saturne, Uranus et Neptune le progrès ne va pas plus qu'un facteur 10. On constate que les dispersions des différences entre les éphémérides propagées sont plus petites dans le système solaire interne que dans le système solaire externe. Cela peut s'expliquer par l'introduction des objets trans-neptuniens qui affectent beaucoup plus le système solaire externe qu'interne. Par ailleurs il n'est pas étonnant que la différence déborde les incertitudes propagées puisqu'il était impossible d'inclure dans ces incertitudes l'absence des objets trans-neptuniens.

On peut également constater l'importante différence entre les barycentres Terre-Lune par rapport au barycentre du système solaire des deux versions d'INPOP. Cela s'explique par le fait que l'ajout d'objets nouveaux dans le modèle (343 astéroïdes dans INPOP19a contre seulement 168 dans INPOP17a) modifie le barycentre du système solaire et donc les coordonnées barycentriques du barycentre Terre-Lune. Cette grande différence ne doit donc pas nous alerter.

Il faut souligner que ces incertitudes propagées ne permettent pas, à ce stade, de donner un critère quantitatif univoque. Elles donnent une bonne représentation de l'amélioration entre INPOP17a et INPOP19a mais pour obtenir un critère quantitatif aussi univoque que la vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit aux observations sensibles, d'autres analyses statistiques seront nécessaires.

#### 2.4.2 Contraintes sur la position de P9

Nous exposons sommairement les problématiques physiques liées à l'existence ou non de la planète P9 dans le système solaire [31]. L'article complet est reporté en annexe B. Ici, il nous importe plus de voir comment nos méthodes statistiques ont pu être utiles pour traiter ce problème et de les comparer entre elles, que de déterminer l'existence éventuelle de la planète P9 – ce sujet certes passionnant

TABLE 4 – Maxima des covariances propagées des coordonnées R, T, et N (Radial, Tangentiel, Normal, équation (63)), en mètres sur la période 1980-2020 (en mètres). La première colonne présente les maxima des covariances propagées pour INPOP19a, la deuxième colonne présente ceux pour INPOP17a, la troisième colonne présente le maximum des différences entre INPOP19a et INPOP17a pour les coordonnées considérées. “BTL” signifie barycentre Terre-Lune.

Planète		INPOP19a	INPOP17a	INPOP19a-INPOP17a
Mercure	R	5.0	67.8	35.7
	T	19.2	181.7	737.3
	N	8.3	87.3	258.9
Vénus	R	7.5	123.8	84.3
	T	17.6	188.2	672.6
	N	12.3	120.9	408.8
BTL	R	794670.2	1186968	118571.4
	T	417751.8	1151947.8	2758.6
	N	240970.5	89256.2	71417.4
Mars	R	95.5	619.7	783.1
	T	144.3	747.6	258.2
	N	9.8	116.9	233.4
Jupiter	R	34.8	1353.4	3466.1
	T	96.9	4294.2	4690.5
	N	92.1	3577.0	17461.5
Saturne	R	22.3	278.6	988.7
	T	99.2	1168.4	4608.5
	N	40.6	528.0	3007.8
Uranus	R	30608.6	469541.7	917071.2
	T	45303.5	931784.4	-85824.6
	N	13150.1	362006.6	807334.8
Neptune	R	151291.8	2418246	343004.6
	T	79984.9	1369684.4	1341723.5
	N	30791.4	801037.4	-348617.0

n'est pas directement lié à cette thèse, nous renvoyons les lecteurs curieux à l'annexe B.

#### 2.4.2.1 Contexte scientifique

La motivation de l'existence d'une telle planète provient de l'asymétrie de la distribution des orbites d'objets de la ceinture de Kuiper [51]. Cette hypothèse est controversée car premièrement, l'existence d'une planète supplémentaire n'est pas la seule à pouvoir expliquer ce phénomène [52; 53; 54; 55]. De plus, le faible nombre d'objets étudié remet en question la fiabilité de cette théorie [54; 55; 56]. D'autres tests ont été faits qui ont des résultats plus ou moins concluants [52; 57; 58; 59; 60; 61; 62]. Parmi ces tests, notre équipe a utilisé les éphémérides planétaires pour contraindre la position de P9 [50] (avec INPOP15a à l'époque).

Avec les dernières mises à jour, la dernière estimation de Batygin et al. est moins contraignante qu'au début [63]. De plus la ceinture de Kuiper pourrait se corrélérer avec l'effet d'une planète supplémentaire, ce qui rendrait sa détection plus difficile [64]. Les dernières contraintes de Batygin et al. sur lesquelles nous basons ce travail suggèrent une masse pour P9 comprise entre  $5M_T$  et  $10M_T$  avec un demi-grand axe de 400 à 800 unités astronomiques (UA), une inclinaison entre  $15^\circ$  et  $25^\circ$  et une excentricité entre 0.2 et 0.5. Cela correspond à une distance au barycentre du système solaire de 200 à 640 UA. Avec ces propriétés orbitales, la période de révolution de P9 varie entre 8000 et 22500 ans. Sachant que les données planétaires utilisées par INPOP s'étalent sur un siècle, nous faisons l'approximation que P9 est fixe pendant cet intervalle de temps et agit selon un effet de marée dépendant de son ascension droite (RA) et sa déclinaison (DE). L'accélération à ajouter au corps  $A$  due à P9 est donc

$$\delta \mathbf{a}_A = \frac{GM_{P9}}{r^3} [3(\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{x}_A] \quad (65)$$

où  $\mathbf{x}_A$  est la position barycentrique du corps  $A$ ,  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire pointant vers P9 depuis le barycentre du système solaire, et  $r$  est la distance entre P9 et le barycentre du système solaire.

Les paramètres de P9 (RA, DE,  $r$ ,  $M_9$ ) étant fixés, l'algorithme d'ajustement aux observations ajuste les paramètres d'INPOP jusqu'à obtenir la convergence. Pour P9, nous avons testé quelques distances de 400 à 800 UA pour  $M_9 = 5M_T$  et  $10M_T$ . Nous avons fait une grille de valeurs de (RA, DE) pour tester une zone de  $10^\circ$  autour du plan écliptique.

#### 2.4.2.2 Propagation de la covariance

Soit  $X_r(t)$  et  $X_9(t)$  l'éphéméride de référence et l'éphéméride testée pour P9, évaluées à la date  $t$ . La distance pour calculer l'écart entre

l'éphéméride testée et l'éphéméride de référence a été choisie en prenant les coordonnées RTN et en prenant l'inverse de la matrice de covariance propagée comme métrique

$$d(t) = \sqrt{(X_9(t) - X_r(t)) (\text{cov} X_r)^{-1} (X_9(t) - X_r(t))} \quad (66)$$

Nous allons étudier la propagation de la covariance de l'orbite de Saturne sur la période des observations de Cassini. Parmi les planètes dont nous disposons de données précises et nombreuses, c'est celle qui est la plus perturbée par P9 puisqu'elle est la plus éloignée du Soleil. En prenant une distribution gaussienne à 3 dimensions dans le formalisme RTN, nous pouvons calculer un pourcentage de compatibilité pour  $d(t)$  : on calcule le pourcentage de temps pendant lequel  $d(t)$  est assez petit pour rester dans un intervalle qui contient 99.7% de la distribution centrée autour de l'éphéméride de référence.

La figure 6 montre les cartes de compatibilités en fonction de différents paramètres pour P9. On voit que les zones qui maximisent la compatibilité – au sens du critère de propagation de covariance – augmentent quand la distance de P9 augmente et quand sa masse diminue. Pour le cas où  $M_{P9} = 10M_T$ , les zones qui contiennent une valeur supérieure à 75% de compatibilité n'apparaissent qu'à partir de  $r > 650\text{UA}$ , et leur aire augmente quand la distance augmente. En effet, à 700 UA, de telles zones ne représentent que 0.55% de la carte, alors que pour 800 UA, cela représente 11%, avec un maximum de valeur de compatibilité qui va jusqu'à 92% à 800 AU pour seulement 89.5% à 700 UA.

Dans les cas où  $M_{P9} = 5M_T$ , la contrainte sur la distance est plus faible et plus de solutions sont acceptables. De même, la zone de compatibilité augmente quand  $r$  augmente. Notamment pour  $r = 800$  UA on atteint jusqu'à 96.6%.

Cette carte peut servir à titre indicatif pour donner une intuition des zones de possibilité d'existence de P9 mais c'est insuffisant pour avoir un critère quantitatif. Ces pourcentages de compatibilités n'indiquent pas une vraisemblance pour une théorie alternative, et nous allons même voir qu'ils donnent des prédictions incomplètes.

#### 2.4.2.3 Vraisemblance basée sur le $\chi^2$

Pour calculer le  $\chi^2$  observationnel réduit et sa vraisemblance associée, nous nous sommes limités aux observations de Cassini JPL, des données Cassini réduites par notre équipe en collaboration avec l'université Sapienza à Rome qui contiennent aussi le Grand Finale, les données de Mars, de Messenger, et de Juno (voir [31] ou l'annexe B pour plus de détails sur ce choix). Nous traçons les cartes de vraisemblance pour différentes valeurs de  $r$  et  $M_{P9}$  sur la figure 7.

La première chose à remarquer est que quelles que soient les distances, les masses, ou les directions considérées, la présence de P9

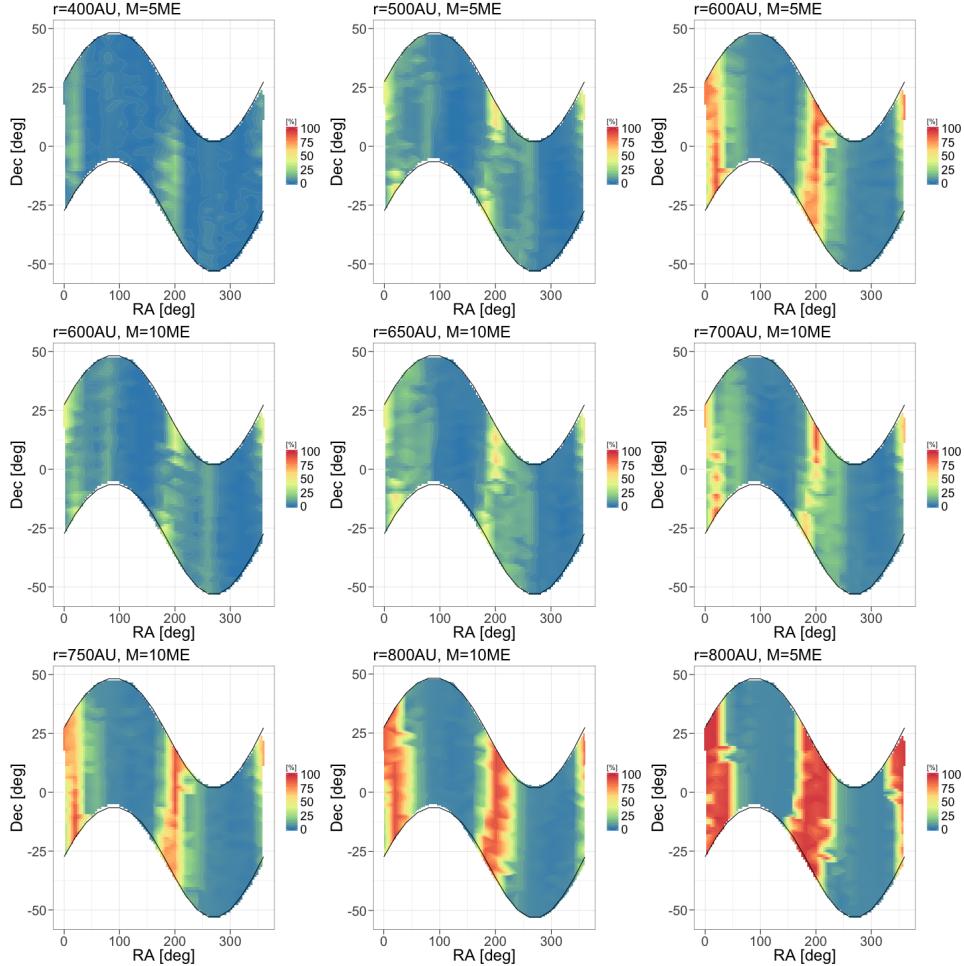


FIGURE 6 – Pourcentage de compatibilité de la covariance propagée pour Saturne, en considérant  $r = 400, 500, 600, 650, 700, 750, 800$  UA et  $M_{P9} = 5M_T$  et  $10M_T$  comme paramètres pour P9. L'axe des abscisses correspond à l'ascension droite (RA) de P9 et l'axe des ordonnées correspond à sa déclinaison (Dec). La couleur indique le pourcentage de compatibilité. Cette figure a été publiée dans Fienga et al. [31] (reportée dans l'annexe B).

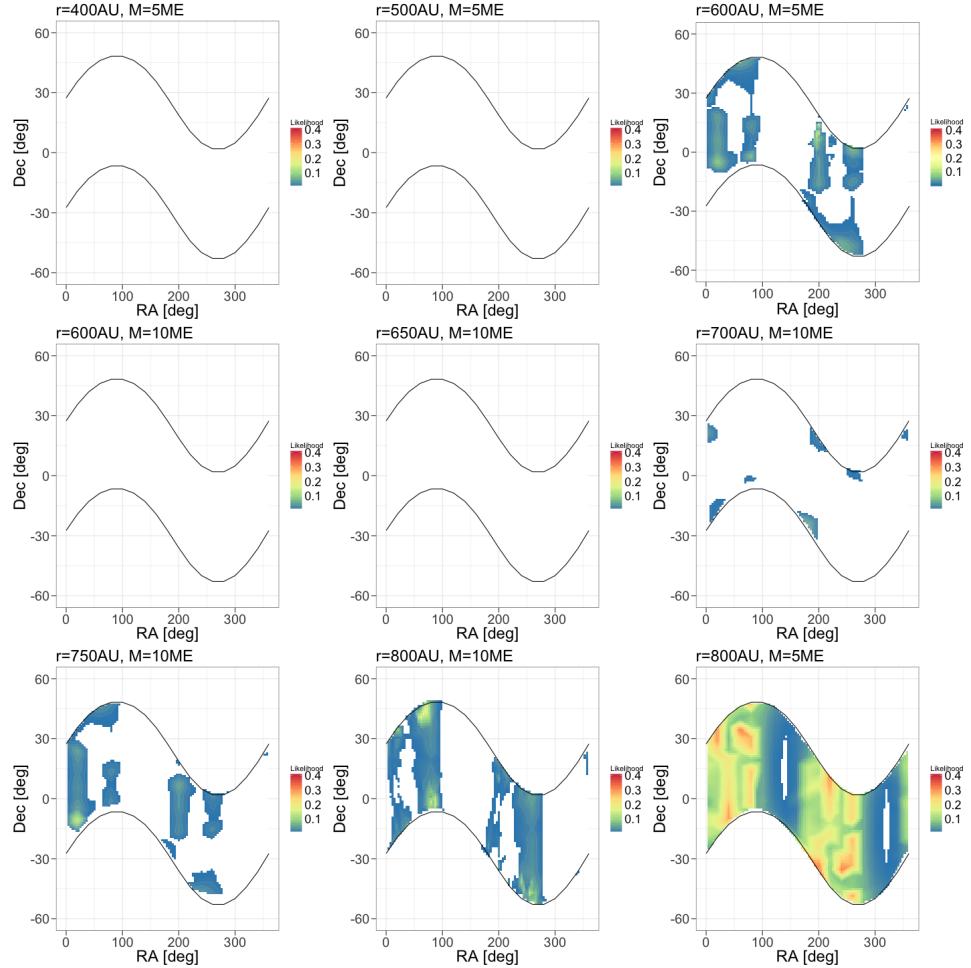


FIGURE 7 – Vraisemblance calculée pour  $r = 400, 500, 600, 650, 700, 750$  et  $800$  UA et  $M_{P9} = 5M_T$  puis  $10M_T$ . L'axe des abscisses représente RA de P9, l'axe des ordonnées représente Dec. La couleur donne la vraisemblance de l'éphéméride incluant P9 en utilisant la solution de référence comme métrique. Les portions blanches de la carte sont celles pour lesquelles  $L < 0.003$ , ce qui correspond à une probabilité d'exclusion supérieure à 99.7%. Cette figure a été publiée dans Fienga et al. [31] (reportée dans l'annexe B).

n'améliore jamais la vraisemblance des éphémérides (définie par  $1 - L$ ). En effet, elle reste inférieure à 0.5 pour toutes les configurations testées. La question est donc de savoir quelles sont les zones où la vraisemblance est suffisante pour ne pas exclure l'existence de P9. Autrement dit, nous cherchons les configurations pour lesquelles la vraisemblance ne se dégrade pas significativement en dessous de 0.5. Si nous prenons le critère de 99.7% de certitudes d'exclusion, cela revient à exclure toutes les configurations pour lesquelles  $L < 0.003$ . Avec un tel critère, aucune zone n'est acceptable pour  $r < 600$  UA. Au delà de cette distance, même s'il y a des domaines acceptables, la vraisemblance ne dépasse jamais 0.4.

#### 2.4.2.4 Comparaison des deux critères

La première conclusion scientifique est que pour l'instant, les éphémérides planétaires ne donnent pas de détection positive de P9. Pour  $M_{P9} = 10M_T$ , aucune zone acceptable n'existe pour  $r < 650$  UA. Pour  $M_{P9} = 5M_T$ , aucune zone acceptable n'existe pour  $r < 500$  UA.

En première approximation, en se basant sur le critère de compatibilité de la propagation des covariances de l'orbite de Saturne mais aussi pour le critère de la vraisemblance plus grande que 0.003%, nous trouvons deux zones qui ne peuvent pas exclure l'existence de P9 :

$$Z1 : (\text{RA}, \text{Dec}) \in [0^\circ : 40^\circ] \times [-21^\circ : 37^\circ] \quad (67)$$

$$Z2 : (\text{RA}, \text{Dec}) \in [180^\circ : 220^\circ] \times [-34^\circ : 20^\circ] \quad (68)$$

Le critère de la vraisemblance ajoute deux zones supplémentaires dans lesquelles on ne peut pas exclure l'existence de P9 :

$$Z3 : (\text{RA}, \text{Dec}) \in [51^\circ : 109^\circ] \times [-9.5^\circ : 50^\circ] \quad (69)$$

$$Z4 : (\text{RA}, \text{Dec}) \in [225^\circ : 284^\circ] \times [-52^\circ : 9^\circ] \quad (70)$$

Ces zones sont plus étendues si  $r$  augmente et  $M_{P9}$  diminue, et moins étendues voire inexistantes sinon. Cette différence de résultats entre les deux méthodes peut s'expliquer par le fait que la méthode de la covariance propagée est partiellement aveugle aux ajustements de paramètres qui absorbent des effets supplémentaires. Par exemple, la masse de l'anneau d'objets transneptuniens peut partiellement reproduire ou compenser l'effet d'une éventuelle planète dans le système solaire lointain (voir figure 8 de l'annexe B). Lorsque c'est le cas, il est possible que les orbites des planètes soient modifiées sans que les observations ne le soient. La conséquence est que le test de propagation de covariance qui mesure des écarts entre orbites va mesurer une incompatibilité, alors que le test de la vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit n'est sensible qu'aux dégradations d'observations. C'est pourquoi,

dans l'état actuel de nos connaissances, cette technique permet de voir d'autres zones qui n'ont pas été perçues par méthode de la covariance propagée. Il est important de noter qu'une modification d'orbite qui ne dégrade pas les observations n'est pas un critère suffisant pour éliminer une théorie. De plus, la méthode de vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit permet de donner un critère quantitatif de viabilité, ce que ne permet pas l'approche de covariance propagée pour l'instant. Peut-être que le choix des quantités propagées devrait être modifié, ainsi que la façon dont on choisit les critères de compatibilité. Par exemple il pourrait être envisagé de propager les covariances des quantités observables et de les comparer aux observations réelles.

## 2.5 RÉSUMÉ ET PERSPECTIVES

Nous avons vu que pour tester des effets physiques nouveaux avec des éphémérides, il faut être très prudent lorsqu'on affirme contraindre un paramètre à tel ou tel degré de certitude et sur tel intervalle. Nous avons montré les limites des analyses post-ajustement et de l'algorithme de Gauss-Newton pour contraindre des paramètres liés à des phénomènes difficiles à détecter. Nous verrons dans le chapitre 3 un exemple de limitation de l'analyse post-ajustements et comment une analyse complète avec des éphémérides permet de résoudre le problème dans le cas de tests d'une nouvelle physique. Dans le chapitre 4, nous allons montrer que des analyses statistiques complètes font émerger des distributions qui n'auraient pas pu être obtenues avec un algorithme de Gauss-Newton pour les paramètres de la théorie dilaton.

Pour pallier à ce problème, nous avons proposé deux méthodes :

1. La propagation de la covariance. Cette méthode permet de mesurer l'écart entre deux éphémérides sur une durée choisie par l'utilisateur. Cela nous a servi à comparer les deux dernières versions d'INPOP (voir [30] ou l'annexe A) ainsi qu'à indiquer une estimation des zones possibles pour P9.
2. La vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit aux observations sensibles. Nous avons montré un exemple d'application pour contraindre la possible position de l'éventuelle planète P9 (voir [31] ou l'annexe B). Nous allons utiliser cette méthode pour contraindre la masse associée au graviton dans le chapitre 3. Dans ce cas il n'y aura qu'un seul paramètre à tester. Nous allons aussi l'utiliser pour contraindre la théorie du dilaton léger avec couplage non universel dans le chapitre 4. Dans ce cas il y aura trois, puis quatre paramètres à tester, donc nous utiliserons un algorithme de rejet.

# 3

## TEST DU POTENTIEL DE YUKAWA GÉNÉRIQUEMENT ASSOCIÉ AU GRAVITON

---

### 3.1 PHÉNOMÉNOLOGIE DU GRAVITON MASSIF

#### 3.1.1 *Qu'est-ce qu'un "graviton" ?*

Pour étudier la phénoménologie quantique de la gravitation, on peut concevoir cette interaction comme étant véhiculée par le “graviton”, la particule qui serait associée au phénomène de gravitation. Pour cela on peut raisonner sur le champ associé à la particule échangée lors de l’interaction entre deux autres particules qui interagissent, qu’il soit représentatif d’une réalité quantique ou non. Le fait que l’interaction gravitationnelle ait une énergie qui décroisse en  $1/r$  indique que le graviton devrait être sans masse [65].

L’expérience nous enseigne que les particules interagissent gravitationnellement à l’opposé de l’électromagnétisme : les particules qui ont une “charge gravitationnelle” de même signe (que l’on appelle “masse grave”) s’attirent. En fait, la théorie de la relativité générale exprime que c’est l’énergie de la matière totalisant l’ensemble de ses interactions microscopiques qui engendre le phénomène de gravitation. Toute matière dotée d’énergie – que ce soit en raison de sa masse au repos ou de ses énergie d’interactions – réagit de façon gravitationnelle. En effet, pour obtenir l’équation d’Einstein, l’action d’Einstein-Hilbert  $\int R\sqrt{-g}d^4x/2\kappa c$  donne le membre de gauche de l’équation d’Einstein, alors que le membre de droite est obtenu en dérivant le lagrangien du modèle standard  $\int \mathcal{L}_{MS}\sqrt{-g}d^4x$  qui totalise l’énergie de toutes les particules et de leurs interactions. Comme seules les particules d’énergie positive peuvent émerger dans la réalité – dans le cas contraire, leur existence n’est que “virtuelle” –, la gravitation ne peut pas être répulsive et toutes les particules s’attirent entre elles [65].

Il est possible de retrouver la gravitation relativiste en la modélisant comme une particule sans masse de spin 2, et en montrant que l’action d’une telle particule se ramène nécessairement à l’action d’Einstein-Hilbert. Cela est fait par exemple de façon pédagogique par Feynman [65]. Comme la gravitation peut être reproduite par la théorie des particules en postulant qu’elle est due à l’échange d’un boson de spin 2, et que nous avons postulé que ce boson n’avait pas de masse, il est naturel d’affaiblir cette hypothèse et de voir quelle phénoménologie pourrait émerger si on lui attribuait une masse. Il existe plusieurs façons de faire émerger une masse au graviton. On trouve des approches

de théorie quantique du champ comme celles de Claudia de Rham [25; 26] ou encore une approche plus phénoménologique comme celle de Matt Visser [24] où il ajoute un champ dans le lagrangien qui est affectée d'un coefficient proportionnel à la masse du graviton, de telle sorte que l'équation d'Einstein est modifiée par un terme supplémentaire dans le tenseur énergie-impulsion. Nous nous intéressons ici essentiellement à l'aspect phénoménologique des théories du graviton massif : nous ne faisons qu'analyser les apparitions du terme du graviton massif dans les équations du mouvement à l'échelle du système solaire, sans interpréter le sens théorique des contraintes que nous apportons – nous laissons ce travail aux théoriciens du graviton.

Une manifestation possible de la masse non nulle du graviton est la modification de la relation de dispersion des ondes gravitationnelles

$$E^2 = p^2 c^2 + m_g^2 c^4 \quad (71)$$

C'est cet argument qu'a utilisé la collaboration LIGO-Virgo pour contraindre la masse du graviton à partir des détections d'ondes gravitationnelles [66]. En effet, cette relation de dispersion modifiée induit une différentiation entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase des ondes, de telle sorte que la forme du signal doit être modifiée le long de sa propagation. Plus les signaux émis sont lointains, plus le signal est modifié, ce qui est particulièrement intéressant avec des objets situés à plusieurs milliards d'années-lumière. C'est ainsi que la collaboration LIGO-Virgo a contraint la masse du graviton en analysant la forme des ondes gravitationnelles émises par la fusion de trous noirs, et le résultat quantitatif est :  $m_g < 4.7 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  [66] (à 90% de certitude).

Dans la théorie de Visser [24] comme dans certaines théories quantiques de de Rham [25; 26], les équations aux ordres les plus bas prennent la forme d'une équation de Klein-Gordon statique :

$$\left( \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \left( h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right) + O(h^2) + O(c^{-2}) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (72)$$

où  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski. On sait que les solutions statiques de ces équations dont la source est un monopole de masse  $m$  donnent un potentiel de Yukawa, c'est-à-dire la métrique suivante :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} e^{-r/\lambda_g} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right) c^2 dt^2 \\ & + \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} e^{-r/\lambda_g} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right) dr^2 + \mathcal{O}(c^{-3}) \delta_{ij} dt \delta^{ij} dx^i \end{aligned} \quad (73)$$

où  $\lambda_g = h/(cm_g)$  est la longueur d'onde de Compton associée au champ ( $c$  est la vitesse de la lumière et  $h$  est la constante de Plank). Elle indique la distance caractéristique de la suppression du potentiel par l'exponentielle. Cependant des problèmes existent dans cette

approche théorique. Notamment, il est connu qu'une discontinuité intervient avec les ordres supérieurs. Dans la plupart des formalismes, aujourd'hui, lorsque les ordres supérieurs sont maintenus, la théorie ne converge pas vers la relativité générale lorsque  $m_g$  tend vers zéro. C'est ce que l'on appelle la discontinuité de Van Dam–Veltman–Zakharov [26]. Cette discontinuité peut être corrigée par le mécanisme de Vainstein avec des termes d'ordres encore supérieurs, mais l'effet macroscopique induit est que le potentiel Yukawa disparaît et que l'on retrouve la relativité générale [25; 26]. D'autre part, Matt Visser affirme avoir une théorie dont la solution statique serait également un potentiel Yukawa [24], mais il en est resté à l'ordre le plus bas et n'a pas (encore?) démontré que sa théorie était continue à tout ordre. Cela ne l'empêche pas de faire des calculs phénoménologiques avec ce potentiel. L'intérêt de cette approche est d'être simple à tester à l'échelle du système solaire, puisqu'il n'y a qu'un seul paramètre supplémentaire à contraindre et qu'il intervient de façon univoque dans les équations du mouvement. De même, Claudia de Rham est confiante sur le fait que le potentiel Yukawa est une façon générique correcte pour aborder la phénoménologie du système solaire [26].

Toutefois, il faudra être particulièrement prudent sur l'interprétation théorique des résultats de notre travail sur le "graviton massif". Pour ce qui suit, comme de nombreuses équipes l'ont fait jusqu'à présent (comme Clifford Will récemment [49]), nous interprétons la suppression Yukawa du potentiel de Newton comme un effet générique de la théorie du graviton massif, et nous adoptons un point de vue "agnostique" sur l'état actuel des spéculations théoriques sur le graviton massif. Nous abordons ce chapitre de façon purement phénoménologique, et tout ce que l'on peut dire avec certitude, c'est que l'on teste la suppression Yukawa du potentiel newtonien à l'échelle du système solaire. Ainsi, quand nous parlons de la "masse du graviton" ou de sa "longueur d'onde de Compton", il faudra le prendre au sens mathématique et formel avant de le considérer, éventuellement, et avec la prudence la plus grande, au sens ontologique.

### 3.1.2 Équations du mouvement dans le système solaire

Pour simplifier les calculs, on peut effectuer un développement limité de la suppression de Yukawa dans les domaines où  $r \ll \lambda_g$ . En effet, comme on a  $\lambda_g = h/(cm_g)$ , si  $m_g \rightarrow 0$  alors  $\lambda_g \rightarrow \infty$ , on s'attend donc à mesurer de grandes valeurs de  $\lambda_g$  puisque pour l'instant aucune masse n'a été détectée pour le graviton. Au besoin nous pourrions affaiblir cette hypothèse si nous trouvons des longueurs d'onde trop petites, mais nous verrons que nos contraintes impliquent que  $\lambda_g$  est bien plus grande que l'échelle du système solaire. Après

une redéfinition de l'échelle de temps pour absorber le terme constant dans  $g_{00}$ , cela donne à l'ordre newtonien

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\lambda_g^2} \right] + O(c^{-4}) \right) c^2 dt^2 \\ & + (1 + O(c^{-2})) dr^2 + \mathcal{O}(c^{-3}) dt(dx^1 + dx^2 + dx^3) \end{aligned} \quad (74)$$

À l'ordre newtonien, le principe de superposition s'applique, et nous pouvons de plus négliger les termes post-newtoniens multipliés par  $1/\lambda_g^2$ . Il suffit donc d'ajouter ce terme à l'accélération dans les équations du mouvement du corps  $A$  subissant l'action des corps  $B$

$$\delta \mathbf{a}_A = \frac{1}{2} \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{\lambda_g^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{r_{AB}} \quad (75)$$

où  $r_{AB} = \|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B\|$  et  $\mathbf{r}_A$  représente les coordonnées cartésiennes de  $A$  dans le système de référence barycentrique du système solaire. Ce terme additionnel s'ajoute aux équations Einstein-Infeld-Hoffmann-Droste-Lorentz classiquement utilisées dans le système solaire [43; 44]. Ainsi, dans l'équation (74), les termes post-newtoniens sont sous-entendus dans les termes  $O(c^{-4})$ ,  $O(c^{-3})$ , et  $O(c^{-2})$  et sont bien pris en compte.

### 3.1.3 Propagation des signaux électromagnétiques

Nous faisons l'hypothèse qu'en théorie du graviton massif, les rayons lumineux suivent les géodésiques lumières. Cette hypothèse n'est pas invraisemblable, puisque la théorie reste métrique, les photons, qui sont des particules sans masse, suivent nécessairement les géodésiques lumières.

Les données planétaires les plus sensibles aux perturbations de la gravitation sont les données télémétriques radio. Nous allons donc calculer la correction à apporter au retard de Shapiro à l'ordre le plus bas et voir si les corrections ont une chance d'être mesurées. Considérons une métrique de la forme  $ds^2 = (-1 + U(r)/c^2)c^2 dt^2 + (1 + U(r)/c^2)dr^2$ , avec  $U(r) = 2GM/r + GMr/\lambda_g^2$ . Pour arriver à cette métrique depuis (73), il suffit de faire un développement limité à l'ordre deux en  $1/\lambda_g$  puis le changement de variables  $t \rightarrow t\sqrt{1 + GM/c^2\lambda_g}$ ,  $x^i \rightarrow x^i\sqrt{1 - GM/c^2\lambda_g}$  pour éliminer les termes constants de la métrique. Remarquons qu'un terme a été ajouté dans les composantes  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  du tenseur métrique. Ce terme est négligeable pour la dynamique des corps massifs mais joue un rôle dans les géodésiques des photons.

Considérons la trajectoire d'un rayon lumineux paramétrée comme suit :  $\gamma : \lambda \mapsto x \in \mathcal{M}$ . Nous munissons la variété pseudo-riemannienne  $\mathcal{M}$  d'un atlas que nous identifions à une carte générique notée  $(x^\mu)$  et par abus de langage, nous identifions  $x$  à ses coordonnées  $x^\mu$ .

Pour rappel,  $\mathcal{M}$  représente l'espace-temps.

Nous savons que si le 4-vecteur de composantes  $p^\mu$  vérifie  $\mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\lambda = p^\mu$ , alors ce vecteur est solution des équations géodésiques lumières :

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = 0. \quad (77)$$

Nous allons linéariser ces équations en posant respectivement :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (78)$$

$$p^\mu = \bar{p}^\mu + \delta p^\mu \quad (79)$$

où  $\bar{p}^\mu$  est solution des équations géodésiques lumières pour la métrique plate, c'est-à-dire que  $\bar{p}^\mu = \text{constante}$  et  $\eta_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu = 0$ . De là, on obtient à l'ordre 1

$$2\eta_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \delta p^\nu = -h_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu + O((\delta p^0)^2) + O(\|\delta p\|^2). \quad (80)$$

À présent nous devons choisir un paramétrage adapté. Si nous désignons  $r_e^\mu = (ct_e, \mathbf{r}_e)$  les coordonnées de l'événement d'émission et  $r_p^\mu = (ct_p, \mathbf{r}_p)$  les coordonnées de l'événement de réception, en notant  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e$ ,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ , ainsi que le paramètre d'impact  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_p - (\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ , on peut choisir comme paramétrage

$$\bar{p}^0 = 1, \quad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{n} \quad (81)$$

avec  $\|\mathbf{n}\| = 1$  et en faisant varier  $\lambda$  de  $\ell_e = \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{n}$  à  $\ell_p = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{n}$  ( $\ell_e < \ell_p$  mais les deux peuvent être négatifs ou positifs), de telle sorte que  $\ell_p - \ell_e = R$ . Si l'on exige que les extrémités soient fixées, alors nécessairement

$$\int_{\ell_e}^{\ell_p} \delta \mathbf{p} \, \mathrm{d}\lambda = \mathbf{0}. \quad (82)$$

Par ailleurs,

$$c(t_p - t_e) = \int_{\ell_e}^{\ell_p} p^0 \, \mathrm{d}\lambda. \quad (83)$$

Or, (80) nous donne :

$$2(-\delta p^0 + \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p}) = -h_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu + O((\delta p^\mu)^2) \quad (84)$$

et d'après (82),

$$\int_{\ell_e}^{\ell_p} \delta p^0 \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \int_{\ell_e}^{\ell_p} h_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \, \mathrm{d}\lambda. \quad (85)$$

Nous en déduisons une formule générale pour calculer le temps de parcours du rayon lumineux au premier ordre post-newtonien :

$$c(t_p - t_e) = R + \frac{1}{2} \int_{\ell_e}^{\ell_p} h_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \, \mathrm{d}\lambda \quad (86)$$

où  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  et où  $p^\mu = (1, \mathbf{n})$ . Avec le graviton massif on a

$$h_{\mu\nu} \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu = \frac{4GM}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2 \lambda^2} r. \quad (87)$$

En utilisant le paramétrage  $\lambda \mapsto x^\mu(\lambda)$  contraint par (81), avec  $\lambda \in [\ell_e, \ell_p]$  et avec les définitions précédentes, on a  $r(\lambda) = \sqrt{b^2 + \lambda^2}$ . En se rappelant que  $b^2 + \ell_i^2 = r_i^2$  et que  $b\ell_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i$  où  $i = e$  ou  $p$ , une intégration élémentaire donne

$$\begin{aligned} c(t_p - t_e) = R &+ \frac{2GM}{c^2} \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p + r_p}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_e + r_e} \\ &+ \frac{GM}{2c^2 \lambda_g^2} \left[ b^2 \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p + r_p}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_e + r_e} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_r \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_e \mathbf{r}_e) \right] + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (88)$$

On retrouve le délai de Shapiro classique auquel on doit ajouter une correction en  $1/\lambda_g^2$ . Dans le système solaire, en se plaçant dans un système de référence barycentrique, cette correction devient

$$c\delta t_g = \sum_A \frac{GM_A}{2c^2 \lambda_g^2} \left[ b^2 \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{pA} + r_{pA}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{eA} + r_{eA}} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_{rA} \mathbf{r}_{rA} - \mathbf{r}_{eA} \mathbf{r}_{eA}) \right] \quad (89)$$

où  $A$  désigne l'ensemble des planètes,  $\mathbf{r}_{iA} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A$  et  $r_{iA} = \|\mathbf{r}_{iA}\|$  où  $i = e$  ou  $p$ . On remarque que ce terme correctif a l'ordre de grandeur de  $\delta T_{\text{Shapiro}} \times (L/\lambda_g)^2$ , où  $L$  est une distance caractéristique du système. Sachant que les contraintes précédentes donnent environ  $\lambda_g > 2.8 \times 10^{12} \text{ km}$  [49; 67; 68], on peut en déduire que la correction apportée sera négligeable étant donnée la précision actuelle des données de télémesure. Pour toute la suite, nous utiliserons donc la formule classique du délais de Shapiro pour calculer les durées.

### 3.2 INSUFFISANCE DE L'ANALYSE POST-AJUSTEMENT

La théorie du graviton massif a l'intérêt d'être simple puisqu'elle ne contient qu'un seul paramètre nouveau. L'exercice de contraindre cette théorie est une bonne occasion pour tester toutes nos méthodes et de les comparer avec les méthodes qui nous semblent problématiques (analyse post-ajustement et algorithme Gauss-Newton principalement). Nous allons montrer deux exemples d'analyses post-ajustement, l'une proposée par Clifford Will qui a inauguré ce travail récent sur la contrainte du graviton massif dans le système solaire [49], et l'autre que j'ai produite pour pouvoir la comparer à une analyse plus réaliste.

#### 3.2.1 La prédiction de Clifford Will

On peut calculer l'effet du graviton sur la dynamique séculaire du système solaire. On se limite au terme d'interaction du Soleil et de la

planète considérée – en effet, vu qu'à l'heure actuelle nous n'avons déjà pas mesuré ce terme, il est raisonnable de négliger les termes en  $\frac{\dot{M}_A}{M_S \lambda_g^2}$ , quitte à revenir sur cette hypothèse plus tard si nous détectons une masse suffisamment élevée pour l'hypothétique graviton. On se place en système héliocentrique, dans ce cadre le terme correctif à ajouter au hamiltonien est

$$H_g = - \sum_A \frac{GM_S M_A}{2\lambda_g^2} r_A \quad (90)$$

où  $r_A = \|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S\|$ . Sur une orbite keplérienne, on a

$$\langle r_A \rangle_{\theta_A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_A \, d\theta_A \quad (91)$$

où  $\theta_A$  est l'anomalie moyenne de l'orbite keplérienne du corps  $A$ . En terme d'anomalie excentrique  $E_A$ , on a  $r_A = a_A(1 - e_A \cos E_A)$  où  $a_A$  et  $e_A$  sont le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite du corps  $A$ . D'autre part, à partir de l'équation de Kepler,  $\theta_A = E - e \sin E$ , on tire  $d\theta = r/a \, dE$ , d'où

$$\langle r_A \rangle_{\theta_A} = \left\langle \frac{r^2}{a} \right\rangle_{E_A} = \langle a_A(1 - e_A \cos E_A)^2 \rangle_{E_A} = a_A \left( 1 + \frac{e_A^2}{2} \right) \quad (92)$$

À partir du hamiltonien moyen sur une période orbitale, on peut en déduire le terme correctif sur l'avance du périhélie en une orbite. Pour ce faire passons en variables canoniques action-angle dites variables de Delaunay modifiées (voir par exemple [69], p. 33 eq. (1.69)), qui s'écrivent<sup>1</sup>

$$\Lambda_A = M_A \sqrt{GM_S a_A}, \quad \gamma_A = \theta_A + \tau_A \quad (93)$$

$$I_A = \Lambda_A \left( 1 - \sqrt{1 - e_A^2} \right), \quad \zeta_A = -\varpi_A = -\Omega_A - \omega_A \quad (94)$$

$$J_A = \Lambda_A \sqrt{1 - e_A^2} (1 - \cos i_A), \quad \Omega_A \quad (95)$$

où  $a_A$ ,  $e_A$ ,  $i_A$ ,  $\varpi_A$ ,  $\Omega_A$ ,  $\theta_A$ , sont respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'argument du périhélie, l'argument du nœud ascendant, et l'anomalie moyenne, de l'orbite du corps  $A$ . Dans ce jeu de variables, le hamiltonien additionnel moyen s'écrit

$$\langle H_{g,A} \rangle_{\theta_A} = - \frac{GM_A M_S a_A}{4\lambda_g^2} \left[ 3 - \left( 1 - \frac{I}{\Lambda} \right)^2 \right] \quad (96)$$

---

1. En toute rigueur, il aurait fallu remplacer  $M_A$  par  $\beta_A = M_A M_S / (M_A + M_S)$  et  $GM_S$  par  $\mu_A = G(M_S + M_A)$  mais comme l'effet du graviton est à la limite du mesurable, nous négligeons ces corrections.

TABLE 5 – Nous reproduisons la table 1 de l'article de Clifford Will [49]. Contraintes sur les avances des périhélices des différentes planètes par différentes éphémérides planétaires.

Planète [Réf]	$\Delta\dot{\omega}$ (mas/an)	$\lambda_g$ ( $10^{14}$ km) (limite inférieure)
Mercure [70]	0.03	0.18
[71]	0.02	0.22
Vénus [70]	0.016	0.28
Terre [70]	0.0019	0.88
Mars [70]	0.00037	2.21
Jupiter [70]	0.28	0.11
Saturne [70]	0.0047	0.98
[71]	0.026	0.42

Les équations canoniques sont tout simplement  $d\omega_A/dt = -\partial H/\partial I_A$ , de telle sorte que l'avance du périhélie due à la suppression Yukawa vaut<sup>2</sup>

$$\delta_g \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{n_A}{2} \left( \frac{a_A}{\lambda_g} \right)^2 \sqrt{1 - e_A^2} \quad (97)$$

où l'on a posé  $n_A^2 a_A^3 = GM_S$  qui définit  $n_A$  comme la fréquence céleste du mouvement orbital du corps  $A$ . En une orbite, si la théorie testée est meilleure que la relativité générale, le périhélie devrait donc avoir une avance supplémentaire par orbite de

$$\delta_g \omega_A = \pi \left( \frac{a_A}{\lambda_g} \right)^2 \sqrt{1 - e_A^2} \quad (98)$$

Partant de ce calcul, en 2018, Clifford Will a eu l'idée d'utiliser la détermination des avances des périhélies du système solaire par les éphémérides pour contraindre la valeur de  $\lambda_g$  [49]. L'idée simple était que si l'incertitude sur l'avance d'un périhélie donné, obtenue dans le cadre de la théorie de la relativité générale ou d'autres théories alternatives, est  $\Delta\omega_A$ , alors on doit avoir  $\delta_g \omega_A \leq \Delta\omega_A$ , ce qui donne une contrainte sur  $\lambda_g$  :

$$\lambda_g \geq \frac{\pi a_A (1 - e_A^2)^{1/4}}{\sqrt{\Delta\omega_A}} \quad (99)$$

De là, à partir des données sur les périhélies, on peut reporter les contraintes qu'a établies Clifford Will [49] dans le tableau 5.

Clifford Will a également utilisé les contraintes sur les paramètres post-newtoniens (PPN)  $\beta$  et  $\gamma$  pour inférer une contrainte post-résiduelle

---

2. Clifford Will trouve une avance du périhélie proportionnelle à  $1/\sqrt{1 - e_A^2}$  [49]. Il s'agit probablement d'une faute de frappe. Cependant cela ne change pas les ordres de grandeur.

TABLE 6 – Nous reproduisons la table 2 de l'article de Clifford Will [49].  
 Contraintes sur les PPN et contrainte inférée sur l'avance des périhéliés. Les  $\gamma$  avec une étoile \* sont ceux qui ont été contraint par le retard Shapiro de la sonde Cassini.

Référence	$\Delta\gamma \times 10^5$	$\Delta\beta \times 10^5$	$\Delta_{PPN} \ln \omega \times 10^5$	$\lambda_g \min (10^{14} \text{ km})$
<i>Mercure</i>				
Pitjeva & Pitjev [70]	6.0	3.0	5.0	0.21
Verma et al. [72]	2.5	2.5	2.5	0.29
Fienga et al. [28]	5.0	6.9	5.6	0.20
Park et al. [73]	2.3*	3.9	2.8	0.28
Genova et al. [74]	2.3*	1.8	2.1	0.32
<i>Mars</i>				
Konopliv et al. [75]	2.3*	24	9.5	1.18

sur  $\Delta\omega$ . En particulier, comme l'avance du périhélie due à la relativité générale en formalisme post-newtonien paramétrisé vaut [49; 28]

$$\delta_{PPN}\omega_A = \frac{2\pi(2\gamma - \beta + 2)GM_S}{a_A(1 - e_A^2)c^2} \quad (100)$$

on en tire une estimation de son incertitude :

$$\Delta_{PPN} \ln \omega_A = \frac{2\Delta\gamma}{3} + \frac{\Delta\beta}{3} \quad (101)$$

À partir de cette contrainte inférée à partir des publications récentes sur les PPN, Clifford Will en déduit, par le même biais, c'est-à-dire en exigeant  $\delta_g\omega \leq \Delta_{PPN}\omega$ , les résultats que nous reproduisons dans le tableau 6.

Ces résultats préliminaires étaient très encourageants pour nous car les plus optimistes d'entre eux semblaient indiquer que la dynamique planétaire pouvait donner de très fortes contraintes sur la masse du graviton. Ils semblaient en outre indiquer que Mercure, en raison de sa proximité avec le Soleil, n'est pas un bon objet pour contraindre  $\lambda_g$ , et que les données martiennes seront beaucoup plus intéressantes.

Clifford Will avait bien conscience que seule une analyse complète par les éphémérides pouvait poser une contrainte réaliste sur la valeur de  $\lambda_g$  pour aller plus loin que son travail préliminaire important mais limité par le fait qu'il ne dispose pas d'éphéméride complète du système solaire. Nous allons voir que cela a plusieurs conséquences importantes. En première approche, il pourrait sembler que les contraintes proposées ici sont très encourageantes car les plus fortes surpassent celles des ondes gravitationnelles d'un ordre de grandeur.

La limite du travail de Clifford Will, ici, peut s'exprimer doublement. Premièrement, il a fait l'hypothèse que tout l'écart entre les observations et les simulations en termes d'avance de périhélie était

dû à la non prise en compte de la théorie alternative. Deuxièmement, il a fait l'hypothèse que l'effet induit par le terme additionnel n'entrant pas en corrélation avec les autres paramètres du modèle déjà en place ; c'est la limite absolue et indépassable de l'analyse post-ajustement. Comme nous allons le voir, lorsque nous prenons toutes les données en même temps et que nous effectuons un ajustement global, une modification des paramètres du modèle de référence peuvent absorber le signal produit par l'effet additionnel, de telle sorte qu'il faut que l'effet alternatif soit beaucoup plus important pour être significatif et rejeté (ou confirmé) par les observations. D'autre part, lorsque nous considérons toutes les données observationnelles en même temps, nous allons voir qu'il est impossible de dire si c'est tel ou tel jeu de données qui permet de contraindre  $\lambda_g$ . Nous allons voir que, contrairement à ce que pensait Clifford Will et nous-mêmes avant de faire l'analyse, les données de Mars ne se distinguent pas particulièrement pour contraindre  $\lambda_g$ , bien qu'elles jouent un rôle important.

Clifford Will indiquait d'ailleurs très clairement dans la conclusion de son article qu'il fallait faire des tests directs avec les éphémérides pour avoir un résultat définitif sur la contrainte de  $\lambda_g$  [49] :

It would be desirable to carry out such analyses by systematically including in the equations of motion of the ephemeris codes the effects of a massive graviton as displayed in Eq. (75).

*Il serait souhaitable de prolonger ces analyses en incluant systématiquement l'effet d'un graviton massif dans les équations du mouvement dans les codes des éphémérides comme montré dans l'équation (75).*

Clifford Will a d'ailleurs contacté expressément notre équipe dès la publication de son article. Nous allons voir ce que les éphémérides apportent à cette analyse.

### 3.2.2 *De l'importance des corrélations – une analyse post-ajustement*

#### 3.2.2.1 *Corrélations entre $\lambda_g$ et quelques paramètres*

À titre de complément, avant de rentrer dans l'ajustement global, nous allons illustrer son importance en le comparant à une analyse post-ajustement. Comme nous l'avons déjà dit, l'importance décisive de l'ajustement global vient de ce qu'une modification légère des conditions initiales ou d'autres paramètres peut absorber l'effet induit par le terme additionnel de la théorie alternative. Ainsi, lorsque les résidus se dégradent par ajout de ce terme, sans ajustement global il est impossible de savoir si la dégradation des résidus est réellement due à ce terme supplémentaire, ou à une mauvaise détermination des conditions initiales. À titre d'exemple, dans le tableau 7, nous

	$\lambda_g$	$a$ Mercure	$a$ Mars	$a$ Saturne	$a$ Vénus	$a$ BTL	$GM_S$
$\lambda_g$	1	0.50	0.49	0.04	0.39	0.05	0.66
$a$ Mercure	...	1	0.21	0.001	0.97	0.82	0.96
$a$ Mars	...	...	1	0.03	0.29	0.53	0.06
$a$ Saturn	...	...	...	1	0.003	0.02	0.01
$a$ Venus	...	...	...	...	1	0.86	0.94
$a$ EMB	...	...	...	...	...	1	0.73
$GM_\odot$	...	...	...	...	...	...	1

TABLE 7 – Exemples de corrélations entre différents paramètres d'INPOP17b et la longueur d'onde de Compton  $\lambda_g$ .  $a$ ,  $BTL$  et  $M_S$  sont respectivement les demi-grands axes, le barycentre Terre-Lune, et la masse du Soleil.

présentons les corrélations calculées entre  $\lambda_g$  et les demi-grands axes de quelques planètes. Nous voyons que  $\lambda_g$  est corrélé avec les demi-grands axes de Mercure et Mars et peu avec celui de Saturne. Comme nous allons le voir par la suite, cela se traduira par une baisse des résidus de Mercure et Mars lorsque l'on effectue l'ajustement des paramètres d'INPOP après avoir introduit l'accélération additionnelle induite par le graviton massif.

### 3.2.2.2 Résidus de l'analyse post-ajustement

Pour illustrer l'importance d'une analyse globale, nous avons calculé les différences des écart-types des résidus de l'éphéméride contenant la théorie testée et l'éphéméride de référence, mais sans faire d'ajustement. C'est ce qui correspond à une analyse post-ajustement.

À l'époque, dans un premier temps, nous disposions de l'éphéméride INPOP17a [18; 48]. Pour ce travail nous avons utilisé l'éphéméride INPOP17b, une extension de INPOP17a qui bénéficie de données supplémentaires de MESSENGER fournies par Verma et al. [72]. Nous effectuons une grille de 1024 valeurs pour  $\lambda_g$  de  $1 \times 10^{13}$  km à  $1 \times 10^{15}$  km. Pour chaque valeur de  $\lambda_g$  fixée, nous intégrons les équations du mouvement en maintenant la valeur des autres paramètres de la solution de référence, et nous calculons les résidus.

Les résultats sont reportés dans la figure 8. Nous y traçons la différence entre les écart-types des résidus de la solution qui contient l'accélération additionnelle d'un graviton massif auxquels nous avons retranchés les écart-types des résidus obtenus pour la solution de référence. Dans le tableau 8, nous donnons les écart-types des résidus obtenus pour la solution de référence, ainsi que les différences à une éphéméride basée sur un échantillon d'observations similaire, DE436<sup>3</sup>. Nous utilisons ces dernières valeurs comme indicateurs de l'incertitude interne de l'éphéméride.

3. L'éphéméride DE436 est basée sur DE430 [76]. Sa documentation est consultable ici <https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/JUNO/kernels/spk/de436s.bsp.lbl>

TABLE 8 – Résumé des données utilisées pour établir la sensibilité d’INPOP au paramètre  $\lambda_g$ . Les colonnes 2 et 3 donnent les dates et le nombre d’observations par échantillon. La colonne 4 donne la déviation standarde des résidus obtenus par INPOP17b. Ce sont ces valeurs qui sont prises comme références et auxquelles nous comparons les résidus de la solution testée. La dernière colonne indique les déviations standardes entre les différences des résidus d’INPOP17b et de l’éphéméride américaine DE436.

Observations	Intervalle de temps	#	(O–C) INPOP17b	INPOP17b–DE436
			$1\sigma$	$1\sigma$
			[m]	[m]
Mercure (Messenger)	2011 : 2013.2	950	7.2	3.9
Mars (Ody, MEX)	2002 : 2016.4	52946	5.0	1.4
Saturne (Cassini)	2004 : 2014	175	32.1	11.7

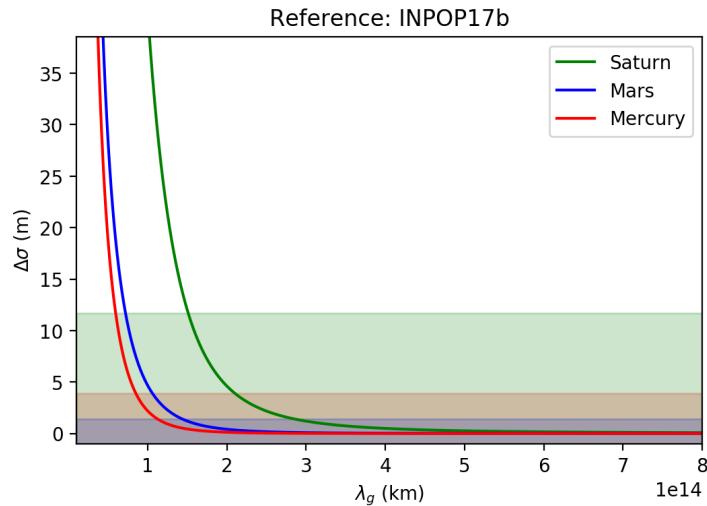


FIGURE 8 – Variation des écarts-types des résidus en fonction de  $\lambda_g$  sans ajuster les paramètres d’INPOP aux observations. Les valeurs de la solution de référence INPOP17b (données dans le tableau 8) ont été retranchées. Les zones colorées correspondent aux zones où les déviations standardes de chaque observable sont considérées *a priori* comme n’étant pas encore significatives. La limite vient de l’estimation de l’incertitude interne de l’éphéméride obtenue par comparaison avec DE436 (dernière colonne du tableau 8). Une évaluation plus rigoureuse du seuil de tolérance est donnée plus bas.

Si on regarde les zones où les résidus dépassent le seuil de différence avec l'éphéméride DE436, on obtient des contraintes dont la force est similaire, en ordre de grandeur, à ce qu'attendait Clifford Will [49].

### 3.2.2.3 Méthode du $\chi^2$ de Pearson

Afin de mieux évaluer la détermination que l'on obtiendrait avec une analyse post-ajustement, introduisons un critère statistique.

On voit sur la figure 8 que les résidus de Saturne (via les observations de Cassini) sont les premiers à se dégrader significativement, donc nous restreignons l'analyse statistique à ces derniers. Pour analyser quantitativement la dégradation des résidus de la sonde Cassini, nous avons utilisé le test du  $\chi^2$  de Pearson [77].

Ce test consiste à analyser deux échantillons de données et à quantifier la probabilité que ces deux échantillons soient issus de la même distribution. Pour calculer ce  $\chi^2$ , nous construisons un histogramme optimal avec les résidus de Cassini de INPOP17b en utilisant la méthode utilisée par Scott [78], en faisant l'hypothèse que les résidus suivent une distribution gaussienne. Nous déterminons le nombre optimal de cellules dans lesquelles nous comptons les résidus pour construire l'histogramme. Après cela, en utilisant les mêmes cellules, nous construisons un histogramme pour les résidus de Cassini sur la solution testée avec le terme additionnel (sans ajustement global des paramètres), pour une valeur donnée de  $\lambda_g$ . Pour être sûr de tout compter, la borne de gauche de la première cellule est  $-\infty$  et la borne de droite de la dernière cellule est  $+\infty$ . Soient  $(C_i)_i$  l'ensemble des cellules dans lesquelles nous comptons les valeurs des résidus,  $N_i^I$  et  $N_i^G(\lambda_g)$  le nombre de résidus de INPOP17b et de la solution testée, respectivement, contenus dans la cellule  $C_i$ . Ici,  $i$  est un entier variant entre 1 et le nombre optimal de cellules qui permet d'indexer les cellules. On peut alors calculer

$$\chi^2(\lambda_g) = \sum_i \frac{(N_i^G(\lambda_g) - N_i^I)^2}{N_i^I} \quad (102)$$

Pour les données Cassini de INPOP17b, le nombre optimal de cellules est 10. Alors, il est connu que  $\chi^2(\lambda_g)$  suit une loi de  $\chi^2$  à 10 degrés de liberté [77]. Si le  $\chi^2(\lambda)$  calculé est plus grand que son quantile pour une probabilité de confiance donnée  $p$ , alors on peut dire que la distribution des résidus obtenue pour  $\lambda_g$  est différente de celle des résidus de la solution de référence avec une probabilité  $p$ . Si tel est le cas, alors il faut vérifier si les résidus obtenus sont plus grands ou plus petits que ceux obtenus par la solution de référence. Dans le premier cas (résidus plus petits), cela signifie que l'effet ajouté augmente la qualité des résidus de façon significative et l'effet ajouté est alors un véritable effet physique avec une probabilité  $p$ . Dans le cas contraire (résidus plus gros), cela signifie que l'effet ajouté est faux,

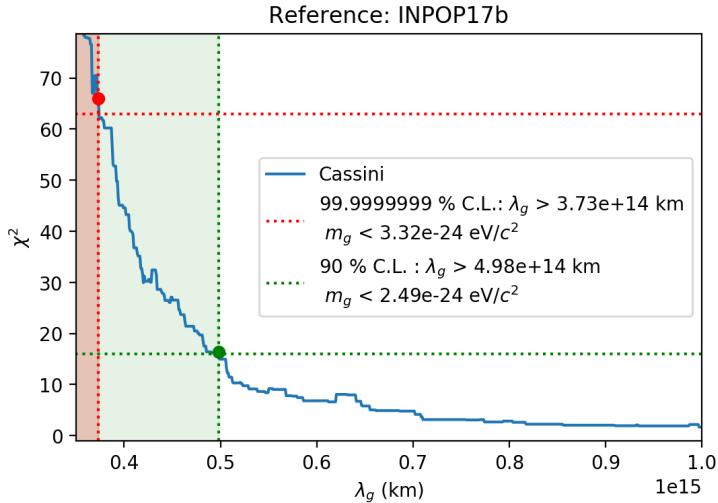


FIGURE 9 – Tracer de  $\chi^2$  en fonction de  $\lambda_g$  ainsi que les contraintes que nous aurions déduites sans faire d’ajustement global des paramètres.

avec une probabilité  $p$ . Ici, comme les résidus de Cassini se dégradent, une augmentation de  $\chi^2$  au dessus de la valeur critique indique une disqualification de la théorie testée, ce qui permet de rejeter tout un domaine de validité pour  $\lambda_g$  – qui seront les faibles valeurs, pour lesquelles l’effet dynamique est le plus important.

Traçons le  $\chi^2$  de Pearson pour les résidus de Cassini sans ajustement global des paramètres. Nous obtenons la figure 9. La contrainte obtenue sans ajustement global serait donc  $\lambda_g > 4.98 \times 10^{14}$  km à 90% de certitude, et  $\lambda_g > 3.73 \times 10^{14}$  km à 99.999999% de certitude. Nous allons voir qu’agir ainsi nous aurait amené à surestimer la contrainte d’un facteur 27.2 et 22.4 pour les contraintes à 90% et 99.999999% respectivement. Cela montre l’importance de faire systématiquement un ajustement global des paramètres lorsque l’on veut contraindre une théorie alternative, sous peine de se tromper parfois de plusieurs ordres de grandeur.

Toutefois, nous n’avons pas reproduit ici exactement la même analyse que Clifford Will (cf. section 3.2.1) donc il faut garder prudence dans cette comparaison.

### 3.3 CONTRAINTE SUR LA MASSE DU GRAVITON AVEC L’ÉPHÉMÉRIDE INPOP17B

Les résultats de ces travaux ont été publiés dans P.R.L. [32]. Nous reproduisons l’article en annexe C.

### 3.3.1 *Principe et méthode*

Une approche naïve serait d'inclure  $\lambda_g$  (ou même  $1/\lambda_g$ ) dans la procédure d'ajustement et de déduire l'incertitude sur  $\lambda_g$  de sa variance formelle résultante de l'algorithme de Gauss-Newton. Nous avons déjà expliqué dans la section 2.2.2 les problèmes que cela posait. Par ailleurs nous avons essayé de procéder à de tels ajustements, l'algorithme ne convergeait même pas. Cela a renforcé les suspicions que nous avions sur les défauts de cette méthode.

Vu qu'il n'y a qu'un seul paramètre dans cette théorie testée, la démarche à suivre est relativement simple. Moyennant un calculateur suffisamment puissant – et surtout qui permet de calculer en parallèle –, il suffit de faire plusieurs fois la procédure d'ajustement aux observations des paramètres habituels avec une grille de valeurs fixées pour  $\lambda_g$ , en prenant comme condition initiale pour les paramètres leur valeur obtenue pour une solution de référence. Pour chaque valeur de  $\lambda_g$  fixée, cela indiquera comment le modèle peut explorer l'espace des paramètres pour minimiser les résidus. Si les résidus finaux sont significativement plus faibles, alors la théorie sera réputée probablement meilleure que la relativité générale. Si aucune valeur ne permet d'améliorer significativement les résidus, alors on ne pourra accorder aucun crédit supplémentaire à la théorie alternative par rapport à la relativité générale. Enfin, et c'est ce qui est le plus intéressant, nous pouvons exclure la validité de la théorie dans toutes les zones pour lesquelles les résidus sont significativement plus dégradés que ceux de la solution de référence. Comme les résidus sont déjà très bons (centrés sur zéro et ayant un écart-type similaire à l'incertitude instrumentale), on s'attend plus à ce que ce travail donne une contrainte négative sur  $\lambda_g$  plutôt qu'une découverte positive.

Toute la question est de savoir ce que nous appelons "significativement dégradé/amélioré". Il y a toujours une part d'arbitraire lorsque nous fixons le seuil au delà duquel nous décidons du caractère significatif ou non de la quantité de dégradation. Le mieux que nous pouvons faire est de quantifier cet arbitraire et de lui donner un sens objectif et discutable par tous. C'est ce que permet de faire le test du  $\chi^2$  de Pearson par exemple.

### 3.3.2 *Résidus obtenus avec INPOP17b*

Pour pouvoir comparer la théorie testée à la solution de référence, il faut utiliser exactement la même procédure d'ajustement des paramètres aux observations. Ainsi la pondération des observations utilisée est la même que celle de l'éphéméride de référence. La comparaison entre les résidus de la solution qui contient le terme additionnel et la solution de référence donne une mesure de la sensibilité de l'éphéméride à la théorie alternative. Pour chaque valeur de  $\lambda_g$ , nous calculons

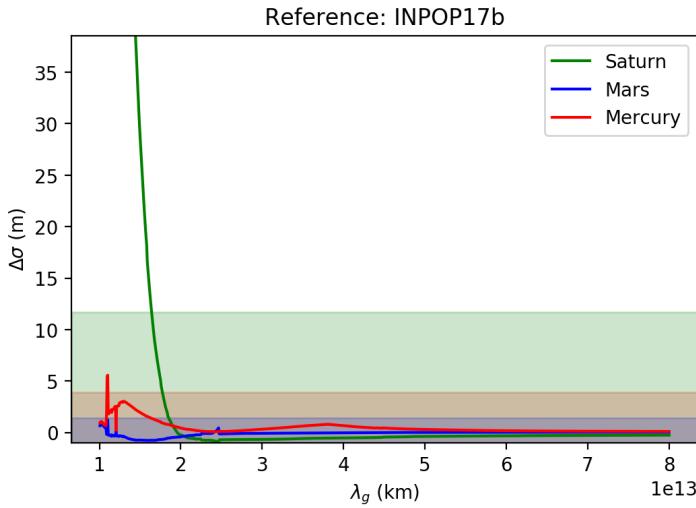


FIGURE 10 – Déviations standards en fonction de  $\lambda_g$  après 12 itérations d’ajustements des paramètres aux données. Les valeurs de la solution de référence INPOP17b (données dans le tableau 8) ont été retranchées. Les zones colorées correspondent aux zones où les déviations standards de chaque observable sont considérées *a priori* comme n’étant pas encore significatives. La limite vient de l’estimation de l’incertitude interne de l’éphéméride obtenue par comparaison avec DE436, c’est la dernière colonne du tableau 8. Une évaluation plus rigoureuse du seuil de tolérance est donnée plus bas. Attention, l’axe des abscisses a un ordre de grandeur de moins que sur la figure 8.

les résidus des observations télémétriques. Plus spécifiquement, nous exhibons les résidus obtenus pour les observations sensibles à  $\lambda_g$  (nous ne montrons pas celles qui n’étaient pas affectées). Il s’agit des mesures obtenues par les missions Cassini, Messenger, Mars Odyssey et Mex. Notre algorithme a effectué le calcul sur 1024 différentes valeurs fixes de  $\lambda_g$  progressives entre  $1 \times 10^{13}$  km et  $8 \times 10^{13}$  km. Au bout d’environ 10 itérations d’ajustement des paramètres, les résidus ne varient plus, ce qui indique que l’algorithme a convergé. Nous sommes donc allés jusqu’à la 12-ème itération à chaque fois pour être sûr que la convergence était atteinte. Dans la figure 10, nous traçons la différence entre les écart-types des résidus obtenus avec la théorie testée et ceux de la solution de référence.

On constate la différence d’un ordre de grandeur entre la figure 8 où l’ajustement global a été effectué avant l’introduction du terme du graviton massif, et la figure 10 où l’ajustement global a été effectué après. Cela illustre clairement l’importance d’effectuer un ajustement global des paramètres lorsque l’on teste un effet physique supplémentaire à ce que contient l’éphéméride de référence, sous peine de surestimer la force de la contrainte.

Contrairement à ce à quoi nous nous attendions, notamment étant donné la grande précision des données martiennes, c’est sur Saturne

que les résidus se dégradent le plus rapidement au fur et à mesure que  $\lambda_g$  diminue, à tel point que la dégradation des résidus de Saturne est significative avant même que les autres résidus ne se soient dégradés. Mais cela ne signifie pas que les données de Mercure ou Mars ne jouent aucun rôle. Bien au contraire, en raison du grand nombre de données sur Mars, c'est en quelque sorte surtout ces données-là qui dirigent l'ajustement – même s'il ne faut pas oublier qu'en toute généralité, *toutes* les observations utilisées dans INPOP servent à contraindre  $\lambda_g$  car *toutes* les observations sont utilisées pour l'ajustement global. C'est ce qui fait tout l'intérêt de disposer d'éphémérides planétaires complètes pour contraindre une théorie alternative. Ce n'est qu'après cet ajustement global que nous pouvons décider de nous concentrer sur les résidus de Cassini, ici clairement distingués comme les premiers à se dégrader significativement quand  $\lambda_g$  diminue suffisamment.

D'emblée, on remarque dans la figure 10 que les résidus se dégradent significativement pour Cassini autour de  $\lambda_g = 1.5 \times 10^{13}$  km, et que les résidus de Mars ne varient quasiment pas. On voit donc qu'avec un ajustement global, la contrainte est beaucoup moins forte que celle qu'attendait Clifford Will.

### 3.3.3 Contrainte avec le $\chi^2$ de Pearson

Dans la figure 11, nous traçons le  $\chi^2$  de Pearson en fonction de  $\lambda_g$ . Dans cette courbe, nous donnons deux valeurs seuils pour deux quantiles associés à deux probabilités d'exclusion :  $p = 99\%$  et  $p = 99.999999\%$ , ce qui correspond respectivement à  $\chi^2 = 15.99$  et  $\chi^2 = 62.94$  pour une distribution de  $\chi^2$  à dix degrés de liberté. Nous obtenons respectivement  $\lambda_g > 1.83 \times 10^{13}$  km (soit  $m_g < 6.76 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) à 90% de certitude, et  $\lambda_g > 1.66 \times 10^{13}$  km (soit  $m_g < 7.45 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) à 99.999999% de certitude. Ces résultats sont indiqués dans la figure 11, l'inégalité est stricte car nous avons pris le cas le plus pessimiste. Nous montrons un zoom autour du seuil critique pour indiquer que le  $\chi^2$  n'est pas strictement monotone localement. La valeur du seuil est traversée plusieurs fois mais nous avons pris le point avec la plus faible valeur de  $\lambda_g$  comme limite.

Nous constatons que ces contraintes plus réalistes sont plus faibles d'un facteur 27.2 et 22.4 pour les contraintes à 90% et 99.999999% respectivement que celles que nous aurions obtenues avec une analyse post-ajustement (voir section 3.2.2.3, figure 9).

Nous avons publié cette contrainte dans P.R.L. [32] avant d'élaborer la méthode de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  observationnel réduit. Nous avons reproduit l'article et son appendice dans l'annexe C.

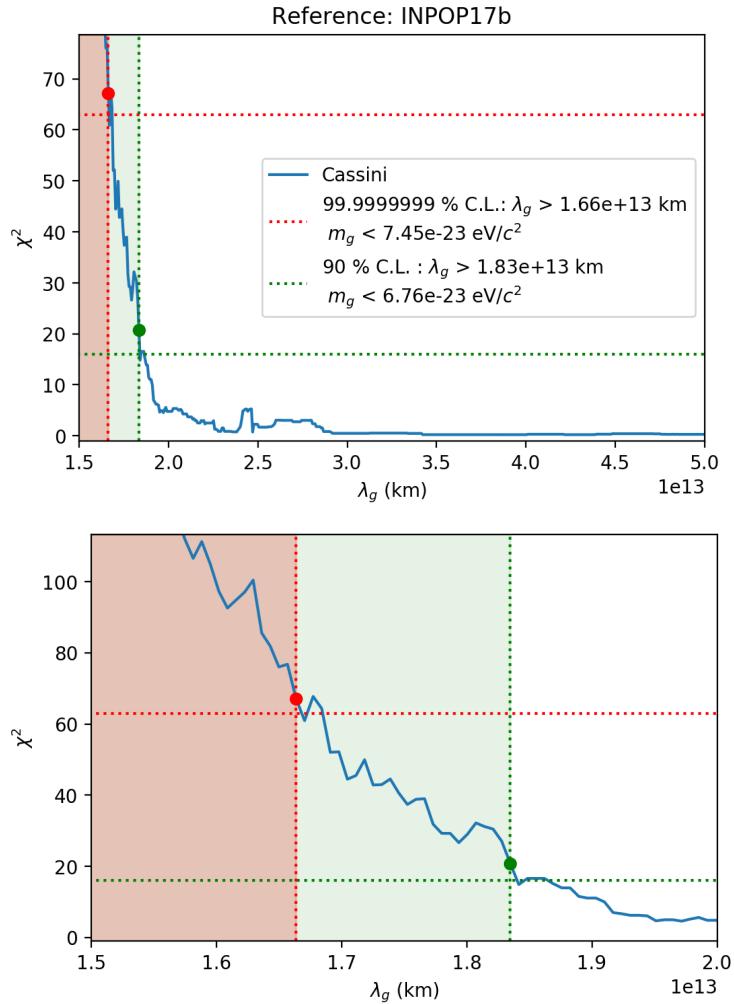


FIGURE 11 – Tracer de  $\chi^2(\lambda_g)$  en fonction de  $\lambda_g$ . Nous traçons aussi les valeurs des deux seuils : les probabilités  $p = 90\%$  et  $p = 99,999999\%$  correspondent respectivement à  $\chi^2 = 15.99$  et  $\chi^2 = 62.94$ . La figure du bas est un agrandissement de la zone la plus pertinente.

### 3.3.4 Contrainte avec le $\chi^2$ observationnel réduit

Nous vérifions que la méthode de test général exposée au chapitre 2 section 2.3.1 donne le même résultat que le précédent avec le test de Pearson. Ici c'est particulièrement simple car seul un ensemble de résidus se dégrade : ceux de Cassini fournis par le JPL, les seuls résidus de Cassini dont nous disposons à l'époque (voir figure 10). Ainsi, le  $\tilde{\chi}^2(\lambda_g)$  sensitif est limité aux données de Cassini et l'équation (40) devient

$$z(\lambda_g) = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{2}} \left( \frac{\sigma_{\text{Cassini}}^2(\lambda_g)}{\sigma_{\text{Cassini}}^2(\text{ref})} - 1 \right), \quad (103)$$

où  $\tilde{n}$  est le nombre d'observations de Cassini d'INPOP17b,  $\sigma_{\text{Cassini}}(\lambda_g)$  est la déviation standard des résidus de Cassini calculés après ajustement des paramètres à la valeur  $\lambda_g$  pour la longueur d'onde de Compton, et  $\sigma_{\text{Cassini}}(\text{ref})$  est la déviation standard des résidus de Cassini pour INPO17b. Depuis les résidus obtenus et montrés figure 10, on peut directement déduire la vraisemblance en fonction de  $\lambda_g$  quand INPOP17b est pris comme solution de référence. Nous montrons l'évolution de la vraisemblance dans la figure 12, où nous nous concentrons sur la limite à 90% de certitude juste pour vérifier la méthode. Notre nouvelle méthode statistique donne comme limite  $\lambda_g > 1.82 \times 10^{13}$  km, alors que la précédente donnait  $\lambda_g > 1.83 \times 10^{13}$  km. On voit que les deux critères sont cohérents entre eux, ce qui constitue une validation de notre critère statistique.

## 3.4 CONTRAINTE SUR LA MASSE DU GRAVITON AVEC L'ÉPHÉMÉRIDE INPOP19A

Les résultats de ces travaux ont été publiés dans P.R.D. [33]. Nous reproduisons l'article en annexe D.

### 3.4.1 Résidus d'INPOP19a

Comme il a été dit dans le chapitre 2 section 2.4.1.1, INPOP19a est une mise à jour importante par rapport à INPOP17b. Tout naturellement, nous avons appliqué la procédure consistant à calculer les déviations standardes des résidus pour une grille de valeurs de  $\lambda_g$ . Nous obtenons la figure 13 qui présente les différences entre la déviation standard des résidus de l'éphéméride testée après ajustement des paramètres,  $\lambda_g$  étant fixé, et la déviation standard des résidus sensibles de la solution de référence, qui ont été retranscrites dans le tableau 9.

Contrairement aux variations des résidus d'INPOP17b, ici de nombreux ensembles de résidus sont dégradés à peu près en même temps. Le test de Pearson n'était plus possible et il nous a fallu utiliser une

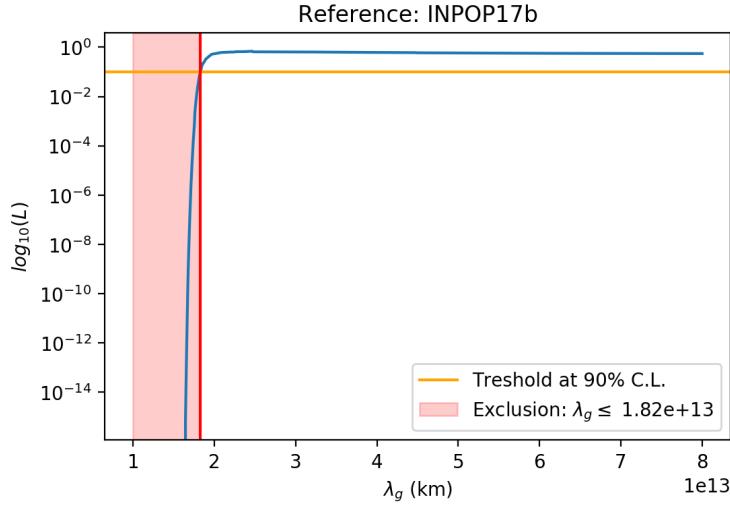


FIGURE 12 – Vraisemblance en fonction de  $\lambda_g$  pour INPOP17b. La ligne horizontale représente la limite en deçà de laquelle la théorie testée est fausse à 90% de certitude. La surface ombrée est la zone d'exclusion. Par prudence, nous identifions la d'abord la plus basse valeur de  $\lambda_g$  pour laquelle  $L(\lambda_g)$  est toujours au dessus du seuil, et nous considérons la valeur suivante de  $\lambda_g$  comme étant la contrainte. La contrainte est  $\lambda_g > 1.82 \times 10^{13}$  km.

TABLE 9 – Résumé des ensembles de données et leur incertitude observationnelle en mètres. Les données Messenger sont fournies par Verma et al. [72]. Les données "Cassini JPL" sont fournies par le JPL [79]. Cassini Navigation et les données de survol de gravité ainsi que le Grand Finale sont réduites par notre équipe [30; 38].

Observations	#	dates	$\sigma_r$ (m)
Messenger	1065	2011 – 2014	4.1
Mars Express	27849	2005-2017	2.0
Mars Odyssey	18234	2002-2014	1.3
Cassini JPL	166	2004-2014	25
Cassini Navigation and Gravity flybys	614	2006-2016	6.1
Cassini Grand Finale	9	2017	2.7
Juno	9	2016-2018	18.5

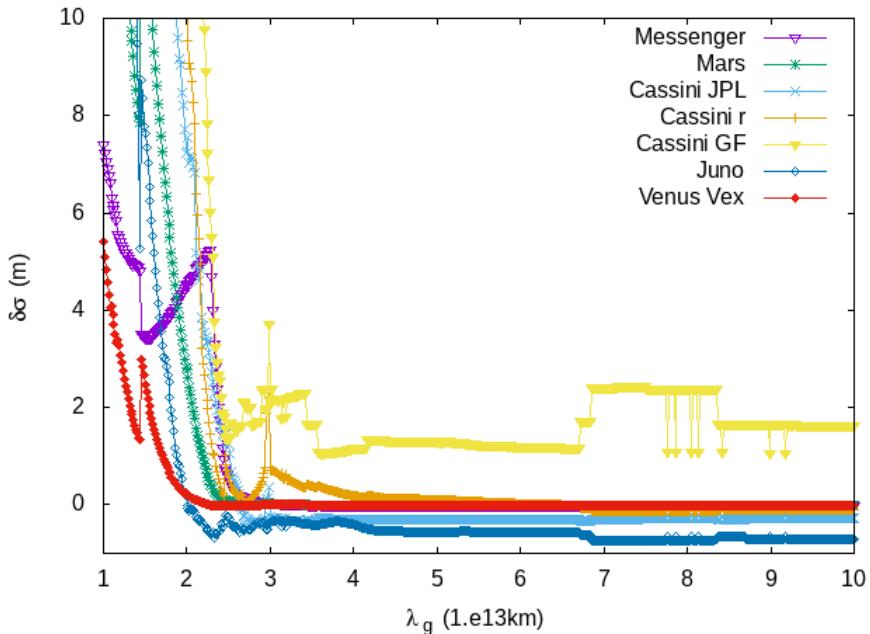


FIGURE 13 – Déviations standardes des données sensibles tracées en fonction de  $\lambda_g$ . Nous avons retranché les écart-types de l'éphéméride de référence à chaque ensemble de données (voir tableau 9). "Cassini JPL" correspond aux données fournies par le JPL. "Cassini r" correspond aux données Cassini Navigation et aux données de survol de gravité réduites par notre équipe, "Cassini GF" correspond au Grand Finale de Cassini réduit par notre équipe, et Mars correspond à une moyenne journalienne des résidus de Mars Odyssey et Mars Express.

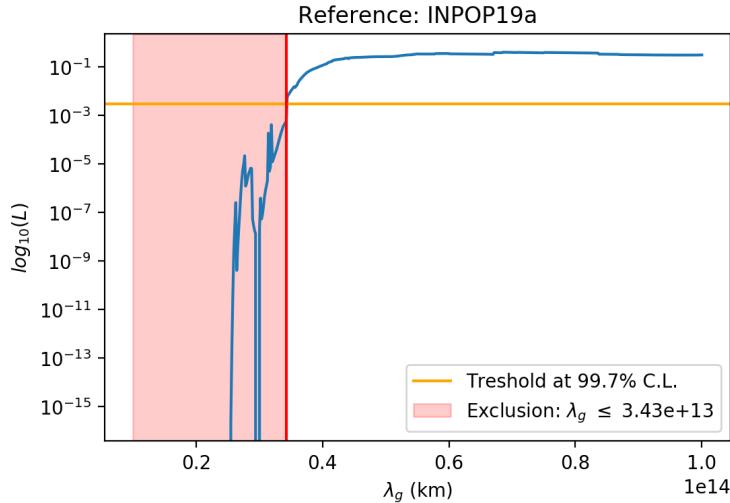


FIGURE 14 – Fonction de vraisemblance en fonction de  $\lambda_g$ . La ligne horizontale représente la limite en deçà de laquelle la théorie testée est fausse à une confiance de 99.7%. La ligne verticale représente la valeur de  $\lambda_g$  pour laquelle  $L(\lambda_g) < 0.03\%$ . La zone ombrée correspond à la zone d'exclusion. La contrainte déduite est  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km.

méthode de test plus globale. C'est à ce moment-là que m'est venue l'idée du test de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  observationnel réduit aux observations sensibles qui a été exposé à la section 2.3.1. Ce test ayant fait ses preuves en redonnant la même contrainte pour INPOP17b et ayant servi à contraindre la possible position de P9 (chapitre 2 section 2.4.2, ou [31] ou annexe B), nous allons pouvoir l'utiliser pour contraindre la masse associée au graviton.

### 3.4.2 Mise à jour de la contrainte

Pour utiliser notre méthode de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  observationnel réduit, il faut déterminer les données sensibles à  $\lambda_g$  et celles qui ne le sont pas. À partir des résidus de la figure 13, nous pouvons voir que lorsque les résidus de Vénus se dégradent, les autres se sont tous déjà fortement dégradés. Nous pouvons donc exclure les données de Vénus. Les autres données non citées ne présentent pas de dégradations significatives. Elles ne sont pas retenues dans le calcul de  $\chi^2$ . Cependant il est important de noter que toutes les données sont utilisées à chaque fois pour ajuster les paramètres. Toutes contribuent donc indirectement à contraindre la valeur de  $\lambda_g$ . Nous calculons la vraisemblance à partir des données retenues et nous obtenons la figure 14.

La nouvelle contrainte est  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km à 99.7% de certitude. C'est environ deux fois meilleur que ce que l'on a obtenu

avec INPOP17b. Cela peut s'expliquer par l'amélioration significative effectuée par la mise à jour de l'éphéméride ces dernières années.

### 3.5 EXTENSION À LA 5ÈME FORCE

Le potentiel de Yukawa permet aussi de contraindre les théories de la 5ème force qui prennent aussi la forme d'une modification du potentiel newtonien [8o] :

$$V_5(r) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 + \alpha \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \right] \quad (104)$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont respectivement une constante de couplage et une longueur d'onde de Compton à contraindre. Dans le cas où  $r|\alpha|/\lambda \ll 1$  on peut effectuer un développement limité de ce potentiel. En redéfinissant la constante de gravitation  $G \leftarrow G(1 + \alpha)$  et en redéfinissant l'échelle de temps en relativité, on peut supprimer le terme constant et se ramener au potentiel suivant

$$V_5(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM\alpha r}{2\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \quad (105)$$

de telle sorte qu'il suffit de substituer  $\lambda/\sqrt{\alpha}$  à  $\lambda_g$  dans les analyses précédentes. Cependant cela n'est valable que si  $\alpha > 0$ . Nous avons donc dû étendre notre étude dans le cas où  $\alpha < 0$  en changeant le signe du terme additionnel de l'accélération. En refaisant exactement la même étude, pour  $\alpha < 0$  nous obtenons la figure 15.

### 3.6 CONCLUSION, RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

Nous avons utilisé des méthodes statistiques adaptées et comparées entre elles (test de Pearson avec INPOP17b et la vraisemblance déduite du  $\chi^2$  observationnel réduit avec INPOP19a) pour contraindre une théorie alternative à la relativité générale : la suppression Yukawa du potentiel de Newton associée génériquement au graviton massif. Nous avons illustré dans ce test de théorie alternative la nécessité de toujours faire un ajustement global des paramètres pour avoir une contrainte réaliste, autrement on risque de surestimer la force de la contrainte de plus d'un ordre de grandeur.

À un degré de certitude de 99.7%, la contrainte sur la longueur d'onde de Compton ou sur la masse associée est  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km et  $m_g < 3.62 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup> respectivement. Nous avons étendu cette contrainte au cas de la théorie de la cinquième force dans le cas où  $|\alpha|r/\lambda \ll 1$ . À 99.7% de certitude, la contrainte est  $\lambda/\sqrt{\alpha} > 3.43 \times 10^{13}$  km si  $\alpha > 0$ ,  $\lambda/\sqrt{-\alpha} > 3.02 \times 10^{13}$  km si  $\alpha < 0$ . Nous résumons ces résultats dans le tableau 10 en ajoutant d'autres seuils de probabilités.

Il est remarquable que les contraintes données par la collaboration LIGO-Virgo donnent le même ordre de grandeur (respectivement

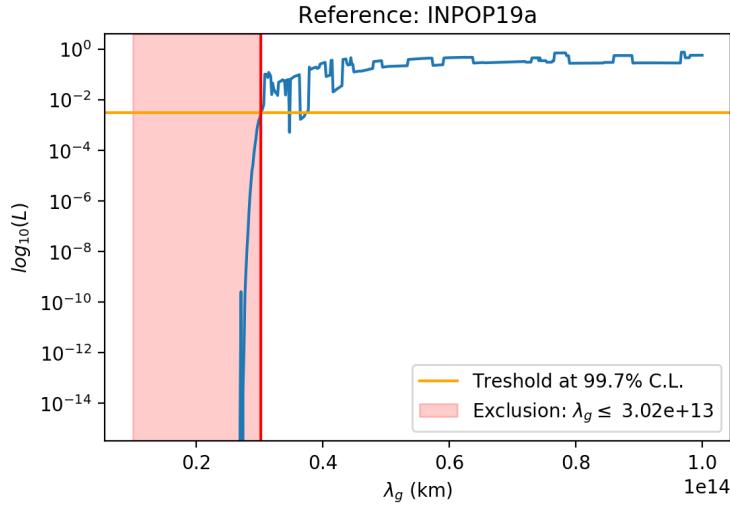


FIGURE 15 – Vraisemblance en fonction du paramètre de la théorie de la 5ème force  $\lambda/\sqrt{-\alpha}$  dans le cas où  $\alpha < 0$ . La ligne horizontale représente la limite en deçà de laquelle la théorie est réputée fausse à 99.7% de certitude. La ligne verticale indique la valeur de  $\lambda/\sqrt{-\alpha}$  pour cette limite. La surface colorée indique la zone d'exclusion. La contrainte est  $\lambda/\sqrt{-\alpha} > 3.02 \times 10^{13}$  km à 99.7% de certitude.

$\lambda_g > 2.6 \times 10^{13}$  km et  $m_g < 4.7 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  à 90% de certitude) [66]. Nous interprétons cela comme une pure coïncidence car la contrainte n'est pas du tout liée au même type de phénomène. En effet, la collaboration LIGO-Virgo contraint la théorie du graviton massif dans le régime radiatif (Cf. section 3.1.1) alors que nous la contraignons dans le régime orbital. Comme la déformation du signal d'ondes gravitationnelles augmente avec la distance de la source, si les événements détectés par LIGO-Virgo étaient plus lointains, leur contrainte serait meilleure, et s'ils étaient plus proche, leurs contrainte serait moins bonne. L'équipe d'INPOP et la collaboration LIGO-Virgo font donc un travail complémentaire pour tester cette théorie alternative dans différents régimes.

Cette théorie est ce qu'il y a de plus simple à tester dans le système solaire car il n'y a qu'un seul paramètre à contraindre. En pratique, c'est cette théorie qui nous a permis de calibrer toutes nos méthodes statistiques (en particulier le  $\chi^2$  observationnel réduit) avant d'étudier une théorie plus complexe comme le dilaton léger (chapitre 4) ou de l'appliquer à la contrainte de la possible position de P9 (section 2.4.2, [31], et annexe B).

TABLE 10 – Contraintes à des degrés de certitudes de 90%, 99.7%, et 99.99997% pour la longueur d'onde de Compton  $\lambda_g$  du potentiel Yukawa associée génériquement au graviton massif, et à  $\lambda / \sqrt{|\alpha|}$  pour la théorie de la cinquième force. Les contraintes données pour  $\lambda_g$  et  $\lambda / \sqrt{|\alpha|}$  correspondent aux valeurs minimales que peut avoir  $\lambda_g$ , alors que pour  $m_g$  cela correspond aux valeurs maximales. À titre de comparaison nous indiquons les résultats à 90% des contraintes de la collaboration LIGO-Virgo [66] et celles d'INPOP17b [32] à 90%, avant de donner nos derniers résultats avec INPOP19a [33].

Degré de certitude	Potentiel de Yukawa		Cinquième force	
	$\lambda_g$ ( $\times 10^{13}$ km)	$m_g$ ( $\times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup> )	$\lambda / \sqrt{\alpha}, \alpha > 0$ ( $\times 10^{13}$ km)	$\lambda / \sqrt{-\alpha}, \alpha < 0$ ( $\times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup> )
GWTC-1 [66]				
90%	2.6	4.7		
INPOP17a [32]				
90%	1.83	6.76	1.83	
INPOP19a [33]				
90%	3.93	3.16	3.93	3.77
99.7%	3.43	3.62	3.43	3.02
99.99997%	2.69	4.61	2.69	2.82



# 4

## TEST DU PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE FAIBLE DANS LE SYSTÈME SOLAIRE AVEC LA THÉORIE DILATON

### 4.1 INTÉRÊT DE TESTER LE DILATON LÉGER

Depuis la publication inaugurale de Brans & Dicke (1961) [11], les théories tenseur-scalaire sont d'importantes concurrentes de la relativité générale d'Einstein. À l'origine, cette théorie a pour objectif de tenir compte du principe de Mach qui affirme que la notion de mouvement ne peut être que relative, qu'il ne peut pas y avoir d'accélération ni de rotation absolue. Il faut donc que la loi même de la gravitation dépende de la structure matérielle globale de l'univers. C'est par l'intermédiaire d'un champ scalaire que Brans & Dicke ont eu l'idée de tenir compte de cette dépendance.

Une particularité de ces théories est de pouvoir tendre vers la même phénoménologie que la relativité générale en champ faible tout en déviant plus fort de la relativité générale dans des domaines plus difficiles d'accès. Par exemple, Damour & Nordtvedt ont montré que la cosmologie de certaines théories tenseur-scalaire tend à se relaxer vers la relativité générale de telle sorte qu'il est difficile de les distinguer dans la phénoménologie contemporaine [12].

Un autre intérêt des théories tenseur-scalaire est qu'elles sont souvent compatibles avec des tentatives d'unifier la relativité générale et la mécanique quantique. En effet, certaines théories des cordes contiennent des mécanismes qui font émerger des dilatons légers à l'échelle macroscopique, qui peuvent se coupler faiblement à la matière et au champ de gravité en champ faible [81; 82]. En fait, le terme *dilaton* vient de ce qu'en théorie des cordes, les *extra-dimensions* – autres que les quatre dimensions de l'espace-temps – se replient sur elles-mêmes et forment un certain hyper-volume. C'est de la variation de ce volume qu'émerge le champ scalaire associé à ce mécanisme. Dans toute la suite, nous identifierons le *dilaton* aux différentes apparitions formelles dans la phénoménologie de ce champ scalaire associé.

Cependant, même en se séparant peu de la relativité générale en champ faible, ces théories tenseur-scalaires laissent des traces de leur différence qui ont une manifestation phénoménologique faible mais non nulle. Or, il se trouve que la plupart des théories tenseur-scalaire contiennent la propriété de violer le principe d'équivalence fort, ainsi que l'universalité de la chute libre quand le couplage avec la matière n'est pas universel<sup>1</sup> (ou le principe d'équivalence faible) [83; 6; 2].

<sup>1</sup>. On peut cependant rappeler que la théorie de Nordström ne viole pas ces principes, mais qu'elle est invalidée par les observations [19].

Depuis plusieurs années, les théories tenseur-scalaire qui contiennent un couplage universel conforme entre le champ scalaire et la matière peuvent être encodées dans le formalisme post-newtonien paramétrisé lorsque les champs et les vitesses sont faibles [13]. Les tests les plus célèbres de ces théories dans le système solaire contraignent les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  [84; 28] qui apparaissent comme des modifications des premiers ordres post-newtoniens dans les coefficients du tenseur métrique [13; 14]. Ces théories tenseur-scalaire sont des théories métriques – elles ne contredisent pas le principe d'équivalence d'Einstein. En revanche elles peuvent contredire le principe d'équivalence fort – c'est le cas dès que  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents de 1 [13; 14].

Les théories tenseur-scalaire peuvent ne plus être métriques – ou violer le principe d'équivalence d'Einstein – s'il y a un couplage explicite avec la matière, car le principe d'équivalence faible peut être brisé. Nous allons étudier un couplage non universel avec la matière dans la section 4.2, mais il est possible de montrer que le principe d'équivalence faible est brisé même si toutes les fonctions de couplage sont posées égales – autrement dit, même si le couplage avec la matière est universel. Dans ce cas, les théories considérées ne sont plus métriques, car les particules test ne suivent plus les géodésiques du tenseur métrique en raison de la modification de leur trajectoire en fonction de leur composition interne. Toutefois, Nitti & Piazza [85] considèrent un cas de couplage entre le dilaton et la matière dans lequel le principe d'équivalence faible peut être respecté si toutes les fonctions de couplage sont égales. Nous y reviendrons en détail dans la section 4.2, en montrant que les deux points de vue sont équivalents dans notre approche phénoménologique.

Jusqu'à présent, aucun test du principe d'équivalence faible en théorie tenseur-scalaire n'a encore été effectué à l'échelle planétaire du système solaire. Nous allons voir que la phénoménologie du dilaton léger couplé non universellement à la matière autorise des violations du principe d'équivalence fort et du faible de façon déterminée par un nombre fini de constantes fondamentales de couplage. Ce nombre fini de constantes de couplages permet d'effectuer des tests sans être limité par le trop grand nombre de paramètres libres à contraindre.

Dans la section 4.2, nous exposons cette phénoménologie à partir des principes de la théorie. Nous y dérivons les équations du mouvement et nous exposons la théorie de l'optique géométrique en théorie tenseur-scalaire en montrant quelles constantes supplémentaires doivent être ajoutées, dans le cas d'un couplage non universel linéaire puis non linéaire. Dans la section 4.3, nous montrons un exemple d'application de contrainte sur la théorie grâce aux données de télémétrie laser-Lune. Dans la section 4.4, nous contraignons la théorie du dilaton léger non universel linéaire à l'aide des éphémérides planétaires.

## 4.2 PHÉNOMÉNOLOGIE DU DILATON LÉGER DANS LE SYSTÈME SOLAIRE

La phénoménologie à l'échelle du système solaire de la théorie du dilaton léger a été traitée de façon plus ou moins dispersée dans la littérature. Je propose ici une compilation qui permet d'obtenir la modélisation des différents effets mesurables dans le système solaire à partir des principes de la théorie. D'abord, le travail de systématisation des tests de gravitation par Clifford Will a ouvert la voie vers une simplification des tests de gravitation dans le système solaire ; son livre (1981, puis réédité en 2018 [13]) est devenu un classique. Il faut ensuite noter l'importante mise à jour du formalisme post-newtonien par Damour, Soffel & Xu (1990) [43], étendu avec des paramètres post-Newtoniens (PPN) par Klioner & Soffel (2000) [14] ; cela constitue une base solide pour effectuer des calculs en formalisme post-newtonien, adapté au système solaire. Les travaux sur les théories tenseur-multi-scalaires de Damour & Esposito-Farèse (1992) [23] contiennent en principe tous les développements post-newtoniens nécessaires pour établir les équations du mouvement de la théorie dilaton léger, mais à ce stade, leur théorie ne contient qu'un couplage conforme entre les champs scalaires et la matière, elle reste donc métrique et n'inclut pas une violation du principe d'équivalence faible. Le couplage conforme s'exprime à partir de l'action suivante [3]

$$S = \frac{1}{2\kappa c} \int \left[ f(\varphi)R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right] \sqrt{-g} \, d^4x + S_m(g, \Psi_i) \quad (106)$$

où  $\varphi$  est un champ scalaire qui se couple au champ de gravitation mais pas explicitement à la matière (il est absent du deuxième terme de l'action),  $g$  est le tenseur métrique et  $g^{\mu\nu}$  ses composantes contravariantes,  $g$  est le déterminant formé par les composantes covariantes du tenseur métrique,  $R$  est le scalaire de Ricci,  $f$  et  $\omega$  sont des fonctions différentiables,  $S_m$  est la fonctionnelle qui décrit la matière, et  $\Psi_i$  sont les différents champs de la matière. Une transformation conforme de la métrique  $g \mapsto g^*(\varphi)$  et une transformation du champ scalaire  $\varphi \mapsto \phi$  (que nous allons expliciter plus bas) permettent de transformer cette action ainsi [23; 3]

$$S = \frac{1}{2\kappa_* c} \int (R^* - 2g_*^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) \sqrt{-g_*} \, d^4x + S_m(g^*(\varphi), \Psi_i) \quad (107)$$

C'est de la dépendance de  $S_m$  en  $\varphi$  via la transformation conforme  $g \mapsto g^*(\varphi)$  que vient ce que l'on appelle le couplage conforme entre le champ scalaire et la matière, mais il est toujours possible de se ramener à une absence de couplage par la transformation réciproque, et ce couplage ne viole pas le principe d'équivalence faible mais seulement le fort, car le couplage local entre la matière et le champ scalaire engendre des phénomènes d'auto-gravitation [23]. Cependant, le cadre formel développé est suffisamment large pour être généralisé

facilement à un couplage non universel, car Damour & Esposito-Farèse ont traité cette dépendance de la matière en  $\varphi$  de façon très générale avant d'exploiter la spécificité du couplage conforme ; nous pouvons donc utiliser leurs calculs. Plus récemment, Damour & Donoghue (2010) [2] ont montré comment calculer les coefficients de couplage des corps matériels au champ scalaire dans le cas d'un couplage explicite linéaire entre le champ scalaire et le champ de la matière. Minazzoli & Hees (2016) [3] ont généralisé cette approche à un couplage non linéaire et ont esquissé les calculs pour une phénoménologie post-newtonienne d'un dilaton non linéaire léger [86].

Ce travail de dérivation des équations phénoménologiques à partir de l'action a bénéficié de discussions précieuses avec Olivier Minazzoli et Aurélien Hees.

#### 4.2.1 Cadre général de la théorie

On se place dans une variété pseudo-riemannienne  $\mathcal{M}$  de dimension 4 munie d'une métrique  $g$  de signature  $(-, +, +, +)$ . On se dote d'une carte générique  $(x^\mu)$  qui contient la propriété de faire tendre les coefficients du tenseur métrique vers ceux de la métrique de Minkowski cartésienne  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  quand  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\delta_{ij}x^i x^j}$  tend vers l'infini (nous supposons que l'étendue de la matière que nous étudions est finie). Dans la théorie du dilaton léger, l'action se décompose en deux parties

$$S = S_g[g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \varphi, \partial\varphi] + S_m[g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi_i] \quad (108)$$

$g_{\mu\nu}$  sont les coefficients du tenseur métrique dans la carte générique considérée :  $g = g_{\mu\nu} \underline{\mathbf{dx}}^\mu \otimes \underline{\mathbf{dx}}^\nu$ , où  $\underline{\mathbf{dx}}^\mu (\vec{\partial}_\nu) = \delta_\nu^\mu$ .  $\varphi$  représente le champ scalaire que l'on peut appeler "dilaton".  $\Psi_i$  représente les différents champs de matière. Cette action suppose d'une part un couplage entre le champ de gravité et le champ scalaire (exprimé dans les dépendances de la fonctionnelle  $S_g[g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \varphi, \partial\varphi]$ ), et d'autre part un couplage entre le champ scalaire et les champs de matière (exprimé dans les dépendances de la fonctionnelle  $S_m[g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi_i]$ ).

#### 4.2.2 Action du champ de gravité couplé au champ scalaire

Nous commençons par analyser le couplage entre le champ de gravité et le champ scalaire et nous verrons le couplage entre le champ scalaire et la matière ultérieurement. L'action de la théorie du dilaton léger contient le terme d'Einstein-Hilbert couplé avec une fonction du champ scalaire, ainsi qu'un terme cinétique du champ scalaire multiplié par une autre fonction arbitraire, et ne contient pas de

potentiel du champ scalaire (autrement le dilaton aurait une masse) [3] :

$$S_g = \frac{1}{2\kappa c} \int \left[ f(\varphi)R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (109)$$

où  $\kappa = 8\pi G/c^4$ ,  $g$  est le déterminant de la matrice formée par les coefficients  $g_{\mu\nu}$  du tenseur métrique,  $R$  est le scalaire de Ricci,  $f(\varphi)$  et  $\omega(\varphi)$  sont deux fonctions du champ scalaire. Nous pourrions dériver les équations du champ à partir de cette action mais nous allons effectuer un changement de métrique pour les simplifier. Nous allons faire une transformation conforme pour absorber la fonction  $f(\varphi)$  afin de se rapprocher formellement le plus possible des équations d'Einstein. Nous paramétrons la transformation conforme ainsi

$$g_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}^* \quad (110)$$

La carte notée génériquement ( $x^\mu$ ) reste inchangée, il s'agit de changer la métrique et donc la définition des longueurs. Quelques principes physiques peuvent changer en apparence, la métrique de coefficients  $g_{\mu\nu}^*$  n'aura pas toutes les propriétés de celle de coefficients  $g_{\mu\nu}$ , il faut la voir comme un outil de calculs efficace. Quand on utilise la métrique  $g_{\mu\nu}$ , on dit que l'on travaille dans la trame de Jordan<sup>2</sup>, alors que quand on utilise la métrique  $g_{\mu\nu}^*$ , on dit que l'on travaille dans la trame d'Einstein. Certains physiciens traduisent malencontreusement la terminologie anglophone "Einstein frame" et "Jordan frame" par "référentiel d'Einstein" et "référentiel de Jordan" – à cause du terme anglais "reference frame" traduit par "référentiel" – alors que tout cela n'a strictement rien à voir avec des référentiels, puisque dans chacune des deux trames on peut choisir autant de référentiels locaux que l'on veut. Il vaut mieux voir cela de façon mathématique : pour la même variété différentiable repérée par une carte ( $x^\mu$ ), cela revient simplement à lui attribuer deux métriques différentes. Pour rendre les notations plus compactes nous noterons  $A = A(\varphi)$ . Quelques calculs directs permettent de montrer que [87]

$$R = A^{-2}(R_* - 6A^{-1}\square_* A), \quad \sqrt{-g} = A^4 \sqrt{-g^*} \quad (111)$$

où  $\square_* = g_*^{\mu\nu} \nabla_\mu^* \nabla_\nu^*$  est le d'alembertien calculé dans la nouvelle trame (les dérivations covariantes étant calculées avec la métrique de la nouvelle trame). Cela donne l'action suivante

$$S_g = \frac{1}{2\kappa c} \int \left[ A^2 f(\varphi) R^* - 6f(\varphi) A \square_* A - A^2 \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g_*^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right] \sqrt{-g^*} d^4x \quad (112)$$

---

2. On devrait plutôt parler de la *trame des cordes*, car à proprement parler, la trame de Jordan consiste en ce que le champ scalaire ne se couple pas avec la matière et dans ce cas la théorie est métrique, ce qui est impossible dans notre théorie où le principe d'équivalence faible est violé. Nous utilisons quand même la terminologie "trame de jordan" car aucune confusion n'est possible dans notre cadre.

De là on peut choisir le facteur conforme pour simplifier l'action. En imposant

$$A^2 \frac{f(\varphi)}{f_0} = 1, \quad f_0 = f(\varphi_0) \quad (113)$$

où  $\varphi_0$  est la valeur que prend le champ à l'infini du système étudié, et en posant

$$\kappa_* = \frac{\kappa}{f_0} \quad (114)$$

il vient

$$S_g = \frac{1}{2\kappa_* c} \int \left[ R^* - 6A^{-1} \square_* A - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi(\varphi)} g_*^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right] \sqrt{-g^*} d^4x \quad (115)$$

On retrouve le terme de Hilbert. Sachant que

$$\square_* A = \frac{1}{\sqrt{-g^*}} \partial_\mu (\sqrt{-g^*} g_*^{\mu\nu} \partial_\nu A) \quad (116)$$

on peut effectuer une intégration par partie

$$\int A^{-1} \square_* A \sqrt{-g^*} d^4x = \int \left( \frac{d \ln A}{d\varphi} \right)^2 g_*^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \sqrt{-g^*} d^4x \quad (117)$$

avec  $A_{,\mu} = \varphi_{,\mu} dA/d\varphi$  et en annulant les termes de bords puisqu'à l'infini, on a  $A(\varphi) = A(\varphi_0) = \text{constante}$ , donc la dérivée s'annule. De plus, d'après (113) on a

$$4 \left( \frac{d \ln A}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \right)^2 \quad (118)$$

En recomposant, l'action se récrit

$$S_g = \frac{1}{2\kappa_* c} \int \left\{ R^* - 6 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \right)^2 + \frac{\omega(\varphi)}{\varphi f(\varphi)} \right] g_*^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right\} \sqrt{-g^*} d^4x \quad (119)$$

Pour simplifier encore l'action on peut redéfinir le champ scalaire  $\phi : \varphi \mapsto \phi(\varphi)$  en imposant

$$\left( \frac{d\phi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{Z(\varphi)}{2} = \frac{\omega(\varphi)}{\varphi f(\varphi)} + \frac{3}{2} \left( \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \right)^2 \quad (120)$$

ce qui fait aboutir à une action particulièrement simple

$$S_g = \frac{1}{2\kappa_* c} \int (R^* - 2g_*^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) \sqrt{-g^*} d^4x \quad (121)$$

On sait que le premier terme de cette intégrale, l'action d'Einstein-Hilbert, donnera le membre de gauche de l'équation d'Einstein après variation de cette action par rapport à  $g_*^{\mu\nu}$  (Voir par exemple le cours de Landau & Lifchitz [22]). De même, on sait que<sup>3</sup>

$$\delta \left( \int \sqrt{-g^*} d^4x \right) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g^*} g_{\mu\nu}^* \delta g_*^{\mu\nu} d^4x \quad (122)$$

---

<sup>3</sup>. Idem : [22].

d'où

$$\begin{aligned} \delta \left( \int g_*^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \sqrt{-g_*} d^4x \right) &= \int \left( -2\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g_{\mu\nu}^* \right) \\ &\quad \times \sqrt{-g_*} \delta g_*^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (123)$$

Le premier jeu d'équations du champ est donc

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} R_* g_{\mu\nu}^* = \kappa_* T_{\mu\nu}^* + 2\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g_{\mu\nu}^* \quad (124)$$

où par définition,

$$T_{\mu\nu}^* = -\frac{2}{\sqrt{-g_*}} \frac{\delta S_m^*[g_{\mu\nu}^*, \phi, \Psi_i]}{\delta g_*^{\mu\nu}} \quad (125)$$

avec par définition

$$S_m^*[g_{\mu\nu}^*, \phi, \Psi_i] = S_m[g_{\mu\nu}(\varphi(\phi), g_{\alpha\beta}^*), \varphi(\phi), \Psi_i] \quad (126)$$

Nous nous occuperons du contenu du tenseur énergie-impulsion plus tard. En prenant la trace de cette équation, nous avons  $R_* = 2g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \kappa_* T_*$  où  $T_* = g_*^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^*$  est la trace de  $T_{\alpha\beta}^*$ , de telle sorte que nous pouvons récrire ces équations ainsi

$$R_{\mu\nu}^* = \kappa_* \left( T_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} T_* g_{\mu\nu}^* \right) + 2\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \quad (127)$$

C'est le premier jeu d'équations du champ. Comme un champ supplémentaire a été ajouté, il faut faire varier l'action par rapport à  $\phi$  en supposant  $g_*^{\mu\nu}$  fixé. Nous voyons ici tout l'intérêt de séparer les termes gravitationnels des termes du champ scalaire. Il suffit de faire varier le terme qui contient le champ scalaire, ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta \left( \int g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right) \sqrt{-g_*} d^4x &= \int 2g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} (\delta\phi)_{,\beta} \sqrt{-g_*} d^4x \\ &= -2 \int \left( g_*^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \sqrt{-g} \right)_{,\beta} \delta\phi d^4x \\ &= \int \square_* \phi \sqrt{-g_*} \delta\phi d^4x \end{aligned} \quad (128)$$

La deuxième égalité est obtenue par intégration par partie. De là, le deuxième jeu d'équations du champ est

$$\square_* \phi = -\frac{\kappa_*}{2} \frac{\delta S_m^*}{\delta \phi} \quad (129)$$

#### 4.2.3 Action de la matière : couplage universel et non universel avec le champ scalaire

##### 4.2.3.1 Le lagrangien général de la théorie

L'action liée à la matière se décompose en deux parties

$$S_m[g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi_i] = \int (\mathcal{L}_{MS}(g_{\mu\nu}, \psi_i) + \mathcal{L}_{int}(g_{\mu\nu}, \varphi, \psi_i)) \sqrt{-g} d^4x \quad (130)$$

Le premier terme est le lagrangien du modèle standard qui, seul, intégré dans l'espace-temps, redonnerait la théorie d'Einstein. Le deuxième terme consiste en un couplage entre certains termes du modèle standard et du dilaton [3; 86]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = & \frac{D_e(\varphi)}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{D_g(\varphi)\beta_3(g_3)}{2g_3} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ & - \sum_{i=e,u,d} (D_{m_i}(\varphi) + \gamma_{m_i} D_g(\varphi)) m_i \bar{\psi}_i \psi_i\end{aligned}\quad (131)$$

où  $F_{\mu\nu}$  est le tenseur de Faraday,  $G_{\mu\nu}^a$  est le tenseur des gluons,  $g_3$  est la constante de couplage de l'interaction forte et  $\beta_3(g_3) = \mu \partial \ln g_3 / \partial \mu$  est sa fonction beta relative à la brisure de son invariance d'échelle,  $m_i$  est la masse des fermions,  $\psi_i$  leur spinor, et  $\gamma_{m_i} = -\mu \partial \ln m_i / \partial \mu$  est la fonction beta relative à l'anomalie dimensionnelle des masses des fermions couplés aux gluons. Les fonctions  $D_i(\varphi)$  caractérisent les différents couplages entre les champs de la matière et du dilaton.  $D_e$  caractérise la dépendance en  $\varphi$  de la constante de structure fine,  $D_g$  caractérise la dépendance en  $\varphi$  de l'échelle des masses  $\Lambda_3$  en chro-modynamique quantique ainsi que la valeur des masses des quarks à l'échelle  $\mu = \Lambda_3$ . En effet, en comparant au lagrangien du modèle standard, les différentes constantes de la physique apparaissent modifiée et dépendantes de  $\varphi$  de la façon suivante

$$\alpha(\varphi) = (1 + D_e(\varphi))\alpha \quad (132)$$

$$\Lambda_3(\varphi) = (1 + D_g(\varphi))\Lambda_3 \quad (133)$$

$$m_e(\varphi) = (1 + D_{m_e}(\varphi))m_e \quad (134)$$

$$[m_q(\Lambda_3)](\varphi) = (1 + D_q(\varphi))m_q(\Lambda_3), \quad q = u, d \quad (135)$$

La densité lagrangienne (131) est une généralisation non linéaire élémentaire du lagrangien de Damour & Donoghue (2010) [2]. On retrouve tous les résultats de Damour & Donoghue en remplaçant  $D_i(\varphi)$  par  $d_i\varphi$  où  $d_i = D'_i(0)$  devient une constante de couplage<sup>4</sup>. Damour & Donoghue [2] ont montré que l'action matérielle (130) pouvait se remplacer, à une échelle macroscopique, par

$$S_m[g_{\mu\nu}, \varphi, A] = -c^2 \sum_A \int m_a(\varphi) d\tau_A \quad (136)$$

où  $c d\tau_A = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx_A^\mu dx_A^\nu}$  est l'intervalle de temps propre du corps  $A$ . La masse du corps  $A$  dépend donc de  $\varphi$ , et cette dépendance en  $\varphi$  dépend de la composition atomique du corps  $A$ , de telle sorte

---

<sup>4</sup>. On pourrait poser  $\varphi_0 = 0$  sans perte de généralités, cela reviendrait juste à redéfinir les constantes fondamentales de la physique.

que pour deux corps différents  $A$  et  $B$ , les fonctions  $m_A(\varphi)$  et  $m_B(\varphi)$  pourraient être différentes. C'est ainsi que le principe d'équivalence (fort comme faible) est violé. Cet effet peut se caractériser entièrement par la description d'une fonction de couplage

$$\alpha_A(\varphi) = \frac{d \ln m_A}{d \varphi} \quad (137)$$

Damour & Donoghue [2] ont trouvé une forme semi-analytique de  $\alpha_A(\varphi)$  en fonction de la composition atomique d'un corps. La généralisation non-linéaire ne pose aucune difficulté. On peut décomposer  $\alpha_A(\varphi)$  en un couplage universel (indépendant de la composition de  $A$ ) et un couplage non universel avec  $\varphi$ . Le premier terme est responsable de la violation du principe d'équivalence fort et le second du principe d'équivalence faible. La fonction de couplage s'écrit

$$\alpha_A(\varphi) = \alpha_u(\varphi) + \bar{\alpha}_A(\varphi) \quad (138)$$

où

$$\alpha_u(\varphi) = D'_g(\varphi) + [0.093(D'_{\hat{m}}(\varphi) - D'_g(\varphi)) - 0.00014(D'_{m_e}(\varphi) - D'_g(\varphi))] \quad (139)$$

correspond au couplage universel du champ dilaton et des champs matériels et

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_A(\varphi) &= (D'_{\hat{m}}(\varphi) - D'_g(\varphi))Q_{\hat{m}}^A + (D'_{\delta m}(\varphi) - D'_g(\varphi))Q_{\delta m}^A \\ &\quad + (D'_{m_e}(\varphi) - D'_g(\varphi))Q_{m_e}^A + D'_e(\varphi)Q_e^A \end{aligned} \quad (140)$$

correspond au couplage non universel. Les fonctions de couplage aux quarks ont été redéfinies

$$D_{\hat{m}}(\varphi) = \frac{m_u D_{m_u}(\varphi) + m_d D_{m_d}(\varphi)}{m_u + m_d}, \quad D_{\delta m} = \frac{m_d D_{m_d}(\varphi) - m_u D_{m_u}(\varphi)}{m_d - m_u} \quad (141)$$

Si l'on suit les travaux de Nitti & Piazza [85], alors l'interaction électromagnétique devrait présenter une anomalie de trace comme les autres interactions et on devrait substituer  $D'_e(\varphi) - D'_g(\varphi)$  à  $D'_e(\varphi)$  dans l'équation (140). On voit ici que si le couplage avec la matière est universel, c'est-à-dire s'il se présente sous la forme  $\mathcal{L}_{int} = D(\varphi)\mathcal{L}_{MS}$ , alors toutes les fonctions  $D_i$  sont égales, et on a  $\bar{\alpha}_A = 0$  et le principe d'équivalence faible est respecté. Damour & Donoghue [2] ne tiennent pas compte de l'anomalie de trace électromagnétique. Nous continuons avec la théorie de Damour & Donoghue, mais rien n'empêche de substituer  $D'_e(\varphi) - D'_g(\varphi)$  à  $D'_e(\varphi)$  dans tous les calculs pour tenir compte de l'anomalie de trace électromagnétique. Au niveau de la phénoménologie dans le système solaire, si les différentes fonctions de couplages sont toutes différentes, cela ne change strictement rien pour ce qui concerne les tests "agnostiques" qui sont aveugles devant les choix des définitions des fonctions de couplages. En effet, contraindre

TABLE 11 – Charges dilatoniques de quelques atomes calculées à partir des équations (142), (143), (144) et (145).

Atome	$\mathcal{A}$	$\mathcal{Z}$	$Q_m - 0.093$	$Q_{dm}$	$Q_{me}$	$Q_e + 0.00014$
Hydrogène	1	1	$-5.60 \times 10^{-2}$	$-1.70 \times 10^{-3}$	$5.50 \times 10^{-4}$	$8.20 \times 10^{-4}$
Hélium	4	2	$-2.27 \times 10^{-2}$	0.00	$2.75 \times 10^{-4}$	$6.53 \times 10^{-4}$
Oxygène	16	8	$-1.45 \times 10^{-2}$	0.00	$2.75 \times 10^{-4}$	$1.48 \times 10^{-3}$
Silicium	28.10	14	$-1.21 \times 10^{-2}$	$6.05 \times 10^{-6}$	$2.74 \times 10^{-4}$	$2.05 \times 10^{-3}$
Fer	56.00	26.00	$-9.94 \times 10^{-3}$	$1.21 \times 10^{-4}$	$2.55 \times 10^{-4}$	$2.72 \times 10^{-3}$
Magnésium	24.30	12.00	$-1.27 \times 10^{-2}$	$2.10 \times 10^{-5}$	$2.72 \times 10^{-4}$	$1.85 \times 10^{-3}$
SiO <sub>2</sub>			$-1.33 \times 10^{-2}$	$3.02 \times 10^{-6}$	$2.75 \times 10^{-4}$	$1.76 \times 10^{-3}$

$D'_e(\varphi)$  ou  $D'_e(\varphi) - D'_g(\varphi)$ , sachant que l'on ne sait rien a priori sur aucune des fonctions  $D_i$ , revient strictement au même en termes de méthodes de test.

Dans l'expression (140), nous avons fait apparaître les *charges dilatoniques*  $Q_{\hat{m}}^A$ ,  $Q_{\delta m}^A$ ,  $Q_{me}^A$ , et  $Q_e^A$ . Ce sont elles qui dépendent de la composition atomique du corps considéré. Les charges  $Q_{\hat{m}}^A$  et  $Q_{\delta m}^A$  traduisent le couplage des quarks du corps  $A$  avec le champ scalaire. En notant  $\mathcal{Z}$  le nombre de protons et  $\mathcal{A}$  le nombre de nucléons du corps  $A$ , les charges dilatoniques sont les mêmes que dans la théorie de Damour & Donoghue [2] :

$$Q_{\hat{m}}^A = \frac{-0.036}{\mathcal{A}^{1/3}} - 0.020 \frac{(\mathcal{A} - 2\mathcal{Z})^2}{\mathcal{A}^2} - 0.00014 \frac{\mathcal{Z}(\mathcal{Z} - 1)}{\mathcal{A}^{4/3}} \quad (142)$$

$$Q_{\delta m}^A = 0.0017 \frac{\mathcal{A} - 2\mathcal{Z}}{\mathcal{A}} \quad (143)$$

$$Q_{me}^A = 0.00055 \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{A}} \quad (144)$$

$$Q_e^A = 0.00082 \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{A}} + 0.00077 \frac{\mathcal{Z}(\mathcal{Z} - 1)}{\mathcal{A}^{4/3}} \quad (145)$$

Nous avons calculé quelques charges dilatoniques en estimant les matériaux principalement présents dans les principaux corps du système solaire. Nous reportons ces résultats dans la table 11.

Dans un voisinage proche de  $\varphi_0$  dans lequel les fonctions  $D_i$  peuvent s'exprimer en développement limité, notre modèle diffère de celui de Damour & Donoghue [2] en ce qu'un terme de couplage de second ordre apparaît

$$\beta_A = \frac{d\alpha_A}{d\varphi} = \beta_u(\varphi) + \bar{\beta}_A \quad (146)$$

où

$$\beta_u(\varphi) = \alpha'_u(\varphi) \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_A = & (D''_{\hat{m}}(\varphi) - D''_g(\varphi))Q_{\hat{m}}^A + (D''_{\delta m}(\varphi) - D''_g(\varphi))Q_{\delta m}^A \\ & + (D''_{me}(\varphi) - D''_g(\varphi))Q_{me}^A + D''_e(\varphi)Q_e^A \end{aligned} \quad (148)$$

Nous verrons que ces termes peuvent être non négligeables au premier ordre post-newtonien.

#### 4.2.3.2 Lagrangien d'une particule et tenseur énergie-impulsion de points matériels

Pour l'instant nous ne nous intéressons pas au comportement spécifique des corps étendus et nous considérons les planètes comme des points matériels. Nous reviendrons sur cette hypothèse lorsqu'il faudra considérer la violation du principe d'équivalence fort qui contient un terme d'autogravitation des corps étendus. L'action d'un ensemble de  $N$  points matériels qui n'interagissent pas peut s'écrire

$$S_m = -c^2 \sum_A \int_A m_A(\phi) d\tau_A = -c^2 \sum_A \int_A m_A^*(\phi) d\tau_A^* \quad (149)$$

où on a

$$m_A^*(\phi) = \sqrt{\frac{f_0}{f(\phi)}} m_A(\phi) \quad (150)$$

On remarque que  $m_A(\phi_0) = m_A^*(\phi_0)$ . On peut mettre l'action sous la forme d'une intégrale quadri-volumique

$$S_m = - \int \sum_A \rho_A^* \sqrt{-g_*} d^4x \quad (151)$$

où

$$\rho_A^* = \frac{c^2 m_A^*(\phi(x^\mu))}{\sqrt{-g} u_{A*}^0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)) \quad (152)$$

où  $\delta^{(3)}$  est la distribution de Dirac à trois dimensions,  $z_A^\mu(t)$  sont les coordonnées de  $A$  dans la carte  $(x^\mu)$  (où l'on définit un temps coordonnée  $x^0 = ct = z_A^0(t)$  identique pour tous les corps dans cette carte) et  $u_{A*}^\mu = dz_A^\mu / \sqrt{-g_{\alpha\beta} dz_A^\alpha dz_A^\beta}$  sont les coordonnées de la 4-vitesse de  $A$ . De là on peut en déduire les expressions suivantes

$$T_*^{\mu\nu} = \sum_A \rho_A^* u_{*A}^\mu u_{*A}^\nu \quad (153)$$

$$T_* = \sum_A \rho_A^* \quad (154)$$

La masse qui apparaît dans la densité est une fonction de  $\phi$ . En formalisme post-newtonien, les variations de  $\phi$  peuvent s'exprimer comme développement limité, de telle sorte que l'on a  $\phi - \phi_0 = O(c^{-2})$ . On peut alors opérer la formule de Taylor sur  $m_*(\phi)$

$$m_A^*(\phi) = m_{A,0}^* \left( 1 + (\phi - \phi_0) \alpha_A^*(\phi_0) + \frac{1}{2} (\phi - \phi_0)^2 \beta_A^*(\phi_0) \right) + O(c^{-6}) \quad (155)$$

où on a, à partir de (120), (146), (138) et (150)

$$\alpha_A^* = \frac{d \ln m_A^*}{d\phi} = \alpha_u^*(\phi) + \tilde{\alpha}_A(\phi), \quad \beta_A^*(\phi) = \frac{d \alpha_A^*}{d\phi} = \beta_u^*(\phi) + \tilde{\beta}_A(\phi) \quad (156)$$

où

$$\alpha_u^*(\phi) = \sqrt{\frac{2}{Z(\phi)}} \left( \alpha_u(\varphi) - \frac{f'(\varphi)}{2f(\varphi)} \right) \quad (157)$$

$$\tilde{\alpha}_A = \sqrt{\frac{2}{Z(\varphi)}} \bar{\alpha}_A(\varphi) \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \beta_u^*(\phi) &= \frac{2}{Z(\varphi)} \left( \beta_u(\phi) + \frac{1}{2} \left( \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f''(\varphi)}{f(\varphi)} \right) \\ &\quad - \frac{Z'(\varphi)}{Z(\varphi)^2} \left( \alpha_u(\varphi) - \frac{f'(\varphi)}{2f(\varphi)} \right) \end{aligned} \quad (159)$$

$$\tilde{\beta}_A(\phi) = \frac{2}{Z(\varphi)} \bar{\beta}_A(\varphi) - \frac{Z'(\varphi)}{Z(\varphi)^2} \bar{\alpha}_A(\varphi) \quad (160)$$

#### 4.2.4 Approximation post-newtonienne

On sait que dans le système solaire la dynamique relativiste s'exprime comme une correction perturbative de la dynamique newtonienne. Les champs de gravitation sont de faible compacité et les vitesses des astres sont faibles devant la vitesse de la lumière. On peut donc utiliser un traitement perturbatif dans lequel nous faisons des développements limités en  $\varepsilon = 1/c$ . Le traitement post-newtonien de la dynamique du système solaire a été abondamment traité dans la littérature. Nous nous basons sur le formalisme Damour-Soffel-Xu (DSX) [43], étendu par Klioner & Soffel pour le formalisme post-newtonien paramétrisé [14].

Nous considérons  $N$  monopoles de masses et leurs lignes d'univers respectives dans une variété riemannienne de dimension 4 et de signature  $(-, +, +, +)$ . Nous définissons une carte globale notée  $(x^\mu)$  telle qu'à l'infini, le tenseur métrique exprimé dans cette carte soit égal à la métrique de Minkowski en coordonnées cartésiennes ( $\|x^\mu\| \rightarrow \infty \Rightarrow g_{\mu\nu}^* \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ). Dans cette carte, les lignes d'univers de chaque corps sont décrites par quatre fonctions

$$\mathcal{L}_A : t \mapsto z_A^\mu(t) \quad (161)$$

que l'on peut réduire à trois si l'on considère  $t$  comme la temps-coordonnée de la carte (c'est un choix de paramétrage toujours possibles pour les particules matérielles qui ont une masse). De là on définit  $N$  cartes locales adaptées à chaque corps. Pour éviter d'encombrer les notations, nous allons temporairement nous affranchir de

l'indice  $A$  (on pose donc  $z^\mu(t) = z_A^\mu(t)$ ). La carte adaptée au corps  $A$  est notée  $(X^\mu)$  et est définie comme suit

$$x^\mu = z^\mu(T) + e_a^\mu(T)X^a + \xi^\mu(T, X^a) \quad (162)$$

ici nous avons changé de paramétrage pour la ligne d'univers. On a  $a \in \{1, 2, 3\}$ , et  $\xi^\mu = O(\|X^\mu\|^2)$ . En particulier, cela implique

$$e_a^\mu(T) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a}(T, 0, 0, 0), \quad e_0^\mu(T) = \frac{dz^\mu}{dT} \quad (163)$$

En notant  $A_\beta^\alpha = \partial x^\alpha / \partial X^\beta$ , il vient

$$A_0^\mu = e_0^\mu(T) + \frac{de_a^\mu(T)}{dT}X^a + \frac{1}{c}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial T} \quad (164)$$

$$A_a^\mu = e_a^\mu(T) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial X^a} \quad (165)$$

Nous notons  $g_{\mu\nu}^*$  les coefficients du tenseur métrique exprimés dans la carte  $(x^\mu)$  et  $G_{\mu\nu}$  exprimés dans la carte  $(X^\mu)$ . L'approximation post-newtonienne consiste à poser

$$g_{\mu\nu}^* = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (166)$$

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} \quad (167)$$

Le fait que les corps se déplacent lentement par rapport à la vitesse de la lumière permet que les deux termes de déviation de la métrique de Minkowski  $h_{\mu\nu}$  et  $H_{\mu\nu}$  restent petits. Plus précisément, si  $H_{00} = O(c^{-2}) = H_{ij}$ ,  $H_{0i} = O(c^{-3})$ , on peut montrer que c'en sera de même pour  $h_{\mu\nu}$  avec les lois usuelles de transformation du tenseur métrique [43].

Si les vitesses des astres sont faibles, alors dans la carte  $(x^\mu)$ , le tenseur énergie impulsion vérifie  $T^{00} = O(c^2)$ ,  $T^{0i} = O(c)$ , et  $T^{ij} = O(1)$ . Ceci dit, si l'on prend pour base l'équation du champ (124), alors tout se passe comme si le tenseur énergie impulsion contenait un terme en plus  $(2\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - g_*^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}g_{\mu\nu}^*)/\kappa_*$ . Or, le champ scalaire de la théorie dilaton sera aussi traité de façon perturbative post-newtonienne. On aura notamment  $\phi - \phi_0 = O(c^{-2})$ , de telle sorte que  $\partial_\mu\phi = O(c^{-2})$ , et donc le tenseur énergie-impulsion modifié vérifie l'approximation post-newtonienne :

$$T_*^{00} = O(c^{+2}), \quad T_*^{0i} = O(c^{+1}), \quad T_*^{ij} = O(c^0) \quad (168)$$

En fait, les termes supplémentaires dus au champ scalaire dans la première équation de champ sont négligeables à l'ordre post-newtonien, seule la modification de la définition du lagrangien brise le principe d'équivalence, mais en ce qui concerne les équations du champ, tout se passe comme en relativité générale. Ainsi, les conditions d'isotropie

*Section D du formalisme DSX [43], équation (2.29).*

spatiales sont exactement les mêmes que dans le formalisme DSX [43], on sait qu'avec ces hypothèses post-newtoniennes, on peut imposer que

$$-g_{00}^* g_{ij}^* = \delta_{ij} + O(c^{-4}), \quad -G_{00} G_{ij} = \delta_{ij} + O(c^{-4}) \quad (169)$$

Notons que c'est le choix de la trame d'Einstein qui nous permet d'utiliser les conditions d'isotropie spatiale. On peut paramétriser les coefficients du tenseur métrique par un scalaire  $w_*$ , un vecteur  $w_*^i$  et un 3-tenseur  $\gamma_{ij}$  de la façon suivante

$$g_{00}^* = -\exp \left[ -\frac{2}{c^2} w_* \right] \quad (170)$$

$$g_{0i}^* = -\frac{4}{c^3} w_*^i \quad (171)$$

$$g_{ij}^* = \gamma_{ij} \exp \left[ +\frac{2}{c^2} w_* \right] \quad (172)$$

les conditions d'isotropie spatiales donnent  $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + O(4)$  ce qui permet de réduire la paramétrisation du tenseur métrique à un scalaire et un vecteur. Il est donc possible de réduire la métrique à un quadri-potentiel<sup>5</sup>  $w_*^\mu$ . Pour calculer l'équation du mouvement au premier ordre post-newtonien, on aura besoin de développer jusqu'à l'ordre  $O(c^{-2})$  le terme  $\sqrt{g_{\mu\nu}^* v_T^\mu v_T^\nu}$ . Comme  $(v^0)^2 = c^2$ , il faut développer  $g_{00}$  jusqu'à l'ordre  $O(c^{-4})$ . De même,  $v^0 v^i = O(c^1)$  donc il faut développer  $g_{0i}$  jusqu'à l'ordre  $O(c^{-3})$ . Enfin,  $v^i v^j = O(c^0)$  donc il faut développer  $g_{ij}$  jusqu'à l'ordre  $O(c^{-2})$ . Cela donne

$$g_{00}^* = -1 + 2 \frac{w_*}{c^2} - 2 \frac{w_*^2}{c^4} + O(c^{-6}) \quad (173)$$

$$g_{0i}^* = -4 \frac{w_*^i}{c^3} + O(c^{-5}) \quad (174)$$

$$g_{ij}^* = \delta_{ij} \left( 1 + 2 \frac{w_*}{c^2} \right) + O(c^{-4}) \quad (175)$$

On en déduit

$$g_*^{00} = 1 + \frac{2}{c^2} w_* + \frac{2}{c^4} w_*^2 + O(c^{-6}) \quad (176)$$

$$g_*^{0i} = -\frac{4}{c^3} w_*^i + O(c^{-5}) \quad (177)$$

$$g_*^{ij} = \delta^{ij} \left( 1 - \frac{2}{c^2} w_* \right) + O(c^{-4}) \quad (178)$$

---

5. À proprement parler, ce n'est pas un quadri-potentiel, au sens où  $w_*^\mu$  ne sont pas les composantes d'un 4-vecteur. Voir par exemple [14; 43] pour les lois de transformations de  $w_*^\mu$ . Dans le formalisme DSX [43], une formulation du "gravitomagnétisme" est proposée en prenant les bonnes combinaisons linéaires des  $w_*^\mu$ .

Les composantes 00 et  $0i$  du tenseur de Ricci s'écrivent [43]

$$-c^2 R^{00} = \Delta w_* + 3\partial_{00}w_* + \frac{4}{c}\partial_{0i}w_i \quad (179)$$

$$-\frac{c^3}{2}R^{0i} = \Delta w_*^i - \partial_{ij}w_*^j - c\partial_{0i}w_* \quad (180)$$

Examinons les termes sources de l'équation (124)

$$T^{00} - \frac{1}{2}g_*^{00}g_{\alpha\beta}^*T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T^{00} + \delta_{ij}T^{ij})(1 + O(c^{-4})) \quad (181)$$

$$T^{0i} - \frac{1}{2}g_*^{0i}g_{\alpha\beta}^*T^{\alpha\beta} = T^{0i}(1 + O(c^{-2})) \quad (182)$$

Posons

$$\sigma_* = \frac{T_*^{00} + \delta_{ij}T_*^{ij}}{c^2} \quad (183)$$

$$= \sum_A m_A^*(\phi) \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{\bar{w}_*^A(z_A)}{c^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - z_A(t)) + O(c^{-4}) \quad (184)$$

$$\sigma_*^i = \frac{T_*^{0i}}{c} = \sum_A m_A^*(\phi) v_A^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - z_A(t)) + O(c^{-2}) \quad (185)$$

où  $v_A = d\mathbf{z}_A/dt$ ,  $v_A = \|v_A\|$ , et  $\bar{w}_*^A$  est la valeur que prendrait le potentiel  $w_*$  sans le corps  $A$ , de telle sorte que  $\bar{w}_*^A(z_A)$  est le potentiel que ressent le corps  $A$ , abstraction faite des phénomènes d'autogravitation (pour l'instant nous considérons des particules libres). Les équations du champ (124) se récrivent, linéarisées

$$\Delta w_* + 3\partial_{00}w_* + \frac{4}{c}\partial_{0i}w_i^* = -4\pi G_*\sigma_* + O(c^{-4}) \quad (186)$$

$$\Delta w_*^i - \partial_{ij}\bar{w}_*^j - c\partial_{0i}w_* = -4\pi G_*\sigma_*^i + O(c^{-2}) \quad (187)$$

On peut montrer que si  $w_*^\mu$  vérifie ces équations, alors  $w'_* = w_* - \partial_t\psi/c^2$ ,  $w''_* = w'_* + \partial_i\psi/4$  où  $\psi$  est une fonction différentiable arbitraire, vérifie aussi ces équations, à des corrections post-newtoniennes près. C'est ce que l'on appelle l'invariance de jauge. Par exemple, en imposant que la composante temporelle soit harmonique, c'est-à-dire

$$0 = \square_{g_*}x^0 = -\frac{4}{c^3}(\partial_0w_* + \partial_iw_*^i) + O(c^{-5}) \quad (188)$$

on obtient la condition de jauge harmonique

$$\partial_0w_* + \partial_iw_*^i = O(c^{-2}) \quad (189)$$

dans cette jauge, les équations du champ se simplifient de la façon suivante

$$\square_{g_*}w_* = -4\pi G_*\sigma_* + O(c^{-4}) \quad (190)$$

$$\square_{\eta,*} w_*^i = \Delta w_*^i + O(c^{-2}) = -4\pi G_* \sigma_*^i + O(c^{-2}) \quad (191)$$

où  $\square_{\eta,*} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = \Delta - c^{-2} \partial_{tt}$  est le d'alembertien plat adapté à la métrique  $g_{\mu\nu}^* = \eta_{\mu\nu} + O(c^{-2})$ .

En ce qui concerne le champ scalaire, la linéarisation de (129) donne

$$\square_{\eta,*} \phi = -4\pi \frac{G_*}{c^2} s_* \quad (192)$$

où

$$s_* = \frac{\partial T_*}{\partial \phi} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_A \alpha_A^*(\phi) m_A^*(\phi) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} - \frac{\bar{w}_*^A(z_A)}{c^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A(t)) \\ &\quad + O(c^{-4}) \end{aligned} \quad (194)$$

#### 4.2.5 Résolution post-newtonienne des équations du champ

En prenant la demi-somme du potentiel avancé et retardé, la solution de l'équation

$$\square_{\eta,*} \psi = -4\pi \rho \quad (195)$$

est [43; 23]

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/c)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/c)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' \right) \end{aligned} \quad (196)$$

$$= \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{x}', t) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| d^3x' + O(c^{-4}) \quad (197)$$

Ainsi, les champs recherchés peuvent s'exprimer formellement

$$\begin{aligned} w_*(\mathbf{x}, t) &= G_* \int \frac{\sigma_*(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' \\ &\quad + G_* \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \sigma_*(\mathbf{x}', t) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| d^3x' + O(c^{-4}) \end{aligned} \quad (198)$$

$$w_*^i = G_* \int \frac{\sigma_*(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' + O(c^{-2}) \quad (199)$$

$$\begin{aligned} c^2(\phi - \phi_0) &= G_* \int \frac{s_*(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x' \\ &\quad + G_* \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int s_*(\mathbf{x}', t) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| d^3x' + O(c^{-4}) \end{aligned} \quad (200)$$

En effectuant les développements post-newtoniens appropriés par itération (en résolvant d'abord à l'ordre newtonien, puis en injectant dans l'ordre post-newtonien), et en notant que

$$m_A^*(\phi) = m_{A0} \left( 1 + \alpha_A^*(\phi - \phi_0) + \frac{1}{2} \beta_A^*(\phi - \phi_0)^2 \right) + O(c^{-5}) \quad (201)$$

on trouve les solutions post-newtoniennes aux équations du champ

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 - \sum_A \alpha_{A0}^* \frac{G_* m_{A0}}{c^2 r_A} & \left[ 1 + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{a}_A}{2c^2} + \frac{(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_A)^2}{2c^2 r_A^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{G_* m_{B0}}{r_{AB}} \left( 1 + \alpha_{A0}^* \alpha_{B0}^* + \frac{\beta_{B0}^* \alpha_{B0}^*}{\alpha_{A0}^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (202)$$

$$w_* = w_{0*} - \frac{1}{c^2} \Delta_* + O(c^{-4}) \quad (203)$$

$$w_*^i = \sum_A \frac{G_* m_{A0}}{r_A} v_A^i + O(c^{-2}) \quad (204)$$

où

$$w_0^* = \sum_A \frac{G_* m_{A0}^*}{r_A} \quad (205)$$

$$\begin{aligned} \Delta_* = \sum_A \frac{G_* m_{A0}}{r_A} & \left[ \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{a}_A}{2} + \frac{(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_A)^2}{2r_A^2} - 2v_A^2 \right. \\ & \left. + \sum_{B \neq A} (1 + \alpha_{A0}^* \alpha_{B0}^*) \frac{G_* m_{B0}}{r_{AB}} \right] \end{aligned} \quad (206)$$

où  $\alpha_{A0}^* = \alpha_A^*(\phi_0)$ ,  $\beta_{A0}^* = \beta_A^*(\phi_0)$ ,  $\mathbf{r}_A = \mathbf{x} - \mathbf{z}_A$ ,  $r_A = \|\mathbf{r}_A\|$ ,  $\mathbf{a}_A = d\mathbf{v}_A/dt$ .

#### 4.2.6 Équations du mouvement

##### 4.2.6.1 Particule-test

Pour obtenir l'équation du mouvement d'un corps donné, une façon de procéder est de partir de son lagrangien en le considérant comme une particule-test

$$L_T = m_{T*}(\phi) \sqrt{g_{\mu\nu}^{*T} v_T^\mu v_T^\nu} \quad (207)$$

où les  $g_{\mu\nu}^{*T}$  sont les coefficients du tenseur métrique évalués en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_T$  duquel on a retiré tous les termes pour lesquels  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_T = \mathbf{0}$  (on considère la masse de  $T$  négligeable). De là il suffit d'effectuer un développement post-newtonien, connaissant  $g_{\mu\nu}$  à partir des solutions (203) et (204), pour avoir une expression explicite. En fait, Damour & Esposito-Farèse [23] ont déjà obtenu ce lagrangien en exprimant le

couplage conforme entre le champ scalaire et le corps  $A$  comme s'il s'agissait d'un couplage non universel en posant  $\alpha_A^* = dm_A/d\phi$ . Il suffit de substituer notre définition du couplage non universel à la leur. Le lagrangien développé est

$$\begin{aligned} L_T = & -m_{T0}c^2 + m_{T0}\frac{v_T^2}{2} + \sum_{A \neq T} \frac{G_{AT}m_{A0}m_{T0}}{r_{AT}} + \frac{m_{T0}v_{T0}^4}{8c^2} \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{A \neq T} \frac{G_{AT}m_{A0}m_{T0}}{r_{AT}} \left[ -2(1 + \gamma_{AT})\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_T + \frac{2\gamma_{AT} + 1}{2}v_T^2 \right. \\ & \quad \left. + (\gamma_{AT} + 1)v_A^2 - \frac{(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AT})^2}{2r_{AT}^2} - \frac{\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{a}_A}{2} \right] \\ & - \frac{1}{c^2} \sum_{A \neq T} \frac{G_{AT}m_{A0}m_{T0}}{r_{AT}} \left[ \sum_{B \neq A} \frac{G_{AB}m_{B0}}{r_{AB}} (2\beta_{BT}^A - 1) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{B \neq T} \frac{G_{BT}m_{B0}}{r_{BT}} \left( \beta_{AB}^T - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (208)$$

où  $\mathbf{r}_{AT} = \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_A$ ,  $r_{AT} = \|\mathbf{r}_{AT}\|$ ,

$$G_{AB} = \frac{G}{f_0}(1 + \alpha_{A0}^* \alpha_{B0}^*) \quad (209)$$

$$\gamma_{AT} = \frac{1 - \alpha_{A0}^* \alpha_{T0}^*}{1 + \alpha_{A0}^* \alpha_{T0}^*} \quad (210)$$

$$\beta_{AB}^T = 1 + \frac{\beta_{T0}^*}{2} \frac{\alpha_{A0}^*}{1 + \alpha_{A0}^* \alpha_{T0}^*} \frac{\alpha_{B0}^*}{1 + \alpha_{B0}^* \alpha_{T0}^*} \quad (211)$$

Nous pouvons simplifier ce lagrangien pour la dynamique post-newtonienne à l'échelle du système solaire. D'abord, il faut simplifier les termes newtoniens de ce lagrangien. En effet, de nombreux termes apparaissent non observables si on redéfinit correctement les constantes. D'abord, on peut décomposer les constantes de couplage en leur parties universelle puis non universelle, c'est-à-dire respectivement en un terme qui ne dépend pas de la composition interne du corps, et un autre qui en dépend explicitement. Cela donne

$$\alpha_{A0}^* = \alpha_0 + \tilde{\alpha}_A \quad (212)$$

où  $\alpha_0 = \alpha_u^*(\phi_0)$  (eq. (157)) est la constante de couplage universel et  $\tilde{\alpha}_A$  a été défini à l'équation (158), et est la constante de couplage non universel,

$$G_{AB} = \tilde{G}(1 + \delta_A + \delta_B + \delta_{AB}) \quad (213)$$

où

$$\tilde{G} = \frac{G}{f_0}(1 + \alpha_0^2) \quad (214)$$

$$\delta_A = \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_A}{1 + \alpha_0^2} \quad (215)$$

$$\delta_{AB} = \frac{\tilde{\alpha}_A \tilde{\alpha}_B}{1 + \alpha_0^2} \quad (216)$$

On peut absorber la plupart des constantes alternatives en redéfinissant les masses ainsi

$$\tilde{m}_A = m_{A0}(1 + \delta_A) \quad (217)$$

de telle sorte que le lagrangien newtonien d'une particule test est

$$\begin{aligned} L_T = & -\tilde{m}_T(1 - \delta_T)c^2 + \tilde{m}_T \frac{v_T^2}{2}(1 - \delta_T) \\ & + \sum_{A \neq T} \frac{\tilde{G}\tilde{m}_A \tilde{m}_T}{r_{AT}}(1 + \delta_{AT}) + O(c^{-2}) + O(\delta_i^2) \end{aligned} \quad (218)$$

Les scalaires  $\mu_A = \tilde{G}\tilde{m}_A$  sont les grandeurs physiques mesurables par des expériences de gravitation que nous appelons "masses gravitationnelles". Quitte à multiplier  $L_T$  par  $\tilde{G}$ , nous pouvons ne faire apparaître que les  $\mu_A$ , seules grandeurs mesurables par des expériences de gravitation. Dans le lagrangien (218), il apparaît que la violation du principe d'équivalence faible en théorie dilaton léger ne peut plus se résumer à une variation du rapport de la masse inerte et de la masse grave. En effet, à l'ordre newtonien, les équations du mouvement dérivées du lagrangien (218) sont

$$\mathbf{a}_T = \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A \mathbf{r}_{TA}}{r_{TA}^3}(1 + \delta_T + \delta_{AT}) \quad (219)$$

Ici la violation du principe d'équivalence faible est manifeste. Le couplage non universel avec la matière se traduit par la présence des  $\delta_T$  et  $\delta_{AT}$  qui font intervenir les constantes de couplage non universel  $\tilde{\alpha}_A$ . Le terme  $\delta_{AT}$  est nouveau par rapport à ce qui était considéré dans la littérature où l'on encodait souvent la violation du principe d'équivalence seulement dans un terme comparable à  $\delta_T$ , le corps en mouvement (par exemple [1; 88; 89]). Ici, le corps attirant a aussi une influence sur la déviation de la géodésique. Comme l'ont signalé Minazzoli & Hees [3], dans certains scénarios de couplages, il est possible que  $\alpha_0 = 0$  et que donc  $\delta_T = 0$ , mais que  $\delta_{AT} \neq 0$  (voir équations (215) et (216)). Dans ce cas, la violation du principe d'équivalence faible n'est encodée que dans  $\delta_{AT}$ . Cela apparaît plus clairement dans l'équation (219). Signalons également que si le couplage est universel et que l'on tient compte de l'anomalie de trace de l'électromagnétisme comme le font Nitti & Piazza [85], alors tous les  $\tilde{\alpha}_T$  et donc les  $\delta_T$  et  $\delta_{AT}$  disparaissent, et le principe d'équivalence faible est respecté.

Au niveau post-newtonien, nous pouvons négliger tous les termes en  $\tilde{\alpha}_A/c^2$ , ou autrement dit, les termes en  $\delta_A/c^2$  et  $\delta_{AB}/c^2$ . En effet, si ces termes sont détectables, alors ils le sont en premier lieu dans les termes newtoniens, or nous ne les avons toujours pas détectés.

Nous ne garderons donc que les termes de couplage universel, qui ont été absorbés à l'ordre newtonien par une redéfinition des constantes. Après avoir substitué les nouvelles définitions des constantes, nous obtenons le lagrangien d'une particule test est

$$\begin{aligned}
L_T = & -\mu_T(1-\delta_T)c^2 + \frac{\mu_T v_T^2}{2}(1-\delta_T) + \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A \mu_T}{r_{AT}}(1+\delta_{AT}) + \frac{\mu_T v_T^4}{8c^2} \\
& + \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A \mu_T}{r_{AT} c^2} \left[ -2(\gamma+1)\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{v}_A + \frac{2\gamma+1}{2}v_T^2 + (\gamma+1)v_A^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{a}_A}{2} - \frac{(\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{v}_A)^2}{2r_{AT}^2} \right] \\
& - \sum_{A \neq T} \frac{\mu_A}{r_{AT}} \left[ \sum_{B \neq T} \frac{2\beta_T - 1}{2c^2} \frac{\mu_B}{r_{BT}} + \sum_{B \neq A} \frac{2\beta_A - 1}{c^2} \frac{\mu_B}{r_{AB}} \right] \\
& + O(c^{-4}) + O(c^{-2}\delta_i) + O(\delta_i^2)
\end{aligned} \tag{220}$$

où

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \tag{221}$$

et où on peut décomposer  $\beta_A$  en une partie universelle et non universelle

$$\beta_A = 1 + \frac{\beta_0 + \tilde{\beta}_A}{2} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} = \beta + d\beta_A \tag{222}$$

où  $\beta = 1 + \beta_0 \alpha_0^2 / 2(1 + \alpha_0^2)^2$  et  $d\beta_A = \tilde{\beta}_A \alpha_0^2 / 2(1 + \alpha_0^2)^2$ . On peut se permettre de développer à l'ordre post-newtonien la partie non universelle de  $\beta_A$  car elle n'apparaît pas dans la partie newtonienne. On retrouve les paramètres post-newtoniens usuels  $\gamma$  et  $\beta$ , auxquels viennent s'ajouter des paramètres de couplages non universels  $\delta_A$ ,  $\delta_{AB}$ , et  $d\beta_A$ .

#### 4.2.6.2 Formulations globales lagrangienne et hamiltonienne

Nous pouvons écrire la fonction de Lagrange post-newtonienne du système de  $N$  corps. La fonction de Lagrange totale  $L$  du système n'est pas égale à la somme des fonctions de Lagrange des corps individuels pris séparément. Pour que la fonction de Lagrange  $L$  redonne bien la même accélération il faut prendre garde à ce que  $\partial L / \partial \mathbf{r}_A = \partial L_A / \partial \mathbf{r}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_A}$ . Pour ce faire, il suffit de sommer les  $L_T$  sur  $T$  puis de symétriser les expressions explicites qui font intervenir  $A$  et  $T$ , en termes de  $\mathbf{z}_A$  et  $\mathbf{v}_A$  [43]. Nous pouvons en outre simplifier le lagrangien et faire disparaître le terme  $\mathbf{a}_A$  en notant que

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathbf{r}_{AT}}{r_{AT}} \cdot \mathbf{a}_A = & -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}_{AT}}{r_{AT}} \cdot \mathbf{v}_A \right) + \frac{(\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_A)}{r_{AT}} \cdot \mathbf{v}_A \\
& - \frac{(\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{v}_A)}{r_{AT}} \frac{(\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{v}_T)}{r_{AT}} + \left( \frac{\mathbf{r}_{AT} \cdot \mathbf{v}_A}{r_{AT}} \right)^2
\end{aligned} \tag{223}$$

On peut donc remplacer le terme qui contient l'accélération par le membre de droite en ignorant la dérivée totale. On peut aussi obtenir ce lagrangien à partir du lagrangien global de Damour & Esposito-Farèse [23] dans le cas d'un couplage conforme, en y substituant nos redéfinitions des constantes. Le résultat est le suivant<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} L = & - \sum_A \mu_A (1 - \delta_A) c^2 + L_N + \frac{1}{c^2} \sum_A L_A \\ & + \frac{1}{2c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} L_{AB} + \frac{1}{2c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A} L_{BC}^A \end{aligned} \quad (224)$$

où

$$L_N = \sum_A \mu_A (1 - \delta_A) \frac{v_A^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_A \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} (1 + \delta_{AB}) \quad (225)$$

$$L_A = \frac{\mu_A v_A^4}{8}, \quad (226)$$

$$L_{AB} = \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} \left[ (2\gamma + 1) v_A^2 - \frac{4\gamma + 3}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{AB})(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) \right] \quad (227)$$

et

$$L_{BC}^A = - \frac{\mu_A \mu_B \mu_C}{r_{AB} r_{AC}} (2\beta + 2d\beta^A - 1) \quad (228)$$

où  $\mathbf{n}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}/r_{AB}$ . Le premier terme de masse  $-\sum_A \mu_A (1 - \delta_A) c^2$  est inutile pour dériver les équations du mouvement mais sera utile pour exprimer simplement les coordonnées du barycentre du système. La partie newtonienne  $L_N$  de la fonction de Lagrange  $L$  exprime la violation du principe d'équivalence en ce que les masses inertes  $\mu_A (1 - \delta_A)$  ne sont pas égales aux masses graves, qui deviennent indissociables car n'ont de sens que par l'interaction à deux corps et s'expriment par  $\mu_A \mu_B (1 + \delta_{AB})$ . Le dernier terme à trois corps  $L_{BC}^A$  est lui aussi responsable d'une violation du principe d'équivalence en raison de  $d\beta^A$  qui exprime que l'interaction à trois corps dépend non seulement de la composition du corps qui chute mais aussi de la composition des corps qui engendrent le champ de gravitation. En effet, lorsque l'on dérive ce terme par rapport à  $\mathbf{r}_T$ , des termes proportionnels à  $d\beta^T$  apparaissent mais aussi des termes proportionnels à  $d\beta^A$  où  $A \neq T$ . Remarquons enfin que si le terme  $L_{AB}$  est symétrique par permutation de  $A$  et  $B$ , ce n'est pas le cas de  $L_{BC}^A$  qui n'est symétrique que par rapport aux permutations de  $B$  et  $C$ . C'est en raison de ces symétries qu'il a fallu diviser les sommes par deux afin d'éviter de compter deux fois chaque terme lorsque l'on dérive les équations d'Euler-Lagrange.

Même en violant le principe d'équivalence de toutes ces manières, cette fonction de Lagrange conserve les mêmes symétries que celle

---

6. Nous avons remplacé le label  $T$  par le label  $A$  pour rendre ce lagrangien plus homogène avec ce qui se trouve dans la littérature, par exemple [13; 43; 14]

de la relativité en formalisme PPN simple sans violation du principe d'équivalence. En principe, si l'on suivait rigoureusement la théorie du dilaton, chaque masse dans chaque terme devrait être modifiée mais nous prenons le parti de négliger les termes d'ordre  $O(c^{-2}\delta_A)$ .

Le moment conjugué du corps  $A$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A &= \mu_A(1 - \delta_A)\mathbf{v}_A + \frac{\mu_A v_A^2}{2c^2}\mathbf{v}_A \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} \left[ (2\gamma + 1)\mathbf{v}_A - \frac{4\gamma + 3}{2}\mathbf{v}_B - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB})\mathbf{n}_{AB} \right] \end{aligned} \quad (229)$$

La fonction de Lagrange (224) est invariante par rotation spatiale et par translations spatiale et temporelle. Les 7 intégrales premières classiques sont donc bien conservées. Moment linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_A \mathbf{p}_A \\ &= \sum_A \mu_A \mathbf{v}_A \left[ 1 - \delta_A + \frac{1}{2c^2} \left( v_A^2 - \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} (\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_A) \mathbf{n}_{AB} \end{aligned} \quad (230)$$

moment angulaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_A \mathbf{z}_A \times \mathbf{p}_A \\ &= \sum_A \mu_A \mathbf{z}_A \times \mathbf{v}_A \left( 1 - \delta_A + \frac{v_A^2}{2c^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} \left[ (2\gamma + 1)\mathbf{z}_A \times \mathbf{v}_A - \frac{4\gamma + 3}{2}\mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_B \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB})\mathbf{r}_A \times \mathbf{n}_{AB} \right] \end{aligned} \quad (231)$$

énergie :

$$\begin{aligned} h &= \sum_A \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{v}_A - L \\ &= \sum_A (1 - \delta_A) \mu_A \left( c^2 + \frac{v_A^2}{2} \right) + \sum_A \frac{3\mu_A v_A^4}{8c^2} \\ &\quad + \frac{1}{2c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A} \frac{\mu_A \mu_B \mu_C}{x_{AB} x_{AC}} (2\beta + 2d\beta^A - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{x_{AB}} \left[ 1 + \delta_{AB} - \frac{2\gamma + 1}{c^2} v_A^2 + \frac{4\gamma + 3}{2c^2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{AB})(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) \right] \end{aligned} \quad (232)$$

Trois autres intégrales premières supplémentaires peuvent être obtenues<sup>7</sup>. Une dérivation directe montre que le vecteur suivant est une intégrale première :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} - \mathbf{V}t \quad (233)$$

où

$$\mathbf{G} = \frac{c^2}{h} \sum_A \mu_A \mathbf{z}_A \left( 1 - \delta_A + \frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}} \right) \quad (234)$$

sont les coordonnées du barycentre relativiste du système et

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{h} \quad (235)$$

est la vitesse de dérive du barycentre.  $\mathbf{q}$  est appelé constante du barycentre, dans le sens où l'on a

$$\mathbf{G} = \mathbf{q} + \mathbf{V}t \quad (236)$$

et que  $\mathbf{q}$  est la composante constante de  $\mathbf{G}$ . Pour obtenir la fonction de Hamilton il faut faire une transformation de Legendre. Dans ce contexte, il s'agit d'exprimer l'énergie (232) en fonction du jeu de variables  $(\mathbf{z}_A, \mathbf{p}_A)$  au lieu de  $(\mathbf{z}_A, \mathbf{v}_A)$ . Pour ce faire il faut inverser l'équation (229) ce qui est possible par perturbations en restant à l'ordre  $O(c^{-2})$ , puis de substituer dans (232), toujours en négligeant les termes en  $O(c^{-4})$ ,  $O(\delta_A^2)$  et  $O(c^{-2}\delta_A)$ . Le résultat est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_A \left( \mu_A (1 - \delta_A) c^2 + \frac{p_A^2}{2\mu_A} (1 + \delta_A) - \frac{p_A^4}{8\mu_A^3 c^2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{1}{x_{AB}} \left( \mu_A \mu_B (1 + \delta_{AB}) + \frac{1}{c^2} \frac{\mu_B}{\mu_A} (2\gamma + 1) p_A^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{4\gamma + 3}{2c^2} \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{n}_{AB})(\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) \right) \\ & + \frac{1}{2c^2} \sum_A \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A} \frac{\mu_A \mu_B \mu_C}{x_{AB} x_{AC}} (2\beta + 2d\beta^A - 1) \end{aligned} \quad (237)$$

Le terme de masse  $\sum_A \mu_A (1 - \delta_A) c^2$  est inutile pour dériver les équations du mouvement mais servira dans l'expression des coordonnées du barycentre. La partie newtonnienne de cette fonction de Hamilton s'écrit

$$\mathcal{H}_N = \sum_A \frac{p_A^2}{2\mu_A} (1 + \delta_A) - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} (1 + \delta_{AB}). \quad (238)$$

---

<sup>7</sup>. Elles correspondent en fait à l'invariance de la fonction de Lagrange par le groupe des transformations de Lorentz.

Dans le jeu de variables conjuguées, les intégrales premières ont des expressions plus simples. Le moment linéaire :

$$\mathbf{P} = \sum_A \mathbf{p}_A \quad (239)$$

le moment angulaire :

$$\mathbf{J} = \sum_A \mathbf{z}_A \times \mathbf{p}_A \quad (240)$$

l'énergie étant  $\mathcal{H}$  lui-même, et la constante du barycentre :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} - \mathbf{V}t \quad (241)$$

où

$$\mathbf{G} = \frac{c^2}{\mathcal{H}} \sum_A \mu_A \mathbf{z}_A \left( 1 - \delta_A + \frac{\mathbf{p}_A^2}{2\mu_A c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}} \right), \quad (242)$$

et

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{\mathcal{H}} \quad (243)$$

On voit que le formalisme hamiltonien fait disparaître les paramètres post-newtoniens de six intégrales premières (les composantes de  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{P}$ ). Ces paramètres post-newtoniens sont encodés dans la transformation de Legendre pour passer de  $(\mathbf{z}_A, \mathbf{v}_A)$  à  $(\mathbf{z}_A, \mathbf{p}_A)$  (voir équation (229)).

#### 4.2.7 Effet Nordtvedt et dilaton

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des particules test en négligeant leur possible auto-gravitation. En relativité générale, il est possible de procéder ainsi en vertu du principe d'équivalence fort. Mais quand le principe d'équivalence est violé, les corps peuvent autograviter. C'est le cas en théorie dilaton. Le développement de la violation du principe d'équivalence fort a d'abord été modélisé en considérant les corps étendus comme un ensemble de points qui n'interagissent pas et c'est sur cet ensemble qu'a été intégrée l'énergie d'autogravitation dans un formalisme où le principe d'équivalence peut être violé, dans la publication inaugurale de Nordtvedt (1968) [16; 17]. Plus tard (1981), Will a généralisé cette approche en modélisant les corps comme des fluides [13]. Plus récemment (2000), Klioner & Soffel ont encore généralisé ce formalisme en modélisant les corps étendus comme des moments multipolaires et multispinoriels relativistes quelconques en formalisme post-newtonien paramétrisé [14]. Un argument heuristique peut nous permettre de montrer que le principal effet de la violation du principe d'équivalence va consister à modifier le paramètre  $\delta_A$ .

L'ouvrage cité de Will est édité en 2018 mais la première édition date de 1981.

De même que Damour & Esposito-Farese [23] nous introduisons un paramètre de sensibilité à l'autogravitation

$$s_A = -\frac{\partial \ln m_A}{\partial \ln G_L} \quad (244)$$

où  $G_L$  est la constante de gravitation *localement mesurée*. Dans la limite des champs faibles, cette sensibilité vaut  $s_A = |\Omega_A|/m_A c^2$  où

$$\Omega_A = G \int_A \int_A \frac{\rho_A(\mathbf{r})\rho_A(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r' \quad (245)$$

Dans notre paramétrage du dilaton, il faudrait corriger  $\tilde{\alpha}_A$  selon

$$\tilde{\alpha}'_A = \frac{d \ln \tilde{m}_A}{d\phi} = \frac{\partial \ln \tilde{m}_A}{\partial \phi} + \frac{\partial \ln m_A}{\partial \ln \tilde{G}} \frac{d \ln \tilde{G}}{d\phi} = \tilde{\alpha}_A - \frac{|\Omega_A|}{\tilde{m}_A c^2} \frac{d \ln \tilde{G}}{d\phi} \quad (246)$$

où  $\tilde{\alpha}_A$  est le coefficient déjà calculé en fonction des charges dilatoniques dans la théorie tenseur scalaire. Dans notre théorie, nous avons

$$\tilde{G} = \frac{G}{f(\phi_0)} (1 + \alpha_u^*(\phi_0)^2) \quad (247)$$

ce qui implique

$$\frac{d \ln \tilde{G}}{d\phi} = -\sqrt{\frac{2}{Z(\phi)}} \frac{f'(\phi)}{f(\phi)} + \frac{2\alpha_0\beta_0}{1 + \alpha_0^2} \quad (248)$$

Pour retrouver la paramétrisation classique, on peut redéfinir les constantes sans modification mesurable

$$\tilde{G} \mapsto e^{2D(\phi)} \tilde{G} \quad (249)$$

$$\tilde{m}_A \mapsto e^{D(\phi)} \tilde{m}_A \quad (250)$$

où

$$D(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \alpha_u(x) dx \quad (251)$$

De cette façon, on a

$$\left. \frac{d \ln \tilde{G}}{d\phi} \right|_{\phi_0} = \sqrt{\frac{2}{Z(\phi_0)}} \left( 2\alpha_u(\phi_0) - \frac{f'(\phi_0)}{f_0} \right) + \frac{2\alpha_0\beta_0}{1 + \alpha_0^2} = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_0\beta_0}{1 + \alpha_0^2} \quad (252)$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{\partial \ln \tilde{m}_A}{\partial \phi} = \tilde{\alpha}_A + \frac{d\delta_A/d\phi}{1 + \delta_A} \quad (253)$$

L'absence de  $\alpha_0$  vient de la redéfinition  $\tilde{m}_A \mapsto e^{-D(\phi)} \tilde{m}_A$ . Nous avons donc

$$\delta'_A = \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}'_A}{1 + \alpha_0^2} \quad (254)$$

$$= \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_A}{1 + \alpha_0^2} - \left[ 2 \frac{\alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} + \frac{2\alpha_0^2\beta_0}{(1 + \alpha_0^2)^2} \right] \frac{|\Omega_A|}{\tilde{m}_A c^2} \quad (255)$$

$$= \delta_A - (4\beta - \gamma - 3) \frac{|\Omega_A|}{\tilde{m}_A c^2} \quad (256)$$

où  $\delta_A$  est la déviation au principe d'équivalence faible déjà calculée. Nous avons négligé le terme  $\alpha_0 d\delta_A/d\phi / ((1 + \delta_A)(1 + \alpha_0^2))$  car il ferait intervenir des termes d'ordre trois en  $\alpha_i$ . Pour des corps à peu près sphériques, on peut estimer  $\Omega_A$

$$\frac{\Omega_A}{\tilde{m}_A c^2} = -\frac{\tilde{G}}{2\tilde{m}_A c^2} \int_A \int_A \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x d^3x' + O(c^{-2}) \approx -\frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \quad (257)$$

où  $R_A$  est le rayon moyen de l'astre. On peut se limiter à cette approximation tant que l'effet n'a pas été détecté puis mesuré avec précision.

#### 4.2.8 Électromagnétisme en théorie tenseur-scalaire

Nous allons montrer que les rayons lumineux suivent des géodésiques de genre lumière, même dans des théories alternatives de type tenseur-scalaire, y compris avec couplage non universel, et indépendamment de la trame dans laquelle nous travaillons (Jordan ou Einstein). Quelle que soit la trame choisie (respectivement, équations (109) ou (121)), on peut écrire l'action de cette façon

$$S_{em} = \int [k(R, \phi, (\nabla\phi)^2) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \phi, \psi_i)] \sqrt{-g} d^4x \quad (258)$$

$g$  est le déterminant de la matrice formée par les coefficients  $g_{\mu\nu}$  du tenseur métrique.  $k(R, \phi, (\nabla\phi)^2)$  est la fonctionnelle du champ de gravité et du champ scalaire dont l'expression est déterminée par (109) ou (121) selon la trame..  $\mathcal{L}_m$  est la densité de fonction de Lagrange qui décrit le contenu en énergie de l'espace-temps, entre autres le champ électromagnétique. Ce deuxième terme n'est qu'une réécriture générale des fonctionnelles liées à la matière dans la trame de Jordan ou d'Einstein. Les fonctionnelles liées à la matière ne font pas intervenir les dérivées de  $\phi$  ni dans la trame de Jordan ni dans celle d'Einstein puisqu'on a imposé  $A^2(\phi)f(\phi) = f_0$  pour passer de la trame de Jordan à celle d'Einstein ( $A^2$  était le facteur conforme, voir section 4.2.2). Nous faisons l'hypothèse que le champ électromagnétique affecte peu le champ de gravité ainsi que la matière non électromagnétique. Nous supposons donc que les champs de gravité et de la matière non électromagnétique sont déjà donnés, leurs termes dans l'action ne varient donc pas. Ainsi, les termes de variation d'action de la gravitation et de la matière non électromagnétique sont nuls. Pour obtenir les équations du champ électromagnétique par un principe variationnel, nous devons imposer que la variation de l'action au voisinage du champ solution est nulle :

$$\delta S_{em} = 0 \quad (259)$$

En ajoutant la densité de lagrangien du champ électromagnétique standard  $\mathcal{L}_{em,s} = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4e^2$  et le terme de couplage au dilaton

$\mathcal{L}_{em,int} = D_e(\phi)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4e^2$  (équation (131)), quelle que soit la trame choisie, en théorie dilaton la densité de lagrangien du champ électromagnétique s'écrit  $\mathcal{L}_{em} = h(\phi)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . En trame de Jordan, on aurait  $h(\phi(\varphi)) = 1 + D_e(\varphi)$ , et en trame d'Einstein, on aurait  $h(\phi) = f_0^4[1 + D_e(\varphi(\phi))] / f(\varphi(\phi))^4$ , mais nous allons voir que cela a peu d'importance car l'expression de  $h(\phi)$  ne change pas les observables.  $F^{\mu\nu}$  sont les composantes du tenseur champ électromagnétique qui vérifient

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (260)$$

où  $A^\mu$  sont les composantes du potentiel vecteur du champ électromagnétique. La deuxième égalité vient de ce que les coefficients de Christoffel se compensent par antisymétrie. Remarquons que comme le tenseur métrique n'est pas supposé dépendre du champ électromagnétique, nous avons

$$\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta(F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} \quad (261)$$

Nous notons  $h = h(g_{\mu\nu}, \phi)$  pour éviter d'alourdir les notations. La variation de l'action vaut

$$\delta S_{em} = 2 \int h F^{\mu\nu} (\partial_\nu \delta A_\mu - \partial_\mu \delta A_\nu) \sqrt{-g} \, d^4x = 4 \int h F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \sqrt{-g} \, d^4x \quad (262)$$

La deuxième égalité vient de l'antisymétrie de  $F^{\mu\nu}$ . En effectuant une intégration par partie, comme à l'infini les variations du champ électromagnétique sont nulles, les termes de bords sont nuls et nous obtenons

$$\delta S_{em} = -4 \int (\sqrt{-g} h F^{\mu\nu})_{,\nu} \delta A_\mu \, d^4x \quad (263)$$

Comme les variations de  $A_\mu$  sont supposées arbitraires, nous obtenons l'équation du champ électromagnétique dans le vide

$$(h F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\mu} = 0 \quad (264)$$

D'une part, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(h F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\mu} = \partial_\mu(h F^{\mu\nu}) + \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} h F^{\mu\nu} \quad (265)$$

$$= \partial_\mu(h F^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha h F^{\mu\nu} \quad (266)$$

où  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  sont les coefficients de Christoffel. D'autre part,

$$(h F^{\mu\nu})_{;\mu} = (h F^{\mu\nu})_{,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha h F^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu h F^{\mu\alpha} \quad (267)$$

Le dernier terme est nul en raison de l'antisymétrie de  $F^{\mu\alpha}$  et de la symétrie de  $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$  par rapport aux indices du bas. Ainsi, quelque soit le couplage au champ scalaire caractérisé par la fonction  $h$ , l'équation du champ électromagnétique dans le vide s'écrit

$$(h F^{\mu\nu})_{;\mu} = 0 \quad (268)$$

En substituant l'expression de  $F^{\mu\nu}$  en fonction de  $A^\mu$  nous obtenons l'équation suivante

$$h(\nabla_\mu \nabla^\nu A^\mu - \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \partial_\mu h = 0 \quad (269)$$

Nous pouvons imposer la condition de jauge de Lorenz sur le potentiel vecteur, soit  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ . Dès lors, il vient

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\mu = \nabla_\nu \nabla_\mu A^\mu + R^\mu_{\beta\mu\nu} A^\beta = R_{\beta\nu} A^\beta \quad (270)$$

où  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$  sont les composantes du tenseur de Riemann et  $R_{\alpha\beta}$  sont les composantes du tenseur de Ricci. L'équation est donc

$$-\square A^\nu + R^\nu_\beta A^\beta + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \partial_\mu \ln h = 0 \quad (271)$$

où  $\square = \nabla_\alpha \nabla^\alpha$ .

#### 4.2.8.2 Optique géométrique, ou notion de rayon lumineux

Pour parler de "rayons lumineux", le support mathématique sur lequel les photons sont supposés se mouvoir, il faut faire l'hypothèse que la longueur d'onde du champ électromagnétique rayonné est très petite devant non seulement toutes les autres dimensions physiques du système étudié, mais aussi devant le rayon de courbure de l'espace temps. Dans ce cadre, nous pouvons tracer les surfaces équiphases. Les trajectoires des rayons lumineux sont les lignes orthogonales en tout point aux surfaces équiphases. Si nous admettons l'approximation de l'optique géométrique, alors les ondes électromagnétiques sont localement planes, nous écrivons donc le potentiel vecteur ainsi [90] :

$$A^\mu = (a^\mu + i\varepsilon b^\mu + O(\varepsilon^2)) e^{i\Theta/\varepsilon}. \quad (272)$$

$\varepsilon$  est un paramètre supposé petit pour caractériser le fait que la phase  $\Theta$  varie vite par rapport aux dimensions du système solaire. Dans un référentiel inertiel local de carte ( $x^\mu$ ), puisque nous avons localement affaire à des ondes planes en approximation géométrique, nous pouvons approcher l'expression de  $\Theta$  par

$$\Theta = k^\mu x_\mu + O(\|x\|^2) + O((x^0)^2/c^2) \quad (273)$$

$$= -\frac{\omega}{c} x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + O(\|x\|^2) + O((x^0)^2/c^2) \quad (274)$$

où  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k}^i)$  sont les coordonnées de l'impulsion des photons qui constituent l'onde électromagnétique. Cela revient à caractériser localement la phase en fonction de la trajectoire des photons :  $k^\mu = \partial^\mu \Theta$ . Ainsi les lignes de champs servant de supports aux rayons lumineux sont les lignes tangentes en tout point au champ de vecteur de composantes  $k^\mu$ . Nous avons d'abord

$$\nabla_\beta A^\alpha = \left[ \frac{i}{\varepsilon} k_\beta a^\alpha - k_\beta b^\alpha + \nabla_\beta a^\alpha + O(\varepsilon) \right] e^{i\Theta/\varepsilon}. \quad (275)$$

La condition de jauge de Lorenz à l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  s'écrit

$$k_\beta a^\beta = 0, \quad (276)$$

et à l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$k_\beta b^\beta = \nabla_\beta a^\beta. \quad (277)$$

Une deuxième différentiation donne

$$\begin{aligned} \square A^\alpha &= \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} k^\beta k_\beta a^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\varepsilon} \left( -k^\beta k_\beta b^\alpha + 2k^\beta \nabla_\beta a^\alpha + a^\alpha \nabla_\beta k^\beta \right) \right] e^{i\Theta/\varepsilon} + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (278)$$

D'autre part, supposer que la longueur d'onde est petite devant la courbure de l'espace-temps revient à dire que le deuxième terme de l'équation du champ (271) est d'ordre 0 :  $R_\beta^\nu A^\beta = O(\varepsilon^0)$ . Par ailleurs, nous avons

$$(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) \partial_\beta \ln h = \frac{i}{\varepsilon} (k^\beta a^\alpha - k^\alpha a^\beta) e^{i\Theta/\varepsilon} \partial_\beta \ln h + O(\varepsilon^0). \quad (279)$$

L'équation du champ (271) à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  donne

$$k^\beta k_\beta = 0. \quad (280)$$

Ainsi, les trajectoires des rayons lumineux sont de genre lumière quelque soit le couplage au champ scalaire. Depuis cette relation nous déduisons

$$\nabla_\alpha (k^\beta k_\beta) = 0 = 2k^\alpha \nabla_\beta k_\alpha = 2k^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha S = 2k^\alpha \nabla^\alpha \nabla_\beta S = 2k^\alpha \nabla_\alpha k_\beta \quad (281)$$

car l'opérateur  $\nabla$  commute pour des scalaires. Ainsi nous avons prouvé que

$$k^\alpha \nabla_\alpha k^\beta = 0 \quad (282)$$

soit que les rayons lumineux suivent les géodésiques de genre lumière, quelque soit le couplage au champ scalaire et quelle que soit la trame de Jordan ou d'Einstein. Ce résultat important montre que les formulations mathématiques de la propagation des signaux électromagnétiques sont invariantes par transformation conforme, puisqu'elles sont valables quelle que soit la fonction de couplage  $h$  que l'on a introduite. On pourra donc choisir indifféremment la trame d'Einstein ou de Jordan pour effectuer les calculs de trajectoires de rayons lumineux.

#### 4.2.8.3 Équation des géodésiques

Soit  $\lambda \mapsto x^\mu(\lambda)$  une paramétrisation des géodésiques lumières où  $\lambda$  est un paramètre affine. Comme le vecteur de composantes  $k^\mu$  est tangent aux géodésiques, nous pouvons choisir la paramétrisation telle que

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (283)$$

Les équations des géodésiques s'écrivent

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (284)$$

Nous voudrions trouver les variations des  $x^i$  en fonction de  $t = x^0/c$ .

La composante 0 des équations des géodésiques s'écrit :

$$c \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (285)$$

D'autre part,

$$\frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{dx^j}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \quad (286)$$

et

$$\frac{d^2x^j}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^j}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dx^j}{dt} \frac{d^2t}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^j}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (287)$$

En substituant dans l'équation aux géodésiques et en simplifiant le terme  $(dt/d\lambda)^2$  nous obtenons

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \left( \Gamma_{\alpha\beta}^j - \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0 \quad (288)$$

#### 4.2.8.4 Mouvement de la lumière en formalisme post-Newtonien

Quelque soit le couplage avec le champ scalaire, les rayons lumineux suivent des géodésiques lumières. En formalisme tenseur-scalaire, nous pouvons utiliser n'importe lequel des systèmes de coordonnées et n'importe quelle métrique définie à une transformation conforme près puisque les lois sont invariantes. Pour commencer nous considérons la trajectoire d'un rayon lumineux en présence d'un seul corps massif. Dans la trame d'Einstein, nous utilisons l'intervalle d'espace-temps suivant

$$\begin{aligned} ds_*^2 &= \left( -1 + \frac{2}{c^2} \frac{G_* M_0^*}{r} \right) c dt \\ &\quad + \left( 1 + \frac{2}{c^2} \frac{G_* M_0^*}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (289)$$

Si l'on veut comparer les rayons lumineux avec les éphémérides planétaires, il faut utiliser le même paramétrage des masses que celui utilisé pour les équations du mouvement. En utilisant les équations (214) et (217) on obtient

$$G_* M_0^* = \frac{\gamma+1}{2} \tilde{G} \tilde{M}_0 (1-\delta) = \frac{\gamma+1}{2} \mu (1-\delta) \quad (290)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( -1 + \frac{\gamma+1}{c^2} \frac{\mu}{r} (1-\delta) \right) c^2 dt^2 \\ &\quad + \left( 1 + \frac{\gamma+1}{c^2} \frac{\mu}{r} (1-\delta) \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (291)$$

Pour la suite de cette section nous notons

$$2\mu^* = (\gamma + 1)(1 - \delta)\mu. \quad (292)$$

Ici il est sous-entendu que  $\delta$  dépend du corps considéré. Lorsque nous aurons à faire des sommes sur les différents corps  $A \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , nous noterons  $\delta_A$ .

L'équation des géodésiques sur  $\theta$  s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\theta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (293)$$

soit

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \cos\theta \sin\theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{\mu^*}{c^2 r} \right) \dot{r} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0. \quad (294)$$

Il est possible de choisir arbitrairement les conditions initiales sur  $\theta$  et  $\phi$  puisque le champ de gravité est à symétrie sphérique. De plus, nous choisissons l'orientation du repère telle que la tangente du rayon lumineux soit orthogonale à l'axe de rotation de l'angle  $\phi$ . Ainsi, en choisissant  $\theta(0) = \pi/2$  et  $d\theta/d\lambda|_{\lambda=0} = 0$ , la solution est  $\theta(\lambda) = \pi/2$ . Le vecteur  $\vec{\partial}_t \in T\mathcal{M}$  est un vecteur de Killing. Par conséquent,

$$g(\vec{\partial}_t, \vec{k}) = c g_{00} \frac{dt}{d\lambda} = c \left( 1 - \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (295)$$

De même,  $\vec{\partial}_\phi$  est un vecteur de Killing. De la même façon,

$$r^2 \left( 1 + \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) \frac{d\phi}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (296)$$

Nous en déduisons :

$$\left( 1 - \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) c dt = D \left( 1 + \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) r^2 d\phi \quad (297)$$

où  $D$  est une constante à déterminer. En substituant dans (291) et en exigeant que  $ds = 0$ , nous obtenons, en négligeant les termes d'ordre 4 :

$$\left[ D^2 r^4 \left( 1 + \frac{6\mu^*}{c^2 r} \right) - r^2 \left( 1 + \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) \right] d\phi^2 = \left( 1 + \frac{2\mu^*}{c^2 r} \right) dr^2. \quad (298)$$

Quand le rayon lumineux passe le plus proche de l'astre, en  $r = R$ , alors  $dr = 0$ . De là, nous en déduisons

$$D^2 = \frac{1}{R^2} \left( 1 - \frac{4\mu^*}{c^2 R} \right). \quad (299)$$

En substituant dans (298) et en posant  $x = r/R$ , nous obtenons, en négligeant les termes d'ordre 4 :

$$x^2 \left[ -1 + \frac{4\mu^*}{c^2 R} x + \left( 1 - \frac{4\mu^*}{c^2 R} \right) x^2 \right] d\phi^2 = dx^2 \quad (300)$$

soit

$$d\phi = \pm \frac{dx}{x \sqrt{-1 + \frac{4\mu^*}{c^2 R} x + \left(1 - \frac{4\mu^*}{c^2 R}\right) x^2}}. \quad (301)$$

Si l'on impose que  $\phi(R) = 0$ , alors la solution est

$$\phi(x) = \pm \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{1 + \frac{2\mu^*}{c^2 R}}{x} - \frac{2\mu^*}{c^2 R} \right) \right] \quad (302)$$

avec un + pour les  $r$  croissants et un - pour les  $r$  décroissants. Quand  $x \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\phi_{\pm\infty} = \pm \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \left( \frac{2\mu^*}{c^2 R} \right) \approx \pm \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\mu^*}{c^2 R}. \quad (303)$$

L'angle de déviation entre les deux asymptotes est

$$\phi_{+\infty} - \phi_{-\infty} - \pi = \Delta\phi_\infty = \frac{4\mu^*}{c^2 R}. \quad (304)$$

Si on choisit le même système d'unités que celui utilisé pour les équations du mouvement, l'angle de décalage vaut

$$\Delta\phi = 2(\gamma + 1 - \delta) \frac{\mu}{c^2 R}. \quad (305)$$

C'est la correction à apporter lorsque l'on effectue des mesures d'angles. Ici,  $\delta$  n'est relatif qu'au principe d'équivalence faible et ne contient pas l'effet Nordtvedt.

#### 4.2.8.5 Retard Shapiro en théorie dilaton

La méthode est la même que dans la section 3.1.3, précisément en utilisant l'équation (86). En utilisant la métrique des sections précédentes, on trouve

$$c(t_r - t_e) = \frac{R}{c} + (\gamma + 1 - \delta) \frac{\mu}{c^2} \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_p + r_p}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_e + r_e} \quad (306)$$

avec les mêmes notations que la section 3.1.3. Quand le rayon lumineux est perturbé par plusieurs corps, le retard s'exprime ainsi

$$c(t_r - t_e) = \frac{R}{c} + \sum_A (\gamma + 1 - \delta_A) \frac{\mu_A}{c^2} \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{pA} + r_{pA}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{eA} + r_{eA}} \quad (307)$$

où  $A$  désigne l'ensemble des planètes,  $\mathbf{r}_{iA} = \mathbf{r}_i - \mathbf{z}_A$  et  $r_{iA} = \|\mathbf{r}_{iA}\|$  où  $i = e$  ou  $p$ . Ici,  $\delta_A = \alpha_0 \bar{\alpha}_A / (1 + \alpha_0^2)$  et ne contient pas l'effet Nordtvedt.

#### 4.2.9 Résumé pratique

Cette section sert de protocole expérimental pour les utilisateurs d'éphémérides planétaires. Une fois que les constantes ont été correctement définies, la théorie dilaton linéaire contient cinq constantes fondamentales à tester, alors que la théorie dilaton quadratique contient dix constantes fondamentales. Ces constantes fondamentales apparaissent dans des paramètres dérivés dans les équations du mouvement. Les équations du mouvement d'Einstein-Infeld-Hoffmann-Lorentz-Droste modifiées à mettre en place dans les éphémérides s'obtiennent en dérivant la fonction de Lagrange (224) (voir annexe E)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = & \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B \mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} (1 + \delta_A + \delta_{AB}) \\ & - \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{c^2} \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \left[ \gamma v_A^2 + (\gamma + 1)v_B^2 - 2(\gamma + 1)\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{1}{2}\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{a}_B \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} \left( \frac{\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{v}_B}{r_{AB}} \right)^2 - 2(\gamma + \beta + d\beta^A) \sum_{C \neq A} \frac{\mu_C}{r_{AC}} \right. \\ & \quad \left. - (2\beta + 2d\beta^B - 1) \sum_{C \neq B} \frac{\mu_C}{r_{BC}} \right] \\ & + \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{c^2 r_{AB}^3} [2(\gamma + 1)\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{v}_A - (1 + 2\gamma)\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{v}_B] (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \\ & + \frac{3 + 4\gamma}{2} \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{c^2 r_{BA}} \mathbf{a}_B \end{aligned} \quad (308)$$

Dans les termes post-newtoniens,  $\mathbf{a}_A$  est à remplacer par son approximation newtonienne. Dans ces équations, plusieurs paramètres alternatifs apparaissent, nous allons les exprimer en fonction des paramètres fondamentaux de la théorie dilaton.

Si nous voulons seulement tester la théorie du dilaton linéaire, les cinq constantes fondamentales à tester sont  $\alpha_0$ ,  $d_m$ ,  $d_{\delta_m}$ ,  $d_{m_e}$  et  $d_e$ . Les paramètres dérivés qui interviennent dans l'équation du mouvement sont

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \quad (309)$$

$$\delta_A = \delta_A^d + \delta_A^N \quad (310)$$

avec

$$\delta_A^d = \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_A}{1 + \alpha_0^2}, \quad \delta_A^N = (\gamma - 1) \frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \quad (311)$$

où  $R_A$  est le rayon moyen de l'astre,

$$\delta_{AB} = \frac{\tilde{\alpha}_A \tilde{\alpha}_B}{1 + \alpha_0^2} \quad (312)$$

où on a (équation (140) et (158))

$$\tilde{\alpha}_A = d_{\hat{m}} Q_{\hat{m}}^A + d_{\delta m} Q_{\delta m}^A + d_{m_e} Q_{m_e}^A + d_e Q_e^A \quad (313)$$

les charges dilatoniques  $Q_i^A$  étant calculables en fonction de la composition atomique des corps (cf. eq. (142), (143), (144), (145) et tableau 11), et où l'on a

$$d_{\hat{m}} = \frac{2}{Z(\varphi)} [D'_{\hat{m}}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)] \quad (314)$$

$$d_{\delta m} = \frac{2}{Z(\varphi)} [D'_{\delta m}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)] \quad (315)$$

$$d_{m_e} = \frac{2}{Z(\varphi)} [D'_{m_e}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)] \quad (316)$$

$$d_e = \frac{2}{Z(\varphi)} [D'_e(\phi_0)] \quad (317)$$

si l'on tient à faire le lien avec les fonctions de couplages du lagrangien de la théorie (voir eq. (140)).

Si l'on veut tester le couplage quadratique du dilaton, il faut ajouter cinq constantes fondamentales :  $\beta_0, b_{\hat{m}}, b_{\delta m}, b_{m_e}, b_e$ . Les paramètres dérivés qui interviennent dans l'équation du mouvement sont

$$\beta = 1 + \tilde{\beta}_0 \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} \quad (318)$$

$$d\beta^A = b_{\hat{m}} Q_{\hat{m}}^A + b_{\delta m} Q_{\delta m}^A + b_{m_e} Q_{m_e}^A + b_e Q_e^A \quad (319)$$

où

$$b_{\hat{m}} = \frac{2}{Z(\phi_0)} (D''_{\hat{m}}(\phi_0) - D''_g(\phi_0)) - \frac{Z'(\phi_0)}{Z(\phi_0)} (D'_{\hat{m}}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)) \quad (320)$$

$$b_{\delta m} = \frac{2}{Z(\phi_0)} (D''_{\delta m}(\phi_0) - D''_g(\phi_0)) - \frac{Z'(\phi_0)}{Z(\phi_0)} (D'_{\delta m}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)) \quad (321)$$

$$b_{m_e} = \frac{2}{Z(\phi_0)} (D''_{m_e}(\phi_0) - D''_g(\phi_0)) - \frac{Z'(\phi_0)}{Z(\phi_0)} (D'_{m_e}(\phi_0) - D'_g(\phi_0)) \quad (322)$$

$$b_e = \frac{2}{Z(\phi_0)} D''_e(\phi_0) - \frac{Z'(\phi_0)}{Z(\phi_0)} D'_e(\phi_0) \quad (323)$$

Il faut également modifier le terme de Nordtvedt en ajoutant la contribution de  $\beta$  :

$$\delta_A^N = -(4\beta - \gamma - 3) \frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \quad (324)$$

Si on veut tester la théorie dilaton linéaire, il suffit de faire  $\beta = 1$  et  $d\beta^A = 0$ .

Le temps qui sépare deux événements  $e$  et  $r$  doit également être modifié selon

$$c(t_r - t_e) = \frac{R}{c} + \sum_A (\gamma + 1 - \delta_A^d) \frac{\mu_A}{c^2} \ln \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{pA} + r_{pA}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{eA} + r_{eA}} \quad (325)$$

où  $A$  désigne l'ensemble des planètes,  $R = |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_r|$ ,  $\mathbf{r}_{iA} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A$  et  $r_{iA} = |\mathbf{r}_{iA}|$  où  $i = e$  ou  $p$ .

La correction relativiste à ajouter aux angles de mesure est

$$\Delta\phi = \sum_A 2(\gamma + 1 - \delta_A^d) \frac{\mu_A}{c^2 R_A}. \quad (326)$$

où  $R$  est la distance entre le rayon lumineux et l'astre  $A$ .

À partir de là nous avons tous les éléments nécessaires pour contraindre la théorie dilaton à l'aide d'INPOP.

#### 4.3 CONTRAINTES SUR LA THÉORIE DILATON AVEC LA TÉLÉMÉTRIE LASER-LUNE

Nous montrons un premier exemple d'application de la dynamique dilatonique. Il s'agit d'une contribution apportée à la partie d'INPOP17a qui contient le mouvement de la Lune contraint par la télémétrie laser-Lune, développée par Vishnu Viswanathan et Agnès Fienga. L'application de ce travail à la physique fondamentale a permis de contraindre le principe d'équivalence en termes de théorie du dilaton léger couplé non universellement. Nous développons ici quelques aspects théoriques en lien avec cette contrainte.

##### 4.3.1 Dynamique du système Soleil-Terre-Lune

Usuellement, la violation du principe d'équivalence est encodée dans un rapport variable de la masse inertielle et grave en fonction du corps. Cela se traduit par l'équation du mouvement suivante

$$\mathbf{a}_A = - \left( \frac{m_A^G}{m_A^I} \right) \sum_{B \neq A} \frac{G m_B^G}{r_{AB}^3} \mathbf{r}_{AB} + O(c^{-2}) \quad (327)$$

Ainsi, le différentiel d'accélération entre la Terre et la Lune, perturbé par le Soleil, s'écrit (Les lettres  $T, L, S$  représentent respectivement la Terre, la Lune et le Soleil, les exposants  $I$  et  $G$  indiquent s'il s'agit des masses inertes ou graves)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_L - \mathbf{a}_T &= - \frac{\mu}{r_{TL}^3} \mathbf{r}_{LT} + G m_S^G \left( \frac{\mathbf{r}_{TS}}{r_{TS}^3} - \frac{\mathbf{r}_{LS}}{r_{SL}^3} \right) \\ &\quad + G M_S^G \left[ \frac{\mathbf{r}_{TS}}{r_{TS}^3} \left( \frac{m_T^G}{m_T^I} - 1 \right) - \frac{\mathbf{r}_{LS}}{r_{LS}^3} \left( \frac{m_L^G}{m_L^I} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (328)$$

où

$$\mu = G \left[ m_L^G + m_T^G + \left( \frac{m_T^G}{m_T^I} - 1 \right) + \left( \frac{m_L^G}{m_L^I} - 1 \right) \right] \quad (329)$$

Si le principe d'équivalence est respecté, le dernier terme de (328) est nul, de telle sorte que le signal supplémentaire qui devrait apparaître dans le mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre s'exprime

$$\delta \mathbf{a} = GM_S^G \left[ \frac{\mathbf{r}_{TS}}{r_{TS}^3} \left( \frac{m_T^G}{m_T^I} - 1 \right) - \frac{\mathbf{r}_{LS}}{r_{LS}} \left( \frac{m_L^G}{m_L^I} - 1 \right) \right] \approx \mathbf{a}_T \Delta \quad (330)$$

où

$$\Delta = \frac{m_T^G}{m_T^I} - \frac{m_L^G}{m_L^I} \quad (331)$$

Il est connu que les théories qui respectent le principe d'équivalence faible mais non le fort (par exemple toute théorie tenseur-scalaire avec couplage conforme) peuvent s'encoder dans le paramètre de Nordtvedt. Pour ce paramétrage, en particulier, on a [88]

$$\Delta_F = \eta_N \left( \frac{|\Omega_T|}{m_T c^2} - \frac{|\Omega_L|}{m_L c^2} \right) \approx -\eta_N 4.5 \times 10^{-10} \quad (332)$$

de telle sorte qu'une contrainte sur  $\Delta_F$  se traduira par une contrainte sur  $\eta_N$ , le paramètre de Nordtvedt. En théorie dilaton, les choses sont plus complexes, car l'équation du mouvement admet un terme de violation du principe d'équivalence faible supplémentaire

$$\mathbf{a}_A = - \sum_{B \neq A} \frac{\mu_B}{r_{AB}^3} \mathbf{r}_{AB} (1 + \delta_A + \delta_{AB}) \quad (333)$$

où  $\delta_A = \alpha_0 \tilde{\alpha}_A / (1 + \alpha_0^2) - \eta_N |\Omega_A| / m_A c^2$ . Avec un tel paramétrage, la violation du principe d'équivalence induit un terme supplémentaire dans le différentiel d'accélération entre la Lune et la Terre

$$\delta \mathbf{a} = \mu_S \left[ \frac{\mathbf{r}_{TS}}{r_{TS}^3} (\delta_T + \delta_{TS}) - \frac{\mathbf{r}_{LS}}{r_{LS}^3} (\delta_L + \delta_{LS}) \right] \approx \mathbf{a}_T \Delta_d \quad (334)$$

où

$$\Delta_d = \delta_T + \delta_{TS} - \delta_L - \delta_{LS} \quad (335)$$

qui n'est pas réductible à (331). C'est surtout le cas dans certains scénarios de couplage où  $\alpha_0 = 0$  et où donc  $\delta_T = \delta_L = 0$  et seuls  $\delta_{TS}$  et  $\delta_{LS}$  sont non nuls [3].

#### 4.3.2 Incertitudes liées au modèle de la structure interne de la Lune et aux effets thermiques

Pour contraindre correctement le principe d'équivalence avec la télémétrie laser-Lune, il faut être certain de ne pas mesurer un autre signal sans s'en rendre compte. Il est facile de mesurer un signal qui a

la même fréquence (la fréquence synodique) que l'effet hypothétique de la violation du principe d'équivalence dans la dynamique Terre-Lune-Soleil. En effet, à l'heure actuelle, les incertitudes liées à notre connaissance de la structure interne de la Lune peuvent induire des signaux synodiques pouvant être interprétés comme une violation du principe d'équivalence.

Quelle que soit la théorie avec laquelle on interprète la violation du principe d'équivalence, la contrainte portera toujours sur le paramètre  $\Delta$  qui intervient dans l'équation

$$\delta a = a_T \Delta \quad (336)$$

On sait que le principal effet de la violation du principe d'équivalence a un effet sur la distance Terre-Lune avec une fréquence synodique

$$\Delta r_{TL} = S \Delta \cos D \quad (337)$$

où  $D$  est l'angle synodique et  $S \approx -3 \times 10^{10} \text{ m}$  [88]. L'effet de pression de radiation et de dilatation thermique des réflecteurs a un effet semblable donc une correction  $\Delta r = 3.0 \pm 0.5 \text{ mm}$  s'impose [91; 89]. Ainsi, lorsque la contrainte est donnée sur  $\Delta$ , on en déduit la contrainte donnée sur  $S\Delta$ , à laquelle il faudra retrancher  $\Delta r = 3.0 \pm 0.5 \text{ mm}$  en sommant quadratiquement les incertitudes.

Malgré ces précautions, la mesure du principe d'équivalence avec la télémétrie laser-Lune est sujette à des incertitudes. Notre connaissance de la structure interne de la Lune et de sa réponse aux effets de marée a été améliorée mais reste incomplète [18]. De même la modélisation empirique des petits effets (réflecteurs de la Lune et pression radiative [91; 89]) pourrait être améliorée, par exemple en proposant un modèle dynamique. Il est donc encore possible qu'une partie de la mesure du principe d'équivalence avec la télémétrie laser-Lune provienne de notre manque de connaissances sur la dynamique lunaire.

#### 4.3.3 Contrainte avec l'algorithme Jackknife, résultats

Pour avoir des incertitudes plus réalistes, nous avons utilisé un test Jackknife à 5% (cela consiste à retirer aléatoirement 5% des observations et de recommencer le même algorithme de test des moindres carrés afin de mieux estimer les erreurs formelles [92]). Des algorithmes plus performants comme les techniques de bootstrap existent mais ils sont plus coûteux en ressources numériques). Sans correction due aux effets de radiation et dilatation thermique, la contrainte est  $\Delta_0 = (6.4 \pm 6.9) \times 10^{-14}$ . Cela correspond à une amplitude  $S\Delta = 1.1 \pm 2.1 \text{ mm}$ . Une fois retranché à cela  $\Delta r = 3.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ , en sommant quadratiquement les incertitudes puis en reconvertissant en violation de principe d'équivalence, la contrainte corrigée sur  $\Delta$  est

$$\Delta = (-3.8 \pm 7.1) \times 10^{-14} \quad (338)$$

#### 4.3.4 Comparaison avec MICROSCOPE, discussion

L'expérience MICROSCOPE compare l'accélération de deux cylindres de compositions différentes dans un satellite qui a orbité autour de la Terre entre 2016 et 2018 afin de contraindre le principe d'équivalence. Le dernier résultat est [1]

$$\Delta_{\text{MICROSCOPE}} = (-1 \pm 9(\text{stat}) \pm 9(\text{syst})) \times 10^{-15} \quad (339)$$

(erreur statistique plus erreur systématique). Ce résultat peut paraître "meilleur" que le nôtre – bien que les ordres de grandeur soient les mêmes (à un facteur 3.9 pour les incertitudes) – mais en raison de la différence des systèmes étudiés, nous allons voir qu'avec la théorie dilaton, les deux contraintes ont toutes les deux un intérêt indépendant. En effet, on sait que le terme de Nordtvedt vaut, pour des corps sphériques

$$\delta_A^N = \eta_N \frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \propto \rho_A R_A^2 \quad (340)$$

où  $\rho_A$  est la densité moyenne de  $A$ , qui ne varie pas de plusieurs ordres de grandeur d'une planète à l'autre. D'après ce qui précède, la sensibilité à l'effet Nordtvedt est donc proportionnelle au carré de la taille typique de l'objet considéré. Il est donc clair que si l'effet Nordtvedt existe, il sera détecté d'abord par la télémétrie laser-Lune et non par l'expérience MICROSCOPE. En revanche, l'expérience MICROSCOPE est plus sensible à une violation du principe d'équivalence faible même si le principe d'équivalence fort peut être violé en même temps. Par exemple, l'expérience MICROSCOPE est plus à même de détecter la violation du principe d'équivalence faible due à un dilaton que le LLR [93]. Cela est d'autant plus vrai que les compositions internes de la Lune et de la Terre sont relativement similaires.

Les deux expériences (MICROSCOPE et la télémétrie Laser-Lune) ont donc des intérêts complémentaires pour le test du principe d'équivalence. Il est par ailleurs remarquable et fortuit que l'ordre de grandeur de la contrainte soit quasiment le même, car les techniques instrumentales et les objets étudiés sont complètement différents.

#### 4.4 CONTRAINTES SUR LA THÉORIE DILATON DANS LE SYSTÈME SOLAIRE AVEC INPOP19A

##### 4.4.1 Réduction à quatre paramètres

La difficulté du test du principe d'équivalence faible à l'échelle du système solaire vient du grand nombre de paramètres. A priori, il faudrait autant de paramètres libres que de planètes, en ajoutant en plus  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  (ou  $\gamma$  et  $\beta$  dans un cadre plus général). Dans la section 2.2.2, nous avons déjà parlé de la difficulté d'inclure des paramètres

TABLE 12 – Charges dilatoniques des principaux astres gazeux du système solaire. En dernière colonne, on indique la variance relative des charges dilatoniques.

Astre	Soleil	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	
Hydrogène	74%	90%	96%	83%	80%	
Hélium	25%	10%	3%	15%	19%	
SiO <sub>2</sub>	0%	0%	0%	0%	0%	
Fer	0%	0%	0%	0%	0%	
Magnésium	0%	0%	0%	0%	0%	$\frac{\sigma_Q}{\langle Q \rangle}$
$\langle Q_{\hat{m}} - 0.093 \rangle$	$-4.76 \times 10^{-2}$	$-5.27 \times 10^{-2}$	$-5.50 \times 10^{-2}$	$-5.09 \times 10^{-2}$	$-4.96 \times 10^{-2}$	5.6%
$\langle Q_{\delta m} \rangle$	$-1.27 \times 10^{-3}$	$-1.53 \times 10^{-3}$	$-1.65 \times 10^{-3}$	$-1.44 \times 10^{-3}$	$-1.37 \times 10^{-3}$	10%
$\langle Q_{m_e} \rangle$	$4.81 \times 10^{-4}$	$5.23 \times 10^{-4}$	$5.42 \times 10^{-4}$	$5.08 \times 10^{-4}$	$4.97 \times 10^{-4}$	4.6%
$\langle Q_e + 0.00014 \rangle$	$7.78 \times 10^{-4}$	$8.03 \times 10^{-4}$	$8.15 \times 10^{-4}$	$7.94 \times 10^{-4}$	$7.88 \times 10^{-4}$	1.8%

non encore mesurés dans l’algorithme de Gauss-Newton. Avec un seul paramètre à tester, comme dans le test du potentiel Yukawa génériquement associé au graviton massif, il suffit de faire une grille de valeurs – ce qui demande déjà des ressources calculatoires conséquentes. Dans le cas général du test du principe d’équivalence à l’échelle de tout le système solaire, cela demanderait des ressources numériques considérables : il faudrait tirer aléatoirement un grand nombre de valeurs pour chaque paramètre de violation du principe d’équivalence et effectuer la procédure d’ajustement des paramètres du modèle de référence pour chaque tirage de jeu de paramètres alternatifs. Le tout pour un résultat probablement peu intéressant, car avec un si grand nombre de paramètres libres, il est fort probable que de nombreux effets puissent se compenser, que des corrélations fortes existent, et que la contrainte finale soit difficile à interpréter. C’est pour cette raison que jusqu’à présent, personne n’avait utilisé d’éphéméride planétaire pour contraindre le principe d’équivalence. Une alternative possible est d’utiliser des algorithmes de type Monte-Carlo quand il y a trop de paramètres.

Cependant, la théorie dilaton donne un cadre théorique qui permet de restreindre les possibilités en supposant des manières particulières de coupler le champ scalaire et la matière. Notamment, nous avons vu que le couplage non universel entre le champ scalaire et la matière est proportionnel aux charges dilatoniques. Il est possible d’estimer ces charges dilatoniques, en connaissant approximativement les compositions atomiques des planètes du système solaire. À partir du tableau 11 on obtient les tableaux 12 et 13.

On constate qu’à 10% près, si on fait abstraction de  $Q_{\delta m}$  les charges dilatoniques des planètes telluriques sont les mêmes, ainsi que pour les planètes gazeuses. De plus, pour les planètes telluriques,  $Q_{\delta m}$  a plusieurs ordres de grandeur de moins que les autres charges dilatoniques. Pour pouvoir négliger ces différences en raison de la petitesse relative des  $Q_{\delta m}$ , nous devons ajouter une hypothèse. Damour & Donoghue [2] font l’hypothèse que les différentes constantes de couplage

TABLE 13 – Charges dilatoniques des principaux astres telluriques du système solaire. En dernière colonne, on indique la variance relative des charges dilatoniques.

Astre	Mercure	Vénus/Mars	Terre	Lune	
Hydrogène	0%	0%	0%	0%	
Hélium	0%	0%	0%	0%	
SiO <sub>2</sub>	40%	80%	45%	63%	
Fer	60%	20%	32%	13%	
Magnésium	0%	0%	14%	0%	$\frac{\sigma_Q}{\langle Q \rangle}$
$\langle Q_{\tilde{m}} - 0.093 \rangle$	$-1.13 \times 10^{-2}$	$-1.26 \times 10^{-2}$	$-1.20 \times 10^{-2}$	$-1.27 \times 10^{-2}$	5.3%
$\langle Q_{\delta m} \rangle$	$7.41 \times 10^{-5}$	$2.67 \times 10^{-5}$	$4.74 \times 10^{-5}$	$2.33 \times 10^{-5}$	54.5%
$\langle Q_{m_e} \rangle$	$2.63 \times 10^{-4}$	$2.71 \times 10^{-4}$	$2.67 \times 10^{-4}$	$2.71 \times 10^{-4}$	1.4%
$\langle Q_e + 0.00014 \rangle$	$2.34 \times 10^{-3}$	$1.95 \times 10^{-3}$	$2.11 \times 10^{-3}$	$1.93 \times 10^{-3}$	9.1%

*En modèle standard, on parle parfois d'hypothèse de "naturalité".*

ont le même ordre de grandeur dans le cas d'un couplage linéaire. Dans notre théorie non linéaire cela se traduirait par le fait que les différentes fonctions de couplage ont le même ordre de grandeur dans leurs dérivées premières et secondes. Cette hypothèse peut être critiquée, car en vérité nous ne savons rien de la valeur des constantes (ou fonctions) de couplage. De plus nous savons que les différentes interactions de la physique ont des ordres de grandeur très différents malgré certaines similitudes formelles. Dans les prochaines décennies, si les moyens de calculs sont améliorés, nous pourrons tester directement les constantes (ou fonctions) de couplage (leurs dérivées premières et secondes en  $\varphi_0$  pour les fonctions), cela ferait en tout 5 paramètres pour le dilaton linéaire et 10 pour le dilaton quadratique, ce qui, pour l'instant, est au dessus de nos moyens. Pour l'instant, nous adopterons donc l'hypothèse de "naturalité" – que les fonctions de couplage et leurs dérivées ont le même ordre de grandeur – de façon agnostique, comme toujours dans cette thèse. Nous sommes prêts à revenir dessus si nécessaire, et surtout si possible, ce qui n'est pas le cas pour l'instant.

Étant donné la précision actuelle, et que l'on n'a encore jamais détecté de violation du principe d'équivalence faible, il est raisonnable de considérer que la constante de couplage non universelle  $\tilde{\alpha}_A$  est la même pour tous les corps telluriques, d'une part, et la même pour tous les corps gazeux, d'autre part. Si on se place dans la théorie de Damour & Donoghue [2] où le couplage au dilaton est linéaire, il n'y a que trois paramètres alternatifs à tester :

- $\alpha_0$ , qui représente le couplage universel entre le champ scalaire et les autres éléments,
- $\alpha_G$  qui représente  $\tilde{\alpha}_A$  pour  $A =$ Soleil, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune,
- $\alpha_T$  qui représente  $\tilde{\alpha}_B$  pour  $B =$ Mercure, Vénus, Terre, Lune, Mars, Pluton.

D'après la section 4.2.9, les paramètres dérivés à intégrer aux équations du mouvement sont les suivants

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \quad (341)$$

$$\delta_A = \delta_A^d + \delta_A^N \quad (342)$$

où

$$\delta_A^d = \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_A}{1 + \alpha_0^2}, \quad \delta_A^N = (\gamma - 1) \frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \quad (343)$$

$$\delta_{AB} = \frac{\tilde{\alpha}_A \tilde{\alpha}_B}{1 + \alpha_0^2} \approx \tilde{\alpha}_A \tilde{\alpha}_B \quad (344)$$

où  $\tilde{\alpha}_A = \alpha_G$  ou  $\alpha_T$  selon la nature du corps (gazeux ou tellurique),  $\mu_A = \tilde{G}\tilde{m}_A$  est la masse gravitationnelle au repos du corps  $A$ , et  $R_A$  est son rayon moyen.

Si nous voulons tester le dilaton non linéaire mais en se limitant aux termes quadratiques universels, on ajoutera le paramètre  $\beta_0$  qui apparaît dans le coefficient

$$\beta = 1 + \frac{\beta_0}{2} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} \quad (345)$$

si on fait ainsi, il faut modifier  $\delta_A^N$  selon

$$\delta_A^N = -(4\beta - \gamma - 3) \frac{3\mu_A}{5R_A c^2} \quad (346)$$

Dans un troisième temps, on pourra éventuellement ajouter  $d\beta_T$  et  $d\beta_G$  pour les planètes telluriques et gazeuses respectivement – les mêmes arguments de simplification s'appliquent car les coefficients quadratiques sont aussi proportionnels aux charges dilatoniques. Nous n'avons pas encore effectué un tel test.

#### 4.4.2 Méthode numérique

Comme la théorie dilaton léger appliquée au système solaire contient au minimum trois paramètres à tester, faire des grilles de valeurs n'est plus envisageable et la méthode de rejet expliquée chapitre 2 section 2.3.1 est adaptée à ce problème.

Pour cette étude, avec le centre de calculs dont nous disposons<sup>8</sup>, nous pouvons effectuer 9600 ajustements de paramètres en 15h environ – plus précisément, nous disposons de 50 noeuds de calculs contenant chacun 24 coeurs, ce qui fait un total de 1200 simulations simultanées, dont nous répétons l'opération huit fois avec d'autres valeurs tirées, ce qui aboutit à 9600 tirages. L'objectif était d'atteindre un nombre de tirage aux alentours de 10000 pour faire des calculs préliminaires,

8. Il s'agit du centre MesoPSL <http://www.mesopsl.fr/>

mais il serait plus confortable d'en faire encore plus pour augmenter la taille des échantillons et affiner les distributions.

Nous tirons autant de jeux de paramètres que possibles, qui, une fois tirés, restent fixes pendant qu'INPOP ajuste tous les autres paramètres du modèle aux observations. Une fois ceci fait, nous calculons la vraisemblance des solutions et nous effectuons l'algorithme de rejet pour obtenir les histogrammes des paramètres à tester.

#### 4.4.3 Résultats pour un couplage linéaire

Nous savons qu'ici, les paramètres fondamentaux sont  $\alpha_0$ ,  $\alpha_G$ ,  $\alpha_T$  et que les paramètres dérivés sont  $\gamma$ ,  $\delta_A = \delta_A^d + \delta_A^N$ , et  $\delta_{AB}$  (cf. équations (341), (342), (344)). Nous procédons au même algorithme de rejet que dans la section précédente avec 21900 tirages.

Nous savons qu'avec des éphémérides planétaires,  $\gamma$  et  $\beta$  sont contraints à  $10^{-4}$  environ [28]. Le problème ici est que nous ne testons pas directement ces paramètres. Dans la théorie dilaton, notamment, le paramètre  $\alpha_0$  est présent dans de nombreux paramètres dérivés (équations (309) et (311)), on peut donc attendre une contrainte plus forte sur  $\alpha_0$  que s'il n'était présent que dans  $\gamma - 1$ . On note que dans la théorie du dilaton léger, on a toujours  $\gamma < 1$  (équation (341)). La difficulté de ce travail est qu'à l'origine on n'a pas vraiment d'idée précise de la fenêtre de tir à imposer à la distribution uniforme initiale – nous n'avons a priori aucune raison de considérer autre chose qu'une distribution uniforme pour la initiale. Nous avons donc fait plusieurs simulations en modifiant empiriquement les fenêtres de tir en fonction du critère suivant pour chaque paramètre, cherchant à trouver un compromis entre temps de calcul et précision :

- Si la distribution finale d'un paramètre n'est pas bornée par l'intervalle de la distribution uniforme initiale – c'est-à-dire si l'histogramme contient des éléments sur les extrémités de l'intervalle –, nous refaisons le calcul en élargissant l'intervalle initial. Cette opération a pour but de gagner en réalisme sur la distribution finale.
- Si la distribution finale d'un paramètre est très serrée autour de zéro par rapport à la largeur de la distribution uniforme initiale, nous refaisons le calcul en diminuant la largeur initiale. Cette opération a pour but d'avoir plus de paramètres qui survivent à l'algorithme de rejet pour avoir un histogramme final plus précis.

La fenêtre de tir à laquelle nous sommes arrivé et dans laquelle nous avons tiré une distribution uniforme était celle-ci

$$\alpha_0 \in [-2.5 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}]$$

$$\alpha_G \in [-2 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}]$$

$$\alpha_T \in [-2.5 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}]$$

#### 4.4.3.1 Résidus

Nous traçons d'abord les résidus obtenus en fonction de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_T$  et  $\alpha_G$  dans la figure 16 après ajustement mais avant l'algorithme de rejet. Il semble difficile de conclure quoique ce soit d'après cette figure, même si nous voyons que  $\alpha_0$  influe sur les résidus. Nous obtenons des figures similaires pour les autres résidus et les autres paramètres fondamentaux.

On constate que pour Cassini Grand Finale et pour Juno, les résidus peuvent devenir plus petits que ceux de la solution de référence. Cela est dû au faible nombre de points de ces ensembles d'observations (9 points pour chacun face à quelques 100 000 points au total). Il est possible qu'une très légère dégradation des résidus de Mars soit compensée par un ajoutement de quelques points, en l'occurrence ceux de Juno et Cassini Grand Finale. Un comportement similaire était d'ailleurs observé avec le graviton massif (revoir figure 13 chapitre 3).

Il est plus intéressant de tracer les résidus en fonction des paramètres dérivés qui, seuls, interviennent dans la dynamique planétaire. Nous obtenons la figure 17. Il apparaît que ce sont les paramètres  $\delta_A^d$  qui contraignent le plus les éphémérides. En effet, sur les résidus, on voit que ce sont les seuls paramètres pour lesquels les résidus se dégradent de façon univoque lorsque les valeurs de ces paramètres s'éloignent de zéro : seuls ces paramètres présentent des résidus qui ne peuvent pas descendre en dessous d'une certaine valeur lorsque les  $\delta_A^d$  s'éloignent de zéro. Ce n'est pas le cas pour  $\gamma - 1$  même si son influence sur les résidus n'est pas nulle. Dans le couplage linéaire, on a  $\beta = 1$ . Étant données les valeurs de  $\alpha_0$ , le terme de Nordtvedt est beaucoup plus petit qu'en dilaton non linéaire (voir section 4.4.4). Il nous est difficile d'expliquer l'asymétrie des distributions des résidus en fonction de  $\alpha_A$  et des  $\delta_A^d$ .

On constate que la variation relative des résidus en fonction des paramètres dérivés n'est pas bornée inférieurement par une parabole centrée en 0. Cela démontre la non linéarité du comportement des résidus en fonction des paramètres alternatifs et confirme qu'il ne fallait pas faire d'algorithme de Gauss-Newton pour contraindre ces paramètres.

#### 4.4.3.2 Vraisemblance

On peut aussi tracer les vraisemblances en fonction des paramètres fondamentaux puis dérivés de la théorie. Nous obtenons les figures 18 et 19. Le trait épais à  $L = 0$  indique qu'une grosse partie des solutions a des résidus trop dégradés pour avoir une vraisemblance acceptable. Nous voyons que les zones qui se dégagent contiennent toutes 0 pour

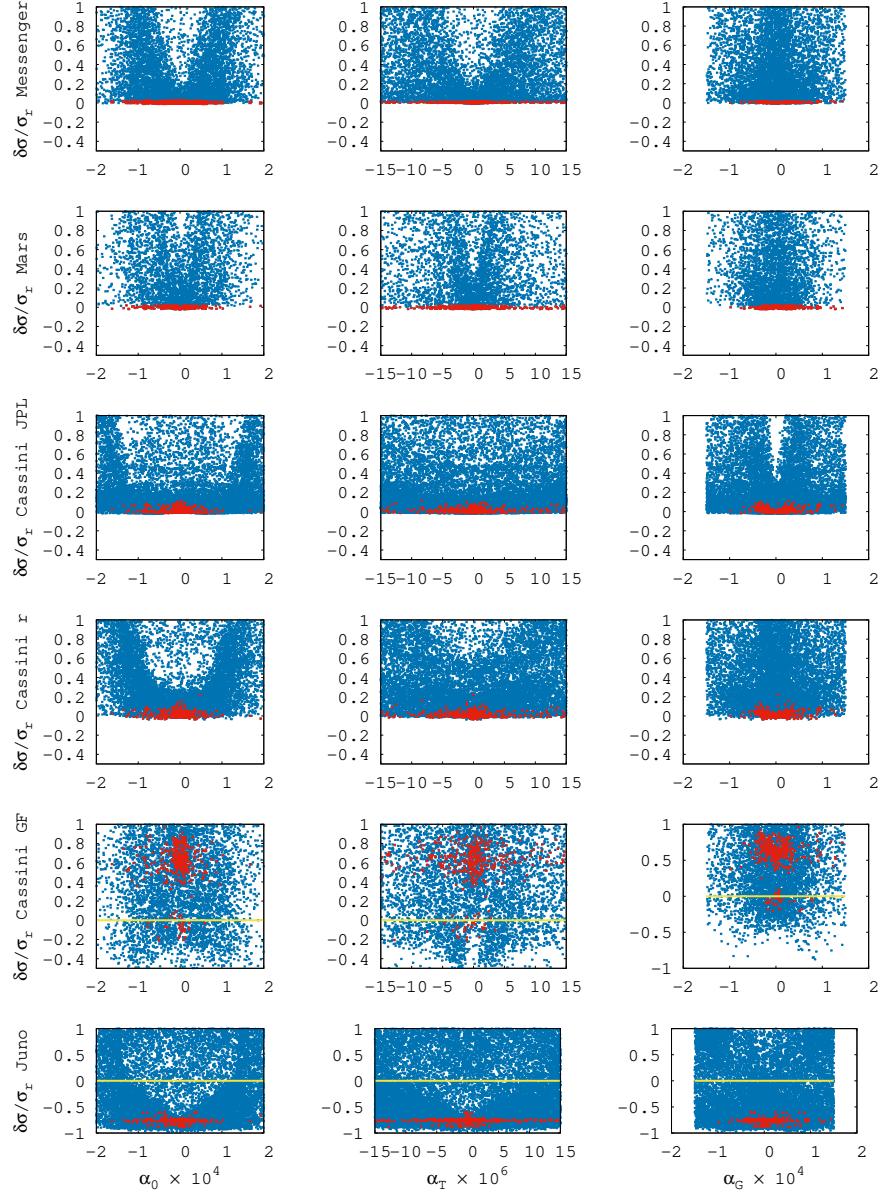


FIGURE 16 – Variations relatives des écart-types ( $(\sigma - \sigma_r)/\sigma_r$  où  $\sigma$  est l'écart-type calculé et  $\sigma_r$  l'écart-type de la solution de référence) des résidus en fonction de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_T$  et  $\alpha_G$  (respectivement : première colonne, deuxième colonne et troisième colonne). Nous traçons en rouge les résidus pour lesquels  $L > 0.01$  – c'est-à-dire les éphémérides qui ont moins de 99% de chances d'être rejetées par l'algorithme de rejet. Comme certains résidus sont meilleurs que ceux de la solution de référence, nous traçons en jaune la ligne où ils sont égaux.

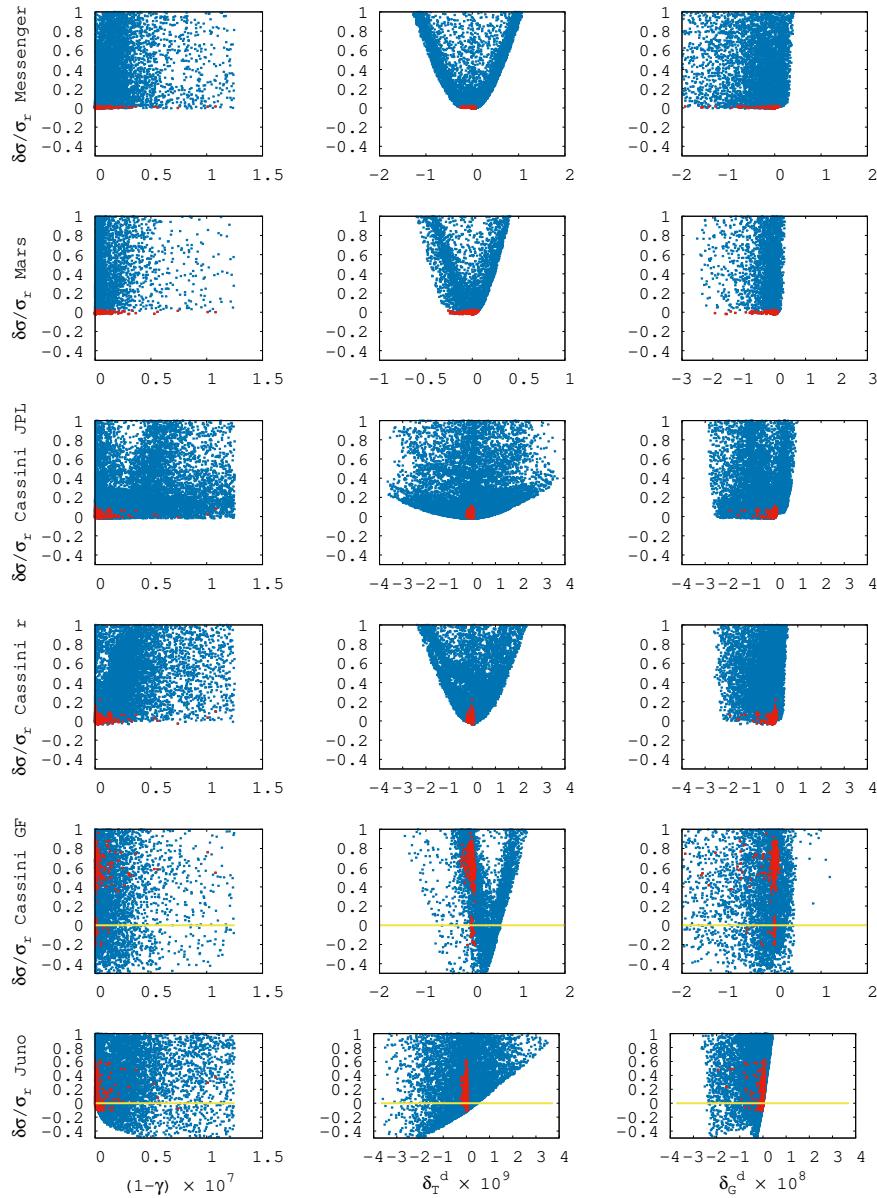
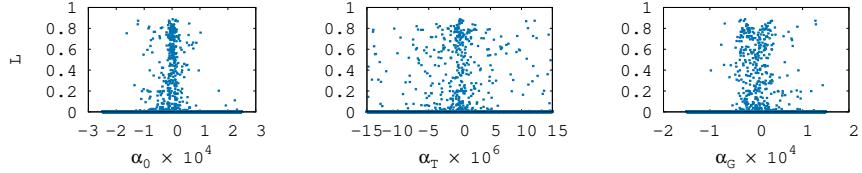
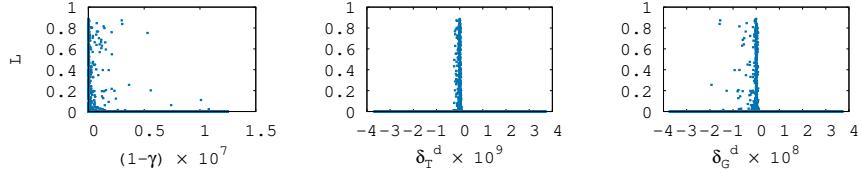


FIGURE 17 – Variations relatives des écart-types ( $((\sigma - \sigma_r)/\sigma_r$  où  $\sigma$  est l'écart-type calculé et  $\sigma_r$  l'écart-type de la solution de référence) des résidus en fonction de  $1 - \gamma$ ,  $\delta_T$  et  $\delta_G$  (respectivement : première colonne, deuxième colonne et troisième colonne). Nous traçons en rouge les résidus pour lesquels  $L > 0.01$  – c'est-à-dire les éphémérides qui ont moins de 99% de chances d'être rejetées par l'algorithme de rejet. Comme certains résidus sont meilleurs que ceux de la solution de référence, nous traçons en jaune la ligne où ils sont égaux.

FIGURE 18 – Vraisemblances en fonction de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_T$  et  $\alpha_G$ .FIGURE 19 – Vraisemblances en fonction de  $1 - \gamma$ ,  $\delta_T$  et  $\delta_G$ .

les trois paramètres et donc sont compatibles avec la relativité générale. C'est encore plus visible avec les paramètres dérivés.

#### 4.4.3.3 Histogrammes

Après l'algorithme de rejet, ici en moyenne 82 solutions survivent sur 28560 solutions testées. Nous réitérons l'opération de rejet 1000 fois pour moyenner les histogrammes. L'opération de sélection des survivants avec une probabilité  $L$  étant aléatoire, vu le faible nombre moyen de survivants, il est nécessaire de faire une moyenne. Nous obtenons la figure 20.

On constate que  $\gamma - 1$  est beaucoup mieux contraint que les contraintes habituelles (entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  [28; 84]) en traçant les histogrammes des paramètres dérivés (figure 21). Cela est dû à la paramétrisation particulière des paramètres dérivés en fonction des paramètres fondamentaux. En effet, le paramètre  $\alpha_0$  apparaît dans de nombreux paramètres dérivés, dont  $\gamma$ , de telle sorte que la contrainte sur  $\gamma$  est indissociable de celle sur  $\delta_G^d$  et  $\delta_T^d$ .

Dans la table 14, nous montrons les différents intervalles de confiance associés à différents degrés de confiance sur les paramètres fondamentaux de la théorie dilaton léger avec couplage linéaire. Cela constitue pour l'instant notre résultat sur la contrainte de la théorie du dilaton léger avec couplage non universel. Cette contrainte peut être améliorée en répétant les simulations pour avoir plus de tirages aléatoires et donc des distributions plus précises. Une fenêtre de tir plus large pour les distributions initiales permettrait aussi d'accéder à des quantiles plus larges – mais cela demanderait encore plus de simulations et de puissance de calcul. C'est un travail en cours.

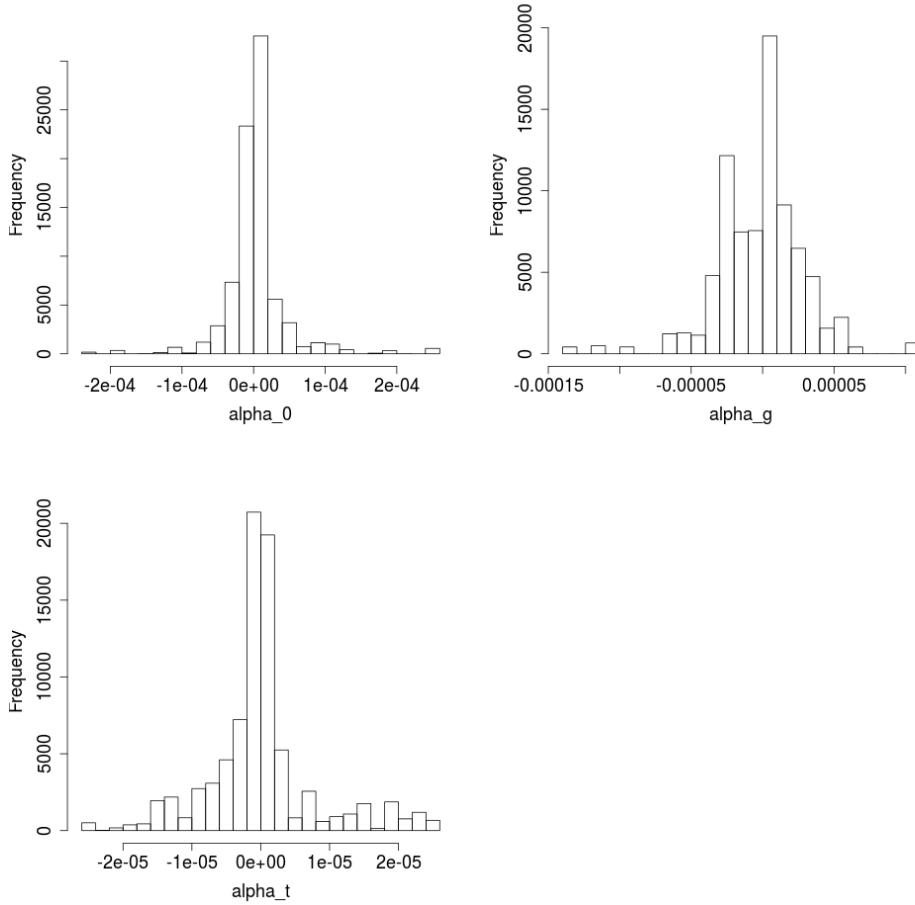


FIGURE 20 – Histogramme des paramètres du dilaton dans le cas d'un couplage linéaire après algorithme de rejet moyené.

Confiance	90%	99.5%
$\alpha_0 (\times 10^5)$	$-0.94 \pm 5.35$	$1.01 \pm 23.7$
$\alpha_T (\times 10^6)$	$0.24 \pm 1.62$	$0.00 \pm 24.5$
$\alpha_G (\times 10^5)$	$0.01 \pm 4.38$	$-1.46 \pm 12.0$

TABLE 14 – Intervalles de confiance pour les paramètres du dilaton léger à couplage linéaire, obtenus à partir de l'échantillon survivant à l'algorithme de rejet.

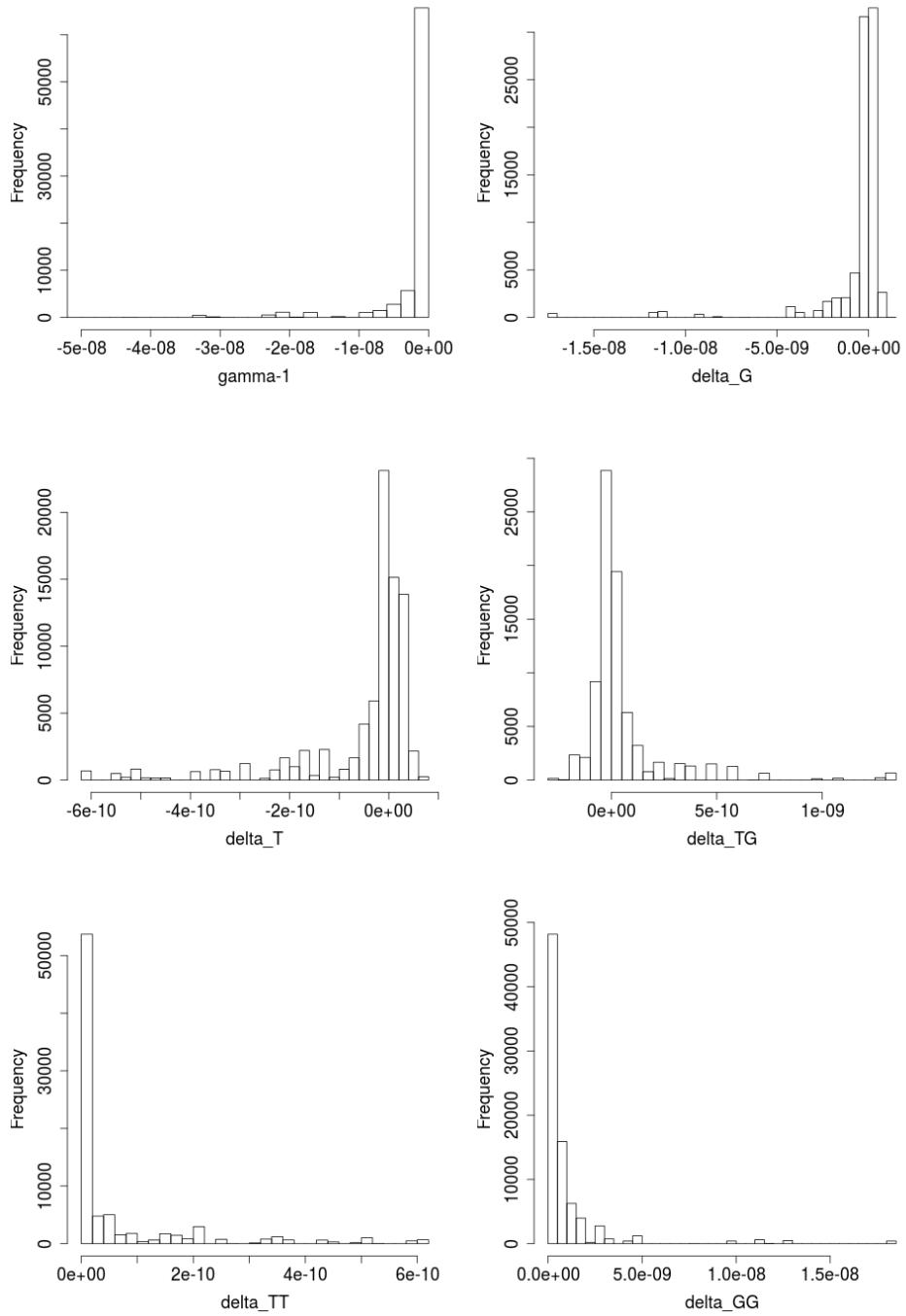


FIGURE 21 – Histogrammes moyennés des paramètres dérivés :  $\gamma - 1$ ,  $\delta_G^d$ ,  $\delta_T^d$ ,  $\delta_{TG}^d$ ,  $\delta_{TT}^d$  et  $\delta_{GG}^d$ .

#### 4.4.4 Résultats préliminaires en théorie dilaton non linéaire

Pour initier le test du dilaton non linéaire, nous faisons l'hypothèse que les paramètres de couplages non universels  $d\beta^A$  sont tous nuls – autrement il y en aurait trop à tester. C'est un scénario possible de la théorie dilaton, dans lequel le couplage non universel serait linéaire et le couplage univers quadratique. Nous avons donc testé le jeu de paramètres suivant :  $\lambda = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_T, \alpha_G)$ .

Nous tirons aléatoirement 9600 jeux de valeurs pour  $\lambda$ , avec une distribution initiale uniforme pour chacun des paramètres :

$$\alpha_0 \in [-7 \times 10^{-6}, 7 \times 10^{-6}] \quad (347)$$

$$\beta_0 \in [-12 \times 10^{10}, 12 \times 10^{10}] \quad (348)$$

$$\alpha_G \in [-1.6 \times 10^{-5}, 1.6 \times 10^{-5}] \quad (349)$$

$$\alpha_T \in [-5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}] \quad (350)$$

En répétant la procédure de rejet 1000 fois, nous obtenons une survie moyenne de 102 individus. Nous obtenons alors les distributions de la figure 22.

De là nous pouvons tracer les histogrammes des paramètres dérivés  $\gamma, \beta, \delta_G, \delta_T$ , ce que nous faisons figure 23. Seuls ces paramètres provoquent des effets directs sur l'éphéméride et sur les grandeurs mesurables. On voit qu'ils y sont beaucoup mieux contraints que les paramètres fondamentaux.

Ce travail préliminaire sur la théorie dilaton non linéaire qui tient compte des coefficients de couplage quadratique est insuffisant pour contraindre le paramètre  $\beta_0$  comme on peut le voir figure 22. La faible valeur de  $\alpha_0$  et donc de  $\gamma - 1$  dans l'histogramme s'explique en raison de ce que le paramètre  $\alpha_0$  apparaît dans presque tous les paramètres dérivés – plus encore que dans le cas du dilaton linéaire. La grande valeur de  $\beta_0$  s'explique par la définition de  $\beta$ . En effet, comme nous avons

$$\beta - 1 = \frac{\beta_0}{2} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} \quad (351)$$

Si  $\alpha_0$  est très bien contraint,  $\beta_0$  l'est très mal sans que  $\beta - 1$  soit mal contraint. Cependant, nous observons que  $\beta - 1$  est relativement mal contraint. Cela vient de ce que  $\beta$  et le  $J_2$  du Soleil sont très corrélés. Dans l'algorithme d'ajustement,  $J_2$  était un paramètre ajustable. Nous traçons sa distribution finale figure 24. Pour information, nous traçons figure 25 la distribution  $J_2$  obtenue avec un couplage linéaire du dilaton. Sans  $\beta$ , il est beaucoup moins étalé. Dans la figure 26, nous traçons les valeurs de  $J_2$  et de  $\beta - 1$  obtenues pour les solutions qui

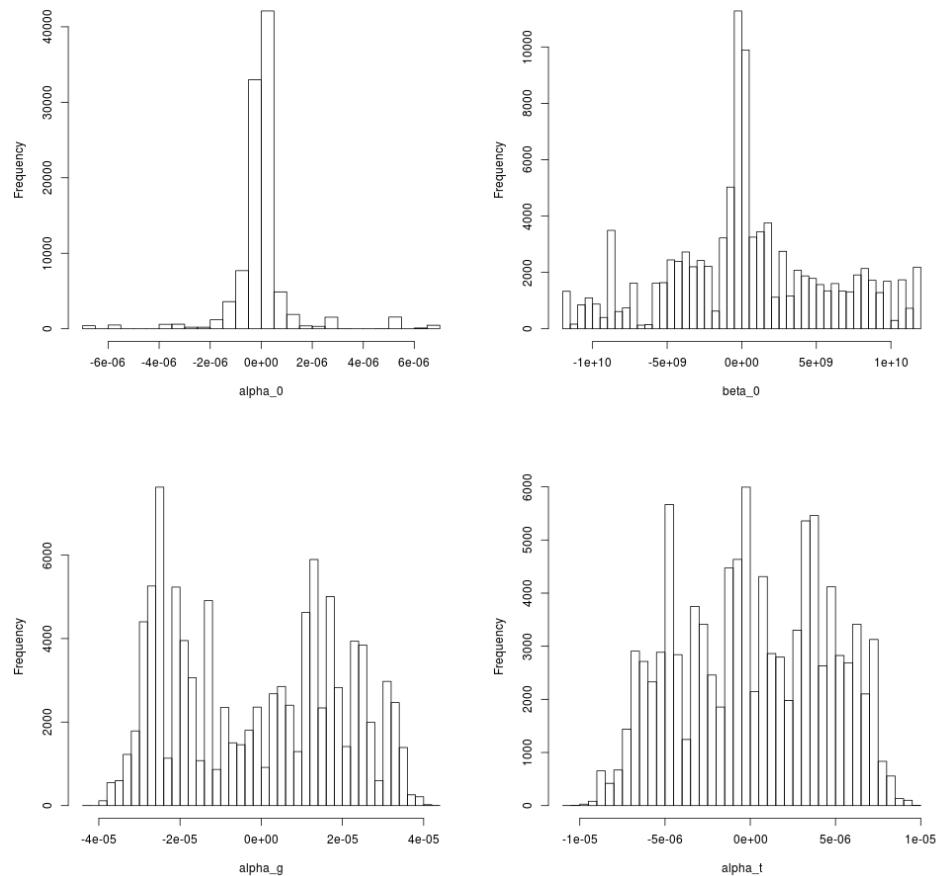


FIGURE 22 – Histogrammes des paramètres après algorithme de rejet moyené 50 fois.

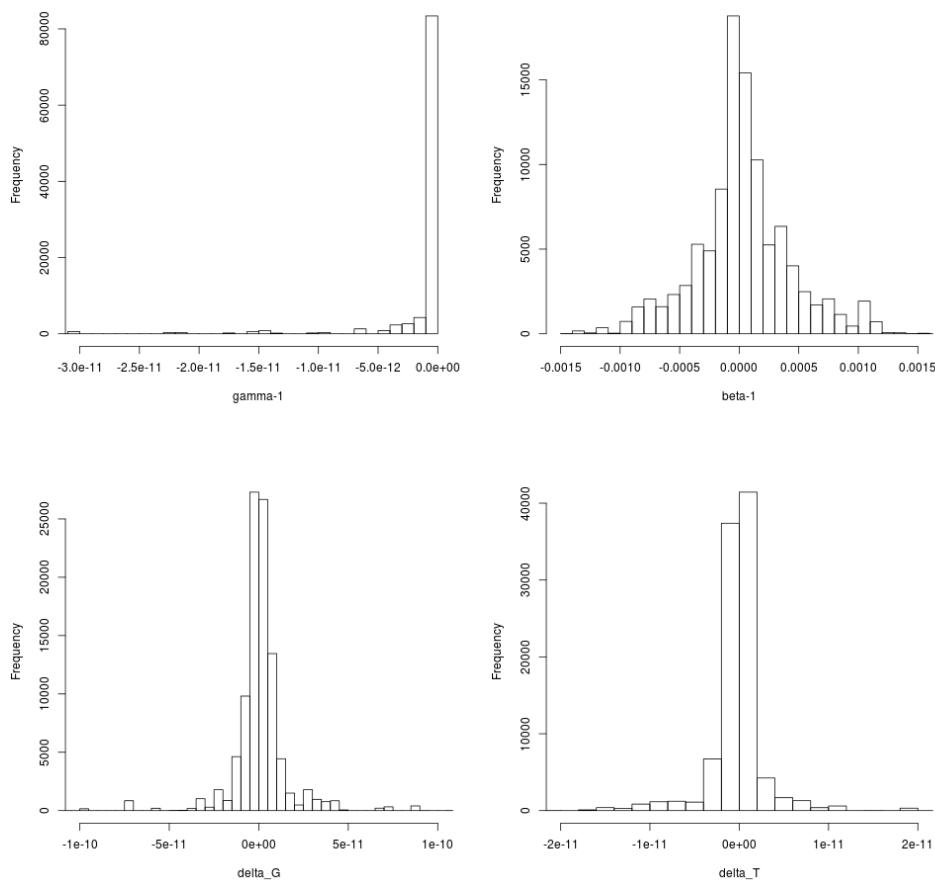


FIGURE 23 – Histogrammes des paramètres dérivés après algorithme de rejet moyenné 50 fois.

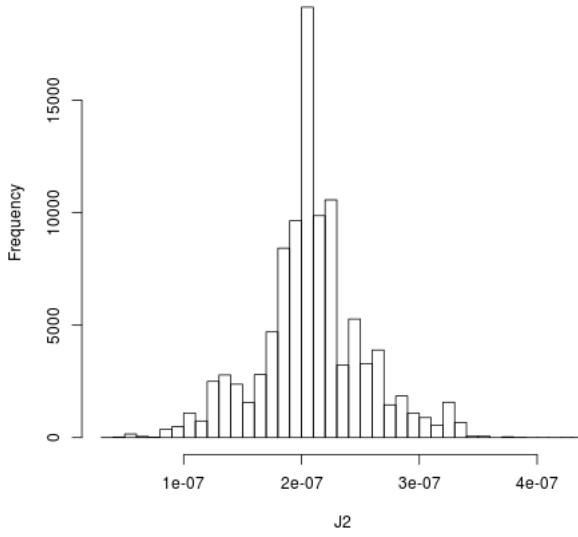


FIGURE 24 – Histogramme final de  $J_2$  après algorithme de rejet moyené. Cas d'un couplage quadratique du dilaton.

ont survécu à l'algorithme de rejet. La corrélation y apparaît très clairement. Voyant une telle corrélation, nous pouvons raisonnablement émettre des doutes sur les tests fréquemment publiés qui prétendent contraindre  $\beta - 1$  à des niveaux très forts en utilisant un ajustement simultané des deux paramètres.

Un problème encore plus grave concerne les valeurs obtenues pour  $\beta_0$ . En effet, dans la section 4.2.6, nous avons transformé  $\beta_{AB}^T$  en  $\beta_T = \beta + d\beta_T$  en négligeant des termes qui peuvent devenir gros à cause du  $\beta_0$ . Redéveloppons l'équation (211) :

$$\beta_{AB}^T - 1 = \frac{\beta_0 + \tilde{\beta}_T}{2} \frac{\alpha_0 + \tilde{\alpha}_A}{1 + (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_A)(\alpha_0 + \tilde{\alpha}_T)} \frac{\alpha_0 + \tilde{\alpha}_B}{1 + (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_B)(\alpha_0 + \tilde{\alpha}_T)} \quad (352)$$

$$= \frac{\beta_0}{2} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} + \frac{\tilde{\beta}_T}{2} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} + \beta_0 \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_A}{1 + \alpha_0^2} + \beta_0 \frac{\alpha_0 \tilde{\alpha}_B}{1 + \alpha_0^2} \\ + O(\delta^2) + O(d\beta_T \delta) \quad (353)$$

$$= (\beta - 1) + d\beta_T + \beta_0(\delta_A^d + \delta_B^d) + O(\delta^2) + O(d\beta_T \delta) \quad (354)$$

Avec un  $\beta_0$  qui peut dépasser le milliard, il n'est plus possible de négliger les termes  $\beta_0 \delta_A$  comme nous l'avons fait section 4.2.6, même s'ils appartiennent aux termes post-newtoniens. Typiquement, pour Mercure, nous savons que  $v^2/c^2 \approx 2.5 \times 10^{-8}$ , donc il n'est plus possible de négliger  $\beta_0 v^2/c^2$  puisque  $\beta_0$  peut facilement dépasser  $10^8$ . Pour ajouter de tels termes correctifs, il suffit de substituer  $\beta + d\beta_A + \beta_0(\delta_A + \delta_B)$  à  $\beta + d\beta_A$  dans le terme  $L_{BC}^A$  du lagrangien (équation (228)). Il est vraisemblable qu'en ajoutant ces termes dans les équations

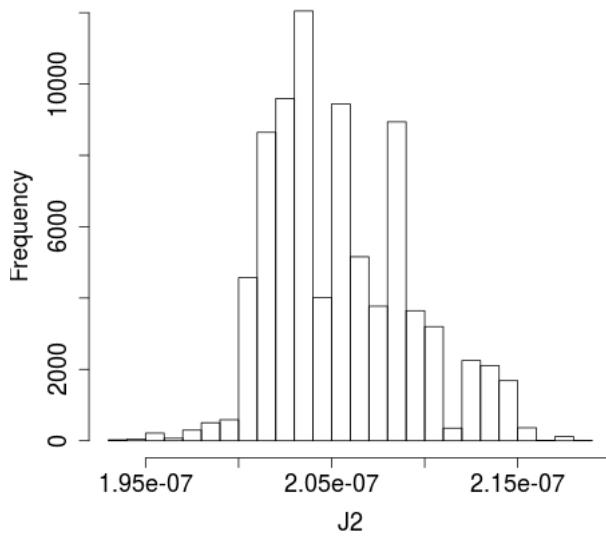


FIGURE 25 – Histogramme final de  $J_2$  après algorithme de rejet moyené. Cas d'un couplage linéaire du dilaton.

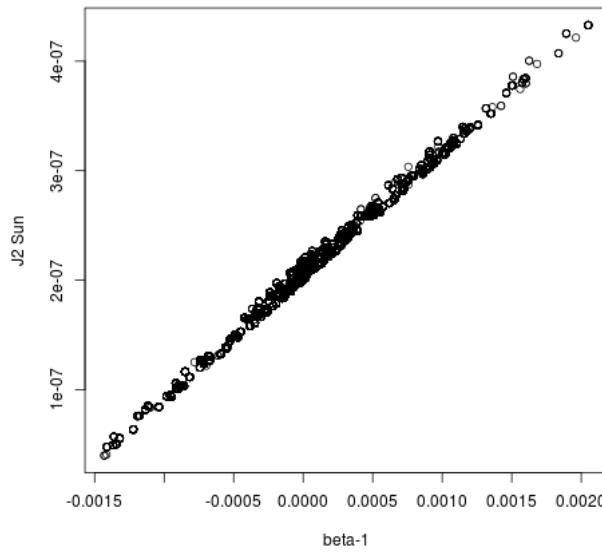


FIGURE 26 –  $J_2$  en fonction de  $\beta - 1$  après algorithme de rejet moyené. Cas d'un couplage quadratique linéaire du dilaton.

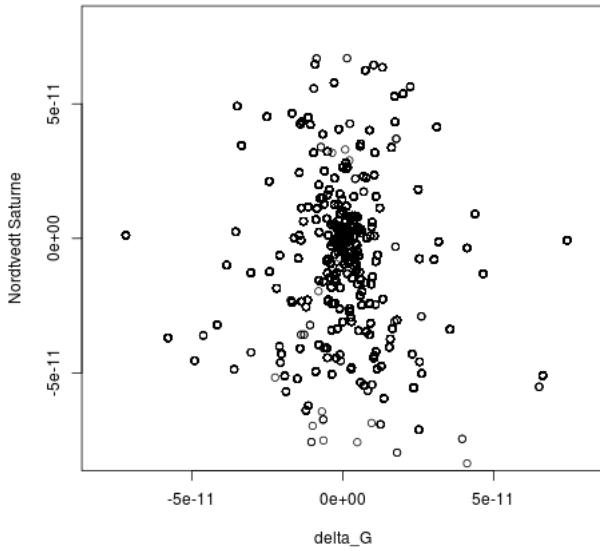


FIGURE 27 –  $\delta_{Sat}^N$  en fonction de  $\delta_G$  pour les éphémérides qui ont survécu à l'algorithme de rejet avec remise.

du mouvement,  $\beta_0$  soit beaucoup mieux contraint. Sachant que la fenêtre de tir initiale n'est même pas assez large pour contenir toute la distribution finale de  $\beta_0$ , et que les valeurs étaient déjà problématiques, nous nous sommes arrêté là.

Un autre élément est remarquable dans le graphe de l'histogramme de  $\alpha_G$  (figure 22). La distribution de  $\alpha_G$  n'est pas centrée en zéro mais contient deux éléments symétriques d'une part positif et d'autre part négatif. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'en raison des grandes valeurs de  $\beta - 1$ , le terme de Nordtvedt  $\delta_A^N = (4\beta - \gamma - 3)\Omega_A/\tilde{m}_A c^2$  peut atteindre des valeurs significatives, de telle sorte que  $\delta_A^d = \alpha_0 \tilde{\alpha}_A$  sera contraint de le compenser pour rendre la solution viable. Il ne faut donc pas d'emblée interpréter cet histogramme comme une détection positive d'un effet alternatif à la relativité générale. En effet, nous avons pu vérifier que pour des valeurs typiques des paramètres, le terme de Nordtvedt de Saturne était en valeur absolue très proche de  $\delta_{Sat}^d = \alpha_0 \alpha_G / (1 + \alpha_0^2)$ . La symétrie des histogrammes s'explique en raison de ce que l'histogramme de  $\alpha_0$  est symétrique centré autour de zéro. Pour compenser la valeur de  $\delta_A^N$ ,  $\tilde{\alpha}_A$  doit être alternativement positif ou négatif selon le signe de  $\alpha_0$ . Dans la figure 27, nous traçons les valeurs prises par  $\delta_{Sat}^N$  en fonction de  $\delta_G$  pour les éphémérides qui ont survécu à l'algorithme de rejet avec remise. Nous voyons qu'il y a le même ordre de grandeur et on peut distinguer une légère corrélation sur les deux bissectrices. En raison de la faible valeur des paramètres de Nordtvedt dans le dilaton couplé linéairement, il n'y avait pas ce problème.

*Également par manque de temps en raison de la finitude de la durée d'une thèse.*

## 4.5 CONCLUSION

La théorie du dilaton léger à couplage non universel aboutit à une violation du principe d'équivalence faible, du principe d'équivalence d'Einstein, et du principe d'équivalence fort. Nous avons exposé la phénoménologie de cette théorie dans le système solaire et nous avons montré qu'en raison des similitudes entre les planètes telluriques, d'une part, et les planètes gazeuses, d'autre part, il était possible de réduire le nombre de paramètres à tester. Dans le cas où le dilaton ne se couple que linéairement avec la matière, il y a trois paramètres fondamentaux à tester :  $\alpha_0$ , qui est une constante de couplage universel,  $\alpha_T$ , qui concerne le couplage des planètes telluriques, et  $\alpha_G$ , qui concerne le couplage des planètes gazeuses. Dans le cas où le couplage est quadratique, il faut ajouter trois autres constantes :  $\beta_0$ , une constante de couplage quadratique universelle, et de même,  $d\beta_T$  et  $d\beta_G$  qui jouent les mêmes rôles que  $\alpha_T$  et  $\alpha_G$  mais en couplage quadratique. Nous avons choisi de négliger les couplages non universels quadratiques pour une première approche.

Cette phénoménologie présente une nouvelle façon de violer le principe d'équivalence faible car elle fait apparaître un terme de couplage à trois corps à l'ordre newtonien. Nous avons illustré cela en interprétant la contrainte posée par la télémétrie Laser-Lune en termes de dilaton léger.

Grâce au travail préliminaire du chapitre 3 sur la contrainte du graviton massif, nous avons pu appliquer une méthode du chapitre 2, la vraisemblance associée au  $\chi^2$  observationnel réduit avec algorithme de rejet, pour contraindre le couplage linéaire du dilaton. At 95% de certitude, les résultats numériques sont :  $\alpha_0 = (1.01 \pm 23.7) \times 10^{-5}$ ,  $\alpha_T = (0.00 \pm 24.5) \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_G = (-1.46 \pm 12.0) \times 10^{-5}$ .

Pour un couplage quadratique, les choses sont plus complexes. Le paramètre  $\beta_0$  est si mal contraint qu'il peut atteindre de grandes valeurs où les approximations que nous avons faites ne sont plus valables. Nous pensons qu'en redéfinissant les paramètres à tester selon l'équation (354), il est possible d'obtenir une meilleure contrainte sur le dilaton léger non linéaire.



## CONCLUSION

---

### 5.1 CRITÈRE OBJECTIF POUR TESTER LA MODÉLISATION D'UNE THÉORIE

Dans le chapitre 2, nous avons analysé différentes méthodes pour tester des effets physiques nouveaux avec une éphéméride planétaire comme INPOP. Dans un premier temps, nous avons critiqué certaines méthodes trop souvent utilisées pour contraindre les théories alternatives : l'analyse post-ajustement et l'ajustement des paramètres alternatifs par l'algorithme de Gauss-Newton. Dans le chapitre 3, où nous confrontons INPOP au graviton massif, nous avons testé un exemple d'analyse post-ajustement et en le comparant à une analyse plus réaliste, nous avons vu que la force de la contrainte risquait d'être surestimée de plus d'un ordre de grandeur avec ce genre d'analyse. Dans le chapitre 4, nous confrontons INPOP au dilaton léger, et nous avons montré par des analyses statistiques réalistes que les distributions des paramètres recherchés n'étaient pas gaussiennes, et que donc l'algorithme de Gauss-Newton n'était pas adapté pour déterminer des intervalles de confiance pour des paramètres à tester.

Dans un second temps, nous avons proposé dans le chapitre 2 deux méthodes pour estimer des contraintes de façon plus réaliste : la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  réduit aux observations sensibles et la covariance propagée. Nous avons montré deux exemples d'application de ces méthodes :

- La propagation de la covariance nous a servi à comparer les versions INPOP17a et INPOP19a lors de la mise à jour de notre éphéméride (voir annexe A ou [30] pour plus de détails).
- La propagation de la covariance et la méthode de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  réduit nous ont servi à contraindre la position d'une éventuelle planète P9 dans le système solaire (voir annexe B ou [31]).

### 5.2 INPOP *versus* LES THÉORIES ALTERNATIVES À LA RELATIVITÉ

Nous avons travaillé sur deux théories alternatives à la relativité générale.

Dans le chapitre 3, nous avons confronté les éphémérides INPOP17b et INPOP19a à la suppression du potentiel Yukawa que nous avons associée génériquement au graviton massif. Il s'agit d'un point de vue phénoménologique et non ontologique, au sens où nous ne tranchons pas ici pour savoir si cette suppression a de plus ou moins bonnes

raisons d'être associée à un graviton massif. Cette théorie nous a servi pour tester nos méthodes en raison de sa simplicité phénoménologique, puisqu'elle ne contient qu'un seul paramètre supplémentaire à contraindre : la masse du graviton  $m_g$  (ou sa longueur d'onde de Compton associée, les deux étant liées par  $m_g = h/c\lambda_g$ ). En effet, il suffisait de faire les calculs pour une grille de valeurs de  $\lambda_g$  et de tracer la vraisemblance associée au  $\chi^2$  réduit et d'en déduire des zones d'exclusion en choisissant à l'avance un critère quantitatif. Avec 99.7% de certitude, la contrainte est  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km (ou  $m_g < 3.62 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>). Ces contraintes ont le même ordre de grandeur que celles posées par la collaboration LIGO-Virgo en analysant la forme des ondes gravitationnelles [66]. Nous interprétons cela comme une pure coïncidence car les régimes testés et les types d'objets observés sont complètement différents : LIGO-Virgo analyse les signaux radiatifs émis par des objets compacts alors que nous analysons les orbites du système solaire en champ et vitesse faibles. Nous avons montré que la phénoménologie du potentiel Yukawa pouvait également s'interpréter comme une manifestation de la cinquième force qui modifie le potentiel Newtonien selon  $V_5 = V_{\text{Newton}}(1 + \alpha e^{-r/\lambda})$ . Dans les cas où l'on a  $\alpha r^2/\lambda^2 \ll 1$ , la contrainte doit se diviser en deux selon que  $\alpha$  est positif ou négatif. Si  $\alpha$  est positif on peut la déduire de la précédente, ce qui donne  $\lambda/\sqrt{\alpha} > 3.43 \times 10^{13}$  km (à 99.7% de certitude). Sinon, nous avons refait les calculs en changeant le signe de l'accélération additionnelle, et le résultat est  $\lambda/\sqrt{-\alpha} > 3.02 \times 10^{13}$  km (à 99.7% de certitude). Nous avons reporté notre dernière contrainte publiée [33] dans l'annexe D.

Dans le chapitre 4, nous avons confronté l'éphéméride INPOP19a à la théorie du dilaton léger couplé non universellement avec la matière. Nous avons dérivé la phénoménologie de cette théorie dans le système solaire à partir de ses principes. Cette théorie brise tous les principes de la relativité générale : le principe d'équivalence faible, donc celui d'Einstein, et le fort. Ensuite nous avons montré un exemple d'application de cette phénoménologie en interprétant les résultats des contraintes sur le principe d'équivalence obtenus avec l'analyse de la télémétrie laser-Lune [18]. Enfin, nous avons confronté deux cas de cette théorie à l'éphéméride INPOP19a. Nous avons montré que dans le système solaire, il était possible de réduire le nombre de paramètres à tester en raison de la similitude des compositions internes des planètes telluriques, d'une part, et des planètes gazeuses, d'autre part. Dans le cas où le couplage non universel entre le dilaton et la matière est linéaire, trois paramètres alternatifs sont à contraindre :  $\alpha_0$ ,  $\alpha_T$ ,  $\alpha_G$ . Le premier paramètre exprime un couplage universel, le second couple le dilaton avec les planètes telluriques, et le troisième avec les planètes gazeuses. À 95% de certitude, les résultats numériques sont :  $\alpha_0 = (1.01 \pm 23.7) \times 10^{-5}$ ,  $\alpha_T = (0.00 \pm 24.5) \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_G = (-1.46 \pm 12.0) \times 10^{-5}$ . Pour le couplage non linéaire les choses

ont été plus compliquées. Nous nous sommes limité à ajouter un couplage quadratique universel  $\beta_0$ . Les éphémérides le contraignent assez mal, de telle sorte qu'il peut prendre de grandes valeurs telles que les approximations et les développements limités que nous avions fait ne sont plus valables. Nous pensons pouvoir améliorer la contrainte sur  $\beta_0$  en affaiblissant quelques hypothèses et en le faisant apparaître à des ordres plus élevés dans l'équation du mouvement. Cela demandera une nouvelle adaptation du code d'INPOP ainsi qu'une analyse statistique complète des résidus selon les méthodes que nous avons exposées.

### 5.3 PERSPECTIVES FUTURES

Nous avons amélioré les méthodes de contraintes systématiques sur les paramètres liés aux effets physiques ou aux théories alternatives. Mais des progrès peuvent être faits. En voici une liste.

Notre calcul de la propagation de la covariance ne permet pas de donner un critère quantitatif arbitraire dans lequel un utilisateur peut choisir à l'avance un degré de certitude et en déduire les intervalles de confiance de paramètres (ou des zones s'il s'agit d'un espace à plus d'une dimension). Du travail théorique et numérique est encore nécessaire.

Notre calcul de la vraisemblance basée sur le  $\chi^2$  réduit contient encore une part d'arbitraire – le choix des observations sensibles et non sensibles – et il serait intéressant d'automatiser le processus par lequel nous choisissons les observations sensibles. Du travail théorique et numérique reste à faire de ce côté.

Avec le dilaton léger, il faudrait continuer le travail sur le couplage non linéaire en modifiant les paramètres selon l'équation (354), les intégrer dans les équations du mouvement et recommencer les tests.

Notre éphéméride permet sans doute de contraindre d'autres théories alternatives que celles que nous avons présentées. Par exemple, nous avons commencé des travaux pour voir si les observations de Webb et al. [94] sur l'anisotropie de la constante de la structure fine – quoique controversées [95] – peuvent être contraintes dans la dynamique du système solaire, et en particulier lunaire, en nous appuyant sur les travaux préliminaires de Damour & Donoghue [10].

L'éphéméride INPOP n'a de cesse de s'améliorer en intégrant de nouvelles données et en améliorant son modèle dynamique en conséquence. Chaque amélioration d'INPOP permet d'améliorer les contraintes sur les théories alternatives. Par exemple, le passage d'INPOP17b à INPOP19a nous a permis d'obtenir une contrainte deux fois plus forte sur la masse du graviton (comparer les résultats de [32], reportés dans l'annexe C, et ceux de [33], reportés dans l'annexe D). Nous aurons de plus en plus de données de la sonde Juno qui orbite autour de Jupiter. La contrainte sur le graviton massif

devrait en être améliorée. Par ailleurs, nous devrions prochainement pouvoir utiliser les données de la sonde Bepicolombo qui orbite autour de Mercure. Ces données devraient améliorer les contraintes sur les paramètres post-newtoniens  $\gamma$  et  $\beta$  ainsi que sur la théorie du dilaton léger au couplage non universel.

De manière générale, les éphémérides planétaires et lunaires comme INPOP, et utilisées avec les bonnes méthodes statistiques, constituent des outils indispensables pour contraindre les théories alternatives à la relativité générale dont on souhaite tester le domaine orbital d'application.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] P. TOUBOUL, G. MÉTRIS, M. RODRIGUES, Y. ANDRÉ, Q. BAGHI, J. BERGÉ, D. BOULANGER, S. BREMER, R. CHHUN, B. CHRISTOPHE, V. CIPOLLA, T. DAMOUR, P. DANTO, H. DITTUS, P. FAYET, B. FOULON, P.-Y. GUIDOTTI, E. HARDY, P.-A. HUYNH, C. LÄMMERZAHN, V. LEBAT, F. LIORZOU, M. LIST, I. PANET, S. PIRES, B. POUILLOUX, P. PRIEUR, S. REYNAUD, B. RIEVERS, A. ROBERT, H. SELIG, L. SERRON, T. SUMNER et P. VISSER : Space test of the equivalence principle : first results of the MICROSCOPE mission. *Classical and Quantum Gravity*, 36(22):225006, novembre 2019.
- [2] T. DAMOUR et J. F. DONOGHUE : Equivalence principle violations and couplings of a light dilaton. *Physical Review D*, 82(8):084033, octobre 2010.
- [3] O. MINAZZOLI et A. HEES : Dilatons with intrinsic decouplings. *Phys. Rev. D*, 94:064038, septembre 2016.
- [4] A. EINSTEIN : Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411–462, janvier 1908.
- [5] A. EINSTEIN : Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 778–786, janvier 1915.
- [6] C. M. WILL : The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1):4, décembre 2014.
- [7] D. COLLADAY et V. A. KOSTELECKÝ : CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55:6760–6774, juin 1997.
- [8] D. COLLADAY et V. A. KOSTELECKÝ : Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58:116002, octobre 1998.
- [9] V. A. KOSTELECKÝ : Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69:105009, mai 2004.
- [10] T. DAMOUR et J. F. DONOGHUE : Spatial variation of fundamental couplings and lunar laser ranging. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16):162001, juillet 2011.
- [11] C. BRANS et R. H. DICKE : Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, novembre 1961.
- [12] T. DAMOUR et K. NORDTVEDT : Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev. D*, 48: 3436–3450, octobre 1993.

- [13] C. M. WILL : *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2 édition, 2018.
- [14] S. A. KLIONER et M. H. SOFFEL : Relativistic celestial mechanics with PPN parameters. *Physical Review D*, 62(2):024019, juillet 2000.
- [15] P. DELVA, N. PUCHADES, E. SCHÖNEMANN, F. DILSSNER, C. COURDE, S. BERTONE, F. GONZALEZ, A. HEES, Ch. LE PONCIN-LAFITTE, F. MEYNADIER, R. PRIETO-CERDEIRA, B. SOHET, J. VENTURA-TRAVESET et P. WOLF : Gravitational redshift test using eccentric galileo satellites. *Phys. Rev. Lett.*, 121:231101, Dec 2018.
- [16] K. NORDTVEDT : Equivalence principle for massive bodies. i. phenomenology. *Phys. Rev.*, 169:1014–1016, mai 1968.
- [17] K. NORDTVEDT : Equivalence principle for massive bodies. ii. theory. *Phys. Rev.*, 169:1017–1025, mai 1968.
- [18] V. VISWANATHAN, A. FIENGA, O. MINAZZOLI, L. BERNUS, J. LASKAR et M. GASTINEAU : The new lunar ephemeris INPOP17a and its application to fundamental physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476:1877–1888, mai 2018.
- [19] N. DERUELLE : Nordström’s scalar theory of gravity and the equivalence principle. *General Relativity and Gravitation*, 43(12): 3337–3354, décembre 2011.
- [20] E. GOURGOULHON : *Relativité restreinte : Des particules à l’astrophysique*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2010.
- [21] D. HILBERT : Die grundlagen der physik. *Mathematische Annalen*, 92(1-2):1–32, 1924.
- [22] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITS : *Physique théorique : Tome 2, Théorie des champs*. Physique théorique. Mir, 1960.
- [23] T. DAMOUR et G. ESPOSITO-FARESE : Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 9(9):2093–2176, septembre 1992.
- [24] M. VISSER : Mass for the Graviton. *General Relativity and Gravitation*, 30:1717–1728, décembre 1998.
- [25] C. DE RHAM : Massive Gravity. *Living Reviews in Relativity*, 17:7, août 2014.
- [26] C. DE RHAM, J. T. DESKINS, A. J. TOLLEY et S.-Y. ZHOU : Graviton mass bounds. *Reviews of Modern Physics*, 89(2):025004, avril 2017.
- [27] A. K. VERMA, A. FIENGA, J. LASKAR, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity. *Astronomy and Astrophysics*, 561:A115, janvier 2014.

- [28] A. FIENGA, J. LASKAR, P. EXERTIER, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Numerical estimation of the sensitivity of INPOP planetary ephemerides to general relativity parameters. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123:325–349, novembre 2015.
- [29] B. SCHUTZ, B. TAPLEY et G.H. BORN : *Statistical Orbit Determination*. Elsevier Science, 2004.
- [30] A. FIENGA, P. DERAM, V. VISWANATHAN, A. DI RUSCIO, L. BERNUS, D. DURANTE, M. GASTINEAU et J. LASKAR : INPOP19a planetary ephemeris. *Notes Scientifiques et Techniques de l’Institut de Mécanique Céleste*, 109, décembre 2019.
- [31] A. FIENGA, A. DI RUSCIO, L. BERNUS, P. DERAM, D. DURANTE, J. LASKAR et L. IESS : New constraints on the location of P9 obtained with the INPOP19a planetary ephemeris. *Astronomy and Astrophysics*, 640:A6, août 2020.
- [32] L. BERNUS, O. MINAZZOLI, A. FIENGA, M. GASTINEAU, J. LASKAR et P. DERAM : Constraining the Mass of the Graviton with the Planetary Ephemeris INPOP. *Phys. Rev. Lett.*, 123:161103, octobre 2019.
- [33] L. BERNUS, O. MINAZZOLI, A. FIENGA, M. GASTINEAU, J. LASKAR, P. DERAM et A. DI RUSCIO : Constraint on the Yukawa suppression of the Newtonian potential from the planetary ephemeris INPOP19a. *Phys. Rev. D*, 102:021501, juillet 2020.
- [34] A. FIENGA, H. MANCHE, J. LASKAR et M. GASTINEAU : INPOPo6 : a new numerical planetary ephemeris. *Astronomy and Astrophysics*, 477:315–327, janvier 2008.
- [35] THE GAIA COLLABORATION : The Gaia mission. *Astronomy and Astrophysics*, 595:A1, novembre 2016.
- [36] V. VISWANATHAN, N. RAMBAUX, A. FIENGA, J. LASKAR et M. GASTINEAU : Observational Constraint on the Radius and Oblateness of the Lunar Core-Mantle Boundary. *Geophysical Research Letters*, 46(13):7295–7303, juillet 2019.
- [37] A. FIENGA, C. AVDELLIDOU et J. HANUŠ : Asteroid masses obtained with INPOP planetary ephemerides. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(1):589–602, février 2020.
- [38] A. DI RUSCIO, A. FIENGA, D. DURANTE, L. IESS, J. LASKAR et M. GASTINEAU : Analysis of Cassini radio tracking data for the construction of INPOP19a : A new estimate of the Kuiper belt mass. *Astronomy and Astrophysics*, 640:A7, août 2020.
- [39] H. A. LORENTZ et J. DROSTE : *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam*, (26):392, 1917.

- [40] H. A. LORENTZ et J. DROSTE : *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam*, (26):649, 1917.
- [41] H. A. LORENTZ et J. DROSTE : *The Motion of a System of Bodies under the Influence of their Mutual Attraction, According to Einstein's Theory*, pages 330–355. Springer Netherlands, Dordrecht, 1937.
- [42] A. EINSTEIN, L. INFELD et Hoffmann B. : *Ann. Math.*, (39):65, 1938.
- [43] T. DAMOUR, M. SOFFEL et C. XU : General-relativistic celestial mechanics. I. Method and definition of reference systems. *Physical Review D*, 43(10):3273–3307, mai 1991.
- [44] T. D. MOYER : *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation*, volume 2. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, janvier 2003.
- [45] S. CHANDRASEKHAR et G. CONTOPOULOS : On a Post-Galilean Transformation Appropriate to the Post-Newtonian Theory of Einstein, Infeld and Hoffmann. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 298(1453):123–141, avril 1967.
- [46] S. A. KLIONER : Parametrized post-Newtonian equations of motion of N mass monopoles with the SEP violation. *arXiv e-prints*, page arXiv :1607.00183, juillet 2016.
- [47] D. PELAT : Bases et méthodes pour le traitement des données (Bruits et Signaux). 2006. Notes de cours disponibles en ligne : <https://media4.obspm.fr/public/M2R/supports/Dea45beta.pdf>.
- [48] V. VISWANATHAN, A. FIENGA, M. GASTINEAU et J. LASKAR : IN-POP17a planetary ephemerides. *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste*, 108, août 2017. Last Accessed : 2018-11-13.
- [49] C. M. WILL : Solar system versus gravitational-wave bounds on the graviton mass. *Classical and Quantum Gravity*, 35(17):17LT01, 2018.
- [50] A. FIENGA, J. LASKAR, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Constraints on the location of a possible 9th planet derived from the Cassini data. *Astronomy and Astrophysics*, 587:L8, mars 2016.
- [51] K. BATYGIN et M. E. BROWN : Generation of Highly Inclined Trans-Neptunian Objects by Planet Nine. *Astrophysical Journal Letters*, 833(1):L3, décembre 2016.
- [52] N. A. KAIB, R. PIKE, S. LAWLER, M. KOVALIK, C. BROWN, M. ALEXANDERSEN, M. T. BANNISTER, B. J. GLADMAN et J.-M.

- PETIT : OSSOS. XV. Probing the Distant Solar System with Observed Scattering TNOs. *The Astronomical Journal*, 158(1):43, juillet 2019.
- [53] A.-M. MADIGAN et M. McCOURT : A new inclination instability reshapes Keplerian discs into cones : application to the outer Solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(1):L89–L93, mars 2016.
  - [54] S. M. LAWLER, C. SHANKMAN, N. KAIB, M. T. BANNISTER, B. GLADMAN et J. J. KAVELAARS : Observational Signatures of a Massive Distant Planet on the Scattering Disk. *The Astronomical Journal*, 153(1):33, janvier 2017.
  - [55] M. E. BROWN : Observational Bias and the Clustering of Distant Eccentric Kuiper Belt Objects. *The Astronomical Journal*, 154(2):65, août 2017.
  - [56] Cory SHANKMAN, J. J. KAVELAARS, Michele T. BANNISTER, Brett J. GLADMAN, Samantha M. LAWLER, Ying-Tung CHEN, Marian JAKUBIK, Nathan KAIB, Mike ALEXANDERSEN, Stephen D. J. GWYN, Jean-Marc PETIT et Kathryn VOLK : OSSOS. VI. Striking Biases in the Detection of Large Semimajor Axis Trans-Neptunian Objects. *The Astronomical Journal*, 154(2):50, août 2017.
  - [57] C. SHANKMAN, J. J. KAVELAARS, S. M. LAWLER, B. J. GLADMAN et M. T. BANNISTER : Consequences of a Distant Massive Planet on the Large Semimajor Axis Trans-Neptunian Objects. *The Astronomical Journal*, 153(2):63, Feb 2017.
  - [58] Elizabeth BAILEY, Konstantin BATYGIN et Michael E. BROWN : Solar Obliquity Induced by Planet Nine. *The Astronomical Journal*, 152(5):126, Nov 2016.
  - [59] K. BATYGIN et M. E. BROWN : Generation of Highly Inclined Trans-Neptunian Objects by Planet Nine. *Astrophysical Journal Letters*, 833(1):L3, décembre 2016.
  - [60] R. GOMES, R. DEIENNO et A. MORBIDELLI : The Inclination of the Planetary System Relative to the Solar Equator May Be Explained by the Presence of Planet 9. *The Astronomical Journal*, 153(1):27, janvier 2017.
  - [61] Sarah MILLHOLLAND et Gregory LAUGHLIN : Constraints on Planet Nine’s Orbit and Sky Position within a Framework of Mean-motion Resonances. *The Astronomical Journal*, 153(3):91, mars 2017.
  - [62] D. NESVORNÝ, D. VOKROUHlický, L. DONES, H. F. LEVISON, N. KAIB et A. MORBIDELLI : Origin and Evolution of Short-period Comets. *Astrophysical Journal*, 845(1):27, août 2017.

- [63] K. BATYGIN, F. C. ADAMS, M. E. BROWN et J. C. BECKER : The planet nine hypothesis. *Physics Reports*, 805:1–53, mai 2019.
- [64] E. V. PITJEVA et N. P. PITJEV : Mass of the Kuiper belt. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(9):57, septembre 2018.
- [65] R. FEYNMAN : *Leçons sur la gravitation*. Odile Jacob, 1995.
- [66] THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION et THE VIRGO COLLABORATION : Tests of general relativity with the binary black hole signals from the ligo-virgo catalog gwtc-1. *Phys. Rev. D*, 100:104036, novembre 2019.
- [67] C. TALMADGE, J.-P. BERTHIAS, R. W. HELLINGS et E. M. STANDISH : Model-independent constraints on possible modifications of Newtonian gravity. *Physical Review Letters*, 61:1159–1162, septembre 1988.
- [68] C. M. WILL : Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries. *Physical Review D*, 57:2061–2068, février 1998.
- [69] A. MORBIDELLI : *Modern Celestial Mechanics : Dynamics in the Solar System*. Taylor & Francis, 2002.
- [70] E. V. PITJEVA et N. P. PITJEV : Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 432:3431–3437, juillet 2013.
- [71] A. FIENGA, J. LASKAR, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Tests of GR with INPOP15a planetary ephemerides : estimations of possible supplementary advances of perihelia for Mercury and Saturn. *ArXiv e-prints*, janvier 2016.
- [72] A. K. VERMA et J.-L. MARGOT : Mercury’s gravity, tides, and spin from MESSENGER radio science data. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 121:1627–1640, septembre 2016.
- [73] R. S. PARK, W. M. FOLKNER, A. S. KONOPLIV, J. G. WILLIAMS, D. E. SMITH et M. T. ZUBER : Precession of Mercury’s Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft. *The Astronomical Journal*, 153:121, mars 2017.
- [74] A. GENOVA, E. MAZARICO, S. GOOSSENS, F. G. LEMOINE, G. A. NEUMANN, D. E. SMITH et M. T. ZUBER : Solar system expansion and strong equivalence principle as seen by the NASA MESSENGER mission. *Nature Communications*, 9:289, janvier 2018.
- [75] A. S. KONOPLIV, S. W. ASMAR, W. M. FOLKNER, Ö. KARATEKIN, D. C. NUNES, S. E. SMREKAR, C. F. YODER et M. T. ZUBER : Mars

- high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters. *Icarus*, 211:401–428, janvier 2011.
- [76] W. M. FOLKNER, J. G. WILLIAMS, D. H. BOGGS, R. S. PARK et P. KUCHYNKA : The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. *Interplanetary Network Progress Report*, 196:1–81, février 2014.
  - [77] K. PEARSON : *On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such that it Can be Reasonably Supposed to have Arisen from Random Sampling*, pages 11–28. Springer New York, New York, NY, 1992.
  - [78] D. W. SCOTT : On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3):605–610, 1979.
  - [79] A. HEES, W. M. FOLKNER, R. A. JACOBSON et R. S. PARK : Constraints on modified Newtonian dynamics theories from radio tracking data of the Cassini spacecraft. *Physical Review D*, 89(10):102002, mai 2014.
  - [80] A. HEES, T. DO, A. M. GHEZ, G. D. MARTINEZ, S. NAOZ, E. E. BECKLIN, A. BOEHLER, S. CHAPPELL, D. CHU, A. DEHGHANFAR, K. KOSMO, J. R. LU, K. MATTHEWS, M. R. MORRIS, S. SAKAI, R. SCHÖDEL et G. WITZEL : Testing General Relativity with Stellar Orbits around the Supermassive Black Hole in Our Galactic Center. *Physical Review Letters*, 118(21):211101, mai 2017.
  - [81] A.M. POLYAKOV : Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, 103(3):207 – 210, 1981.
  - [82] T. DAMOUR et A. M. POLYAKOV : The string dilation and a least coupling principle. *Nuclear Physics B*, 423(2):532 – 558, 1994.
  - [83] J.-P. UZAN : Varying Constants, Gravitation and Cosmology. *Living Reviews in Relativity*, 14(1):2, mars 2011.
  - [84] B. BERTOTTI, L. IESS et P. TORTORA : A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956): 374–376, septembre 2003.
  - [85] F. NITTI et F. PIAZZA : Scalar-tensor theories, trace anomalies, and the qcd frame. *Phys. Rev. D*, 86:122002, décembre 2012.
  - [86] A. HEES et O. MINAZZOLI : Post-newtonian phenomenology of a massless dilaton, 2015.
  - [87] M. P. DĄBROWSKI, J. GARECKI et D. B. BLASCHKE : Conformal transformations and conformal invariance in gravitation. *Annalen der Physik*, 521(1):13–32, février 2009.

- [88] J. G. WILLIAMS, S. G. TURYSHEV et D. H. BOGGS : Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon. *International Journal of Modern Physics D*, 18(7):1129–1175, janvier 2009.
- [89] J. G. WILLIAMS, S. G. TURYSHEV et D. H. BOGGS : Lunar laser ranging tests of the equivalence principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18):184004, août 2012.
- [90] O. MINAZZOLI et A. HEES : Late-time cosmology of a scalar-tensor theory with a universal multiplicative coupling between the scalar field and the matter Lagrangian. *Physical Review D*, 90(2):023017, juillet 2014.
- [91] D. VOKROUHlický : A note on the solar radiation perturbations of lunar motion. *Icarus*, 126(2):293 – 300, 1997.
- [92] B. EFRON et C. STEIN : The jackknife estimate of variance. *Ann. Statist.*, 9(3):586–596, 05 1981.
- [93] J. BERGÉ, P. BRAX, G. MÉTRIS, M. PERNOT-BORRÀS, P. TOUBOUL et J.-P. UZAN : Microscope mission : First constraints on the violation of the weak equivalence principle by a light scalar dilaton. *Phys. Rev. Lett.*, 120:141101, avril 2018.
- [94] J. K. WEBB, J. A. KING, M. T. MURPHY, V. V. FLAMBAUM, R. F. CARSWELL et M. B. BAINBRIDGE : Indications of a spatial variation of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 107:191101, octobre 2011.
- [95] T. M. EVANS, M. T. MURPHY, J. B. WHITMORE, T. MISAWA, M. CENTURION, S. D'ODORICO, S. LOPEZ, C. J. A. P. MARTINS, P. MOLARO, P. PETITJEAN, H. RAHMANI, R. SRIANAND et M. WENDT : The UVES Large Program for testing fundamental physics – III. Constraints on the fine-structure constant from three telescopes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(1):128–150, septembre 2014.

## ANNEXES



# A

L'ÉPHÉMÉRIDE PLANÉTAIRE INPOP19A (NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES DE L'IMCCE).

---



ISBN 978-2-910015-81-7

---

*NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES  
DE L'INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE*

---

S109

**INPOP19a planetary ephemerides**

A. Fienga, P. Deram, V. Viswanathan, A. Di Ruscio, L. Bernus, D. Durante, M. Gastineau, and J. Laskar



---

*Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides  
CNRS UMR 8028 / Observatoire de Paris  
77, avenue Denfert-Rochereau  
75014 Paris*

14 Décembre 2019



## Abstract

INPOP19a is the new ephemerides for the orbits of the 8 planets of the solar system, the moon, Pluto as well as 14000 asteroids. It is fitted over about 155000 planetary observations including 9 positions of Jupiter deduced from the Juno mission, an extension of the Cassini data sample from 2014 to 2017 for the Saturn orbit and of the MEX data from 2016.4 to 2017.4 for the Mars orbit. The asteroid orbits were fitted on the almost 2 millions of observations obtained by the GAIA mission and delivered with the DR2. The INPOP dynamical modelling was also modified in comparison to the previous version, INPOP17a. A ring modeling the accelerations induced by Trans-Neptunian objects as well as the 9 most massive TNOs have been added in order to improve the fit to the Saturn observations. A new estimation of the TNO ring mass has been produced. Finally a new bayesian procedure for the computation of the masses of 343 main-belt asteroids has been applied and leads to an important improvement in the accuracy of the Mars orbit and of its extrapolation capabilities.

## 1 Introduction

In this new ephemerides, the nine first perijove of Juno around Jupiter have been included improving the uncertainty of the Jupiter barycentric orbit. Furthermore with the end of the Cassini mission in 2017, a new analysis of the data used for the navigation and for the radio experiment was proposed in order to benefit from the best knowledge in terms of gravity fields and Cassini orbital systematics accumulated over the mission duration. In this context, new positions deduced from an independent analysis of Cassini data were obtained and taken into account into the INPOP construction, expending the time coverage for the Cassini data sample from 2004 to 2017. The section 2 will give a description of the Cassini and Juno analysis. In [3], a new bayesian method for the estimation of the asteroid masses was introduced leading to the determination of 343 asteroid masses constrained by the spectroscopic complex. A supplementary set of trans-neptunian objects with fixed masses have also been added in the modeling as well as a circular ring enclosed by two Neptune resonances at 39.7 and 44 AU. The mass of this ring is estimated during the INPOP adjustment. Besides the INPOP19a construction, a fit of 14000 asteroid orbits integrated together with the planetary orbits has been performed in using the GAIA DR2.

## 2 Update of the INPOP data sample

The full dataset used for the INPOP19a adjustment is presented in Tab 1. In this table are given the periods of each data sample as well as the number of observations and their average accuracies. The last two columns give the weighted root mean square (WRMS) for each data sample estimated with INPOP19a and INPOP17a.

### 2.1 Cassini independent data analysis

Refined Cassini's normal points have been produced from a re-analysis of navigation data for the periods 2006, 2008-2009 and 2011. The new data analysis relies on the updated knowledge of the Saturnian system acquired throughout the mission: the enhanced accuracies achieved for Saturn's moons ephemerides and the last gravity solutions of Saturn and its major satellites produced by the radio science team. The analysis shares the same concept of the navigation team's reconstruction setup: trajectory arcs of approximately one month, spanning between two consecutive moons flybys (mainly Titan). For each arc we solve for the spacecraft initial position and velocity, corrections to orbital trim and reaction wheel desaturation maneuvers and RTG-induced anisotropic acceleration. In addition, stochastic accelerations at the level of  $5 \times 10^{-13}$  km/s<sup>2</sup> (updated every 8 hours) are included to compensate for any remaining dynamical mismodeling. Considering the very good accuracy

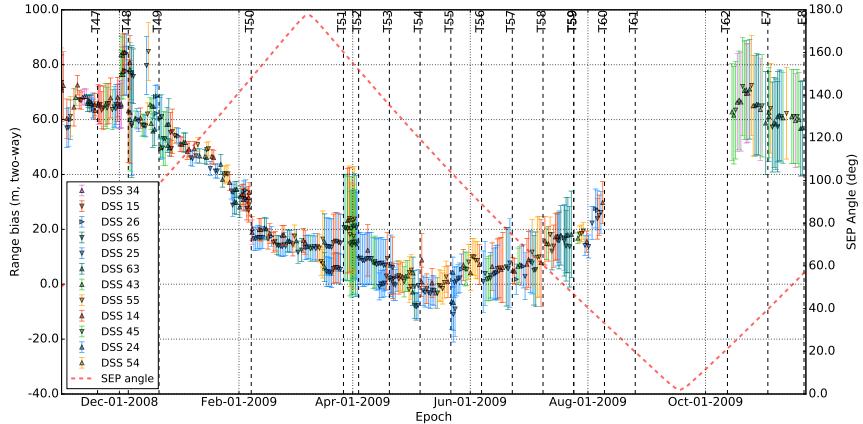


Figure 1: Estimated two-way range biases and formal uncertainties for the period 2008-2009. The annual trend is due to the residual error of INPOP17a ephemerides in the Earth-Saturn barycenter relative positioning.

obtained by [2] and [11] for the Titan and Saturn gravity fields, these latest were not adjusted in our analysis. The dataset consists of two-way X-band Doppler and range data. We estimate correction to range measurements in the form of stochastic biases, different for each tracking pass, with large *a priori* uncertainty to absorb both station calibration and ephemerides error. In Fig ?? are plotted the two-way range bias estimated over the period 2008:2009. The error bars were obtained by the projection of the least square covariance matrix on the line of sight.

The reconstructed Cassini trajectories are thus used to produce normal points, including the estimated range biases in the ground station-Cassini round-trip light-time computation. The uncertainty on the normal points is given by the estimated covariance matrix of range biases.

We have added also additional normal points deduced from the radio science solutions for the gravity-dedicated Titan flybys and Grand Finale Saturn pericenters. These range normal points were obtained in considering given spacecraft orbits constrained with only Doppler data for the Titan and Saturn gravity field estimations. By considering these supplementary normal points the period covered by the Cassini has been extended up to the end of 2017. In Tab. 1, the newly analysed normal points and the normal points deduced from Titan gravity flybys are labelled *La Sapienza range* when the data set deduced from the Grand Finale is labelled *Grand Finale range*.

## 2.2 Nine perijove of Juno

The Juno spacecraft is currently orbiting Jupiter in a highly eccentric, polar orbit since 2016. A radio-science experiment aims at characterizing the gravity field of the gas giant to unprecedented accuracy [6], [10]. Juno extremely accurate radio tracking system enables simultaneous two-way Doppler measurements at X- and Ka-band during the gravity-dedicated passes, which are used to reconstruct the spacecraft trajectory with mHz accuracies in the radial direction, at perijove. Range data points at X-band are collected as well, and Jovian barycenter positions relative to the Earth can be generated once per perijove pass, provided that we know Juno position with respect to the Jovian barycenter. In our fit, we include a total of 9 new Jupiter normal points spanning period from the orbital insertion, back in 2016, to end 2018.

### 3 Asteroid mass determination

As described in [3], we combine knowledge of the physical properties of asteroids by spatial or ground-based surveys, in particular spectral classes, to planetary ephemerides determinations of masses in order to enlarge the set of estimated asteroid masses and study their consistency with the spectral classes of the asteroids. For the mass determination, we use a constrained least square method based on the BVLS (Bounded Values Least Squares) algorithm from [13] which limits the fitted parameters to given intervals. Bounds have been selected according to the parameters of the fit: for asteroid masses, the lower bounds and the upper bounds are chosen according to the *a priori* masses and the *a priori* uncertainties deduced from the literature. The selection of 343 asteroids perturbing the planetary orbits is done based on the method of [12] and [7]. For defining the bounds, we separate the sample in the three taxonomic complexes C, S, and X according to the spectral informations extracted from the M3PC data base ([mp3c.oca.eu](#)). The spectra classes of asteroids can be grouped into the C-, S-, and X-complexes. For each asteroid, we estimate the smallest (lower bound) and the highest (upper bound) densities acceptable for these objects according to given uncertainties. The distribution of the lower bounds and of the upper bounds will constitute the prior distribution of the densities. In order to use the prior knowledge of the spectral complexes but in avoiding too strong constraints in the fit, we consider for each complex gaussian distributions of densities. Lower bounds values have been randomly selected in a (mean -  $1\sigma$ ) gaussian distribution when the upper bounds have been randomly selected in a (mean +  $1\sigma$ ) gaussian distribution. We then translate the density bounds into mass bounds as  $\frac{4}{3}\pi D^3 \rho_{\text{guess}}$ , i.e. assuming that the quoted  $D$ -values are spherical equivalent diameters.

*A priori* uncertainties on the initial guess values for the masses are also deduced by including the  $3-\sigma$  diameter uncertainties to the density lower bounds and the upper bounds. A detailed description of the method is given in [3]. For each Monte Carlo runs, an iterative fit is performed in using the full planetary data sample (see Table 1). INPOP19a was selected among about 3600 adjustments, including the masses of the 343 perturber asteroids, performed for this study as the one minimizing the postfit residuals. Tab. 3 gives the fitted masses of the 343 asteroids.

### 4 Trans-Neptunian Objects

In addition to the Main Belt objects described above (see section 3), the ten most massive TNO objects have been added to the list of planetary perturbers. As well as the Main Belt asteroids, their orbits are integrated together with the planets. A ring representing the average influence of TNO enclosed in the two main resonances with Neptune has been modeled in INPOP19a in considering 3 rings introduced by using point-mass bodies spread over three circular orbits located at 39.4, 44 and 47.5 AU. The sum of the mass of these three rings is estimated during the INPOP adjustment together with other parameters.. With the INPOP19a data sample including Juno and Cassini updated samples, we obtain for the TNO ring a mass of

$$M_{\text{ring}} = (0.061 \pm 0.001)M_E.$$

If we limit the data sample to the sample used by [17], we obtain a mass of

$$M_{\text{ring}} = (0.020 \pm 0.003)M_E$$

consistent at  $2-\sigma$  with the mass obtained by [17], considering the fact that the masses of the major TNO objects included in the modele are fixed in INPOP when they are fitted in [17]. So it is reasonable to think that the uncertainties of the fixed TNO masses in INPOP have been absorbed by the TNO ring mass, inducing a slightly bigger mass than the one obtained by [17]. We fixed the

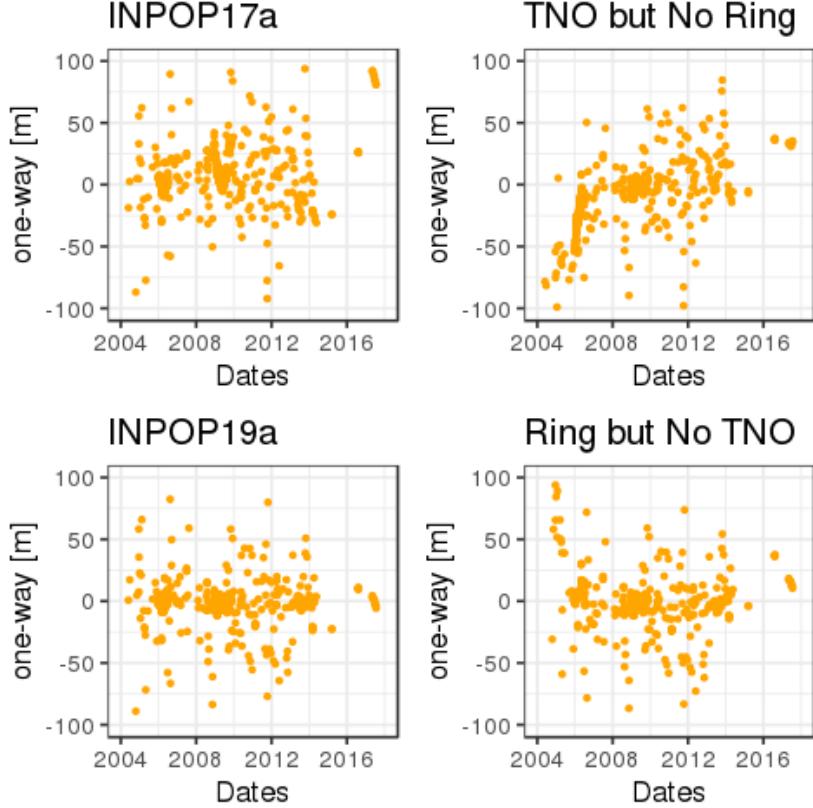


Figure 2: Saturn Postfit residuals obtained with INPOP17a (no ring, no TNO), INPOP19a (ring and TNO), one ephemeris including individual TNOs but no Ring (TNO but No Ring) and one ephemeris including a TNO ring but no individual TNOs (Ring but No TNO).

masses for the ten more massive TNO because these objects have at least one satellite and their masses are very accurately measured by the study of their satellites orbits (see Tab. 2).

The impact of the new modeling is clearly visible on the plots shown on Figure 2. On these plots, one can see the Saturn postfit residuals deduced from the Cassini mission obtained with INPOP17a (with no ring and no individual TNOs) and with 3 different models: one without individual TNO and TNO ring, one with individual TNO but no ring, one with both ring and individual TNO (INPOP19a). It appears clearly that the combined use of the 9 most massive TNOs together with the adjustment of the mass of a TNO ring improves significantly the postfit residuals, in particular if one considers an interval of time spread over several decades. With INPOP17a, the TNO accelerations were not required as the time span of the Cassini data was limited over almost 10 years (from 2004 to 2014). With the Grand Finale, the data sample has been extended over 13 years and INPOP17a clearly shows some trends (including bias) for the latest period (2017) that are not present when we include the full modeling including TNO individuals and ring .

## 5 INPOP accuracy

The global parameters of the INPOP19a ephemerides can be found in Tab. 3. This table is completed with the one (Tab. 10) of the 343 asteroids masses.

## 5.1 Postfit residuals

The last two columns of Table 1 give the WRMS of the post-residuals obtained for INPOP19a and INPOP17a. As it can be seen the improvement is clear for Jupiter, Saturn and Mars.

For Mars, as explained in section 3 and in [3], the gain in postfit residuals is significant, in particular for the MRO/MO residuals which are the most accurate available data. In this case, INPOP19a improves INPOP17a residuals by 44% on a common interval of fit. For MEX, the extrapolation of INPOP17a out from its fitting interval (up to 2016.37) explains the more important dispersion of the residuals. However, even on its fitting interval, INPOP17a is less accurate than INPOP19a by 25 %.

For Jupiter the improvement is obviously brought by the Juno tracking data. It reaches 2 order of magnitude: from about 2 km for INPOP17a to 20 m for INPOP19a in keeping good residuals for the other flybys obtained between 1975 to 2001.

For Saturn, the prolongation of the data set from 2014 to 2017 was crucial to identify the contribution of TNOs into the perturbations to be applied on the Saturn orbit (see section 4). Furthermore the introduction of data obtained between 2006 and 2016 and analyzed independently from JPL (see section 2) is also very important to confirm that these data obtained in between 2006 and 2007 have to be taken into account in the adjustment with a high level of weighting. The improvement between INPOP17a and INPOP19a is of a factor 30 for the Grand Finale and 2.6 for the period between 2006 and 2016.

## 5.2 Propagation of the INPOP uncertainty

An interesting tool, especially for simulating future space missions, is to propagate with time the uncertainty obtained at J2000.

### 5.2.1 Mathematical formulation

INPOP is computed by solving numerically equations of motion. Let  $X(t)$  be the state vector in barycentric coordinates containing positions and velocities of each body which trajectory is computed. The numerical integrator solves a Cauchy-Lipschitz equations of motion system

$$\frac{dX}{dt} = F(X; P), \quad X(t = J2000) = X_0 \quad (1)$$

where  $P \in \mathbb{R}^p$  contains all the constant parameters of the ephemeris (initial conditions for the planetary orbits, masses of the sun and of the asteroids including trans-Neptunian objects, oblateness of the sun, earth-moon mass ratio). Let us note that  $X$  and  $P$  are not independent variables because  $P$  includes the initial condition  $X_0$ . Modification of  $P$  may modify  $X(t)$ . From this ephemeris, we compute observational simulations in order to compare them to real data. Let  $C(t_i, P)$  be the observation at date  $t_i$  computed with parameters  $P$  (we consider in what follows that the dependence with respect to  $X(t_i)$  is included in the dependence with respect to the initial conditions included in  $P$  which are integrated by INPOP). The goal of the ephemeris is to minimize some norm of the residuals vector

$$R(t_i, P) = (C(t_i, P) - O(t_i)) \quad (2)$$

where  $O(t_i)$  is the real observation at date  $t_i$  (for any matrix  $A$ , transpose of matrix  $A$  is noted  $'A$ ). Usually, and this is what we do here, the linear Gaussian approximation is assumed and it is well known that the parameter  $s$   $P$  which minimize  $\chi^2 = 'RWR$  where  $W$  is the weigh matrix representing the observational data accuracy, is given by the algorithm which increments  $P$  by iterations by adding

$$\delta P = -('J_C W J_C)^{-1} 'J_W R \quad (3)$$

until convergence is reached. Here,  $J_C$  represents the Jacobian matrix of  $R(t_i, P)$  or  $C(t_i, P)$ , which is computed numerically as follows

$$J_C[i; k] = \frac{1}{2\delta_k} [C(t_i, P_1, \dots, P_k + \delta_k, \dots, P_p) - C(t_i, P_1, \dots, P_k - \delta_k, \dots, P_p)] \quad (4)$$

Then it is well known that the covariance of  $P$ , which represents its uncertainty if the Gaussian and linear approximation are realized, is

$$\text{cov } P = ({}^t J W J)^{-1} \quad (5)$$

From here, it is possible to propagate linearly the covariance of any variable computed with respect to the ephemeris and its parameters. Let  $H(t, P) \in \mathbb{R}^h$  such a variable. Then for a linear random Gaussian variation of  $P$  characterised by a covariance matrix  $\text{cov}P$ , we can get the covariance of  $H$  at date  $t$

$$\text{cov } H(t, P) = J_H(t) \text{cov}P {}^t J_H(t) \quad (6)$$

where  $J_H(t)$  is the Jacobian matrix of  $H$  with respect to  $P$  at date  $t$ . To compute such a matrix, one needs to do the same procedure as for  $C(t_i, P)$  which is formally equivalent.

In what follows, we will compute the linear covariance propagation of planetary RTN geocentric coordinates<sup>1</sup> which are defined according to the following orthonormal basis for any planet  $A$

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}|}, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}_A = \frac{\mathbf{u}_A \times (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{EMB})}{|\mathbf{u}_A \times (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{EMB})|}, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{w}_A \times \mathbf{u}_A \quad (9)$$

where  $\mathbf{x}_A$  and  $\mathbf{v}_A$  represents the barycentric coordinates of body  $A$ ,  $\mathbf{v}_A = d\mathbf{x}_A/dt$ ,  $EMB$  label represents Earth-Moon barycenter, and  $\times$  represents the vectorial product. Then we compute the quantities  $R_A$ ,  $T_A$ ,  $N_A$  as follows

$$R_A = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{u}_A \quad (10)$$

$$T_A = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{v}_A \quad (11)$$

$$N_A = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{w}_A \quad (12)$$

From here we can deduce the propagated covariance of these three components on different bodies.

It is interesting to compare the evolution of RTN components between two ephemerides. We can compare the difference between the components and the evolution of the covariance for two set of parameters  $P_1$  and  $P_2$  in order to compute a distance between two ephemerides. We can also do this for two different models, like INPOP17a and INPOP19a, in order to see if the difference between both is contained into the uncertainty "tube" of the propagated covariance.

---

<sup>1</sup>Rigorously we should call it "RTN Earth-Moon-barycenter coordinates" but no confusion is possible with the following definitions.

### 5.2.2 Application to INPOP and results

From Figures 6 to 12 are presented the propagations of the standard dispersion<sup>2</sup> obtained at the end of the least square adjustment for INPOP19a and INPOP17a in RTN geocentric directions for the planets from Mercury to Neptune as well as the differences between the 2 ephemerides in geocentric RTN. The Figure 13 gives the propagation of the standard dispersion for the EMB orbit relative to the solar system barycenter (given in RTN barycentric). All propagation are given for a 40 years period, from 1980 to 2020.

In all the cases, INPOP19a shows lower propagated standard dispersion in comparison to INPOP17a in all directions and even after 20 years of integration. For Mercury and Venus, the improvement is about a factor 10 when it is of about a factor at least 4 (in R direction) and up to a factor 12 (in N direction) for Mars. For Jupiter, the improvement reaches a factor 50 in R and T directions when for Saturn as well as for Uranus and Neptune, the propagation of the INPOP19a standard dispersion is only 10 times better than the INPOP17a one. The differences between the ephemerides are consistent with the INPOP17a standard dispersion for the inner planets but are significantly greater for the outer planets. This can be explained by the introduction of the TNO in INPOP19a. As their contributions are mostly significant for the outer planet orbits and they were not considered in the INPOP17a modeling, it is not surprising to have an underestimated uncertainty for INPOP17a for the outer planets. Finally for the EMB, the previous comments are also valid. However one can also note the important differences of the EMB orbit between INPOP19a and INPOP17a. These differences are explained at 97% by the contribution of the individual TNO and by 3% by the increase of 50% of the amount of main-belt asteroids (343 in INPOP19a compared to the 168 in INPOP17a) taken into account in the modelling. These massive bodies orbiting on non-perfectly circular orbits induce a displacement of the solar system barycenter that is visible in the differences of the EMB positions around the SSB between INPOP19a and INPOP17a. Finally it has to be stressed that these standard dispersion propagations are based on covariance matrices directly extracted from the least square adjustment. They give a good representation of the improvement between INPOP17a and INPOP19a. For more a realistic study of the INPOP19a uncertainties, other statistical tests have to be done.

## 5.3 Extrapolation Tests

Finally, 18 months of MEX data has been put beside in order to test the INPOP19a extrapolation capabilities. On Figure 3 are presented the residuals obtained for INPOP19a and INPOP17a. INPOP17a was fitted up to 2016.7 when INPOP19a was fitted on data up to 2017.37. Let us note the supplementary data interval used for the INPOP19a construction has an important gap, visible on Figure 3, due to the 2017 solar conjunction, leading to an effective supplementary interval of about 5 months. Nevertheless as one can see on Figure 3, the INPOP19a residuals are less important than the one obtained with INPOP17a. Over the same interval of extrapolation (18 months), the INPOP19a residual dispersion decreases of about 50% in comparison to INPOP17a. If one considers the full interval, the extrapolation residuals are about 3 times smaller for INPOP19a than for INPOP17a. This result shows the improvement of INPOP19a relative to INPOP17a in terms of Mars orbit extrapolation.

---

<sup>2</sup>The propagated standard dispersion is the square root of the propagated variance as defined above.

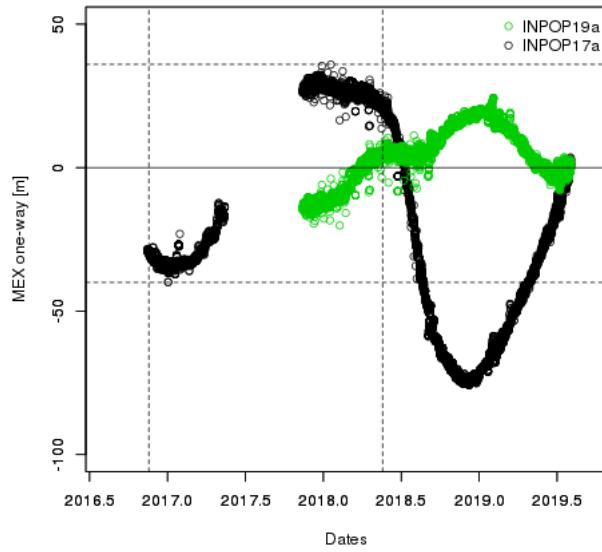


Figure 3: MEX one-way range extrapolation residuals (given in meters) obtained with INPOP17a (black) and INPOP19a (green). These residuals were obtained by comparisons between the ephemerides and observed distances not included in the data sample used for the fit. The dashed vertical lines indicate a 18-month period of extrapolation for INPOP17a and the dashed horizontal lines give the maximum and the minimum of the INPOP17a residuals for this 18-month extrapolation period.

## 6 Adjustment of asteroid orbit using GAIA DR2

### 6.1 Method

In 2013, was launched the astrometric satellite GAIA. Among observations of about 1 billion of stars with an accuracy down to  $24 \mu\text{arcseconds}$ , the satellite also observed objects in the solar system. In 2018, were released positions and velocities of about 14 099 known Solar System objects mainly main belt, near Earth and Kuiper belt asteroids based on nearly 2 millions observations. The positions were acquired in the GAIA specific coordinates AL and AC as described in [9] with an optimal range of brightness  $G=12-17$  where the accuracy in the AL-direction reaches milliarcsecond. As the error on AC remains considerably larger, the information provided by GAIA is essentially 1D. These particular features give rise to very strong correlations between right ascension and declination coordinates expressed in the barycentric reference system (BCRS) and have to be fully taken into account during the orbit determination process.

14099 orbits have then been integrated with INPOP together with the planetary and moon orbits. We fit these orbits to the GAIA data in using the correlation matrix provided by the DPAC. We did not fit the planetary orbits together with the asteroid orbits but we iterate the procedure in order to include the asteroid orbital improvements brought by the GAIA observations to the computation and the adjustment of the planet orbits (Mars mainly).

In order to integrate the motion of 14099 orbits in a reasonable time, we included the perturbations of the Sun and of the main planets but in a newtonian formalism and in taking into account only a reduced number of the biggest asteroids that can have an influence on the other asteroid orbits. For a sake of comparison, we chose the same list of perturbing asteroids (16) as in [9]. However, after testing different alternative lists of perturbers, due to the limited interval of time covered by the GAIA data (22 months), no difference are noticeable on the residuals after the fit.

For operating the inversion of such system (The size of the Jacobian matrix is  $14099 \times 6 \times 1977702 \times 2$ ), a direct adjustment is very time consuming. This is why a strategy of block-wise algorithm has been set up using the Schur complement.

### 6.2 Asteroid orbit accuracy after fit

Fig. 4 presents the residuals obtained before and after the fit of the 14099 asteroids in using INPOP19a. The obtained results are very similar to those published to [9]. The mean and the standard deviation of the residuals after the adjustment is respectively 0.08 and 2.13 milliarcsecond in AL direction (compared to 0.05 and 2.14 in [9]). 96% of the AL residuals fall in the interval [-5,5] and 53% are at sub-milliarcsecond level. 98% of the AC residuals fall in the interval [-800,800].

### 6.3 INPOP to Gaia reference frame tie

Because of the addition of 9 TNOs objects in INPOP19a, the position of the solar system barycenter has moved between INPOP19a and the ephemerides used for the definition of the GAIA SSB, INPOP10e [4]. This can lead to a biased estimation of the GAIA spacecraft positions and consequently the asteroid observations. In order to take this offset into account, a constant translation on the GAIA barycentric position at J2000 (epoch of integration of the INPOP ephemerides) was fitted in the same time than asteroid orbit. The obtained value for the vector is  $x=-86.6$ ,  $y=-49.3$ ,  $z=-5.0$  km. One can check that an equivalent displacement is obtained when comparing the barycentric EMB positions with respect to the solar system barycenter between INPOP17a (without TNO such as

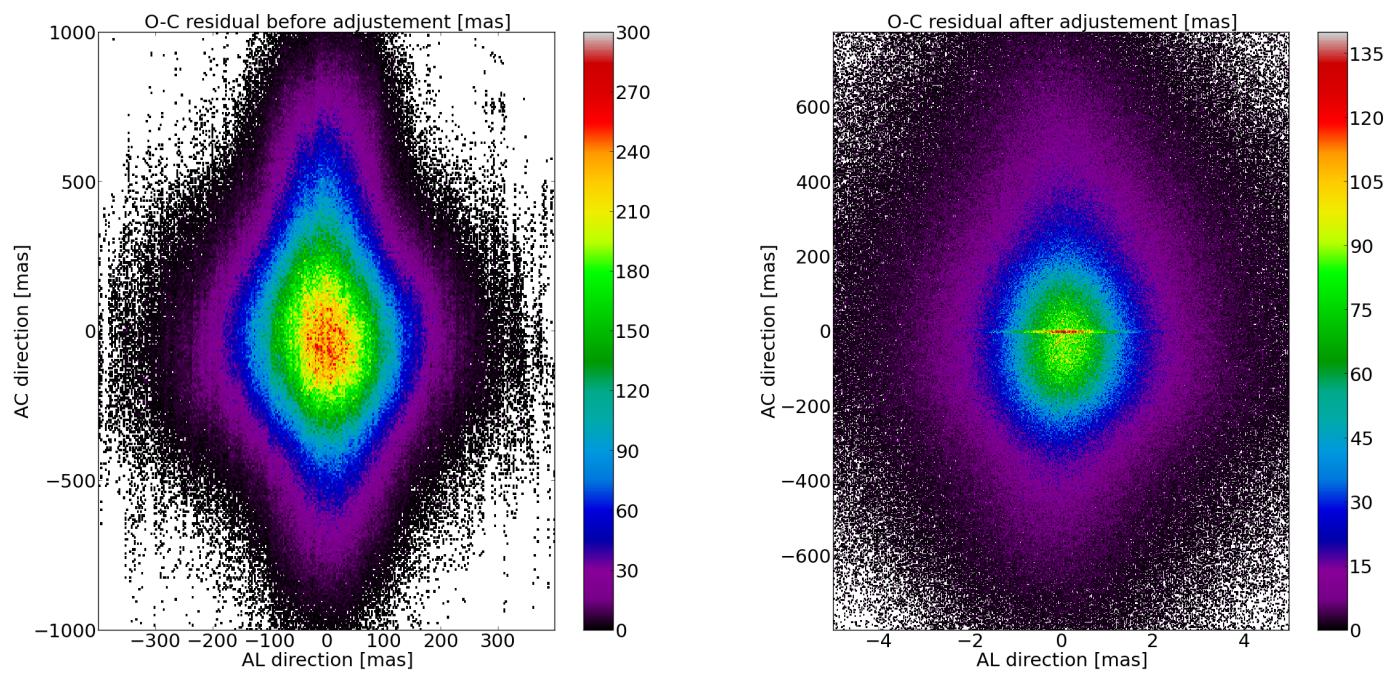


Figure 4: Density plot of the residuals in the (AL,AC) plane expressed in milliarcsecond before and after the adjustement of the initial conditions. The colorbar and the axis range were chosen to be directly comparable with Fig.19 of [9]

INPOP10e) and INPOP19a.

In order to estimate the impact on the INPOP reference frame orientations of the use of the DR2 GAIA fitted asteroid orbits on the planet ones, we estimate a matrix of rotation between two planetary ephemerides differing only by the initial conditions of the orbits of the 343 asteroids taking into account for their perturbations on the planetary orbits.

The two ephemerides were fitted over the same data sample given in Table 1 and in considering the same adjusted parameters. Same residuals have been obtained for the two solutions and no significant differences have been noticed in the fitted parameters, implying that the differences in the asteroid orbits are directly absorbed by the fitted parameters inside the estimated uncertainties.

This choice of fitting a rotation matrix between the two planetary ephemerides can be explained by the fact that the new asteroid orbits fitted over the Gaia DR2 are directly given in the Gaia reference frame ([8]) when the former asteroid orbits were given in a frame close to the one defined with the stellar catalogs such as USNOB1.1 and UCAC, leading to a tie to the ICRF2 with an accuracy of about several hundred of milli-arcseconds (mas) ([1]). This latest frame being at least two order of magnitude less accurate than the other data used for the planetary ephemerides tie to ICRF, when the two ephemerides are compared, we evaluate the rotation between the planetary orbits tied to ICRF with ( $\Delta$  DOR) observations of spacecraft orbiting planets ([5]) and planetary orbits adjusted using both ICRF VLBI positions of spacecraft and asteroid orbits given in the GRF. 3 Euler angles have been fitted and are given in Table 4 for different cases, depending which planetary orbits are considered. If all the orbits including the outer planet ones are considered, the mis-alignement of the INPOP reference frame axis (by definition, the ICRF, without considering the VLBI observation uncertainties) with the Gaia reference frame (GRF) is not significant. However if we consider only the orbits fitted over very accurate observations such as the inner planets, Jupiter and Saturn, then the Euler angles turn out to be significant but at the level of few  $\mu$ as. This is far below the uncertainty of the alignment between DR2 GRF and ICRF3 of about 20 to 30  $\mu$ as as obtained by ([8]). We can then conclude to a good alignment of the INPOP reference axis relative to the DR2 GRF.

## 7 Lunar ephemeris

The lunar ephemeris of INPOP19a are obtained from the fit of the integrated solutions of the lunar orbit and orientation to the lunar laser ranging (LLR) data. The LLR data used for the fits of INPOP19a contains 27,780 normal points collected by eight Earth stations ranging to five lunar surface retroreflectors from August 1969 until October 2019. The LLR data is processed using the GINS software and the LLR reduction model is detailed in [22]. The dynamical model of the lunar interior is developed within INPOP19a following the description within [14, 22]. Minor adjustments to the LLR data weights is made to benefit from the high accuracy of the LLR observations from APOLLO and Grasse stations. A total of 5725 infrared LLR observations collected between 2015-2019 were used for the fits of INPOP19a. The LLR data from the Wetzell station were retrieved from the POLAC and ILRS FTP websites for 2018 and 2019 data respectively. The comparison of LLR post-fit wrms obtained with INPOP17a and INPOP19a are provided in Table 5. We find that the wrms of the INPOP19a LLR post-fit residuals are very close to the 1 cm mark for Grasse, APOLLO and Wetzell stations.

The LLR fits of INPOP19a includes a supplementary correction to the longitude libration of the Moon (introduced within the GINS reduction software) to account for frequency dependence of lunar tidal dissipation. This introduces 3 cosine terms ( $l'$ ,  $2l-2D$ ,  $2F-2l$ ) as corrections to the longitude libration of the Moon, similar to DE430 [25] and following the approximation in EPM2016 [15]. The cosine terms provide the out-of-phase component to the sine-dominated longitude libration terms (see for example the Fourier terms in the physical libration for  $\tau$  tabulated in [18]). Introducing these

terms improves the LLR post-fit residuals by few mm (3-4 mm) visible more prominently over years 2010 to 2019, due to the higher accuracy of LLR data acquired during this period. The annual term ( $I'$ ) has the most prominence among the three fitted amplitudes. Their values are tabulated in Table 7. We adapt this method for providing users with high accuracy requirements, until an equivalent dynamical model representation is introduced. Amplitudes of terms with longer periods ( $\geq 3$ yr) could in principle be fit at the current accuracy and long baseline of the data, but does not contribute to a significant improvement in the post-fit residuals.

Some of the parameters relevant to the Earth-Moon system are tabulated in Table 6. The differences in the gravitational mass of the Earth-Moon barycentre ( $GM_{EMB}$ ) arise from the use of updated values of the Earth-Moon mass ratio (EMRAT) provided by the joint iterative fit to the planetary part of the ephemeris. The INPOP17a solution reported a mean radial difference of  $\sim 19$  cm with respect to the last update of the JPL lunar solution (DE430) arising from the differences in  $GM_{EMB}$  [22]. This difference is now reduced to  $\sim 5$  cm with the INPOP19a solution. Other differences in the lunar interior parameters are within their respective error bars. Few of the lunar gravity field coefficients (tabulated in Table 6) continue to require adjustment outside the error bar provided by the GRAIL gravity field solutions for a better fit of the LLR data. This is likely due to the simplicity of the forward modeling of the interior dynamics of the Moon as shown through recent efforts involving the joint analysis of GRAIL-LLR solutions [23]. The fluid core oblateness of the Moon ( $f_c$ ) differ by about 12% with respect to the INPOP17a solution for the same fixed core polar moment ratio as in INPOP17a ( $\frac{C_c}{C_T} = 7 \times 10^{-4}$ ) and remains consistent with a recent in-house analysis [21] involving an improved lunar interior parameterization and a more complex torque modeling.

LLR data are not explicitly used for ITRF solutions. However, some stations contribute other data products (GPS, SLR, VLBI) to the ITRF solutions. Stations with a long temporal baseline in LLR allow the fit of their coordinates (and in some cases, velocities) to the LLR data. Table 8 gives the list of station and reflector coordinates used for the INPOP19a solution. The INPOP17a document [19] contains a typographic error on reference values of the Lunokhod 1 and 2 reflector coordinates<sup>3</sup>. Users of the older INPOP17a solution must use their respective PA coordinates (XYZ in m) as  $L1_{XYZ}=1114292.5047, -781298.2434, 1076058.5100$  and  $L2_{XYZ}=1339363.4749, 801872.1138, 756358.5308$ .

## References

- [1] Steven R. Chesley, James Baer, and David G. Monet. Treatment of star catalog biases in asteroid astrometric observations. *Icarus*, 210(1):158–181, Nov 2010.
- [2] Daniele Durante, D. J. Hemingway, P. Racopappa, L. less, and D. J. Stevenson. Titan’s gravity field and interior structure after Cassini. *Icarus*, 326:123–132, Jul 2019.
- [3] A. Fienga, C. Avdellidou, and J. Hanus. Asteroid masses obtained with inpop planetary ephemerides. ArXiv e-prints:1601.00947, 2019.
- [4] A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, M. Gastineau, and A. Verma. DPAC INPOP final release: INPOP10e. ArXiv e-prints , 2012.
- [5] A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, P. Kuchynka, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Thereau. The planetary ephemerides INPOP10a and its applications in fundamental physics. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 111:363–+, 2011.

---

<sup>3</sup>personal communication, D.Pavlov, IAA RAS

Table 1: INPOP19a data samples used for its adjustments. The columns 1 and 2 give the observed planet and an information on the space mission providing the observations. Columns 3 and 4 give the number of observations and the time interval, while the column 5 gives the *a priori* uncertainties provided by space agencies or the navigation teams. Finally in the last two columns, are given the WRMS for INPOP19a and INPOP17a.

Planet / Type	#	Period	Averaged Accuracy	WRMS	
				INPOP19a	INPOP17a
<b>Mercury</b>					
Direct range [m]	462	1971.29 : 1997.60	900	0.95	0.96
Messenger range [m]	1096	2011.23 : 2014.26	5	0.82	1.29
Mariner range [m]	2	1974.24 : 1976.21	100	0.37	0.78
<b>Venus</b>					
VLBI [mas]	68	1990.70 : 2013.14	2.0	1.13	1.178
Direct range [m]	489	1965.96 : 1990.07	1400	0.98	0.98
Vex range [m]	24783	2006.32 : 2011.45	7.0	0.93	0.93
<b>Mars</b>					
VLBI [mas]	194	1989.13 : 2013.86	0.3	1.26	1.16
Mex range [m]	30669	2005.17 : 2017.37	2.0	0.98	3.37
		2005.17 : 2016.37	2.0	0.97	1.26
MGS range [m]	2459	1999.31 : 2006.70	2.0	0.93	1.31
MRO/MO range [m]	20985	2002.14 : 2014.00	1.2	1.07	1.91
<b>Jupiter</b>					
VLBI [mas]	24	1996.54 : 1997.94	11	1.01	1.03
Optical ra/de [arcsec]	6416	1924.34 : 2008.49	0.3	1.0	1.0
Flybys ra/de [mas]	5	1974.92 : 2001.00	4.0/12.0	0.94/1.0	0.58/0.82
Flybys range [m]	5	1974.92 : 2001.00	2000	0.98	0.71
Juno range [m]	9	2016.65 : 2018.68	20	0.945	116.0
<b>Saturn</b>					
Optical ra/de [arcsec]	7826	1924.22 : 2008.34	0.3	0.96/0.87	0.96/0.87
Cassini					
VLBI ra/de [mas]	10	2004.69 : 2009.31	0.6/0.3	0.97/0.99	0.92/0.91
JPL range [m]	165	2004.41 : 2014.38	25.0	0.99	1.01
Grand Finale range [m]	9	2017.35 : 2017.55	3.0	1.14	29.0
La Sapienza range [m]	614	2006.01 : 2016.61	6.0	1.01	2.64
<b>Uranus</b>					
Optical ra/de [arcsec]	12893	1924.62 : 2011.74	0.2/0.3	1.09 / 0.82	1.09 / 0.82
Flybys ra/de [mas]	1	1986.07 : 1986.07	50/50	0.12 / 0.42	0.42 / 1.23
Flybys range [m]	1	1986.07 : 1986.07	50	0.92	0.002
<b>Neptune</b>					
Optical ra/de [arcsec]	5254	1924.04 : 2007.88	0.25/0.3	1.008 / 0.97	1.008 / 0.97
Flybys ra/de [mas]	1	1989.65 : 1989.65	15.0	0.11 / 0.15	1.0/1.57
Flybys range [m]	1	1989.65 : 1989.65	2	1.14	1.42

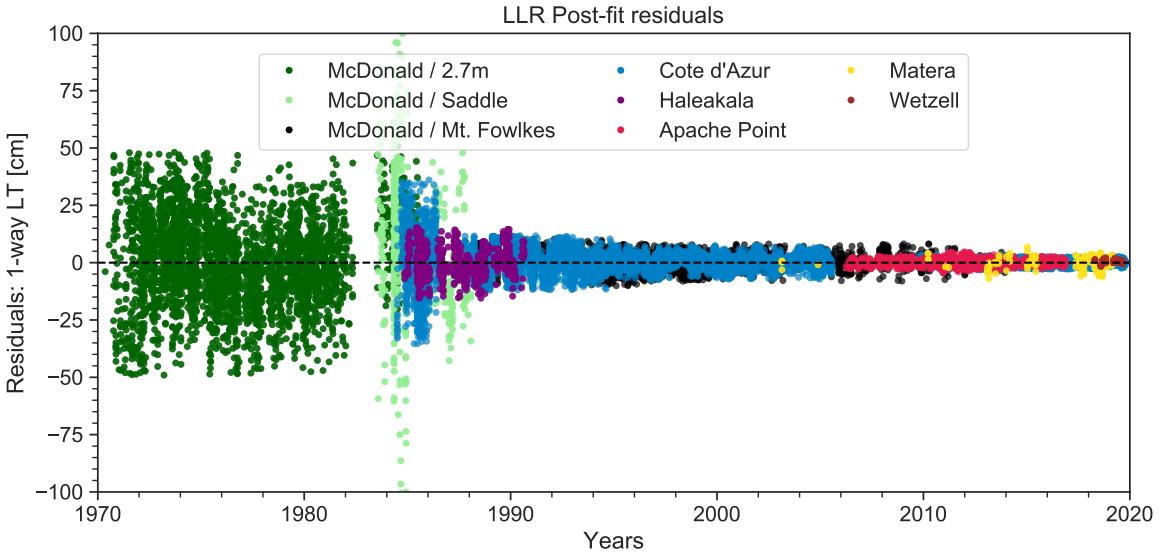


Figure 5: LLR post-fit residuals obtained with INPOP19a (wrms in cm) from 1969 to 2019.

TNO	GM AU <sup>3</sup> d <sup>-2</sup>	mass kg
50000	7.235460e-14	4.863611e+20
55637	1.880380e-14	1.263975e+20
90482	9.554830e-14	6.422671e+20
120347	1.934696e-14	1.300485e+20
136108	6.036990e-13	4.058011e+21
136199	2.519160e-12	1.693357e+22
174567	3.994670e-14	2.685181e+20
208996	8.007340e-14	5.382462e+20
136472	4.498510e-13	3.023858e+21

Table 2: Masses for the nine biggest TNO kept fixed in INPOP19a. Values extracted from [17].

Table 3: Values of parameters obtained in the fit of INPOP13c, INPOP10e, DE430 and DE436 to observations.

	INPOP13c $\pm 1\sigma$	INPOP17a $\pm 1\sigma$	INPOP19a $\pm 1\sigma$	DE436 $\pm 1\sigma$
$(\text{EMRAT-81.3000}) \times 10^{-4}$	$(5.694 \pm 0.010)$	$(5.719 \pm 0.010)$	$(5.668 \pm 0.010)$	$5.68217$
$J_2^\odot \times 10^{-7}$	$(2.30 \pm 0.25)$	$(2.295 \pm 0.010)$	$(2.010 \pm 0.010)$	NC
$GM_\odot - 132712440000 \text{ [km}^3 \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$	$(44.487 \pm 0.17)$	$(42.693 \pm 0.04)$	$(40.042 \pm 0.01)$	$41.939377$

Table 4: Euler angles fitted by comparing two planet ephemerides different only by the asteroid orbits used for computing their perturbations on the planet orbits: one being fitted over the Gaia DR2 and one obtained from the astorb data base.

	$\theta$ $\mu\text{as}$	$\psi$ $\mu\text{as}$	$\phi$ $\mu\text{as}$
All planets	$-98 \pm 1508$	$1.0 \pm 45$	$253 \pm 3971$
Inner planets	$1.16 \pm 0.20$	$-0.08 \pm 0.62$	$-1.50 \pm 0.150$
Inner planets + Jupiter	$1.23 \pm 0.16$	$-1.0 \pm 0.22$	$-0.128 \pm 0.69$
Inner planets + Jupiter + Saturn	$1.83 \pm 0.80$	$1.057 \pm 0.053$	$-0.23 \pm 2.56$
Outer planets	$-55 \pm 629$	$-30 \pm 495$	$373 \pm 5051$

Table 5: Comparison of LLR post-fit residuals (wrms in cm) of LLR observations between INPOP17a (1969-2017) and INPOP19a (1969-2019). INPOP17a statistics are drawn from [20].

Station	Time span	INPOP17a		INPOP19a	
		Used	wrms	Used	wrms
APOLLO	2006-2010	929	1.27	925	1.19
APOLLO	2010-2012	486	1.95	496	1.76
APOLLO	2012-2013	345	1.52	347	1.42
APOLLO	2013-2016	800	1.15	816	1.02
Grasse	1984-1986	1161	14.01	1098	14.18
Grasse	1987-1995	3407	4.11	3386	4.62
Grasse	1995-2006	4754	2.86	4831	2.84
Grasse	2009-2013	982	1.41	981	1.30
Grasse	2013-2017	3320	1.51	3420	1.06
Grasse	2017-2019	-	-	3302	1.02
Haleakala	1984-1990	728	4.80	737	6.08
Matera	2003-2013	37	2.37	37	2.21
Matera	2013-2015	30	2.93	27	2.39
Matera	2015-2019	-	-	154	2.40
McDonald	1969-1983	3246	18.87	3276	18.57
McDonald	1983-1986	148	16.77	155	14.31
MLRS1	1983-1984	44	32.73	44	31.00
MLRS2	1984-1985	356	62.58	347	54.80
MLRS2	1985-1989	202	11.07	219	18.23
MLRS2	1988-1997	1162	3.81	1182	3.86
MLRS2	1997-2013	1939	3.72	1933	3.10
MLRS2	2013-2016	15	2.59	15	2.35
Wettzell	2018-2019	-	-	52	0.88

Table 6: Parameters for the Earth-Moon system.

Parameter	Units	INPOP17a	INPOP19a
$GM_{EMB}$	$au^3/d^2$	8.997011404E-10	8.997011394E-10
$\tau_{R1,E}$	d	7.36E-03	7.98E-03
$\tau_{R2,E}$	d	2.89E-03	2.82E-03
$C_T/(MR^2)$		3.93148E-01	3.93140E-01
$C_{32}$		4.84441E-06	4.84500E-06
$S_{32}$		1.683E-06	1.685E-06
$C_{33}$		1.6877E-06	1.6686E-06
$\tau_M$	d	8.7E-02	9.4E-02
$k_v/C_T$	$d^{-1}$	1.75E-08	1.64E-08
$f_c$		2.5E-04	2.8E-04
$h_2$		4.38E-02	4.26E-02

Table 7: Amplitudes of periodic terms as corrections to longitude librations (in mas) obtained between ephemeris solutions to account for frequency-dependent dissipation in the Moon, where the polynomial expansion of the Delaunay arguments  $l'$  (solar mean anomaly),  $l$  (lunar mean anomaly),  $F$  (argument of latitude) and  $D$  (mean elongation of the Moon from the Sun) follow Eqn. 5.43 in [16]. Columns labeled as DE430, WB2015, EPM2015 and EPM2017 were obtained from [7], [24], [15] and the IAA RAS website, respectively.

Parameter	Period (d)	Longitude libration correction (in mas)				
		DE430	WB2015	EPM2015	EPM2017	INPOP19a
$A_1 \cos(l')$	365.26	$5.0 \pm 1.3$	$4.9 \pm 1.1$	$4.5 \pm 0.2$	4.4	$4.4 \pm 0.6$
$A_2 \cos(2l - 2D)$	205.89	$1.5 \pm 1.2$	$2.0 \pm 1.2$	$1.4 \pm 0.2$	1.6	$1.7 \pm 0.9$
$A_3 \cos(2F - 2l)$	1095.22	$-3.6 \pm 3.3$	$0.7 \pm 6.2$	$-7.3 \pm 0.5$	-5.2	$9.7 \pm 4.4$

Table 8: Station and lunar surface reflector coordinates used for the fits of INPOP19a solution.

Earth Station	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
APOLLO	-1463998.9085	-5166632.7635	3435012.8835	-0.0141	0.0003	-0.0022
Grasse	4581692.1675	556196.0730	4389355.1088	-0.0151	0.0191	0.0118
Haleakala	-5466003.7191	-2404425.9369	2242197.9030	-0.0122	0.0622	0.0310
Matera	4641978.8100	1393067.5310	4133249.4800	-0.0180	0.0192	0.0140
McDonald	-1330781.5567	-5328756.3783	3235697.9118	-0.0227	0.0277	0.0139
MLRS1	-1330120.9826	-5328532.3644	3236146.0080	-0.0124	0.0009	-0.0053
MLRS2	-1330021.4931	-5328403.3401	3236481.6472	-0.0129	0.0015	-0.0036
Wettzell	4075576.7587	931785.5077	4801583.6067	-0.0139	0.0170	0.0124
Lunar reflector	x	y	z			
Apollo 11	1591966.6111	690699.5452	21003.7497			
Lunokhod 1	1114292.2641	-781298.3844	1076058.6360			
Apollo 14	1652689.5835	-520997.5017	-109730.5271			
Apollo 15	1554678.3047	98095.6097	765005.2064			
Lunokhod 2	1339363.3642	801872.0049	756358.6487			

Table 9: Estimated values of station biases over different periods (2-way light time in cm).

Bias #	Station	Date	Bias 2-way light time [cm]	
			INPOP17a	INPOP19a
1	APOLLO	2006/04/07 - 2010/11/01	-0.24	0.27
2		2007/12/15 - 2008/06/30	-3.90	-3.95
3		2008/09/20 - 2009/06/20	2.83	3.22
4		2010/11/01 - 2012/04/07	-5.98	-6.03
5		2012/04/07 - 2013/09/02	9.12	8.99
6	Grasse	1984/06/01 - 1986/06/13	-6.49	16.99
7		1987/10/01 - 2005/08/01	2.47	-5.00
8		1993/03/01 - 1996/10/01	10.38	9.36
9		1996/12/10 - 1997/01/18	16.92	14.04
10		1997/02/08 - 1998/06/24	19.56	20.39
11		2004/12/04 - 2004/12/07	-7.07	-5.28
12		2005/01/03 - 2005/01/06	-6.72	-4.38
13		2009/11/01 - 2014/01/01	0.34	-0.94
14		2015/12/20 - 2015/12/21	-88.34	-88.05
15	Haleakala	1984/11/01 - 1990/09/01	2.55	9.54
16		1984/11/01 - 1986/04/01	-3.61	-1.84
17		1986/04/02 - 1987/07/30	13.07	9.52
18		1987/07/31 - 1987/08/14	1.83	2.57
19		1985/06/09 - 1985/06/10	-13.18	-11.03
20		1987/11/10 - 1988/02/18	19.49	17.32
21		1990/02/06 - 1990/09/01	14.32	11.68
22	Matera	2003/01/01 - 2016/01/01	4.62	0.06
23	McDonald	1969/01/01 - 1985/07/01	-37.88	-45.21
24		1971/12/01 - 1972/12/05	28.21	38.03
25		1972/04/21 - 1972/04/27	88.09	130.6
26		1974/08/18 - 1974/10/16	-112.08	-116.54
27		1975/10/05 - 1976/03/01	28.44	26.68
28		1983/12/01 - 1984/01/17	11.06	-3.94
29		1969/01/01 - 1971/12/31	2249.19	2266.53
30	MLRS1	1983/08/01 - 1988/01/28	38.73	12.89

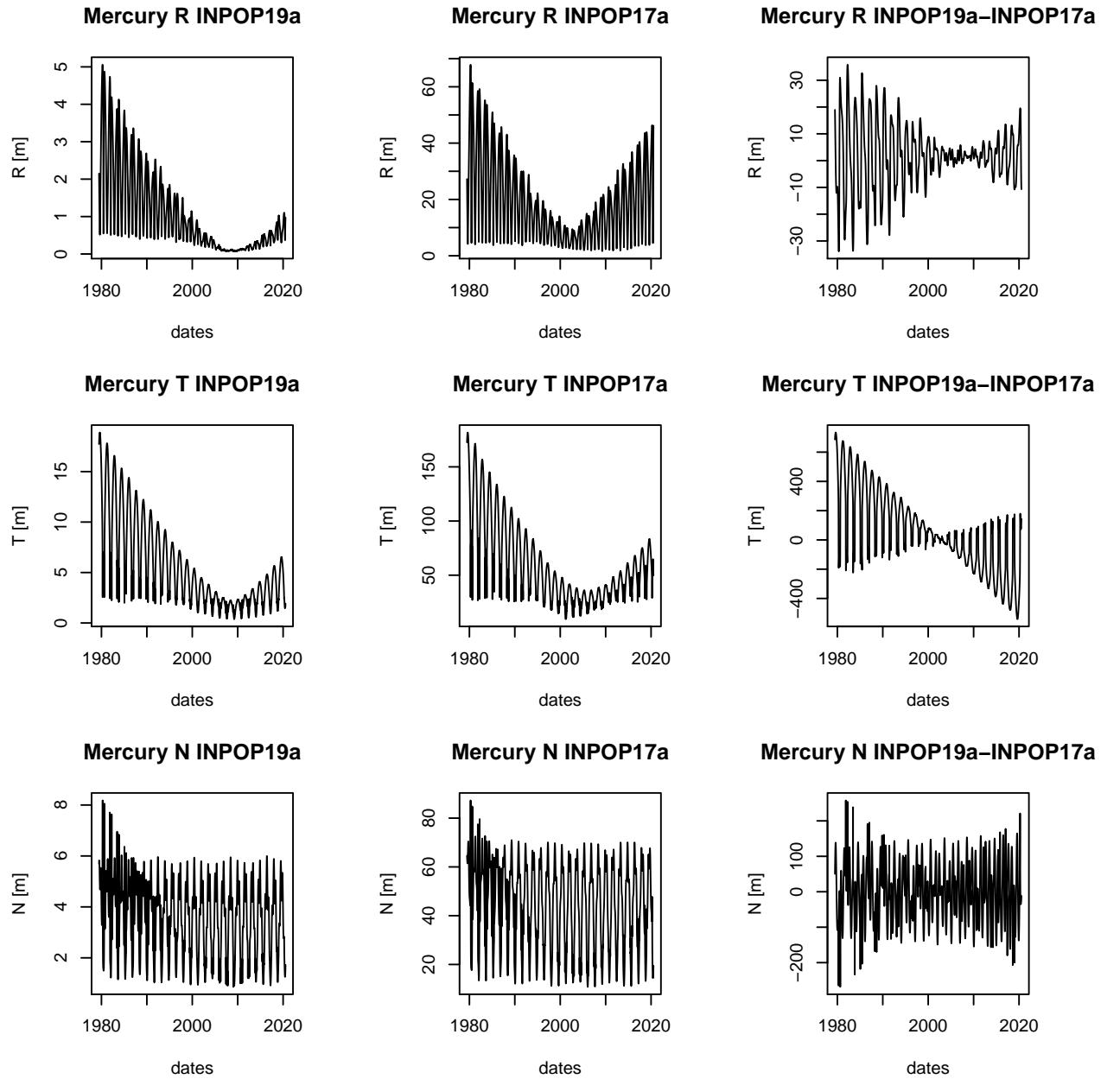


Figure 6: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Mercury in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Mercury (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and Propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame.

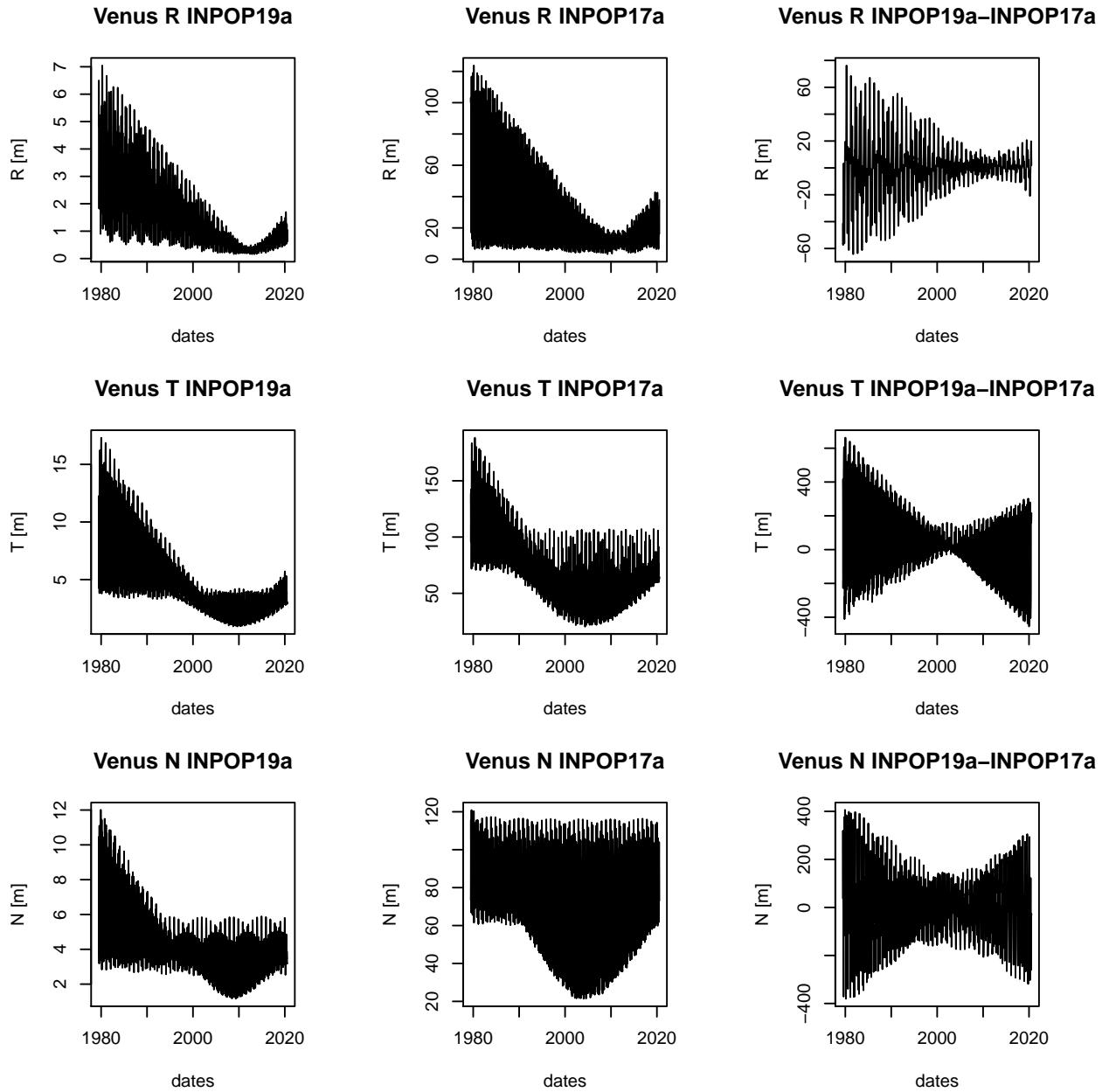


Figure 7: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Venus in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Venus (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame.

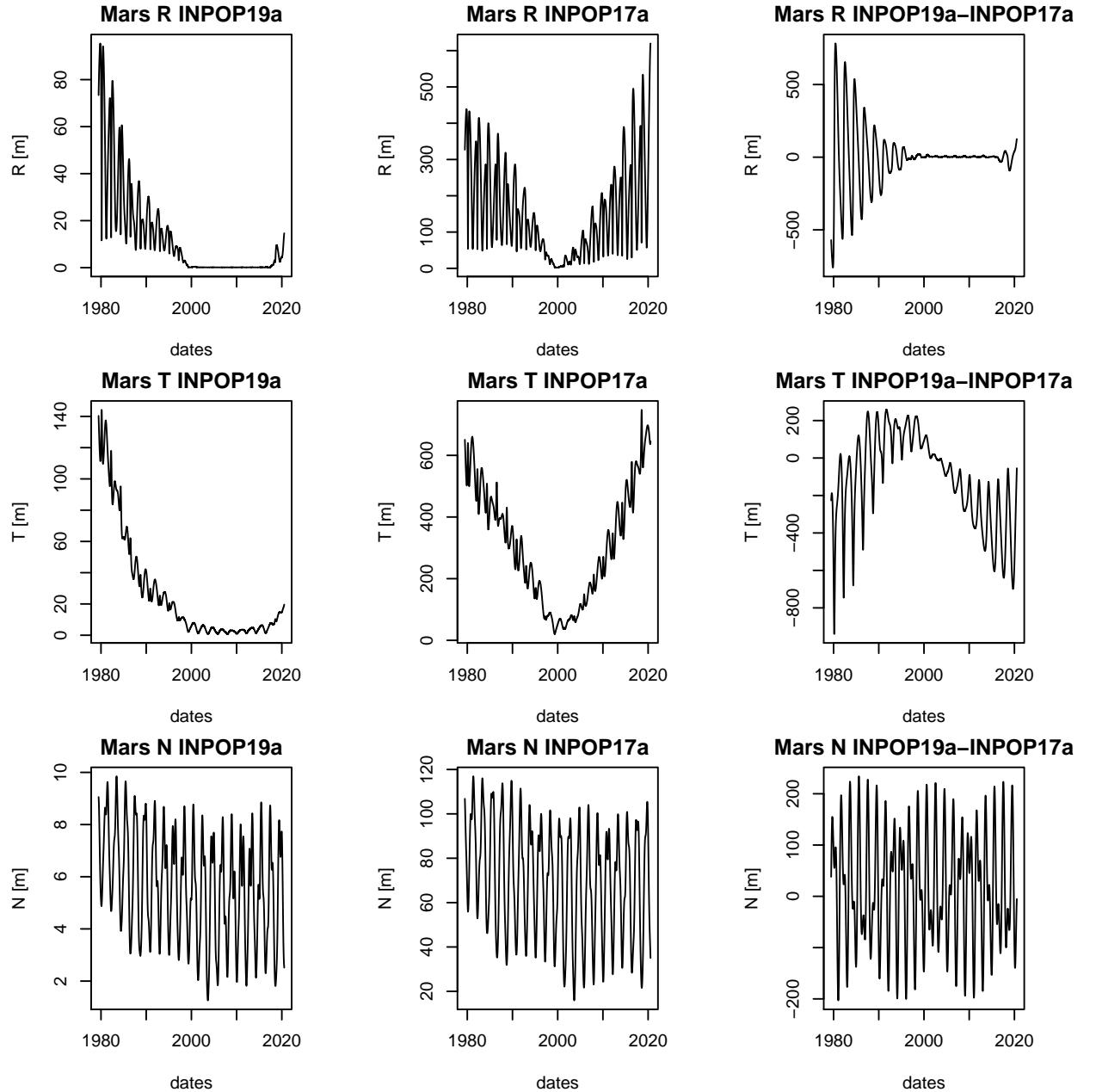


Figure 8: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Mars in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Mars (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame for Mars and (R,T,N) barycentric frame for EMB.

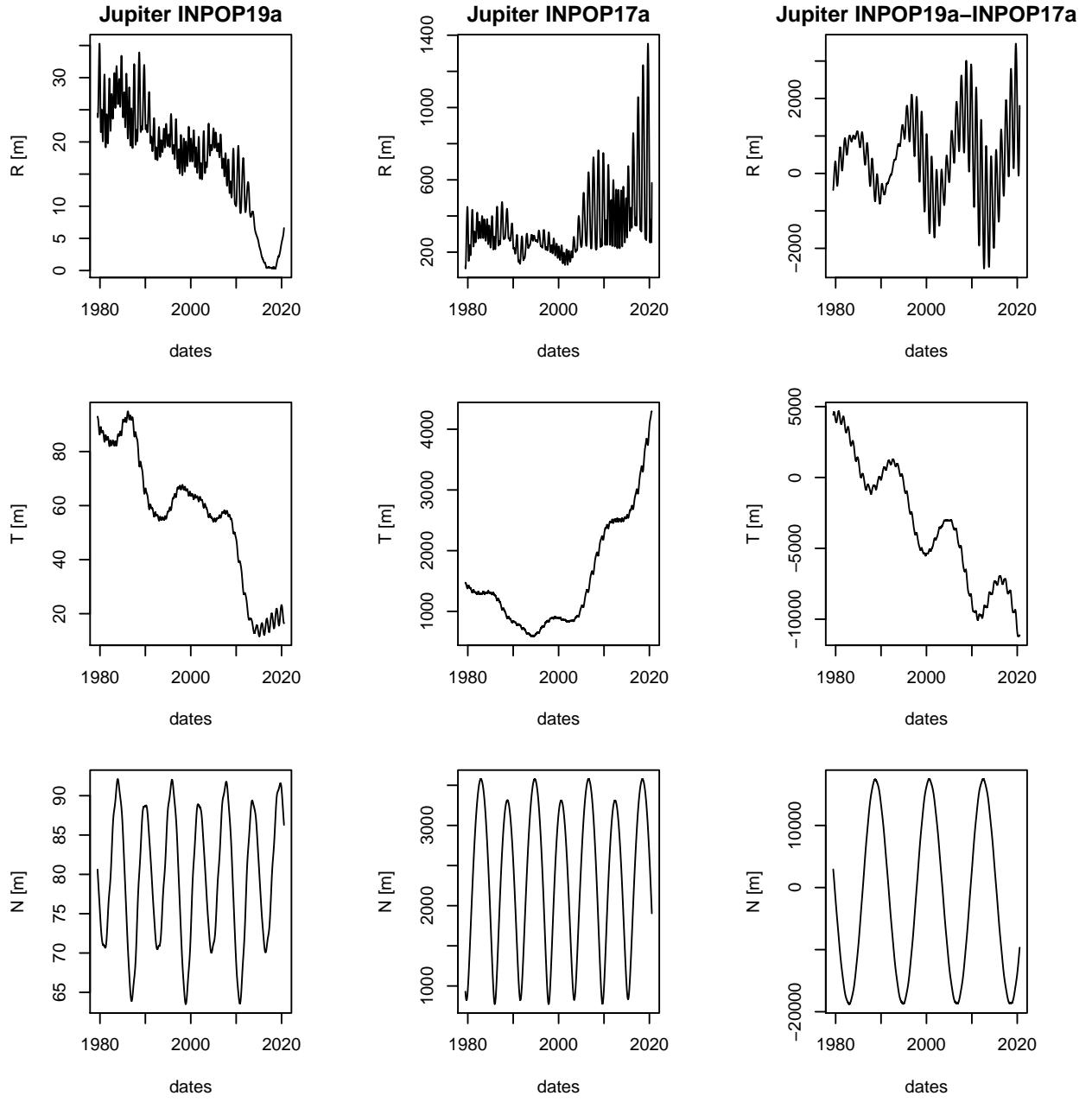


Figure 9: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Jupiter in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Jupiter (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame.

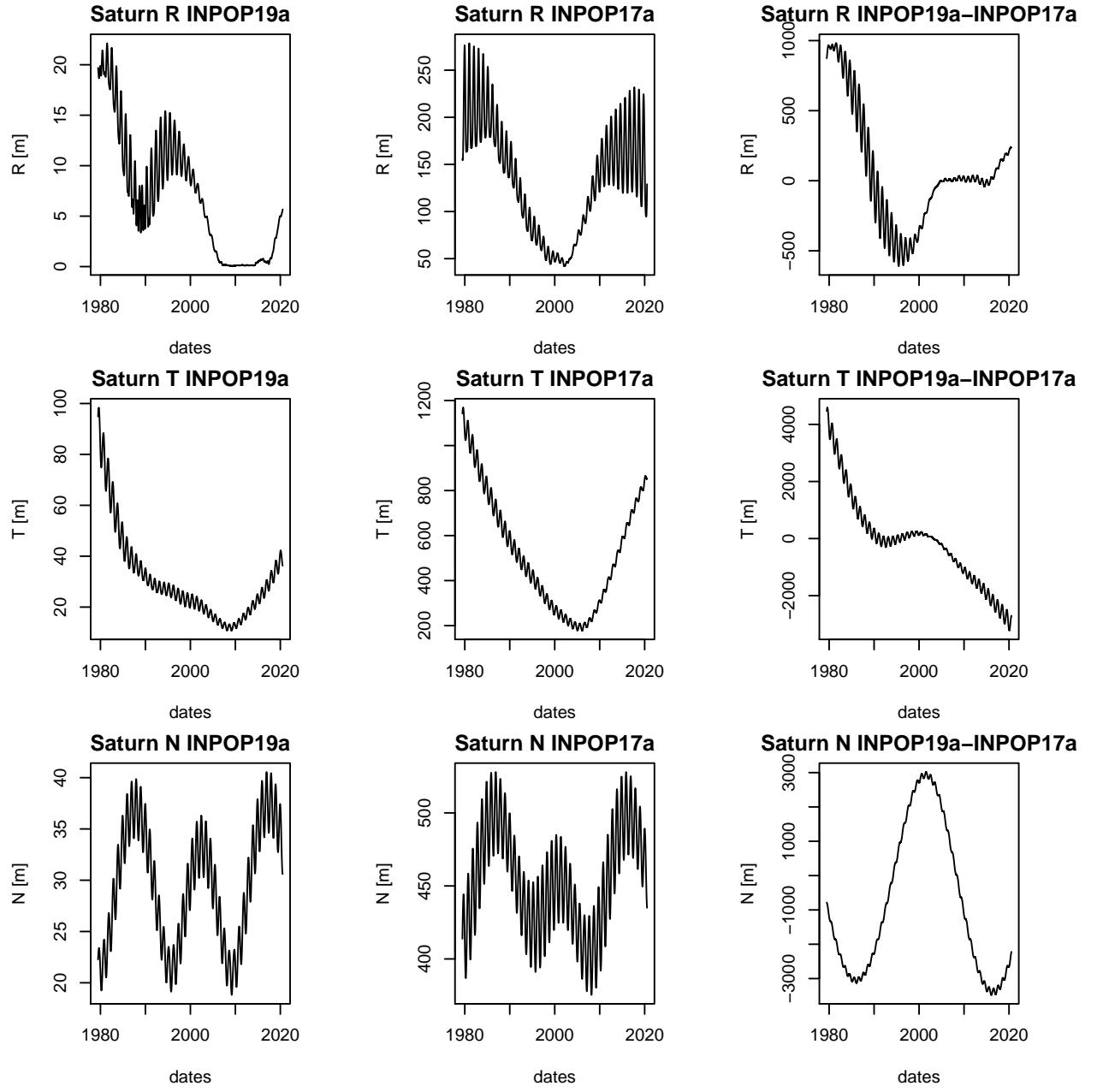


Figure 10: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Saturn in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Saturn (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame.

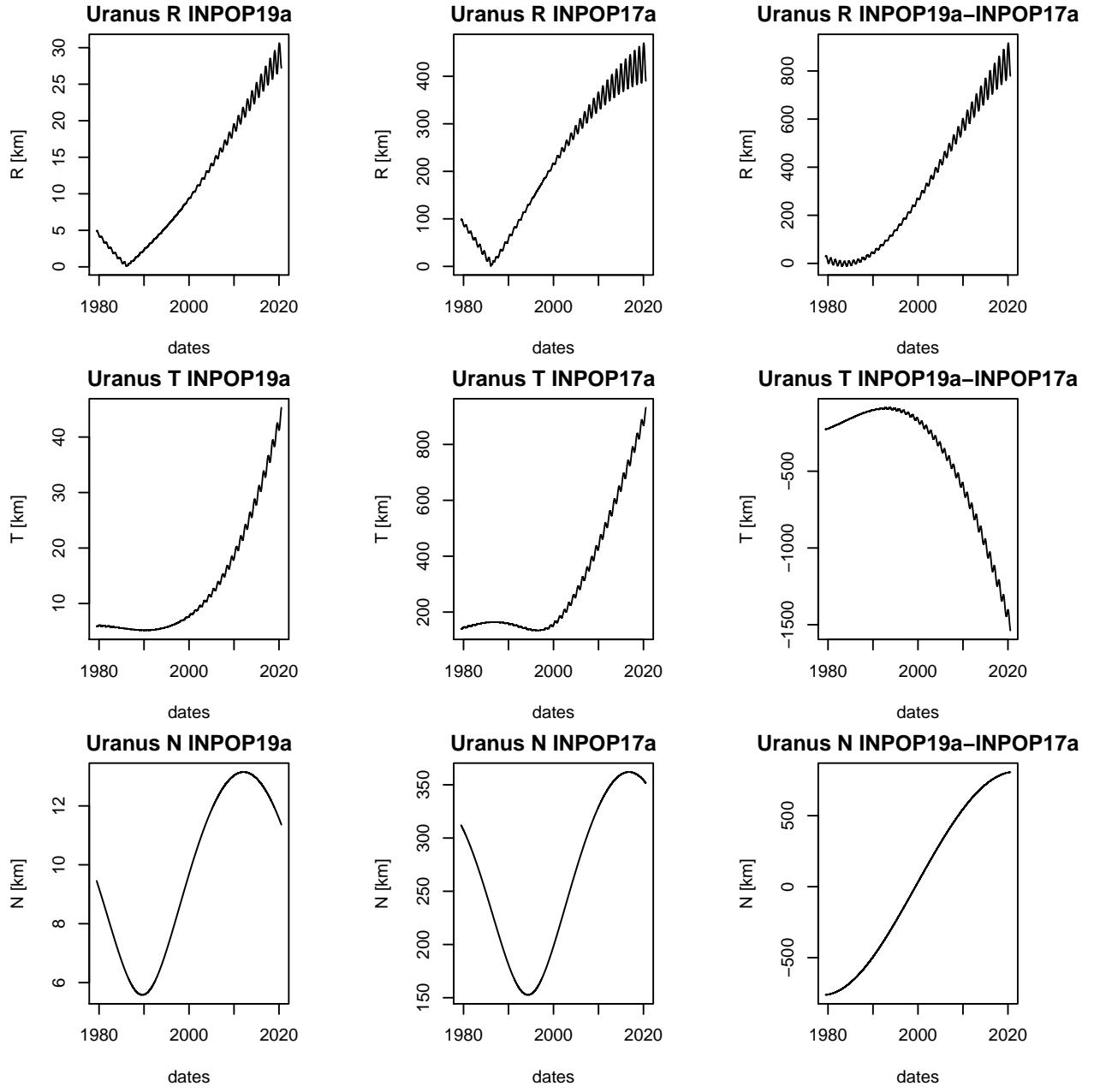


Figure 11: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Uranus in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Uranus (INPOP19a–INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) geocentric frame.

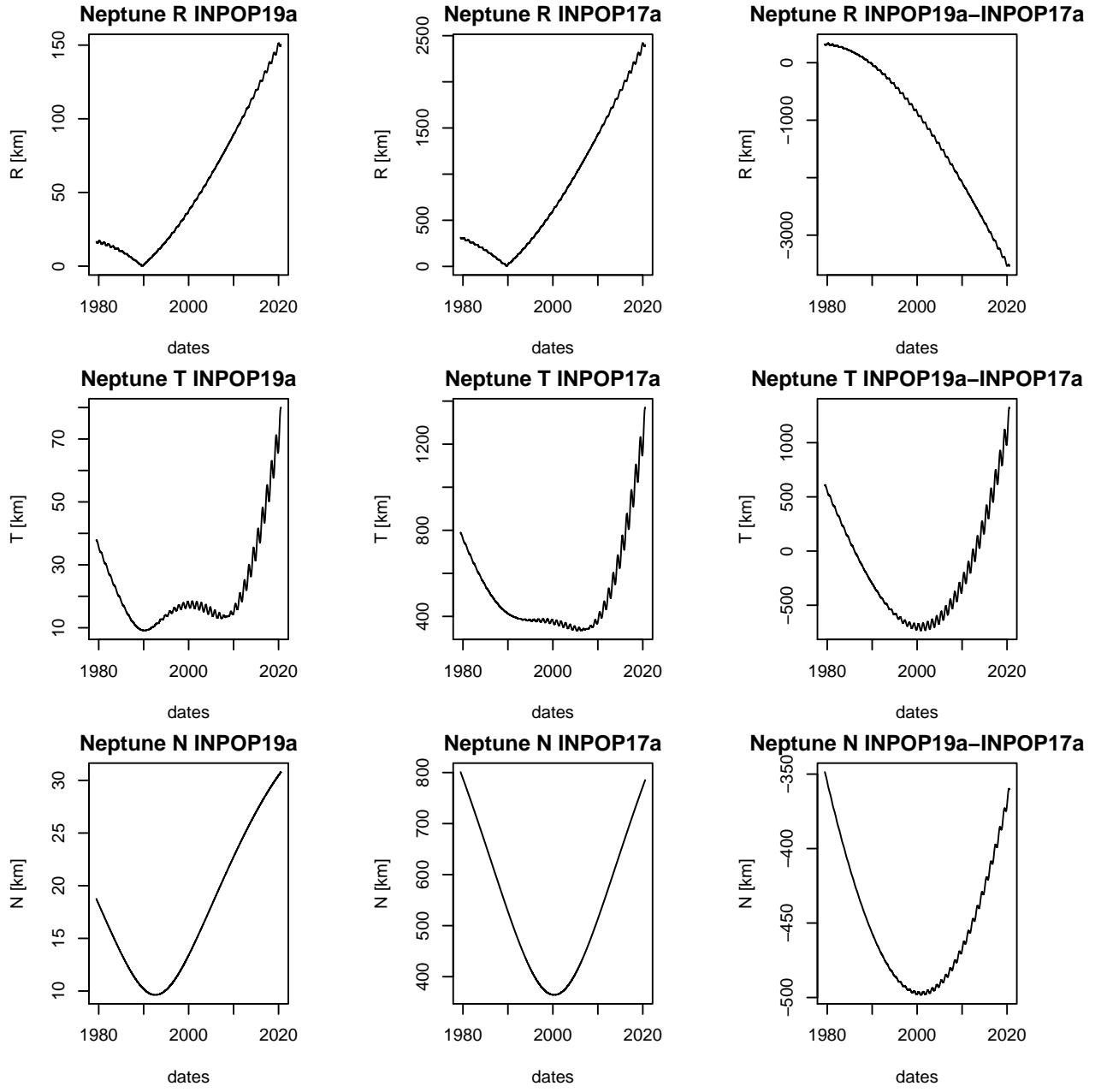


Figure 12: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of Neptune in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the geocentric differences for Neptune (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in ( $R, T, N$ ) geocentric frame.

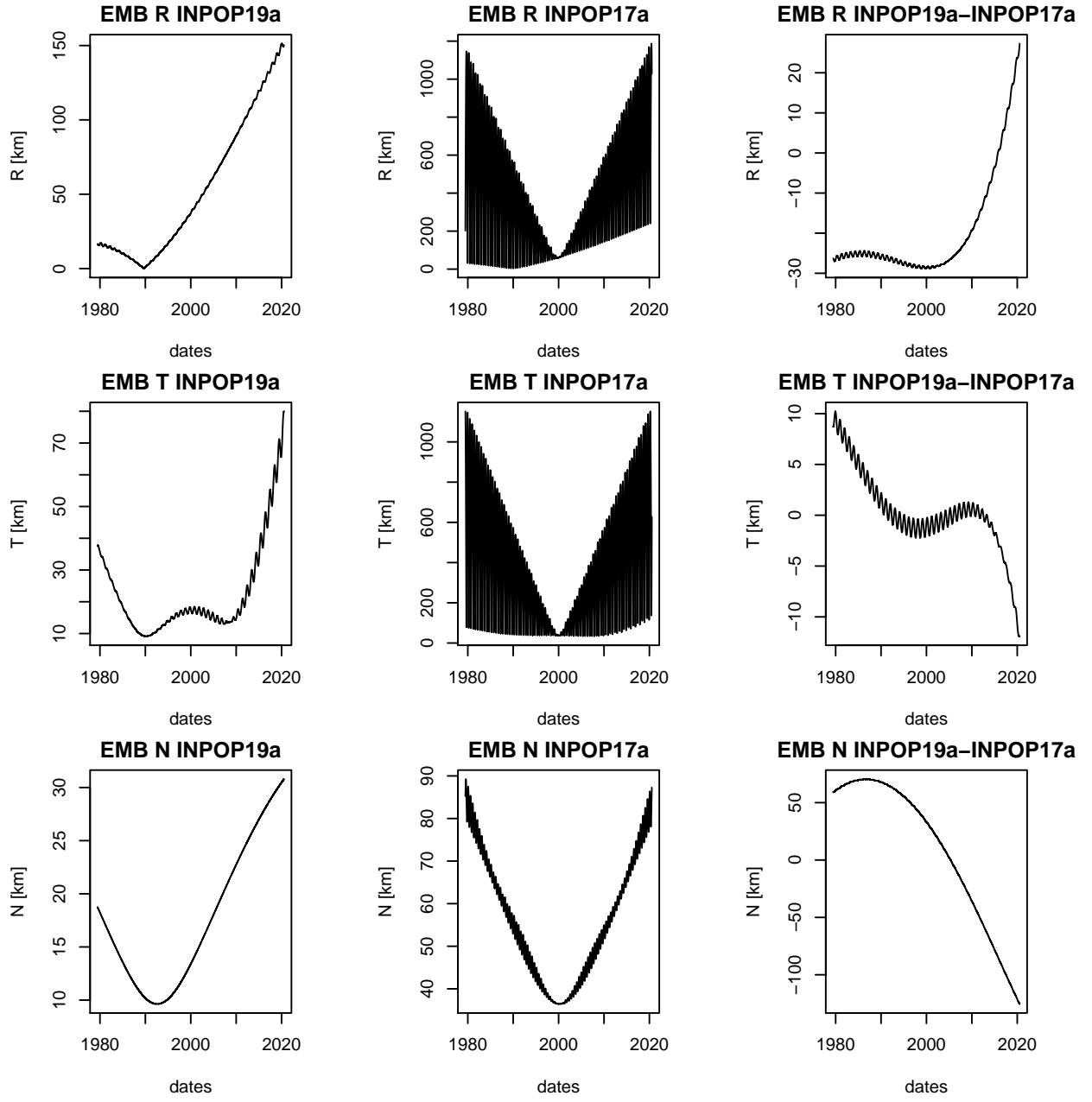


Figure 13: Propagation of least squares standard dispersion for the orbit of EMB versus SSB in the case of INPOP19a and INPOP17a. Right-hand side plots give the SSB differences for EMB (INPOP19a-INPOP17a) integrated positions. All the differences and propagation of least squares standard dispersion are given in (R,T,N) barycentric frame.

- [6] W. M. Folkner, L. Iess, J. D. Anderson, S. W. Asmar, D. R. Buccino, D. Durante, M. Feldman, L. Gomez Casajus, M. Gregnanin, A. Milani, M. Parisi, R. S. Park, D. Serra, G. Tommei, P. Tortora, M. Zannoni, S. J. Bolton, J. E. P. Connerney, and S. M. Levin. Jupiter gravity field estimated from the first two juno orbits. *Geophysical Research Letters*, 44(10):4694–4700, 2017.
- [7] W. M. Folkner, J. G. Williams, D. H. Boggs, R. S. Park, and P. Kuchynka. The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. *Interplanetary Network Progress Report*, 196:C1, February 2014.
- [8] Gaia Collaboration, Mignard, F., Klioner, S. A., Lindegren, L., Hernández, J., Bastian, U., Bombrun, A., Hobbs, D., Lammers, U., Michalik, D., Ramos-Lerate, M., Biermann, M., Fernández-Hernández, J., Geyer, R., Hilger, T., Siddiqui, H. I., Steidelmüller, H., Babusiaux, C., Barache, C., Lambert, S., Andrei, A. H., Bourda, G., Charlot, P., Brown, A. G. A., Vallenari, A., Prusti, T., de Bruijne, J. H. J., Bailer-Jones, C. A. L., Evans, D. W., Eyer, L., Jansen, F., Jordi, C., Luri, X., Panem, C., Pourbaix, D., Randich, S., Sartoretti, P., Soubiran, C., van Leeuwen, F., Walton, N. A., Arenou, F., Cropper, M., Drimmel, R., Katz, D., Lattanzi, M. G., Bakker, J., Cacciari, C., Castañeda, J., Chaoul, L., Cheek, N., De Angeli, F., Fabricius, C., Guerra, R., Holl, B., Masana, E., Messineo, R., Mowlavi, N., Nienartowicz, K., Panuzzo, P., Portell, J., Riello, M., Seabroke, G. M., Tanga, P., Thévenin, F., Gracia-Abril, G., Comoretto, G., Garcia-Reinaldos, M., Teyssier, D., Altmann, M., Andrae, R., Audard, M., Bellas-Velidis, I., Benson, K., Berthier, J., Blomme, R., Burgess, P., Busso, G., Carry, B., Cellino, A., Clementini, G., Clotet, M., Creevey, O., Davidson, M., De Ridder, J., Delchambre, L., Dell’Oro, A., Ducourant, C., Fouesneau, M., Frémat, Y., Galluccio, L., García-Torres, M., González-Núñez, J., González-Vidal, J. J., Gosset, E., Guy, L. P., Halbwachs, J.-L., Hambly, N. C., Harrison, D. L., Hestroffer, D., Hodgkin, S. T., Hutton, A., Jasniewicz, G., Jean-Antoine-Piccolo, A., Jordan, S., Korn, A. J., Krone-Martins, A., Lanzafame, A. C., Lebzelter, T., Löffler, W., Manteiga, M., Marrese, P. M., Martín-Fleitas, J. M., Moitinho, A., Mora, A., Muinonen, K., Osinde, J., Pancino, E., Pauwels, T., Petit, J.-M., Recio-Blanco, A., Richards, P. J., Rimoldini, L., Robin, A. C., Sarro, L. M., Siopis, C., Smith, M., Sozzetti, A., Süveges, M., Torra, J., van Reeven, W., Abbas, U., Abreu Aramburu, A., Accart, S., Aerts, C., Altavilla, G., Alvarez, M. A., Alvarez, R., Alves, J., Anderson, R. I., Anglada Varela, E., Antiche, E., Antoja, T., Arcay, B., Astraatmadja, T. L., Bach, N., Baker, S. G., Balaguer-Núñez, L., Balm, P., Barata, C., Barbato, D., Barblan, F., Barklem, P. S., Barrado, D., Barros, M., Barstow, M. A., Bartholomé Muñoz, L., Bassilana, J.-L., Becciani, U., Bellazzini, M., Berihuete, A., Bertone, S., Bianchi, L., Bienaymé, O., Blanco-Cuaresma, S., Boch, T., Boeche, C., Borrachero, R., Bossini, D., Bouquillon, S., Bragaglia, A., Bramante, L., Breddels, M. A., Bressan, A., Brouillet, N., Brüsemeister, T., Brugaletta, E., Bucciarelli, B., Burlacu, A., Busonero, D., Butkevich, A. G., Buzzi, R., Caffau, E., Cancelliere, R., Cannizzaro, G., Cantat-Gaudin, T., Carballo, R., Carlucci, T., Carrasco, J. M., Casamiquela, L., Castellani, M., Castro-Ginard, A., Chemin, L., Chiavassa, A., Cocozza, G., Costigan, G., Cowell, S., Crifo, F., Crosta, M., Crowley, C., Cuypers, J., Dafonte, C., Damerdji, Y., Dapergolas, A., David, P., David, M., de Laverny, P., De Luise, F., De March, R., de Souza, R., de Torres, A., Debosscher, J., del Pozo, E., Delbo, M., Delgado, A., Delgado, H. E., Diakite, S., Diener, C., Distefano, E., Dolding, C., Drazinos, P., Durán, J., Edvardsson, B., Enke, H., Eriksson, K., Esquej, P., Eynard Bontemps, G., Fabre, C., Fabrizio, M., Faigler, S., Falcão, A. J., Farràs Casas, M., Federici, L., Fedorets, G., Fernique, P., Figueras, F., Filippi, F., Findeisen, K., Fonti, A., Fraile, E., Fraser, M., Frézouls, B., Gai, M., Galleti, S., Garabato, D., García-Sedano, F., Garofalo, A., Garralda, N., Gavel, A., Gavras, P., Gerssen, J., Giacobbe, P., Gilmore, G., Girona, S., Giuffrida, G., Glass, F., Gomes, M., Granvik, M., Gueguen, A., Guerrier, A., Guiraud, J., Gutié, R., Haigron, R., Hatzidimitriou, D., Hauser, M., Haywood, M., Heiter,

U., Helmi, A., Heu, J., Hofmann, W., Holland, G., Huckle, H. E., Hypki, A., Icardi, V., Janßen, K., Jevardat de Fombelle, G., Jonker, P. G., Juhász, A. L., Julbe, F., Karampelas, A., Kewley, A., Klar, J., Kochoska, A., Kohley, R., Kolenberg, K., Kontizas, M., Kontizas, E., Koposov, S. E., Kordopatis, G., Kostrzewska-Rutkowska, Z., Koubek, P., Lanza, A. F., Lasne, Y., Lavigne, J.-B., Le Fustec, Y., Le Poncin-Lafitte, C., Lebreton, Y., Leccia, S., Leclerc, N., Lecoer-Taibi, I., Lenhardt, H., Leroux, F., Liao, S., Licata, E., Lindstrøm, H. E. P., Lister, T. A., Livanou, E., Lobel, A., López, M., Managau, S., Mann, R. G., Mantelet, G., Marchal, O., Marchant, J. M., Marconi, M., Marinoni, S., Marschalkó, G., Marshall, D. J., Martino, M., Marton, G., Mary, N., Massari, D., Matijevic, G., Mazeh, T., McMillan, P. J., Messina, S., Millar, N. R., Molina, D., Molinaro, R., Molnár, L., Montegriffo, P., Mor, R., Morbidelli, R., Morel, T., Morris, D., Mulone, A. F., Muraveva, T., Musella, I., Nelemans, G., Nicastro, L., Noval, L., O'Mullane, W., Ordénovic, C., Ordóñez-Blanco, D., Osborne, P., Pagani, C., Pagano, I., Pailler, F., Palacin, H., Palaversa, L., Panahi, A., Pawlak, M., Piersimoni, A. M., Pineau, F.-X., Plachy, E., Plum, G., Poggio, E., Poujoulet, E., Prsa, A., Pulone, L., Racero, E., Ragaini, S., Rambaux, N., Regibo, S., Reylé, C., Riclet, F., Ripepi, V., Riva, A., Rivard, A., Rixon, G., Roegiers, T., Roelens, M., Romero-Gómez, M., Rowell, N., Royer, F., Ruiz-Dern, L., Sadowski, G., Sagristà Sellés, T., Sahlmann, J., Salgado, J., Salguero, E., Sanna, N., Santana-Ros, T., Sarasso, M., Savietto, H., Schultheis, M., Sciacca, E., Segol, M., Segovia, J. C., Ségransan, D., Shih, I.-C., Siltala, L., Silva, A. F., Smart, R. L., Smith, K. W., Solano, E., Solitro, F., Sordo, R., Soria Nieto, S., Souchay, J., Spagna, A., Spoto, F., Stampa, U., Steele, I. A., Stephenson, C. A., Stoëv, H., Suess, F. F., Surdej, J., Szabados, L., Szegedi-Elek, E., Tapiador, D., Taris, F., Tauran, G., Taylor, M. B., Teixeira, R., Terrett, D., Teyssandier, P., Thuillot, W., Titarenko, A., Torra Clotet, F., Turon, C., Ulla, A., Utrilla, E., Uzzi, S., Vaillant, M., Valentini, G., Valette, V., van Elteren, A., Van Hemelryck, E., van Leeuwen, M., Vaschetto, M., Vecchiato, A., Veljanoski, J., Viala, Y., Vicente, D., Vogt, S., von Essen, C., Voss, H., Votruba, V., Voutsinas, S., Walmsley, G., Weiler, M., Wertz, O., Wevers, T., Wyrzykowski, L., Yoldas, A., Zerjal, M., Ziaeepour, H., Zorec, J., Zschocke, S., Zucker, S., Zurbach, C., and Zwitter, T. Gaia data release 2 - the celestial reference frame (gaia-cr2). [A&A](#), 616:A14, 2018.

- [9] Gaia Collaboration, F. Spoto, P. Tanga, F. Mignard, J. Berthier, B. Carry, A. Cellino, A. Dell'Oro, D. Hestroffer, K. Muinonen, T. Pauwels, J. M. Petit, P. David, F. De Angeli, M. Delbo, B. Frézouls, L. Galluccio, M. Granvik, J. Guiraud, J. Hernández, C. Ordénovic, J. Portell, E. Poujoulet, W. Thuillot, G. Walmsley, A. G. A. Brown, A. Vallenari, T. Prusti, J. H. J. de Bruijne, C. Babusiaux, C. A. L. Bailer-Jones, M. Biermann, D. W. Evans, L. Eyer, F. Jansen, C. Jordi, S. A. Klioner, U. Lammers, L. Lindegren, X. Luri, C. Panem, D. Pourbaix, S. Randich, P. Sartoretti, H. I. Siddiqui, C. Soubiran, F. van Leeuwen, N. A. Walton, F. Arenou, U. Bastian, M. Cropper, R. Drimmel, D. Katz, M. G. Lattanzi, J. Bakker, C. Cacciari, J. Castañeda, L. Chaoul, N. Cheek, C. Fabricius, R. Guerra, B. Holl, E. Masana, R. Messineo, N. Mowlavi, K. Nienartowicz, P. Panuzzo, M. Riello, G. M. Seabroke, F. Thévenin, G. Gracia-Abril, G. Comoretto, M. Garcia-Reinaldos, D. Teyssier, M. Altmann, R. Andrae, M. Audard, I. Bellas-Velidis, K. Benson, R. Blomme, P. Burgess, G. Busso, G. Clementini, M. Clotet, O. Creevey, M. Davidson, J. De Ridder, L. Delchambre, C. Ducourant, J. Fernández-Hernández, M. Fouesneau, Y. Frémat, M. García-Torres, J. González-Núñez, J. J. González-Vidal, E. Gosset, L. P. Guy, J. L. Halbwachs, N. C. Hambly, D. L. Harrison, S. T. Hodgkin, A. Hutton, G. Jasniewicz, A. Jean-Antoine-Piccolo, S. Jordan, A. J. Korn, A. Krone-Martins, A. C. Lanzafame, T. Lebzelter, W. Lö, M. Manteiga, P. M. Marrese, J. M. Martín-Fleitas, A. Moitinho, A. Mora, J. Osinde, E. Pancino, A. Recio-Blanco, P. J. Richards, L. Rimoldini, A. C. Robin, L. M. Sarro, C. Siopis, M. Smith, A. Sozzetti, M. Süveges, J. Torra, W. van Reeven, U. Abbas, A. Abreu Aramburu, S. Accart, C. Aerts, G. Altavilla, M. A. Álvarez, R. Alvarez, J. Alves, R. I. Anderson,

A. H. Andrei, E. Anglada Varela, E. Antiche, T. Antoja, B. Arcay, T. L. Astraatmadja, N. Bach, S. G. Baker, L. Balaguer-Núñez, P. Balm, C. Barache, C. Barata, D. Barbato, F. Barblan, P. S. Barklem, D. Barrado, M. Barros, M. A. Barstow, L. Bartholomé Muñoz, J. L. Bassilana, U. Becciani, M. Bellazzini, A. Berihuete, S. Bertone, L. Bianchi, O. Bienaymé, S. Blanco-Cuaresma, T. Boch, C. Boeche, A. Bombrun, R. Borrachero, D. Bossini, S. Bouquillon, G. Bourda, A. Bragaglia, L. Bramante, M. A. Breddels, A. Bressan, N. Brouillet, T. Brüsemeister, E. Brugaletta, B. Bucciarelli, A. Burlacu, D. Busonero, A. G. Butkevich, R. Buzzi, E. Caffau, R. Cancelliere, G. Cannizzaro, T. Cantat-Gaudin, R. Carballo, T. Carlucci, J. M. Carrasco, L. Casamiquela, M. Castellani, A. Castro-Ginard, P. Charlot, L. Chemin, A. Chiavassa, G. Cocozza, G. Costigan, S. Cowell, F. Crifo, M. Crosta, C. Crowley, J. Cuypers, C. Dafonte, Y. Damerdji, A. Dapergolas, M. David, P. de Laverny, F. De Luise, R. De March, R. de Souza, A. de Torres, J. Debosscher, E. del Pozo, A. Delgado, H. E. Delgado, S. Diakite, C. Diener, E. Distefano, C. Dolding, P. Dražinos, J. Durán, B. Edvardsson, H. Enke, K. Eriksson, P. Esquej, G. Eynard Bontemps, C. Fabre, M. Fabrizio, S. Faigler, A. J. Falcão, M. Farràs Casas, L. Federici, G. Fedorets, P. Fernique, F. Figueras, F. Filippi, K. Findeisen, A. Fonti, E. Fraile, M. Fraser, M. Gai, S. Galleti, D. Garabato, F. García-Sedano, A. Garofalo, N. Garralda, A. Gavel, P. Gavras, J. Gerssen, R. Geyer, P. Giacobbe, G. Gilmore, S. Girona, G. Giuffrida, F. Glass, M. Gomes, A. Gueguen, A. Guerrier, R. Gutié, R. Haigron, D. Hatzidimitriou, M. Hauser, M. Haywood, U. Heiter, A. Helmi, J. Heu, T. Hilger, D. Hobbs, W. Hofmann, G. Holland, H. E. Huckle, A. Hypki, V. Icardi, K. Janßen, G. Jevardat de Fombelle, P. G. Jonker, Á. L. Juhász, F. Julbe, A. Karampelas, A. Kewley, J. Klar, A. Kochoska, R. Kohley, K. Kolenberg, M. Kontizas, E. Kontizas, S. E. Koposov, G. Kordopatis, Z. Kostrzewa-Rutkowska, P. Koubsky, S. Lambert, A. F. Lanza, Y. Lasne, J. B. Lavigne, Y. Le Fustec, C. Le Poncin-Lafitte, Y. Lebreton, S. Leccia, N. Leclerc, I. Lecoeur-Taibi, H. Lenhardt, F. Leroux, S. Liao, E. Licata, H. E. P. Lindstrøm, T. A. Lister, E. Livanou, A. Lobel, M. López, S. Managau, R. G. Mann, G. Mantelet, O. Marchal, J. M. Marchant, M. Marconi, S. Marinoni, G. Marschalkó, D. J. Marshall, M. Martino, G. Marton, N. Mary, D. Massari, G. Matijević, T. Mazeh, P. J. McMillan, S. Messina, D. Michalik, N. R. Millar, D. Molina, R. Molinaro, L. Molnár, P. Montegriffo, R. Mor, R. Morbidelli, T. Morel, D. Morris, A. F. Mulone, T. Muraveva, I. Musella, G. Nelemans, L. Nicastro, L. Noval, W. O'Mullane, D. Ordóñez-Blanco, P. Osborne, C. Pagani, I. Pagano, F. Pailler, H. Palacin, L. Palaversa, A. Panahi, M. Pawlak, A. M. Piersimoni, F. X. Pineau, E. Plachy, G. Plum, E. Poggio, A. Prša, L. Pulone, E. Racero, S. Ragaini, N. Rambaux, M. Ramos-Lerate, S. Regibo, C. Reylé, F. Riclet, V. Ripepi, A. Riva, A. Rivard, G. Rixon, T. Roegiers, M. Roelens, M. Romero-Gómez, N. Rowell, F. Royer, L. Ruiz-Dern, G. Sadowski, T. Sagristà Sellés, J. Sahlmann, J. Salgado, E. Salguero, N. Sanna, T. Santana-Ros, M. Sarasso, H. Savierto, M. Schultheis, E. Sciacca, M. Segol, J. C. Segovia, D. Ségransan, I. C. Shih, L. Siltala, A. F. Silva, R. L. Smart, K. W. Smith, E. Solano, F. Solitro, R. Sordo, S. Soria Nieto, J. Souchay, A. Spagna, U. Stampa, I. A. Steele, H. Steidelmüller, C. A. Stephenson, H. Stoev, F. F. Suess, J. Surdej, L. Szabados, E. Szegedi-Elek, D. Tapiador, F. Taris, G. Tauran, M. B. Taylor, R. Teixeira, D. Terrett, P. Teyssandier, A. Titarenko, F. Torra Clotet, C. Turon, A. Ulla, E. Utrilla, S. Uzzi, M. Vaillant, G. Valentini, V. Valette, A. van Elteren, E. Van Hemelryck, M. van Leeuwen, M. Vaschetto, A. Vecchiato, J. Veljanoski, Y. Viala, D. Vicente, S. Vogt, C. von Essen, H. Voss, V. Votruba, S. Voutsinas, M. Weiler, O. Wertz, T. Wevers, . Wyrzykowski, A. Yoldas, M. Žerjal, H. Ziaeepour, J. Zorec, S. Zschocke, S. Zucker, C. Zurbach, and T. Zwitter. Gaia Data Release 2. Observations of solar system objects. *A&A*, 616:A13, Aug 2018.

- [10] L. Iess, W. M. Folkner, D. Durante, M. Parisi, Y. Kaspi, E. Galanti, T. Guillot, W. B. Hubbard, D. J. Stevenson, J. D. Anderson, D. R. Buccino, L. Gomez Casajus, A. Milani, R. Park, P. Racioppa, D. Serra, P. Tortora, M. Zannoni, H. Cao, R. Helled, J. I. Lunine, Y. Miguel,

- B. Militzer, S. Wahl, J. E. P. Connerney, S. M. Levin, and S. J. Bolton. Measurement of jupiter's asymmetric gravity field. *Nature*, 555:220 EP –, 03 2018.
- [11] L. Iess, B. Militzer, Y. Kaspi, P. Nicholson, D. Durante, P. Racioppa, A. Anabtawi, E. Galanti, W. Hubbard, M. J. Mariani, P. Tortora, S. Wahl, and M. Zannoni. Measurement and implications of saturn's gravity field and ring mass. *Science*, 364(6445), 2019.
- [12] P. Kuchynka and W. M. Folkner. A new approach to determining asteroid masses from planetary range measurements. *Icarus*, 222:243–253, January 2013.
- [13] C. Lawson and R. Hanson. *Solving least squares problems*. SIAM, 1974.
- [14] Hervé Manche. PhD thesis.
- [15] Dmitry A. Pavlov, James G. Williams, and Vladimir V. Suvorin. Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126(1-3):61–88, 2016.
- [16] G Petit and B Luzum. IERS Conventions (2010). *IERS Technical Note*, 36, 2010.
- [17] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev. Mass of the Kuiper belt. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(9):57, Sep 2018.
- [18] N. Rambaux and J. G. Williams. The Moon's physical librations and determination of their free modes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109(1):85–100, jan 2011.
- [19] V. Viswanathan, A. Fienga, M. Gastineau, and J. Laskar. INPOP17a planetary ephemerides. *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste*, 108, August 2017.
- [20] V. Viswanathan, A. Fienga, O. Minazzoli, L. Bernus, J. Laskar, and M. Gastineau. The new lunar ephemeris INPOP17a and its application to fundamental physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(2):1877–1888, may 2018.
- [21] V. Viswanathan, N. Rambaux, A. Fienga, J. Laskar, and M. Gastineau. Observational Constraint on the Radius and Oblateness of the Lunar Core-Mantle Boundary. *Geophysical Research Letters*, 46(13):7295–7303, jul 2019.
- [22] Vishnu Viswanathan. *Improving the dynamical model of the Moon using lunar laser ranging and spacecraft data*. Phd thesis, Observatoire de Paris, 2017.
- [23] Vishnu Viswanathan, Erwan Mazarico, Sander J Goossens, and Stefano Bertone. On the grail-llr low-degree gravity field inconsistencies. In *AGU Fall Meeting 2019*. AGU, 2019.
- [24] James G. Williams and Dale. H. Boggs. Tides on the Moon: Theory and determination of dissipation. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 120(4):689–724, apr 2015.
- [25] James G. Williams, Dale. H. Boggs, and William M. Folkner. DE430 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates. Technical report, JPL, Caltech, 2013.

## 8 Annex

Table 10: Asteroid masses (GM).

IAU	GM $10^{18} AU^3.d^{-2}$	$1-\sigma$ $10^{18} AU^3.d^{-2}$	IAU	GM $10^{18} AU^3.d^{-2}$	$1-\sigma$ $10^{18} AU^3.d^{-2}$
1	139643.532	340.331	233	316.961	140.441
2	32613.272	183.269	236	190.650	88.318
3	3806.229	126.860	238	559.720	233.434
4	38547.977	93.970	240	85.484	40.914
5	465.987	46.044	241	963.174	342.190
6	986.372	120.710	247	105.893	51.632
7	1833.933	84.518	250	245.307	120.373
8	596.962	62.983	259	808.064	296.308
9	1215.881	132.841	266	248.112	117.623
10	11954.671	449.263	268	134.613	65.831
11	977.184	157.265	275	233.252	110.230
12	229.191	45.153	276	452.566	217.572
13	546.734	173.058	283	237.643	112.678
14	765.291	117.763	287	33.835	16.849
15	3936.840	226.670	303	80.021	39.909
16	3088.668	323.861	304	14.118	7.043
17	118.120	55.782	308	289.006	137.485
18	576.019	48.935	313	72.947	30.632
19	1231.401	72.659	322	36.047	17.925
20	254.982	101.997	324	1682.131	45.327
21	257.961	96.045	326	45.434	21.252
22	1043.715	323.477	328	323.707	152.584
23	338.255	62.375	329	46.065	22.861
24	554.975	233.558	334	572.159	232.556
25	159.836	67.413	335	73.943	34.109
26	94.632	46.747	336	64.361	29.608
27	646.483	132.326	337	87.950	40.988
28	643.077	167.700	338	22.106	11.047
29	2103.023	187.853	344	372.187	75.866
30	238.456	96.799	345	100.699	48.761
31	1268.115	412.584	346	140.482	69.103
32	106.167	49.620	347	30.486	15.095
34	291.626	134.149	349	276.607	130.263
35	166.718	76.290	350	253.986	125.400
36	245.514	86.582	354	1078.281	183.015
37	189.707	84.623	356	108.613	50.163
38	49.830	24.817	357	131.750	65.607
39	939.076	279.684	358	61.697	30.742
40	350.481	89.957	360	436.211	189.055
41	723.534	121.258	362	76.350	37.995
42	147.445	47.113	363	207.657	98.134
43	74.755	25.136	365	76.459	37.909
44	68.184	33.458	366	114.144	56.805
45	1115.547	275.717	369	48.370	24.090

Continued on next page

Table 10 – *Continued from previous page*

<b>IAU</b>	<b>GM</b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>1-<math>\sigma</math></b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>IAU</b>	<b>GM</b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>1-<math>\sigma</math></b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$
46	135.706	62.782	372	1237.702	324.096
47	144.403	70.451	373	76.503	38.097
48	1318.034	512.014	375	465.838	214.300
49	176.639	85.388	377	38.443	19.191
50	124.107	42.027	381	495.946	217.389
51	417.753	140.463	385	111.656	54.700
52	2308.950	420.581	386	550.244	212.234
53	128.326	56.579	387	132.193	60.346
54	371.895	141.535	388	215.378	105.901
56	797.238	96.698	389	104.021	50.336
57	454.114	203.249	393	285.309	91.258
58	44.048	21.967	404	89.289	41.338
59	473.769	190.829	405	240.229	51.530
60	12.497	6.185	407	101.937	50.366
62	43.570	21.758	409	1011.800	201.135
63	150.988	66.373	410	303.222	96.475
65	2990.906	504.055	412	166.019	80.653
68	321.421	135.243	415	99.281	46.367
69	595.357	206.760	416	123.889	59.146
70	213.930	92.797	419	255.322	72.371
71	97.797	48.104	420	220.068	108.699
72	82.722	37.582	423	654.344	264.106
74	101.895	48.951	424	67.947	33.820
75	71.329	31.690	426	228.829	109.764
76	482.278	201.446	431	107.679	53.226
77	31.841	15.873	432	15.057	7.483
78	444.357	84.087	433	3.548	1.037
79	44.034	21.633	442	24.960	12.436
80	89.737	38.401	444	889.725	221.210
81	200.226	91.279	445	47.050	23.497
82	36.088	17.982	449	17.583	8.776
83	93.231	45.344	451	1671.212	588.194
84	45.404	19.210	454	21.631	10.802
85	884.824	146.811	455	340.048	111.366
86	247.214	118.942	464	125.102	60.637
87	2726.311	531.952	465	24.069	12.025
88	0.055	0.027	466	91.237	45.521
89	557.072	133.009	469	304.433	137.562
90	146.728	72.165	471	528.244	191.253
91	100.804	48.968	476	342.566	148.598
92	375.176	176.150	481	64.673	32.135
93	350.267	145.906	485	22.236	11.103
94	713.723	313.444	488	561.612	229.459
95	151.282	75.253	489	121.924	60.490
96	431.057	177.179	490	69.112	34.496

*Continued on next page*

Table 10 – *Continued from previous page*

IAU	GM $10^{18} AU^3.d^{-2}$	$1-\sigma$ $10^{18} AU^3.d^{-2}$	IAU	GM $10^{18} AU^3.d^{-2}$	$1-\sigma$ $10^{18} AU^3.d^{-2}$
97	210.124	78.474	491	202.066	99.899
98	129.270	59.993	498	91.707	44.284
99	75.571	35.518	503	45.347	22.078
100	124.982	61.740	505	166.145	69.346
102	236.332	88.196	506	322.294	155.267
103	151.309	74.011	508	206.435	102.288
104	163.453	80.618	511	6637.430	481.733
105	171.787	69.850	514	219.734	107.830
106	337.535	159.721	516	52.638	24.191
107	1422.992	464.415	517	100.264	49.805
109	51.619	24.915	521	76.898	37.306
110	127.185	62.490	532	1213.536	151.443
111	108.247	51.280	535	23.438	11.701
112	47.020	23.052	536	808.338	364.913
113	21.370	10.651	545	170.952	83.798
114	131.966	62.975	547	21.620	10.793
115	47.322	23.309	554	126.682	60.162
117	1453.566	435.368	566	541.209	240.020
118	9.548	4.771	568	50.683	25.276
120	502.516	232.707	569	43.667	21.659
121	713.675	291.224	584	20.399	10.034
124	166.505	76.974	585	5.529	2.876
127	117.181	57.880	591	30.558	15.074
128	618.626	210.888	593	62.446	30.550
129	684.256	200.467	595	93.310	46.541
130	864.951	294.577	596	178.840	85.354
132	30.303	14.755	598	20.551	10.265
134	173.804	78.883	599	71.685	34.736
135	136.653	59.914	602	168.836	82.134
137	277.249	126.850	604	53.701	26.742
139	404.038	108.798	618	166.141	82.396
140	360.331	130.179	623	7.431	3.713
141	115.238	54.453	626	72.832	35.212
143	51.644	25.749	635	57.819	28.865
144	471.278	121.876	654	188.097	56.725
145	461.851	123.055	663	239.643	114.428
146	209.047	101.392	667	73.041	36.352
147	78.621	39.220	674	193.640	91.865
148	129.656	63.668	675	96.325	46.769
150	106.505	52.648	680	206.775	96.732
154	817.895	322.045	683	295.566	141.445
156	429.780	81.628	690	201.167	98.318
159	270.009	131.608	691	92.304	45.887
160	89.965	44.536	694	153.259	56.940
162	203.147	92.477	696	99.448	49.299

*Continued on next page*

Table 10 – *Continued from previous page*

<b>IAU</b>	<b>GM</b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>1-<math>\sigma</math></b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>IAU</b>	<b>GM</b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$	<b>1-<math>\sigma</math></b> $10^{18} AU^3.d^{-2}$
163	21.516	10.609	702	906.957	374.186
164	470.318	107.979	704	4737.367	426.508
165	285.680	139.537	705	324.182	154.286
168	444.827	206.958	709	292.189	137.624
171	139.839	69.453	712	365.024	119.975
172	79.253	38.036	713	111.487	55.303
173	306.789	136.442	735	38.073	18.737
175	142.881	70.244	739	184.532	84.457
176	144.007	71.451	740	177.118	86.570
177	28.753	14.306	747	801.111	138.793
181	439.780	193.506	751	113.875	53.535
185	774.136	243.015	752	26.569	13.253
187	372.900	86.373	760	66.464	32.580
191	93.987	46.655	762	134.105	66.593
192	230.535	70.417	769	94.090	46.690
194	523.744	107.014	772	61.622	30.734
195	69.927	34.800	773	68.306	34.041
196	867.047	361.097	776	398.260	174.681
198	29.651	14.406	778	21.890	10.936
200	266.130	125.838	780	208.182	102.535
201	176.335	84.064	784	36.056	17.994
203	169.328	82.667	786	237.241	112.327
205	14.818	7.408	788	235.031	115.048
206	207.589	100.326	790	537.375	257.943
209	180.181	89.822	791	87.213	43.342
210	22.894	11.438	804	651.926	227.504
211	275.891	133.146	814	186.167	88.930
212	133.713	66.259	849	130.090	64.042
213	40.499	20.206	895	203.534	100.739
216	687.345	173.442	909	361.354	173.346
221	155.795	76.814	914	53.687	26.163
223	88.982	44.217	980	73.406	36.296
224	64.429	31.805	1015	39.901	19.940
225	121.946	60.326	1021	138.012	62.136
227	233.312	109.782	1036	9.792	4.344
230	349.702	141.842	1093	134.311	65.664
			1107	165.609	83.314
			1171	84.409	41.675
			1467	51.282	27.305



# B

## NOUVELLES CONTRAINTES SUR LA LOCALISATION DE P9 OBTENUE AVEC L'ÉPHÉMÉRIDE PLANÉTAIRE INPOP19A (ARTICLE)

---



# New constraints on the location of P9 obtained with the INPOP19a planetary ephemeris

A. Fienga<sup>1,2</sup>, A. Di Ruscio<sup>3,1</sup>, L. Bernus<sup>2,1</sup>, P. Deram<sup>1</sup>, D. Durante<sup>3</sup>, J. Laskar<sup>2</sup>, and L. Iess<sup>3</sup>

<sup>1</sup> GéoAzur, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, Université Côte d'Azur, 250 Av. A. Einstein, Valbonne, 06560, France

<sup>2</sup> IMCCE, Observatoire de Paris, PSL University, CNRS, Sorbonne Université, 77 avenue Denfert-Rochereau, Paris, 75014, France

<sup>3</sup> Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Sapienza Università di Roma, via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italy

Received: 10/03/2020 / Accepted: 27/05/2020

## ABSTRACT

**Context.** We used the new released INPOP19a planetary ephemerides benefiting from Jupiter-updated positions by the Juno mission and reanalyzed Cassini observations.

**Aims.** We test possible locations of the unknown planet P9. To do this, we used the perturbations it produces on the orbits of the outer planets, more specifically, on the orbit of Saturn.

**Methods.** Two statistical criteria were used to identify possible acceptable locations of P9 according to i) the difference in planetary positions when P9 is included compared with the propagated covariance matrix, and ii) the  $\chi^2$  likelihood of postfit residuals for ephemerides when P9 is included.

**Results.** No significant improvement of the residuals was found for any of the simulated locations, but we provide zones that induce a significant degradation of the ephemerides.

**Conclusions.** Based on the INPOP19a planetary ephemerides, we demonstrate that if P9 exists, it cannot be closer than 500 AU with a  $5 M_{\oplus}$  and no closer than 650 AU with a  $10 M_{\oplus}$ . We also show that there is no clear zone that would indicate the positive existence of planet P9, but there are zones for which the existence of P9 is compatible with the  $3\sigma$  accuracy of the INPOP planetary ephemerides.

**Key words.** Celestial mechanics - Ephemerides - Kuiper belt: general - Planets and satellites: general - Planets and satellites: detection

## 1. Introduction

In 2016, Batygin & Brown (2016) proposed the existence of an unseen massive planet, called P9, to explain the spatial distribution of about 20 Kuiper Belt objects (KBO) that are located away from the influence of Neptune. In a more recent analysis, Batygin et al. (2019) restricted the list of objects showing significant perihelion asymmetry to 11 of the 14 known trans-Neptunian objects (TNOs) with  $q > 30$  AU,  $a > 250$  AU and  $i < 40^\circ$ . Kaib et al. (2019) argued that considering the stability of their orbits, this number can be limited to 9 objects.

Several discussion points arose from Batygin & Brown (2016). Firstly, the real significance of the orbital clustering for such a limited number of objects is still discussed (Shankman et al. 2017a; Lawler et al. 2017; Brown 2017). Secondly, when the KBO orbit clustering is admitted to exist, a possible planet 9 is not the only viable explanation (Kaib et al. 2019; Madigan & McCourt 2016; Gomes et al. 2006). Finally, other evidence of the existence of P9 has been proposed with more or less positive outcomes (Kaib et al. 2019; Shankman et al. 2017b; Bailey et al. 2016; Batygin & Brown 2016; Gomes et al. 2017; Millholland & Laughlin 2017; Nesvorný et al. 2017). Several tests of the existence of P9 and its possible location have been proposed. Fienga et al. (2016) have proposed to use planetary ephemerides. The authors showed that a planet of the size of 10 Earth masses ( $M_{\oplus}$ ) at 600 AU and on the orbit required by Batygin & Brown (2016) would affect the planetary orbits. The accuracy with which the position of Saturn can be deduced from the Cassini tracking data enabled an exclusion zone for P9 to be proposed. From this preliminary work, Holman & Payne (2016) further developed this

approach and produced maps of favorable locations for P9. In 2018, Pitjeva & Pitjev (2018) proposed to consider the dynamical effect of the other known KBO objects as potential perturbers of the planetary orbits, which might mask the perturbations of planet 9. More recently, Batygin et al. (2019) reviewed the topic and discussed different evidence that P9 might exist. The authors updated their modeling with new characteristics for the orbit of P9. These latest constraints on the orbit are larger than those that were provided by Batygin & Brown (2016): the mass can range from 5 to  $10 M_{\oplus}$ , the inclination from between  $15^\circ$  to  $25^\circ$ , the semimajor axis from 400 to 800 AU, and the eccentricity from between 0.2 to 0.5. This corresponds to a distance between P9 and the Solar System barycenter (SSB) from 200 to 640 AU. In 2019, a new version of the INPOP planetary ephemerides has been released (Fienga et al. (2020), Fienga et al. (2019)). This version benefits from the use of nine very accurate Jupiter-normal points deduced from the Juno mission and from a new analysis of the Cassini data (Fienga et al. 2019). INPOP19a also shows great improvement compared to the previous INPOP versions because it includes dynamical modeling of the perturbations that are induced by a ring of TNOs, as proposed by Pitjeva & Pitjev (2018). In this context, INPOP19a appears to be a good tool for testing the hypothesis that P9 exists. We here first recall some important elements related to INPOP19a (Sect. 2). We then implement the P9 perturbations in the planetary orbits (sec 3.1) and define acceptable zones for the existence of P9 using two criteria: we match the propagated covariance to INPOP19a (Sect. 4.1), and we determine the likelihood of the solution relative to INPOP19a (Sect. 3.3). In Sect. 4 we give the results that we obtained with 3150 simulations considering P9 distances from 400

**Table 1.** INPOP19a data samples we used to adjust P9. Column 1 gives the observed planet and information on the type of observations, and Column 2 indicates the number of observations. Columns 3 and 4 give the time interval and the a priori uncertainties provided by space agencies or the navigation teams, respectively. Finally, the WRMS for INPOP19a are given in the last column.

Planet / Type	Number	Period	Averaged Accuracy	WRMS
				INPOP19a
<b>Mercury</b>				
Direct range [m]	462	1971.29 : 1997.60	900	0.95
Messenger range [m]	1096	2011.23 : 2014.26	5	0.82
Mariner range [m]	2	1974.24 : 1976.21	100	0.37
<b>Venus</b>				
VLBI [mas]	68	1990.70 : 2013.14	2.0	1.13
Direct range [m]	489	1965.96 : 1990.07	1400	0.98
Vex range [m]	24783	2006.32 : 2011.45	7.0	0.93
<b>Mars</b>				
VLBI [mas]	194	1989.13 : 2013.86	0.3	1.26
Mex range [m]	30669	2005.17 : 2017.37	2.0	0.98
		2005.17 : 2016.37	2.0	0.97
MGS range [m]	2459	1999.31 : 2006.70	2.0	0.93
MRO/MO range [m]	20985	2002.14 : 2014.00	1.2	1.07
<b>Jupiter</b>				
VLBI [mas]	24	1996.54 : 1997.94	11	1.01
Optical RA/Dec [arcsec]	6416	1924.34 : 2008.49	0.3	1.0/1.0
Flyby RA/Dec [mas]	5	1974.92 : 2001.00	4.0/12.0	0.94/1.0
Flyby range [m]	5	1974.92 : 2001.00	2000	0.98
Juno range [m]	9	2016.65 : 2018.68	20	0.945
<b>Saturn</b>				
Optical RA/Dec [arcsec]	7826	1924.22 : 2008.34	0.3	0.96/0.87
Cassini				
VLBI RA/Dec [mas]	10	2004.69 : 2009.31	0.6/0.3	0.97/0.99
JPL range [m]	165	2004.41 : 2014.38	25.0	0.99
Grand Finale range [m]	9	2017.35 : 2017.55	3.0	1.14
Nav. + TGF range [m]	614	2006.01 : 2016.61	6.0	1.01
<b>Uranus</b>				
Optical RA/Dec [arcsec]	12893	1924.62 : 2011.74	0.2/0.3	1.09 / 0.82
Flyby RA/Dec [mas]	1	1986.07 : 1986.07	50/50	0.12 / 0.42
Flyby range [m]	1	1986.07 : 1986.07	50	0.92
<b>Neptune</b>				
Optical RA/Dec [arcsec]	5254	1924.04 : 2007.88	0.25/0.3	1.008 / 0.97
Flyby RA/Dec [mas]	1	1989.65 : 1989.65	15.0	0.11 / 0.15
Flyby range [m]	1	1989.65 : 1989.65	2	1.14

AU to 800 AU, two masses ( $5$  and  $10 M_{\oplus}$ ), and using the two criteria described in Sect. 4.1 and 3.3. We compare and discuss the results in Sect. 5, and we conclude in Sect. 6.

## 2. INPOP19a planetary ephemerides

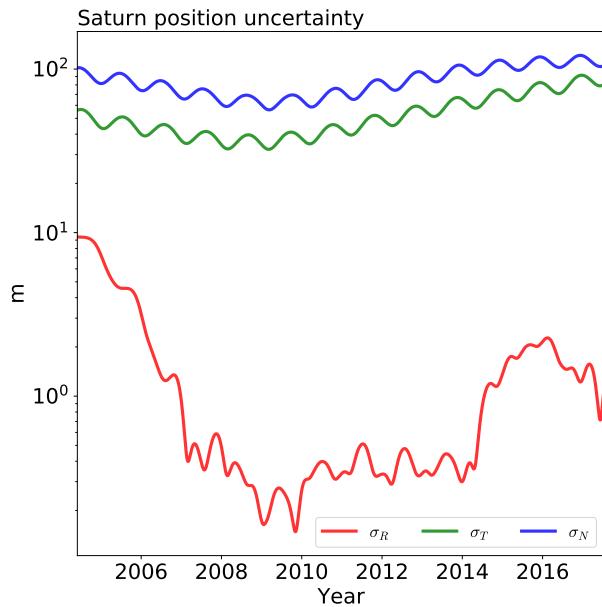
### 2.1. Data sample

The full data sets we used to adjust INPOP19a are presented in Table 1. A detailed description of INPOP19a can be found in Fienga et al. (2019) and in Fienga et al. (2020). Two main inputs were significant for INPOP19a: the reanalysis of some periods of the Cassini navigation data for the orbit of Saturn, including points from the Grand Finale and Titan flyby gravity solutions, and the addition of Juno measurements for Jupiter.

#### 2.1.1. Independent analysis of Cassini data

The NASA Cassini mission gathered an important amount of scientific data during the 13-year duration of the mission around Saturn. In particular, radio science and navigation measurements

represented a unique tool for constraining the position of the Saturn barycenter relative to the Earth. Cassini normal points have been produced from a reanalysis of navigation data for the periods 2006, 2008–2009, and 2011 (Di Ruscio et al. 2020). The new data analysis relies on the updated knowledge of the Saturnian system as acquired throughout the mission: the better accuracies achieved for the Saturn moon ephemerides, and the last gravity solutions of Saturn and its main satellites produced by the radio science team (Durante et al. 2020; Iess et al. 2019; Durante et al. 2019; Iess et al. 2014). For each arc, we solved for the spacecraft initial position and velocity, corrections for orbital trim and reaction wheel desaturation maneuvers, and RTG-induced anisotropic acceleration. In addition, stochastic accelerations at the level of  $5 \times 10^{-13} \text{ km/s}^2$  (updated every 8 hours) were included to compensate for any remaining dynamical mismodeling; this is the same approach that the Cassini navigation team followed during the mission. We estimated a correction for range measurements in the form of stochastic biases individually for each tracking pass, with a large a priori uncertainty to account for both station calibration and ephemerides error. The reconstructed Cassini trajectories were thus used to produce nor-



**Fig. 1.** Evolution of the  $3\sigma$  uncertainty for Saturn positions within the Cassini measurement interval. In particular, the three components of the EMB-centered RTN-frame uncertainties are shown in meters.

mal points, including the estimated range biases in computing the light time for the ground-station to Cassini roundtrip. The uncertainty on the normal points is given by the estimated covariance matrix of the range biases.

We also added additional normal points deduced from the radio science solutions for the gravity-dedicated flybys of Titan (Durante et al. 2019) and Grand Finale Saturn pericenters (Iess et al. 2019). These range normal points were obtained by considering a pass-through of range data on the spacecraft orbit reconstructions that were produced for the gravity field solutions using only Doppler data. With these supplementary normal points, the period covered by Cassini was extended up to the end of the mission in 2017, when the spacecraft plunged into the atmosphere of Saturn. In Table 1, the newly analyzed navigation data and the normal points deduced from Titan gravity flybys (TGF) are labeled *Nav. + TGF range*, and the data set deduced from the Grand Finale is labeled *Grand Finale range* (see Table 1).

### 2.1.2. Nine perijoves of Juno

The Juno spacecraft has been orbiting Jupiter on a highly eccentric polar orbit since July 2016. A radio-science experiment aims at characterizing the gravity field of the gas giant to unprecedented accuracy (Durante et al. 2020; Folkner et al. 2017; Iess et al. 2018). The extremely accurate radio-tracking system of Juno enables simultaneous two-way Doppler measurements at X and Ka band with accuracies as low as 10 micron/s in the radial velocity during the gravity-dedicated passes, which are used to reconstruct the spacecraft trajectory with a meter-level radial accuracy with respect to the center of mass of Jupiter at perijove (periapsis in orbit around Jupiter). Range data points at X band are collected as well, and the Jovian barycenter positions relative to the Earth can be generated once per perijove pass, provided that we know the position of Juno with respect to the Jovian barycenter. In our fit, we include a total of nine

new Jupiter-normal points spanning the period from the orbital insertion, back in 2016, to the end of 2018.

## 2.2. Trans-Neptunian objects

As described in Di Ruscio et al. (2020) and Fienga et al. (2019), the extension of the Saturn data sets with the positions deduced from the Grand Finale and from the analysis reported by Di Ruscio et al. (2020) required introducing the perturbations induced by the TNOs on the planetary orbits into the INPOP dynamical modeling. These perturbations were introduced first by taking into account individual accelerations produced by the nine most massive binary TNOs, and second, by modeling the remaining TNO perturbations by a set of three rings centered on the SSB, which is located in the ecliptic plane and at distances of 39.4, 44, and 47.5 AU. The sum of the masses of these three rings is estimated by the fit during the construction of INPOP19a. The rings allowed Di Ruscio et al. (2020) to show that the residuals obtained for the Grand Finale are improved by a factor 30 between INPOP17a and INPOP19a and that the mass for the TNO ring is equal to  $(0.061 \pm 0.001)M_{\oplus}$ . This value is higher than the value obtained by Pitjeva & Pitjev (2018). This can be explained by the differences in the dynamical modeling (in addition to the ring, nine masses have been fixed in Di Ruscio et al. (2020), while 31 were included in the fit in Pitjeva & Pitjev (2018)) and by the differences in the data that were used. (Pitjeva & Pitjev (2018) included neither the Cassini navigation and Grand Finale data nor the Juno observations). When the same data sets and the sum of fixed masses are considered, the two results are consistent at  $3\sigma$ . For more details, we refer to Di Ruscio et al. (2020); Fienga et al. (2019).

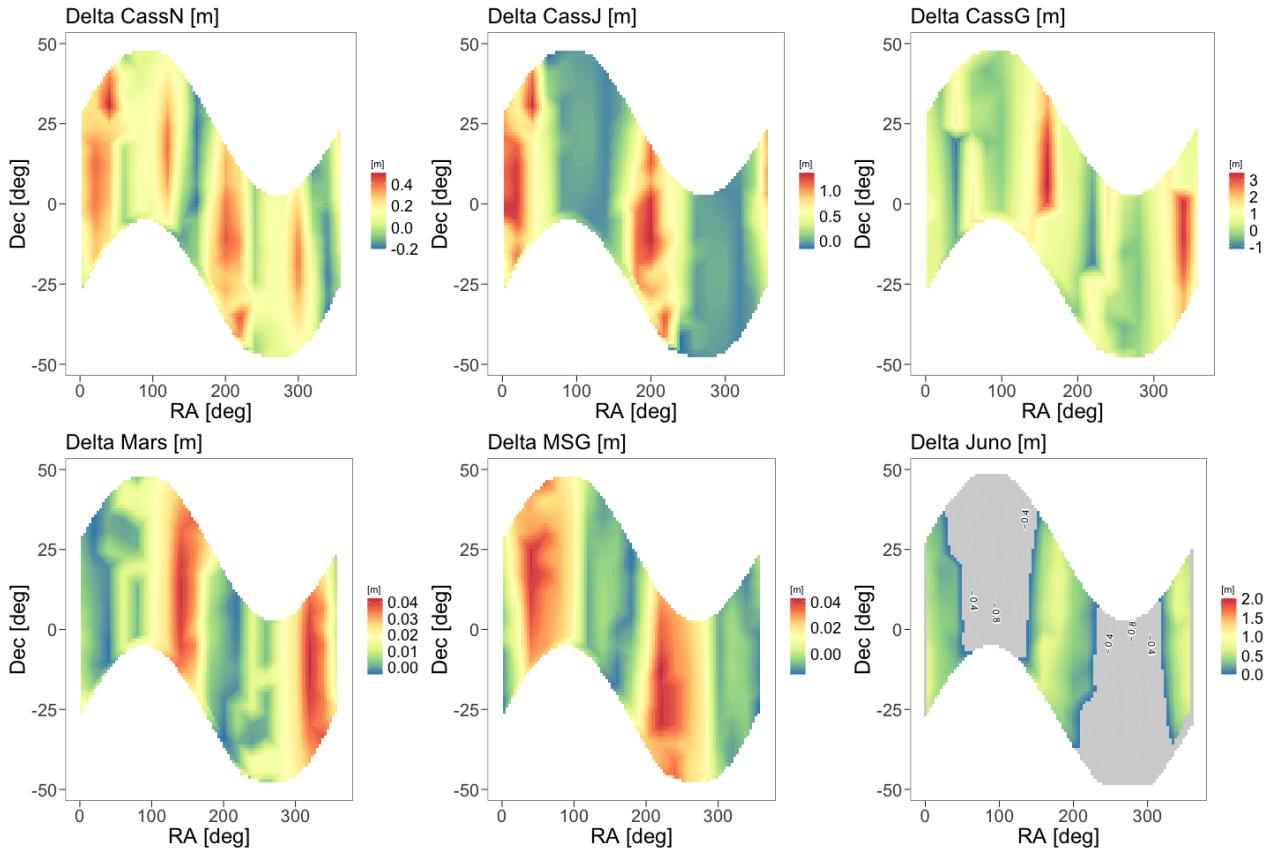
## 3. P9 detection method

### 3.1. Modeling

In order to characterize the regions in which P9 might be located, we built different planetary ephemerides that considered different positions of P9 following the method initially developed by Fienga et al. (2016). However, because the expected semimajor axis of P9 lies between 400 and 800 AU, its orbital circular period (from 8000 years to more than 22500 years) almost fixes the location of P9 relative to the SSB over the time span of the planetary observations (100 years for the entire data set, and 13 years for the Cassini data sample). We therefore considered here that the dynamical effect of P9 on the planetary orbits can be modeled as a tidal effect depending on its fixed position, that is, right ascension (RA) and declination (Dec), its distance to the SSB ( $r$ ), and its mass ( $M_{P9}$ ). The acceleration induced by P9 on planet A is  $\ddot{\mathbf{x}}_A^{P9}$  such that

$$\ddot{\mathbf{x}}_{iA}^{P9} = \frac{GM_{P9}}{r^3} [3(\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{x}_A], \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the unit vector of coordinates defined by P9 (RA, Dec),  $\mathbf{x}_A$  is the barycentric position vector of planet A, and the dot indicates the scalar product. We then constructed planetary ephemerides by numerically integrating and fitting the orbits to the INPOP19a data sample presented in Table 1, for which we used the same weighting scheme as for INPOP19a (see, e.g., Fienga et al. (2019) for more details). For each  $r$ ,  $M_{P9}$ , RA, and Dec, we obtained a fitted solution. In order to explore more possibilities than those proposed by Batygin et al. (2019), we considered distances to the SSB from 400 AU to 800 AU



**Fig. 2.** Differences between INPOP19a postfit residuals and postfit residuals of (RA, Dec) solutions obtained with  $r=800$  AU and  $M_{P9} = 10M_{\oplus}$ . The x-axis represents the RA of P9 when the y-axis is the Dec of P9. The z-axis gives the differences in meters for different observational data sets between INPOP19a residuals and the ephemerides including the P9 perturbations. Several observational subsamples are considered: CassN corresponds to the data sample presented in section 2.1.1 that is labeled *Nav+TGF range* in Table 1, CassJ is the data sample analyzed and distributed by the JPL (see Hees et al. (2014)), and finally, CassG corresponds to the Saturn positions deduced from the Grand Finale as described in section 2.1.1. Juno, Mars, and MSG indicate the variations in postfit residuals for the Jupiter observations by Juno, described in section 2.1.2; Mars means the observations of Mars, and MSG those of Mercury provided by Verma & Margot (2016). The Juno residuals are improved relative to INPOP19a in the gray zones.

with two cases:  $M_{P9}=5$  Earth masses ( $M_{\oplus}$ ), and  $M_{P9}=10 M_{\oplus}$  for the farther positions. We made a first RA, Dec grid with a  $10^{\circ}$  sampling in the ecliptic plane and then added supplementary runs on some specific zones out of the ecliptic plane (see sec 5).

After the solutions were iteratively fitted, statistical criteria were used to determine which solution was acceptable with respect to INPOP19a and which should be rejected. On this selection depends the definition of an acceptable zone for P9. We used two complementary criteria: one considering the covariance of each solution propagated over the time coverage of the data sample, and one based on the computation of the  $\chi^2$  likelihood.

### 3.2. Propagation of the covariance

INPOP was computed by numerically solving the equations of motion. Let  $X(t)$  be the state vector in barycentric coordinates that contains positions and velocities of each body whose trajectory is computed. The numerical integrator solves a Cauchy-Lipschitz equation-of-motion system,

$$\frac{dX}{dt} = F(X; P), \quad X(t = J2000) = X_0, \quad (2)$$

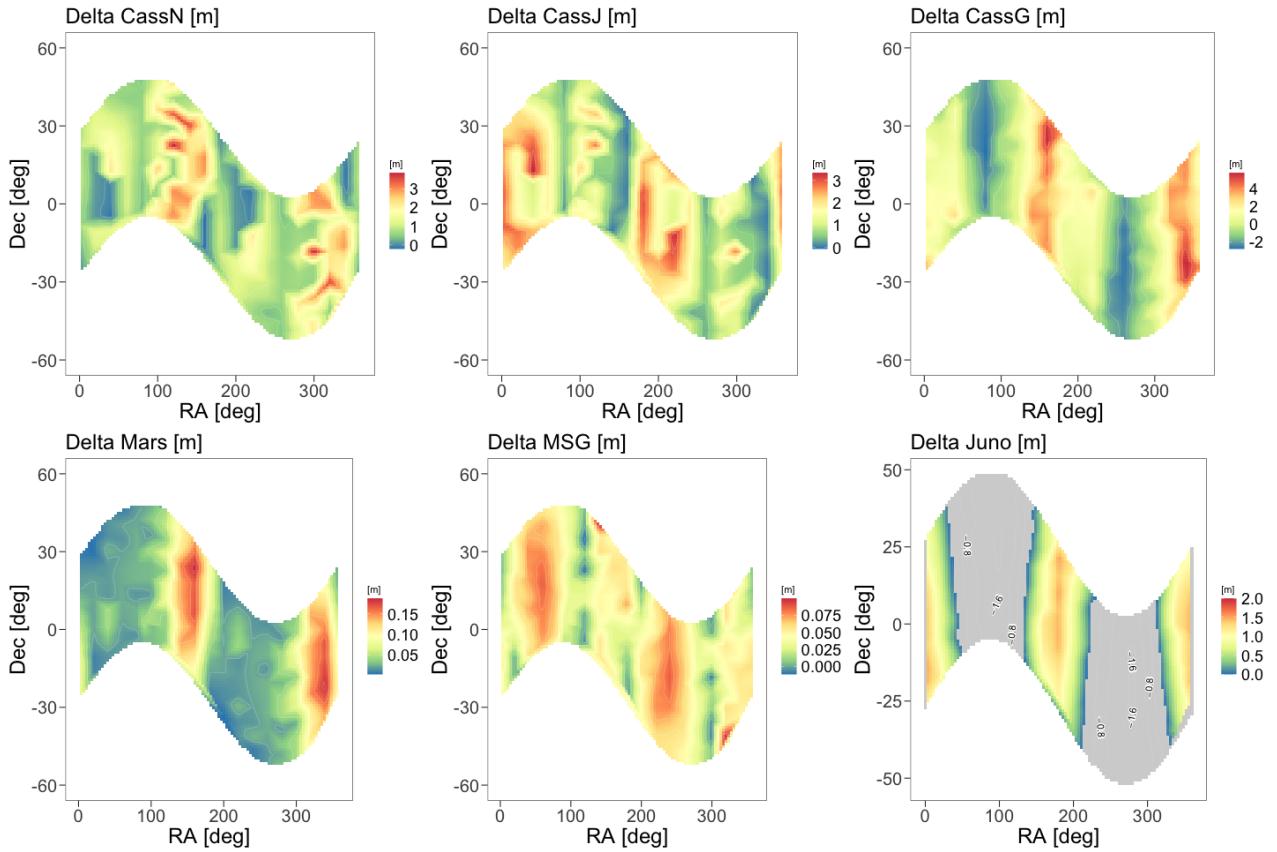
where  $X \in \mathbb{R}^{6n}$ , with  $n$  being the number of integrated bodies, and  $P \in \mathbb{R}^p$  with  $n \leq p$  contains all constant parameters of the

ephemeris (initial conditions for the planetary orbits; masses of the Sun and of the asteroids, including trans-Neptunian objects; oblateness of the Sun; and the Earth-Moon mass ratio). We note that  $X$  and  $P$  are not independent variables because  $P$  includes the initial condition  $X_0$ . Modifications of the parameter  $P$  modify the trajectories  $X(t)$ . From this ephemeris, we computed observational simulations in order to compare them to real data.  $C(t_i, P)$  is the observable quantity at date  $t_i$  computed with parameters  $P$  (we considered that the dependence on  $X(t_i)$  is included in the dependence on the initial conditions included in  $P$ , which are integrated by INPOP). The goal of the ephemeris is to minimize the norm of the residual vector

$$R(t_i, P) = (O(t_i, P) - C(t_i)), \quad (3)$$

where  $O(t_i)$  is the real observation at date  $t_i$  (for any matrix  $A$ , transposition of matrix  $A$  is noted  $'A$ ). Usually, and this is what we did here, a linear approximation and Gaussian distribution of the observational noise are assumed. It is then well known that the parameters  $P$  minimize  $\chi^2 = 'RWR$ , where  $W$  is the weighting matrix representing the accuracy of the observational data, and they are given by the algorithm that increments  $P$  by iterations by adding

$$\delta P = ('JWJ)^{-1} 'JW R$$



**Fig. 3.** Same as Fig. 2, but for  $r=600$  AU and  $M_{P9} = 5M_{\oplus}$ .

until convergence is reached. Here,  $R$  is the residual vector as defined in Eq. 3.  $J$  is the Jacobian matrix of  $R(t_i, P)$  or  $C(t_i, P)$ .

The covariance of  $P$ , which represents its uncertainty if the linear approximation and the Gaussian distribution of error are realized, is then

$$\text{cov } P = ({}^t J W J)^{-1}. \quad (4)$$

From here, it is possible to linearly propagate the covariance of any variable computed with respect to the ephemeris and its parameters. Let  $H(t, P) \in \mathbb{R}^h$  such a variable. For a linear random Gaussian variation of  $P$  characterized by a covariance matrix  $\text{cov } P$ , we then obtain the covariance of  $H$  at date  $t$ ,

$$\text{cov } H(t, P) = J_H(t) \text{cov } P {}^t J_H(t), \quad (5)$$

where  $J_H(t)$  is the Jacobian matrix of  $H$  with respect to  $P$  at date  $t$ . To compute this matrix, we followed the same procedure as for  $C(t_i, P)$ , which is formally equivalent.

In what follows, we compute the linear covariance propagation in *RTN* geocentric coordinates<sup>1</sup>, which are defined according to the following orthonormal basis for any planet  $A$ :

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}|}, \quad (6)$$

$$\mathbf{w}_A = \frac{\mathbf{u}_A \times \dot{\mathbf{x}}_A}{|\mathbf{u}_A \times \dot{\mathbf{x}}_A|}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{w}_A \times \mathbf{u}_A, \quad (8)$$

where  $\mathbf{x}_A$  represents the barycentric coordinates of body  $A$  in the International Celestial Reference Frame ICRF,  $\mathbf{x}_{EMB}$  are those of the Earth-Moon barycenter, and the cross represents the vectorial product. We computed the quantities  $R_A$ ,  $T_A$ , and  $N_A$  as

$$\begin{aligned} R_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{u}_A \\ T_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{v}_A. \\ N_A &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}) \cdot \mathbf{w}_A \end{aligned} \quad (9)$$

We define a rotation matrix  $M$  from ICRF to *RTN* and used it to rotate the covariance matrix. It is interesting to analyze the evolution of the *RTN* components of a specific body because this provides a more intuitive interpretation of the uncertainties along the observed direction.

In order to account for the uncertainty in the position of the Earth-Moon barycenter that is now the origin of the new coordinate frame, we used Eq. 5. In this case, the Jacobian  $J$  can be written as

$$J = \frac{\partial f(P)}{\partial P} = \frac{\partial (P^* - X_{EMB})}{\partial P}, \quad (10)$$

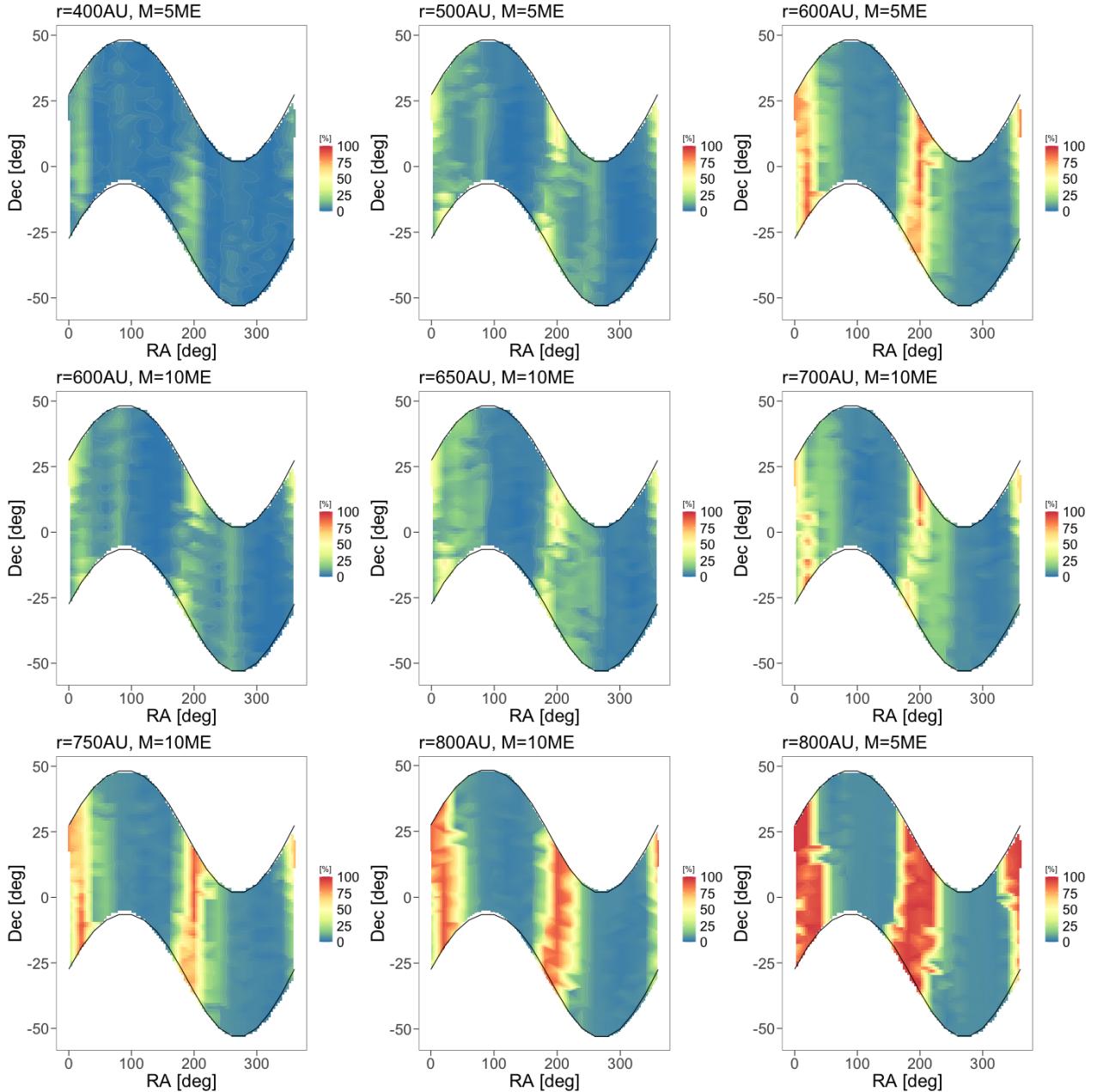
$$\text{with } X_{EMB} = [\underbrace{\mathbf{x}_{EMB}, \dots, \mathbf{x}_{EMB}}_{n-1}, 0, \dots] \in \mathbb{R}^{p-1} \quad (11)$$

and  $P^* \in \mathbb{R}^{p-1}$ . Considering only body  $A$ , the *EMB*-centered covariances therefore become with  $\mathbf{x}_A^E = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{EMB}$

$$\text{cov}(\mathbf{x}_A^E) = \text{cov}(\mathbf{x}_A) + \text{cov}(\mathbf{x}_{EMB}) - 2\text{cov}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{EMB}). \quad (12)$$

The terms  $\text{cov}(\mathbf{x})$  represent the variance of  $\mathbf{x}$ , or its covariance matrix, and  $\text{cov}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{EMB})$  is the cross-covariance matrix between  $\mathbf{x}_A$  and  $\mathbf{x}_{EMB}$ .

<sup>1</sup> Strictly speaking, we should call this "RTN Earth-Moon-barycenter coordinates", but no confusion is possible with the following definitions.



**Fig. 4.** Percentage of matches based on the propagated covariance for Saturn, considering  $r=400, 500, 600, 650, 700, 750$ , and  $800$  AU and  $M_{P9}=5$  and  $10 M_{\oplus}$ . The x-axis represents the RA of P9 when the y-axis is its Dec. The z-axis gives the matches (see Sect. 4.1 for a definition) in percent between the INPOP19a propagated covariance of the Saturn orbit over the time coverage of the data and the Saturn-orbit-propagated covariance of the ephemerides including perturbations by P9.

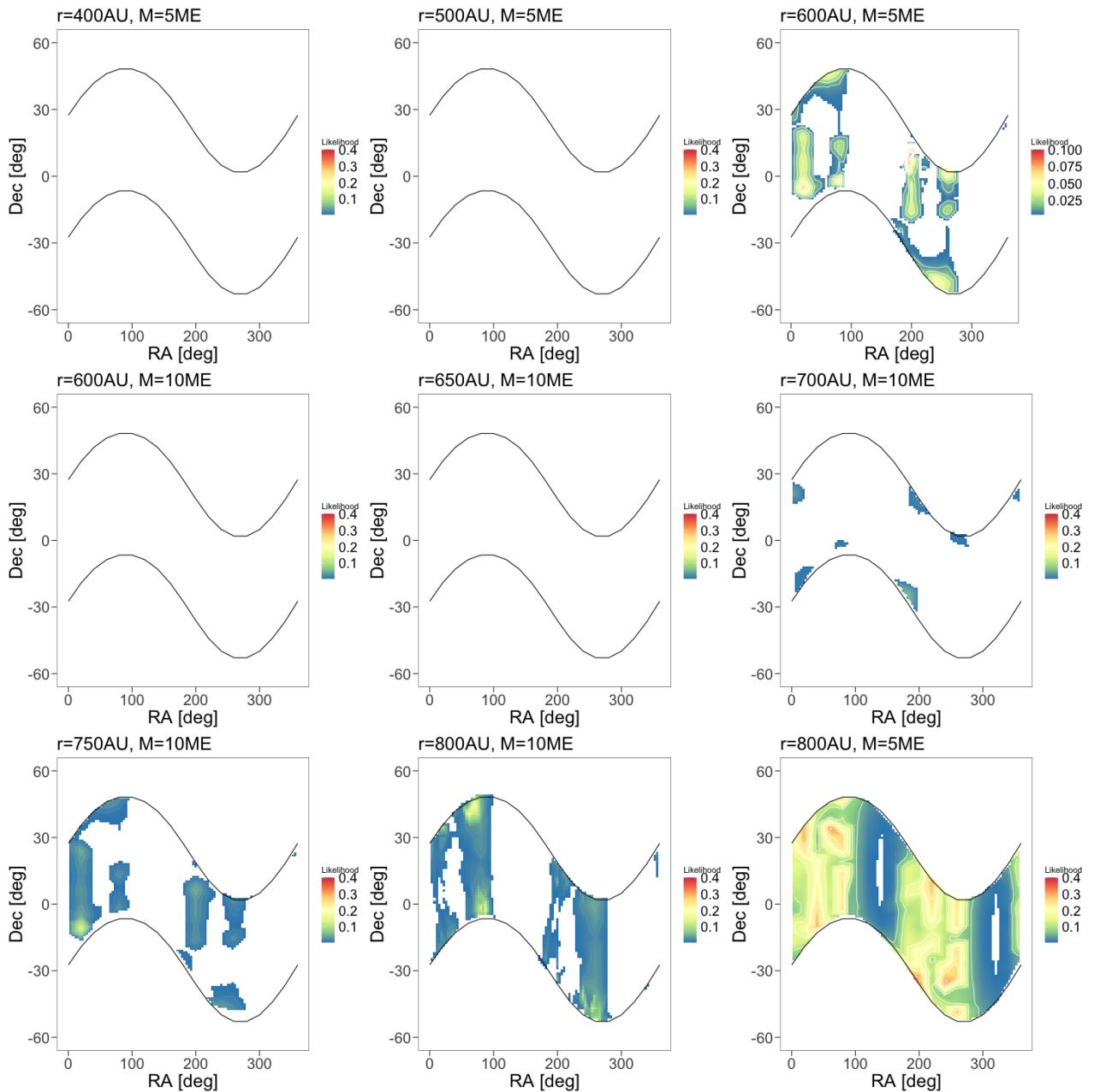
In Fig. 1 the evolution of the covariance of the position of Saturn as obtained from the INPOP19a solution is shown, transformed into *EMB*-centered *RTN*-frame using Eqs. 9 and 12. The radial direction, constrained by Cassini range measurements (see Table 1), is estimated much more accurately than the transverse and normal directions.

Considering either the *RTN*-frame or the *ICRF*-frame, we compared the difference between the components and the evolution of the covariance for two sets of parameters  $P_1$  and  $P_2$  in order to compute a distance between two ephemerides. We compared this for two different models to determine whether the difference between the two ephemerides represented by the two sets of parameters  $P_1$  and  $P_2$  is within the uncertainty ellipsoid that was estimated with the propagation of the covariances.

After we obtained the propagated covariance at time  $t$ , we compared the  $i$ -th P9-perturbed solution with respect to the reference solution, INPOP19a. The match between the two propagated covariances of the two solutions at that specific time was therefore assessed using a generalized distance normalized using the covariance metric<sup>2</sup>

$$d(t) = \sqrt{(\mathbf{x}_{A_{ref}}^E(t) - \mathbf{x}_{A_i}^E(t)) \cdot (\text{cov} \mathbf{x}_A^E)^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{A_{ref}}^E(t) - \mathbf{x}_{A_i}^E(t))}. \quad (13)$$

<sup>2</sup> The Mahalanobis distance is independent of the reference frame that is adopted, therefore we chose to use the *ICRF* frame in which the INPOP solution was computed.



**Fig. 5.** Likelihood considering  $r=400, 500, 600, 650, 700, 750$ , and  $800$  AU and  $M_{P9} = 5, 10M_{\oplus}$ . The x-axis represents the RA of P9 when the y-axis is its Dec. The z-axis gives the likelihood (see Sect. 3.3 for a definition) of the ephemerides that include perturbations by P9 with respect to INPOP19a. The white portions of the maps correspond to solutions rejected at  $3\sigma$  ( $L < 0.003$ ).

The general match between the two solutions throughout the analyzed period was computed as the percentage of times for which the distance  $d(t)$  is within the equivalent  $3\sigma$  interval of  $covP(t)$ . A compatibility of 100% means that the distance  $d(t)$  remains within the  $3\sigma$  interval during the entire considered time interval, whereas a 50% match indicates that during half of the time interval, the distance  $d(t)$  is outside of the  $3\sigma$  covariance interval.

### 3.3. Likelihood

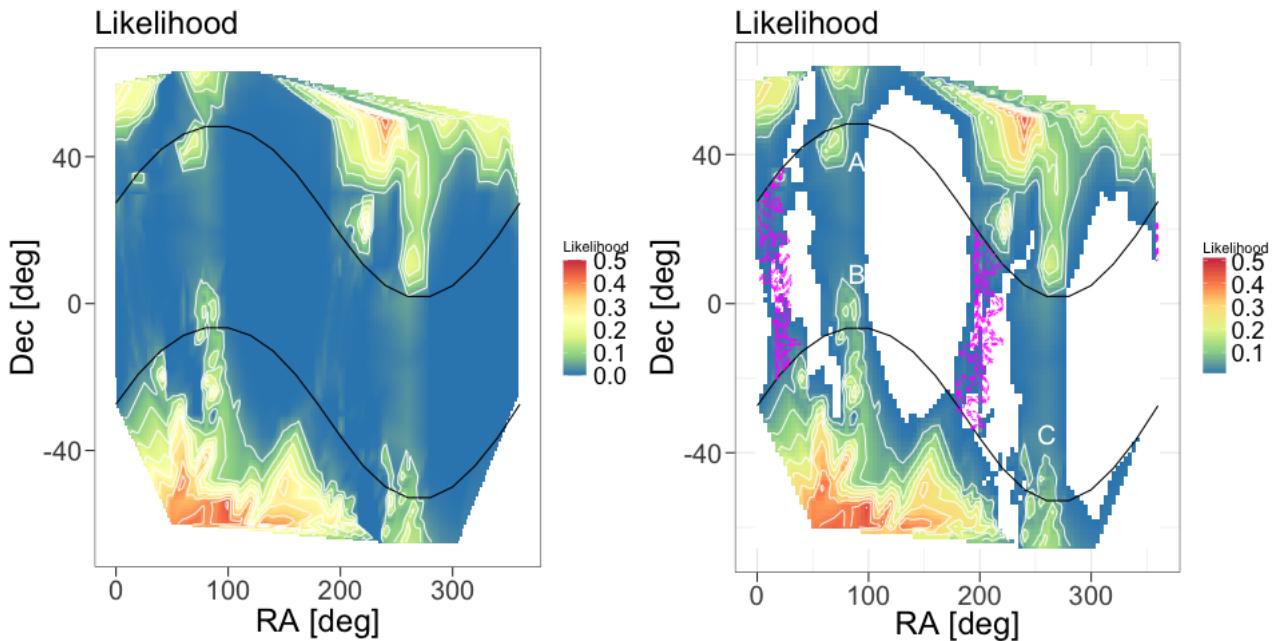
#### 3.3.1. Method

We considered the INPOP19a  $\chi^2$  noted  $\chi_r^2$ , and the  $\chi^2$  of the fitted ephemeris, noted  $\chi^2(P9)$  obtained by including the perturbations

of P9 with a mass  $M_{P9}$  located at a given position (RA, Dec, r). The  $\chi^2$  is defined as  $n\chi^2 = 'RWR'$ , where  $n$  is the total number of observations, and  $R$  and  $W$  are as defined in Sect. 4.1. It is well known that if the postfit residuals are in a linear vicinity of 0 and follow a Gaussian distribution,  $n\chi^2$  follows a  $n$  degrees of freedom  $\chi^2$  law, and when  $n \rightarrow \infty$

$$z_{P9} = \sqrt{\frac{n}{2}} (\chi^2(P9) - \chi_r^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \quad (14)$$

In other words,  $z_{P9}$ , as defined previously, tends to follow a normal distribution centered around 0 and of standard dispersion equal to 1. For the sake of efficiency, it is proposed to focus on observations that are the most sensitive to P9 accelerations. In this case, one can compute the reduced  $\chi^2$ , noted  $\tilde{\chi}^2$ , which can



**Fig. 6.** Likelihood obtained for  $r=800$  AU and  $M_{P9}=10 M_\oplus$ : On the left-hand side we show the full map of the likelihood extrapolation. On the right-hand side we show the same map, but for a more restricted color map: the white portion of the map corresponds to solutions that have a probability greater than 0.997 ( $3\sigma$ ) to be rejected (T2 criterion). The labels  $A$ ,  $B$ , and  $C$  indicate the most acceptable zones (with higher likelihoods) in the ecliptic plane. For comparison, the dotted magenta lines indicate the zones for which T1 is greater than 75% (see Fig. 4).

be related to the actual  $\chi^2$ 's by:

$$\chi^2(P9) - \chi^2_r = \frac{\tilde{n}}{n} (\tilde{\chi}^2(P9) - \tilde{\chi}^2_r) \quad (15)$$

where  $\tilde{n}$  is the number of sensitive data (see Sect. 3.3.2) and  $n$  the total number of data used for the fit. It appears that the standard dispersions of the residuals of the reference solution are very close to the instrumental uncertainties, such that with a rescaling of the instrumental uncertainties, one can set  $\tilde{\chi}^2_r = 1$  without loss of generality (see Bernus et al. (2020) for the full demonstration). One can then compute that

$$z_{P9} = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{2}} (\tilde{\chi}^2(P9) - 1) \quad (16)$$

follows a 0-centered normal distribution of dispersion equal to 1. From here we deduce the likelihood of each ephemeris obtained with a given position of P9 and mass value with:

$$L(P9) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{P9}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (17)$$

By definition,  $L(\text{INPOP19a})$  is equal to 0.5 and any solution with  $L(P9) \approx 0.5$  is as likely as INPOP19a. If one solution has  $L(P9) > 0.5$ , this solution is then more likely than INPOP19a, meaning with smaller residuals. Solutions with  $L < 0.5$  are less likely than INPOP19a. For this work, as for the classical gaussian distributed variable, we take the equivalent of the  $3\sigma$  criterion: theories for which  $L(P9) < 0.003$  will be rejected with a probability of 0.997. An advantage on the likelihood criterion is that it tells if a tested solution improves significantly the reference solution which is not the case with the matching criterion.

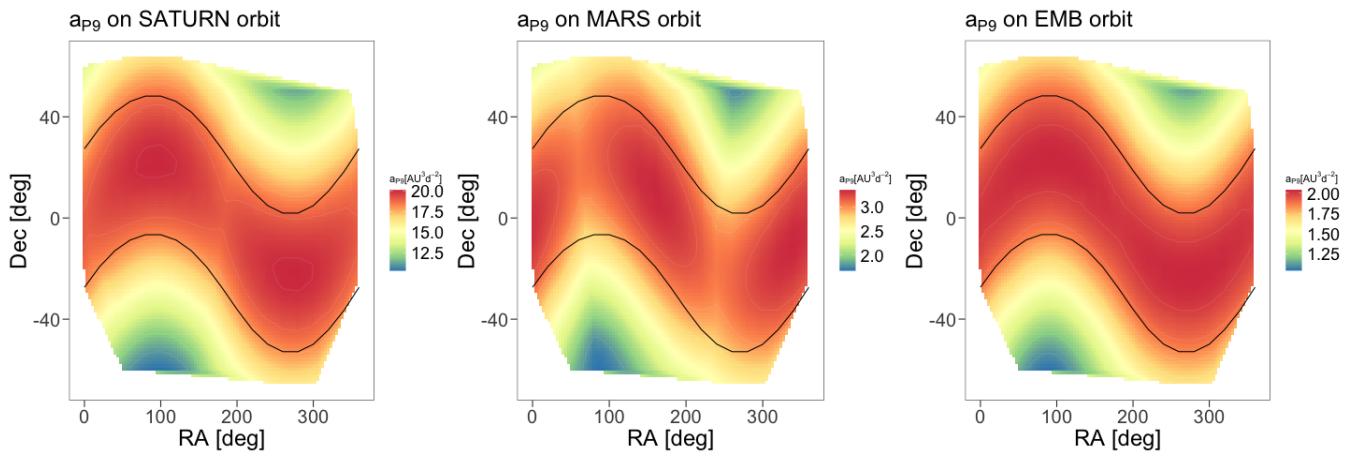
### 3.3.2. Selection of sensible data sets

Fig. 2 and 3 plot the variations of the root mean square (RMS) of the postfit residuals of the most accurate INPOP19a data samples computed for two examples ( $r=800$  AU,  $M_{P9} = 10 M_\oplus$  and  $r=600$  AU,  $M_{P9} = 5 M_\oplus$ , respectively). As one can see, the most important variations are induced on the Cassini data sets. In Fig. 2, the variations can be as big as 5.9 m for CassJ, 2.9 m for CassN and 14 m for CassG, representing variations, with respect to the average accuracy, of about 25%, 50% and several hundreds of %, respectively. For Juno, Mars orbiters and Messenger (MSG), the variations represent less than 10% of the average accuracies. The same conclusions can be drawn from Fig. 3. In this context, for the selection of the sensible datasets for the likelihood computation, we select the three Cassini samples. The Mars orbiter observations are also selected as they represent 47% of the full data sample and have then an important role in the likelihood computation despite their weak sensitivity to P9. We also include the Juno and the Messenger data samples even if they do not contribute much to the  $\chi^2$  computation.

## 4. Results

### 4.1. Propagation of the covariance

In Fig. 4, are plotted the maps of the matching criterion based on the propagated covariance of Saturn (as defined in Sect. 3.2, hereafter called T1), obtained for  $r=400, 500, 600, 650, 700, 750, 800$  AU,  $M_{P9} = 5, 10 M_\oplus$  and different (RA, Dec) positions of P9. We chose the Saturn orbit as a marker because it is the most sensible to P9 perturbations, as shown in Fig. 2 and 3. In Fig. 4, it is visible that the zones maximizing T1,  $Z_1$  and  $Z_2$  given in Table 2, are very similar whatever considered distances or masses. Only the percentage of T1 changes, increasing when the mass of P9 decreases or its distance to the SSB. For the two zones given in Table 2, the existence of P9 cannot be statistically rejected as far as T1 is concerned.



**Fig. 7.** Accelerations induced by P9 ( $a_{P9}$ ) on Saturn (left-hand side), Mars (middle) and Earth-Moon barycenter (EMB, right-hand side) orbits averaged over 20 years. The darkblue dotted levels indicate zones where the likelihood criterion T2 is greater than 0.4

**Table 2.** Zones maximizing criteria T1 and T2. The zones are deduced from Fig. 4 and Fig. 5. They are obtained for  $r=800$  AU and  $10 M_{\oplus}$ . The first column gives the criterion maximized in the zones (label given in Column 2) defined with intervals in RA (column 3) and in Dec (column 4).

Criterion	Zones	RA	Dec
T1	$Z_1$	$[0^\circ : 40^\circ]$	$[-21^\circ : 37^\circ]$
	$Z_2$	$[180^\circ : 220^\circ]$	$[-34^\circ : 20^\circ]$
T2	$Z_1$	$[0^\circ : 40^\circ]$	$[-21^\circ : 37^\circ]$
	$Z_2$	$[180^\circ : 220^\circ]$	$[-34^\circ : 20^\circ]$
	$Z_3$	$[51^\circ : 109^\circ]$	$[-9.5^\circ : 50^\circ]$
	$Z_4$	$[225^\circ : 284^\circ]$	$[-52^\circ : 9^\circ]$

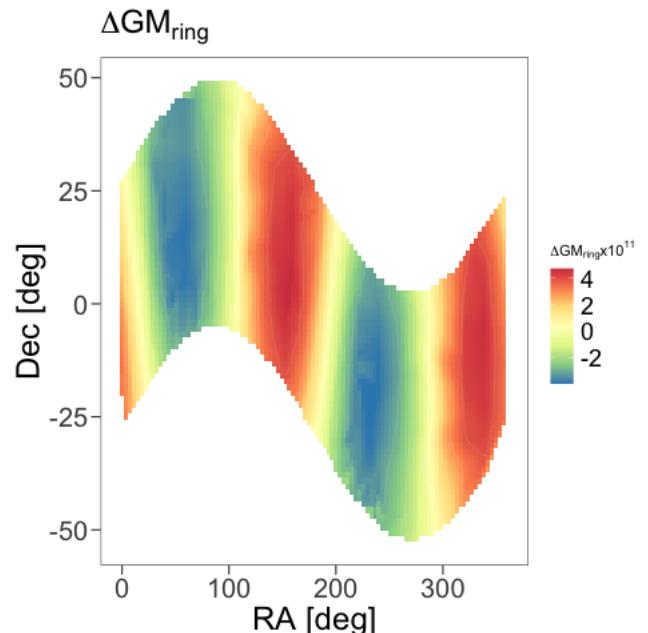
For the  $10 M_{\oplus}$  cases, zones with  $T1 > 75\%$  are visible only for  $r > 650$  AU and enlarge when the distance increases: at 700 AU, the zones with  $T1 > 75\%$  correspond to 0.55% of the cases, when for 800 AU, these zones correspond to 11% of the cases with a maximum T1 of 92% (versus  $T1=89.5\%$  for 700 AU). If one considers the results of the Batygin et al. (2019) simulations with a  $10 M_{\oplus}$  P9, with a maximum possible P9 distance from the SSB of 640 AU, we can see that less than 0.7% of the cases have a T1 greater than 50%.

In the cases where  $M_{P9} = 5M_{\oplus}$  (as for  $10 M_{\oplus}$ ), the zones with  $T1 > 75\%$  increase with the distances: at 600 AU, these zones correspond to 3.7% of the cases when they represent 23.5% of the 800 AU cases with a maximum T1 of about 96.6% (versus 93.4 % for the 600 AU cases). We finally note that for the  $5M_{\oplus}$  cases, zones with  $T1 > 75\%$  are visible for  $r > 500$  AU.

#### 4.2. Likelihood

In Fig. 5 are shown maps of the  $\chi^2$  likelihood (hereafter called criterion T2) obtained for  $r=400, 500, 600, 650, 700, 800$  AU,  $M_{P9} = 5, 10 M_{\oplus}$  and different P9 (RA, Dec) positions.

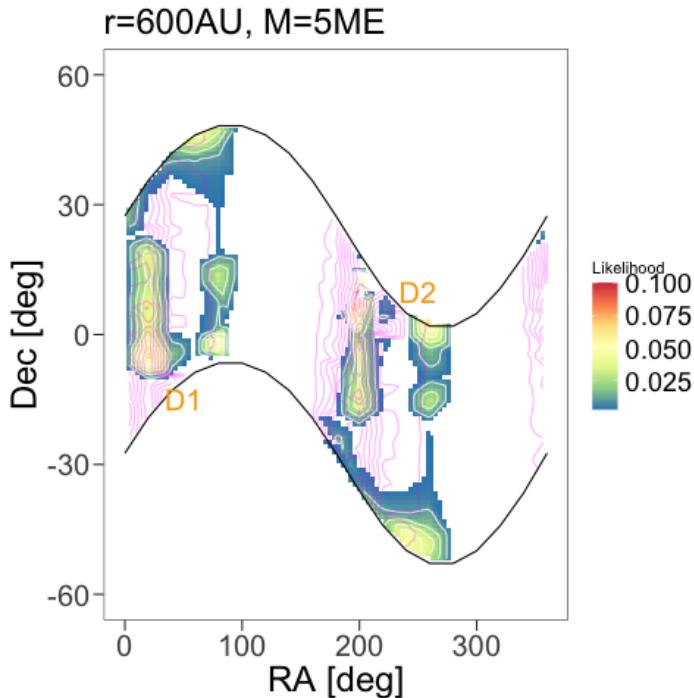
First thing to say is that whatever the considered distances or masses, there is no improvement of the ephemerides by adding P9. The likelihood stays indeed below 0.5 for all tested configurations. The relevant question is then if P9 does not improve the residuals, where does it not degrade them significantly. We can use the definition of *acceptable* solutions as defined in Sect. 3.3: a region where the likelihood of the solution is at  $3\sigma$  from the reference solution, meaning that  $L > 0.003$ .



**Fig. 8.** Differences of the gravitational mass of the TNO ring induced by P9 relative to the INPOP19a value (Di Ruscio et al. 2020; Fienga et al. 2019). The dashed levels indicate zones where T2 is acceptable (probability of being rejected below 0.997): the grey zones are common to zones maximizing T1 and the dark blue zones are those selected with high T2 but with low T1

For a  $10 M_{\oplus}$  P9, in using such a definition, no acceptable regions are possible for distances below 700 AU. Above 700 AU, acceptable regions are possible. They are given in Table 2 with  $r=800$  AU. Among the four identified regions, two correspond to T1-zones ( $Z_1$  and  $Z_2$ , see Sect. 4.1) and two ( $Z_3$  and  $Z_4$ ) are newly proposed by T2. We stress that for these four zones, the likelihoods are still smaller than 0.3 (corresponding to  $1-\sigma$  probability). One can also see that by increasing the P9 distance from the SSB, its dynamical influence is getting weaker and so the surface of the acceptable zones increases.

For the cases where the mass of P9 is equal to  $5M_{\oplus}$  and with  $r=600$  and 800 AU, one can see that the acceptable zones get reduced. At 600 AU and  $5M_{\oplus}$ , some regions are acceptable but with a probability greater than 75% to be rejected ( $L < 0.25$ ). These regions are localized in zones very similar to the one no-



**Fig. 9.** Likelihood obtained for  $r=600$  AU and  $M_{P9}=5 M_{\oplus}$ . The white portion of the map corresponds to solutions that have a probability greater than 0.997 ( $3\sigma$ ) to be rejected. The label  $D$  indicates the most acceptable zones (with higher likelihoods) in the ecliptic plane. For comparison, the dotted magenta lines indicate the zones for which  $T1$  is greater than 75% according to the propagated covariance (see Fig. 4).

ticed at 700 AU with  $10M_{\oplus}$ . At  $r=800$  AU, the  $5M_{\oplus}$  hypothesis gives obviously larger acceptable zones than with  $M_{P9} = 10M_{\oplus}$  as the acceleration induced by P9 is proportional to its mass and so the impact of the P9 mass on the  $\chi^2$ .

Finally, let notice that some features can be noticed at the edge of the ecliptic plane for a P9 mass equal to  $10 M_{\oplus}$ . In order to investigate these regions where the likelihood seems to increase, we densified the simulations to regions out from the ecliptic plane for  $r=800$  AU and  $M_{P9}=10M_{\oplus}$ . The results are presented in Fig. 6. This figure shows that two regions out of the ecliptic indeed present a likelihood criterion greater than 0.4. For these zones, P9 solutions are almost as likely as INPOP19a and therefore cannot be strictly ruled out. Three other zones are labeled A, B, and C in Fig. 6. Their likelihoods are slightly higher (up to 0.2) than in the remainder of the acceptable zones. These zones are only noticeable with T2, as is shown by the magenta plot of the acceptable zones for the T1 criterion in Fig. 6. Again, the residuals do not improve because the likelihood remains below 0.5 in Fig. 6.

## 5. Discussion

### 5.1. Likelihood and covariance versus induced acceleration

In Fig. 7 we plot for each P9 (RA, Dec) position the induced accelerations on Saturn, Mars, and the Earth-Moon barycenter (EMB) orbits. As expected, the P9 acceleration on the Saturn orbit has the largest amplitude compared to those on the other planets, and the maximum of the P9 dynamical effect occurs in the ecliptic plane (represented in black). When we compare Fig. 7 with Fig. 6, the zones with a likelihood close to 0.5 (red and yellow regions in Fig. 6 and levels in Fig. 7), where solutions

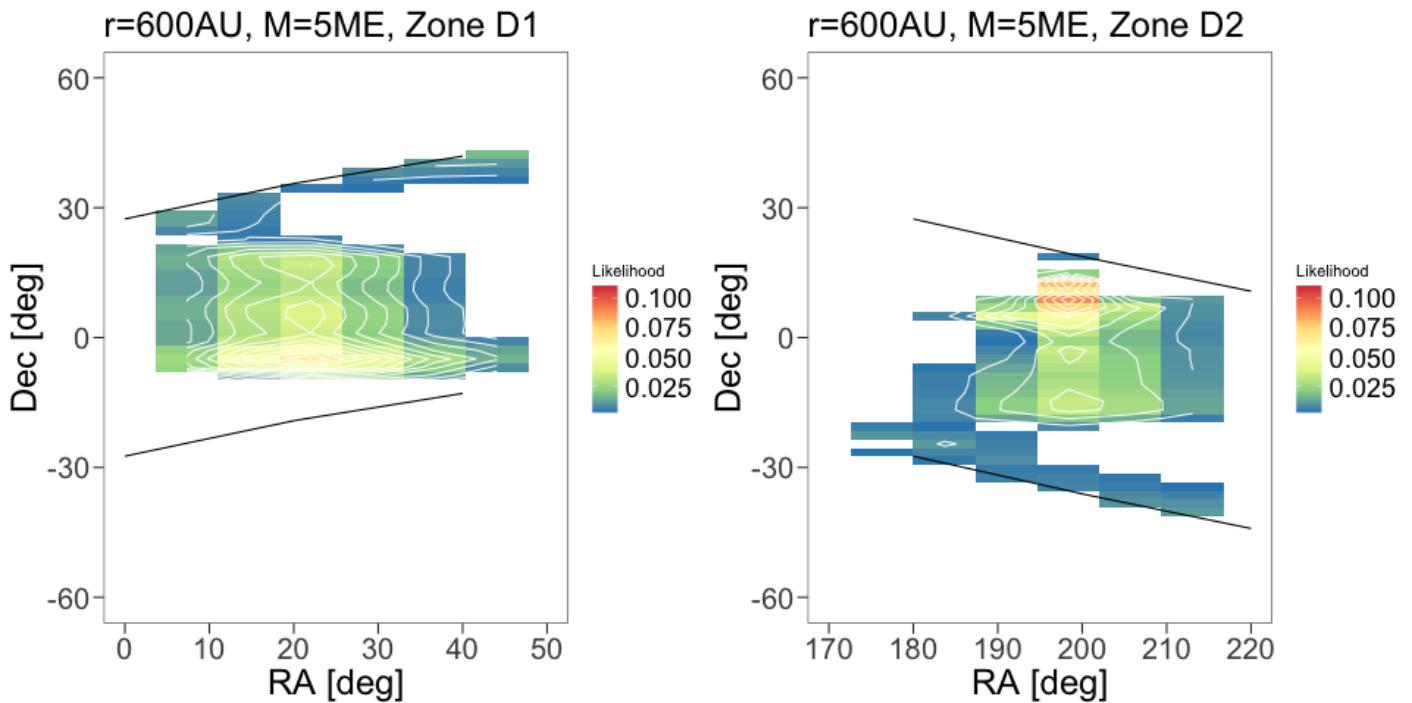
with P9 are almost equally probable ( $L>0.4$ ) as in INPOP19a, correspond to zones where P9 induces very low accelerations (blue and green regions in Fig. 7) on the most sensitive planetary orbits. These zones are out of the ecliptic plane and are excluded by the theoretical modeling of Batygin et al. (2019). However, it is interesting to note that for these regions, we cannot conclude whether the presence of P9 is possible because the induced dynamical effect on planetary orbits is very weak. Consequently, the effect of the fitted residuals is also very weak; the  $\chi^2$  likelihood is very similar to be that for INPOP19a.

### 5.2. Likelihood and covariance versus fitted TNO ring mass

As explained in Sect. 2.2, the addition of a TNO ring was an important update for fitting Cassini observations. Another important aspect of the adjustment of the mass of the TNO ring is its ability to absorb a part of the dynamical contribution of P9 (Pitjeva & Pitjev 2018). In this context, it was interesting to study the change in fitted value of the mass of the TNO ring according to the different P9 effects on the planetary orbits. In Fig. 8 we plot the differences between the INPOP19a gravitational mass ( $GM$ ) of the TNO ring, which is equal to  $5.32 \times 10^{-11} \text{ UA}^3 \cdot \text{day}^{-2}$  (Di Ruscio et al. 2020; Fienga et al. 2019), and the fitted values for each solution that includes contributions of P9 for different positions (RA, Dec). When we compare Fig. 6 and Fig. 4 and do not consider the low-acceleration zones discussed previously (Sect. 5.1), there are two zones (one for  $RA < 50^\circ$  and one for  $RA \approx 200^\circ$ ) that are acceptable for the likelihood criterion T2 and maximizing T1 (gray levels in Fig. 8) and two zones that are acceptable for T2, but with small T1 (dark blue levels in Fig. 8). These latter correspond to zones where the values of  $GM_{TNO}$  decrease significantly (see Fig. 8) with respect to the INPOP19a fitted value. In these cases, the perturbation by P9 is partially compensated for in the fit by a decrease in TNO ring contribution (and therefore of its mass) that leads to a  $\chi^2$  that is still similar to that of INPOP19a, and consequently is similar to an acceptable likelihood. On the other hand, the propagation of the covariance is not sensitive to this mechanism because the least-squares uncertainties are not affected. This can explain why these zones have small T1 in Fig. 4. The consequence of this mechanism is that the detection of the gravitational signature of P9 on planetary orbits appears to be correlated with the estimation of the TNO masses. As explained previously, the T2 acceptability of a certain area is due to our poor knowledge of these objects and consequently to the possibility that the P9-induced perturbations are masked by a misleading estimate of their masses. Independent constraints on the distribution of masses beyond Neptune are necessary in this context.

## 6. Conclusions

We have presented the results of 3156 simulations of planetary ephemerides built using the INPOP19a dynamical modeling and data sampling (Fienga et al. 2019), but adding the perturbations induced by the unknown planet P9, which we considered at different locations in the Solar System and with two different masses ( $5M_{\oplus}$  and  $10M_{\oplus}$ ). Based on these simulations, we performed two statistical tests: one used the propagation of the covariance matrices of planetary orbits and related parameters (Sect. 3.2, called T1), and the other used the  $\chi^2$  likelihood (Sect. 3.3, called T2). Two main conclusions can be drawn from Fig. 4 and Fig. 5. First, the planetary ephemerides are not a positive marker for the existence of P9 because P9 does not improve the



**Fig. 10.** Same as Fig.9 for two specific D-zones: D1 on the left-hand side, and D2 on the right-hand side.

planetary residuals regardless of the configurations that are considered. Second, we can deduce from Fig. 4 and Fig. 5 thresholds in the distances between P9 and the SSB below which the existence of P9 is ruled out by the planetary ephemerides and above which it is acceptable in some regions. For T1, the limit corresponds to the detection of zones with  $T1 > 75\%$ , and for T2, the limit corresponds to the occurrence of acceptable zones as defined in Sec. 3.3. Table 3 presents these limits, which can be compared with the distances proposed by Batygin et al. (2019). In their simulations, the largest possible distance is 640 AU, considering a minimum eccentricity of 0.2 and a maximum semimajor axis of 800 AU. When the largest distance of P9 is compared to the SSB proposed by Batygin et al. (2019) with the limits given in Table 3 and considering as possible zones those acceptable for both criteria, it appears that our work rules out the possibility of a  $10 M_{\oplus}$  P9. Only a small P9 with a mass of  $5 M_{\oplus}$  might be accepted at a distance smaller than 640 AU.

In addition to these two main conclusions, we showed in Sect. 4 that possible zones exist for different distances and masses (see Table 2). Focusing on the case ( $r=600$  AU and  $M_{P9}=5 M_{\oplus}$ ), which best agrees with Batygin et al. (2019), we show in Fig. 9 and Fig. 10 that two specific regions, denoted D1 and D2 (coordinates given in Tab. 4), are positive for T1 and T2, and the region even maximizes T2 with a likelihood of 0.09 (below  $1.5\sigma$ ). These regions can then be proposed as interesting zones for further investigations, even if the acceptability statistics in these areas remain low, with T1 below 90% and T2 below  $1.5\sigma$  ( $L<0.1$ ).

Finally, as we discussed in Sect. 5.2, the presence of P9 induces a dynamical effect that can be absorbed by reducing the mass of the TNO ring. An estimate of this mass obtained independently from the planetary ephemerides will be a crucial help for efficiently distinguishing perturbations caused by P9 and by TNO accelerations on the planetary orbits.

**Table 3.** Smallest possible distances between P9 and the SSB in AU deduced from T1 and T2. The first column indicates the mass of P9, and Columns 2 and 3 give the limits deduced from T1 (Fig. 4) and T2 (Fig. 5), respectively.

P9 Mass	T1	T2
$M_{\oplus}$	AU	AU
5	500	600
10	650	700

**Table 4.** Possible zones for a search for P9 given in intervals of equatorial (RA,Dec) in degrees. In zones D1 and D2, T1 and T2 are maximized in the ecliptic. The coordinates given here correspond to the zones in which the likelihood is greater than 0.05 ( $2\sigma$ ).

P9 mass	P9 distance to the SSB	P9 RA × Dec
$5 M_{\oplus}$	$r=600$ AU	D1 [18°:25°] × [-5°:-3°] D2 [198°:202°] × [5°:13°]

## Acknowledgements

This work has been funded by the French Space agency (CNES APR) and the Université Côte d’Azur (UCA Académie 3). AF thanks A. Morbidelli and K. Batygin for very helpful discussions. This work was also supported by the Programme National GRAM of CNRS/INSU with INP and IN2P3 co-funded by CNES.

## References

- Bailey, E., Batygin, K., & Brown, M. E. 2016, AJ, 152, 126
- Batygin, K., Adams, F. C., Brown, M. E., & Becker, J. C. 2019, Phys. Rep., 805, 1
- Batygin, K. & Brown, M. E. 2016, AJ, 151, 22
- Batygin, K. & Brown, M. E. 2016, ApJ, 833, L3
- Bernus, L., Minazzoli, O., Fienga, A., et al. 2020, Phys. Rev. Lett., submitted
- Brown, M. E. 2017, AJ, 154, 65

- Di Ruscio, A., Fienga, A., Durante, D., Iess, L., & Laskar, J. and Gastineau, M.  
 2020, A&A , in press
- Durante, D., Hemingway, D. J., Racioppa, P., Iess, L., & Stevenson, D. J. 2019,  
*Icarus* , 326, 123
- Durante, D., Parisi, M., Serra, D., et al. 2020, *Geophys. Res. Lett.*, 47, e86572
- Fienga, A., Avdellidou, C., & Hanuš, J. 2020, *MNRAS* , 492, 589
- Fienga, A., Deram, P., Viswanathan, V., et al. 2019, *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste*, 109
- Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., & Gastineau, M. 2016, *A&A* , 587, L8
- Folkner, W. M., Iess, L., Anderson, J. D., et al. 2017, *Geophysical Research Letters*, 44, 4694
- Gomes, R., Deienno, R., & Morbidelli, A. 2017, *AJ* , 153, 27
- Gomes, R. S., Matese, J. J., & Lissauer, J. J. 2006, *Icarus* , 184, 589
- Hees, A., Folkner, W. M., Jacobson, R. A., & Park, R. S. 2014, *Phys. Rev. D* , 89, 102002
- Holman, M. J. & Payne, M. J. 2016, *AJ* , 152, 94
- Iess, L., Folkner, W. M., Durante, D., et al. 2018, *Nature*, 555, 220 EP
- Iess, L., Militzer, B., Kaspi, Y., et al. 2019, *Science*, 364
- Iess, L., Stevenson, D. J., Parisi, M., et al. 2014, *Science*, 344, 78
- Kaib, N. A., Pike, R., Lawler, S., et al. 2019, *AJ* , 158, 43
- Lawler, S. M., Shankman, C., Kaib, N., et al. 2017, *AJ* , 153, 33
- Madigan, A.-M. & McCourt, M. 2016, *MNRAS* , 457, L89
- Millholland, S. & Laughlin, G. 2017, *AJ* , 153, 91
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., Dones, L., et al. 2017, *ApJ* , 845, 27
- Pitjeva, E. V. & Pitjev, N. P. 2018, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130, 57
- Shankman, C., Kavelaars, J. J., Bannister, M. T., et al. 2017a, *AJ* , 154, 50
- Shankman, C., Kavelaars, J. J., Lawler, S. M., Gladman, B. J., & Bannister, M. T.  
 2017b, *AJ* , 153, 63
- Verma, A. K. & Margot, J.-L. 2016, *Journal of Geophysical Research (Planets)*,  
 121, 1627

# C

CONTRAINTE SUR LA MASSE DU GRAVITON AVEC  
L'ÉPHÉMÉRIDE PLANÉTAIRE INPOP (ARTICLE)

---



## Constraining the Mass of the Graviton with the Planetary Ephemeris INPOP

L. Bernus,<sup>1</sup> O. Minazzoli,<sup>2,3</sup> A. Fienga,<sup>4,1</sup> M. Gastineau,<sup>1</sup> J. Laskar,<sup>1</sup> and P. Deram<sup>4</sup>

<sup>1</sup>IMCCE, Observatoire de Paris, PSL University, CNRS, Sorbonne Université,

77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>2</sup>Centre Scientifique de Monaco, 8 Quai Antoine 1er, 98000 Monaco

<sup>3</sup>Artemis, Université Côte d'Azur, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, BP4229, 06304, Nice Cedex 4, France

<sup>4</sup>Géoazur, Observatoire de la Côte d'Azur, Université Côte d'Azur, IRD, 250 Rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France



(Received 14 January 2019; revised manuscript received 15 April 2019; published 18 October 2019)

We use the planetary ephemeris INPOP17b to constrain the existence of a Yukawa suppression to the Newtonian potential, generically associated with the graviton's mass. We also give an interpretation of this result for a specific case of fifth force framework. We find that the residuals for the Cassini spacecraft significantly (90% C.L.) degrade for Compton wavelengths of the graviton smaller than  $1.83 \times 10^{13}$  km, which correspond to a graviton mass bigger than  $6.76 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>. This limit is comparable in magnitude to the one obtained by the LIGO-Virgo Collaboration in the radiative regime. We also use this specific example to defend that constraints on alternative theories of gravity obtained from postfit residuals may be generically overestimated.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.161103

**Introduction.**—From a particle physics point of view, general relativity can be thought of as a theory of a massless spin-2 particle—hereafter named a *graviton*. From this perspective, it is legitimate to investigate whether or not the graviton could actually possess a mass—even if it is minute. Such an eventuality has been scrutinized from a theoretical point of view since the late 1930s, with the pioneering work of Fierz and Pauli [1]. There is a wide set of massive gravity theories that lead to various phenomenologies [2]. One of the generic predictions from several models—although not all of them (in particular, usually not for models prone to the Vainshtein mechanism [2])—is that the usual  $1/r$  falloff of the Newtonian potential acquires a Yukawa suppression [2]. In the present Letter, we aim to test this particular phenomenology, regardless of the specificity of the theoretical model that produced it. For more information on the status of current theoretical models, we refer the reader to [2,3]. As a consequence, we assume that the line element in space-time curved by a spherical massive object at rest, at leading order in the Newtonian regime, reads

$$ds^2 = \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 R} e^{-R/\lambda_g} \right) c^2 dT^2 + \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 R} e^{-R/\lambda_g} \right) dL^2, \quad (1)$$

with  $dL^2 \equiv dX^2 + dY^2 + dZ^2$ ,  $R \equiv \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ , and  $\lambda_g$  is the Compton wavelength of the graviton—although we will see that our constraints can be applied on a wider range of massive and nonmassive gravity metrics.

Obviously, as long as  $\lambda_g$  is big enough, the gravitational phenomenology in the Newtonian regime can be reduced to one of general relativity in any given level of accuracy.

Another generic feature of many massive gravity theories is that, if the graviton is massive, its dispersion relation may be modified according to  $E^2 = p^2 c^2 + m_g^2 c^4$  [2], such that the speed of gravitational waves depends on its energy (or frequency)  $v_g^2/c^2 = c^2 p^2/E^2 \approx 1 - h^2 c^2/(\lambda_g^2 E^2)$ . Therefore, the waveform of gravitational waves would be modified during their propagation, while, at the same time, sources of gravitational waves have been seen up to more than 1420 Mpc (at the 90% C.L.) [4]. As a consequence, waveform match filtering can be used to constrain the graviton mass from gravitational waves detections [5,6].

Combining bounds from several events in the catalog GWTC-1 [4] leads to  $\lambda_g \geq 2.6 \times 10^{13}$  km [respectively,  $m_g \leq 5.0 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>] [4,7]—with the definition  $m_g = h/(c\lambda_g)$  at the 90% C.L. (assuming that the graviton mass affects the propagation only, and not the binaries dynamics). It is important to keep in mind that this limit is obtained in the radiative regime, while we focus here on the Newtonian regime. Although, one could expect  $\lambda_g$  to have the same value in both regimes for most massive gravity theories, it may not be true for all massive gravity theories. Therefore, both constraints should be considered independently from an agnostic point of view. See, e.g., [2] for a review on the graviton mass constraints.

**Direct constraints from the Solar System.**—Twenty years ago [5], and more recently [8], Will argued that Solar System observations could be used to improve—or at least be comparable with—the constraints on  $\lambda_g$  obtained from

TABLE I. Examples of correlations between various INPOP17b parameters and the Compton wavelength  $\lambda_g$ .  $a$ , EMB and  $GM_\odot$  state for semimajor axes, the Earth-Moon barycenter and the mass of the Sun, respectively.

	$\lambda_g$	$a$ Mercury	$a$ Mars	$a$ Saturn	$a$ Venus	$a$ EMB	$GM_\odot$
$\lambda_g$	1	0.50	0.49	0.04	0.39	0.05	0.66
$a$ Mercury	...	1	0.21	0.001	0.97	0.82	0.96
$a$ Mars	...	...	1	0.03	0.29	0.53	0.06
$a$ Saturn	...	...	...	1	0.003	0.02	0.01
$a$ Venus	...	...	...	...	1	0.86	0.94
$a$ EMB	...	...	...	...	...	1	0.73
$GM_\odot$	...	...	...	...	...	...	1

the LIGO-Virgo Collaboration—assuming that the parameters  $\lambda_g$  appearing in both the radiative and Newtonian limits are the same. A graviton mass would indeed lead to a modification of the perihelion advance of Solar System bodies. Hence, based on current constraints on the perihelion advance of Mars—or on the post-Newtonian parameters  $\gamma$  and  $\beta$ —derived from Mars Reconnaissance Orbiter (MRO) data, Will estimates that the graviton’s Compton wavelength should be bigger than  $(1.2 - 2.2) \times 10^{14}$  km (respectively,  $m_g < (5.6 - 10) \times 10^{-24}$  eV/ $c^2$ ), depending on the specific analysis. However, as an input for his analysis, Will uses results based on the statistics of residuals of the Solar System ephemerides that are performed without including the effect of a massive graviton. But various parameters of the ephemeris (e.g., masses, semimajor axes, Compton parameter, etc.) are all more or less correlated to  $\lambda_g$  (see Table I). Therefore, any signal introduced by  $\lambda_g < +\infty$ —for instance, a modification of a perihelion advance—can in part be reabsorbed during the fit of other parameters that are correlated with the mass of the graviton. (See Supplemental Material [9], which includes Refs. [10–15]). This, we believe, necessarily leads to a decrease of the constraining power of the ephemeris on the graviton mass with respect to postfit estimates. As a corollary, we believe that all analyses based solely on postfit residuals tend to overestimate the constraints on alternative theories of gravity due to the lack of information on the correlations between the various parameters. Eventually, we think that one cannot produce conservative estimates of any parameter without going through the whole procedure of integrating the equations of motion and fitting the parameters with respect to actual observations—which is the very *raison d'être* of the ephemeris INPOP.

INPOP (Intégrateur Numérique Planétaire de l’Observatoire de Paris) [16] is a planetary ephemeris that is built by integrating numerically the equations of motion of the Solar System following the formulation of [17], and by adjusting to Solar System observations such as lunar laser ranging or space missions observations. In addition to adjusting the astronomical intrinsic parameters, it can be used to adjust parameters that encode deviations from

general relativity [18–21], such as  $\lambda_g$ . The latest released version of INPOP, INPOP17a [22], benefits of an improved modeling of the Earth-Moon system, as well as an update of the observational sample used for the fit [21]—especially including the latest Mars orbiter data. For this work we use an extension of INPOP17a, called INPOP17b, fitted over an extended sample of Messenger data up to the end of the mission, provided by [23].

In the present Letter, our goal is to use the latest planetary ephemeris INPOP17b in order to constrain a hypothetical graviton mass directly at the level of the numerical integration of the equations of motion and the resulting adjusting procedure. By doing so, the various correlations between the parameters are intrinsically taken into account, such that we can deliver a conservative constraint on the graviton mass from Solar System observations—details about the global adjusting procedure are given in Supplemental Material [9].

*Modelization for Solar System phenomenology.*—Following Will [8], we develop perturbatively the potential in terms of  $r/\lambda_g$ , such that the line element (1) now reads

$$ds^2 = \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\lambda_g^2} \right] \right) c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\lambda_g^2} \right] \right) dl^2 + \mathcal{O}(c^{-3} \lambda_g^{-2}), \quad (2)$$

albeit with a change of coordinate system (we assume that the underlying theory of gravity is covariant, such that this change of coordinates has no impact on the derivation of the actual *observables*):

$$T = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{GM}{c^2 \lambda_g}}}, \quad X^i = \frac{x^i}{\sqrt{1 - \frac{GM}{c^2 \lambda_g}}}. \quad (3)$$

The change of coordinate system is meant to get rid of the nonobservable constant terms that appear in the line element of Eq. (1) after expanding in terms of  $\lambda_g^{-1}$ . Considering a  $N$ -body system, the resulting additional acceleration to incorporate in INPOP’s code is

$$\delta a^i = \frac{1}{2} \sum_P \frac{GM_P}{\lambda_g^2} \frac{x^i - x_P^i}{r} + \mathcal{O}(\lambda_g^{-3}), \quad (4)$$

where  $M_P$  and  $x_P^i$  are, respectively, the mass and the position of the gravitational source  $P$ . In what follows, we make the standard assumption that the underlying theory is such that light propagates along null geodesics [3]. From the null condition  $ds^2 = 0$  and Eq. (2), the resulting additional Shapiro delay at the perturbative level reads

$$\delta T_{\text{ER}} = \frac{1}{2} \sum_P \frac{GM_P}{c^3 \lambda_g^2} [\vec{N}_{\text{ER}} (\vec{R}_{\text{PR}} R_{\text{PR}} - \vec{R}_{\text{PE}} R_{\text{PE}}) + b_P^2 \ln \left( \frac{R_{\text{PR}} + \vec{R}_{\text{PR}} \vec{N}_{\text{ER}}}{R_{\text{PE}} + \vec{R}_{\text{PE}} \vec{N}_{\text{ER}}} \right)] + \mathcal{O}(c^{-3} \lambda_g^{-3}), \quad (5)$$

where  $\vec{R}_{XY} = \vec{x}_Y - \vec{x}_X$ ,  $R_{XY} = |\vec{R}_{XY}|$ ,  $\vec{N}_{XY} = \vec{R}_{XY}/R_{XY}$ , and  $b_P = \sqrt{R_{\text{PE}}^2 - (\vec{R}_{\text{PE}} \vec{N}_{\text{ER}})^2}$ . One can notice the correction to the Shapiro delay scales as  $(L_c/\lambda_g)^2$  with respect to the usual delay, where  $L_c$  is a characteristic distance of a given geometrical configuration. Given the old acknowledged constraint from Solar System observations on the graviton mass ( $\lambda_g > 2.8 \times 10^{12}$  km [5,8,24]), one deduces that the correction from the Yukawa potential on the Shapiro delay is negligible for past, current, and forthcoming radioscience observations in the Solar System (however, note that the scaling of the correction to the Shapiro delay illustrates the breakdown of the  $\lambda_g^{-1}$  development in cases where the characteristic distances involved are large with respect to the Compton wavelength—as should be expected).

On the other hand, the fifth force formalism predicts an additional Yukawa term to the Newtonian potential [25]

$$V = \frac{Gm}{r} (1 + ae^{-r/\lambda}) \quad (6)$$

If we assume that  $\lambda \gg r$  and  $\alpha > 0$ , we can also expand the Yukawa term, such that our result on  $\lambda_g$  can be transposed to  $\lambda/\sqrt{\alpha}$ —although, one first has to rescale the gravitational constant to  $\tilde{G} = G(1 + \alpha)$ , and then to make the same coordinate change as in Eq. (3), but while substituting  $\lambda_g$  with  $\lambda/\alpha$ . Note that a fifth force is also one of the generic features of several massive gravity theories [2].

*Evaluation of the significance of the residuals deterioration.*—To give a confidence interval for  $\lambda_g$ , we proceed as follows. For each value of  $\lambda_g$ , we perform a global fit of all other parameters to observations using the same data that for the reference solution INPOP17b—therefore, for the same number of observations. After the global fit procedure, we compute the residuals at the same dates for the reference solutions and observe how they are degraded or improved with respect to  $\lambda_g$ . The result is that Cassini residuals are the first to degrade significantly while  $\lambda_g$  decreases (see Supplemental Material [9] for details).

To quantify the statistical meaning of this degradation, we perform a Pearson [26]  $\chi^2$  test between both residuals in order to look at the probability that they were both built from the same distribution. To compute the  $\chi^2$ , we build an optimal histogram with the Cassini residuals of INPOP17b using the method described in [27], assuming the Gaussianity of the distribution of the residuals. We determine the optimal bins in which are counted the residuals to build the histogram. Then, using the same bins, we build an histogram for the Cassini residuals obtained by the solution

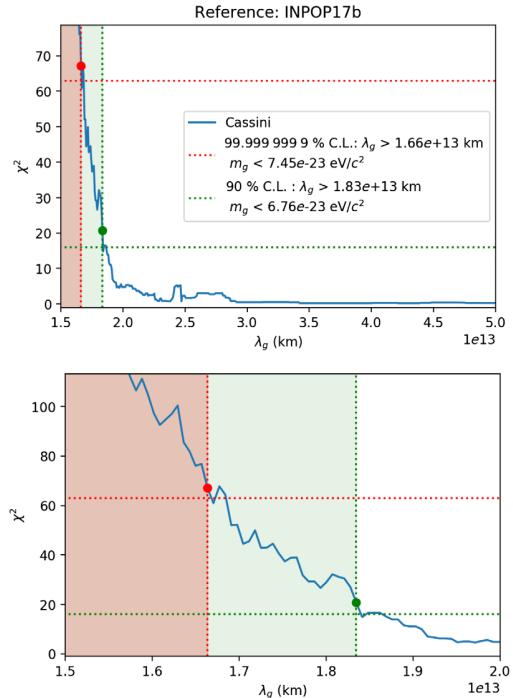


FIG. 1. Plot of  $\chi^2(\lambda_g)$  and the constraints deduced for  $\lambda_g$ . The probabilities  $p = 90\%$  and  $p = 99.9999999\%$  correspond to critical values of  $\chi^2$  equal to, respectively, 15.99 and 62.94.

to be tested with a given value of  $\lambda_g$ . Note that the first bin left bound is  $-\infty$  and the last bin right bound is  $+\infty$ . Let  $(C_i)_i$  be the bins in which are counted the values of the residuals, and let  $N_i^I$ ,  $N_i^G$  be the number of residuals of INPOP17b and the solution to be tested, respectively, counted in bin number  $i$ . One can then compute

$$\chi^2(\lambda_g) = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^G - N_i^I)^2}{N_i^I}. \quad (7)$$

For Cassini data, it occurs that the optimal binning gives 10 bins. As a result, this  $\chi^2$  follows a  $\chi^2$  law with 10 degrees of freedom. If the computed  $\chi^2$  is then greater than its quantile for a given confidence probability  $p$ , we can say that the distribution of the residuals obtained for  $\lambda_g$  is different from the residuals obtained by the reference solution with a probability  $p$ . This test can be done for both a positive detection of a physical effect and a rejection of the existence of a physical effect. If the computed  $\chi^2(\lambda_g)$  becomes then greater than its critical value for a probability  $p$ , one has to check if residuals are smaller or bigger than those obtained by the reference solution. In the first case (smaller—or better—residuals), it means that the added effect increases significantly the quality of the residuals and is probably (with a probability  $p$ ) a true physical effect. On the contrary, in the second case (bigger—or degraded—residuals), it means that the added effect is probably

physically false. In our work, the critical increasing of  $\chi^2(\lambda_g)$  corresponds to a degradation of the residuals (see the Supplemental Material [9] for a detailed analysis). The massive graviton can then be rejected for high enough values of the mass (or low enough values of  $\lambda_g$ ).

**Results.**—In Fig. 1 we plot the  $\chi^2$  as a function of  $\lambda_g$ . In this plot, we give two values of quantiles associated to two probabilities of significance,  $p = 90\%$  and  $p = 99.999999\%$ , which correspond to critical values of  $\chi^2$  equal to 15.99 and 62.94, respectively, for a 10 degrees of freedom  $\chi^2$  distribution. We obtain respectively  $\lambda_g > 1.83 \times 10^{13}$  km (respectively,  $m_g < 6.76 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) and  $\lambda_g > 1.66 \times 10^{13}$  km (respectively,  $m_g < 7.45 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>). These results are shown in Fig. 1. We also provide an enlargement of the main figure in order to show that the  $\chi^2$  is not monotonic for small differences of  $\lambda_g$ . However, if a given limit is crossed several times, our algorithm automatically takes the most conservative value in the discrete set of  $\lambda_g$ , as can be seen in Fig. 1.

**Conclusion.**—In the present Letter, we deliver the first conservative estimate of the graviton mass from an actual fit of a combination of Solar System data using a criterion based on a state of the art Solar System ephemerides: INPOP17b. The bound reads  $\lambda_g > 1.83 \times 10^{13}$  km (respectively  $m_g < 6.76 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) with a confidence of 90% and  $\lambda_g > 1.66 \times 10^{13}$  km (respectively,  $m_g < 7.45 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) with a confidence of 99.999 999 9%. As previously explained, in terms of a fifth force, the constraint on  $\lambda_g$  can be translated into a constraint on  $\lambda/\sqrt{\alpha}$ , simply by substituting  $\lambda_g$  by  $\lambda/\sqrt{\alpha}$ , if  $\alpha > 0$ .

The fact that our 90% C.L. bound is comparable in magnitude to the one obtained by the LIGO-Virgo Collaboration in the radiative regime [7,28] is a pure coincidence: the two bounds rely on totally different types of observation—gravitational waves versus radioscience in the Solar System—and probe different aspects of the massive graviton phenomenology—radiative versus orbital.

- [1] M. Fierz and W. Pauli, On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, *Proc. R. Soc. Ser. A* **173**, 211 (1939).
- [2] C. de Rham, J. T. Deskins, A. J. Tolley, and S.-Y. Zhou, Graviton mass bounds, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 025004 (2017).
- [3] C. de Rham, Massive gravity, *Living Rev. Relativity* **17**, 7 (2014).
- [4] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari *et al.* (LIGO Scientific Collaboration), GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs, *Phys. Rev. X* **9**, 031040 (2019).
- [5] C. M. Will, Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries, *Phys. Rev. D* **57**, 2061 (1998).

- [6] W. Del Pozzo, J. Veitch, and A. Vecchio, Testing general relativity using Bayesian model selection: Applications to observations of gravitational waves from compact binary systems, *Phys. Rev. D* **83**, 082002 (2011).
- [7] LIGO Scientific Collaboration, Tests of general relativity with the binary black hole signals from the LIGO-Virgo catalog GWTC-1, [arXiv:1903.04467](https://arxiv.org/abs/1903.04467).
- [8] C. M. Will, Solar system versus gravitational-wave bounds on the graviton mass, *Classical Quantum Gravity* **35**, 17LT01 (2018).
- [9] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.123.161103> for numerical analysis details and additional discussion on the impact of not readjusting the parameters when the model has changed.
- [10] W. M. Folkner, J. G. Williams, D. H. Boggs, R. S. Park, and P. Kuchynka, The planetary and lunar ephemerides DE430 and DE431, *Interplanet. Network Prog. Rep.* **196**, 1 (2014).
- [11] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev, Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **432**, 3431 (2013).
- [12] A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, Tests of GR with INPOP15a planetary ephemerides: Estimations of possible supplementary advances of perihelia for Mercury and Saturn, [arXiv:1601.00947](https://arxiv.org/abs/1601.00947).
- [13] R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith, and M. T. Zuber, Precession of Mercury's Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft, *Astrophys. J.* **153**, 121 (2017).
- [14] A. Genova, E. Mazarico, S. Goossens, F. G. Lemoine, G. A. Neumann, D. E. Smith, and M. T. Zuber, Solar system expansion and strong equivalence principle as seen by the NASA MESSENGER mission, *Nat. Commun.* **9**, 289 (2018).
- [15] A. S. Konopliv, S. W. Asmar, W. M. Folkner, Ö. Karatekin, D. C. Nunes, S. E. Smrekar, C. F. Yoder, and M. T. Zuber, Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters, *Icarus* **211**, 401 (2011).
- [16] A. Fienga, H. Manche, J. Laskar, and M. Gastineau, INPOP06: A new numerical planetary ephemeris, *Astron. Astrophys.* **477**, 315 (2008).
- [17] T. D. Moyer, *Deep Space Communications and Navigation Series* (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2003), Vol. 2.
- [18] A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **111**, 363 (2011).
- [19] A. K. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity, *Astron. Astrophys.* **561**, A115 (2014).
- [20] A. Fienga, J. Laskar, P. Exertier, H. Manche, and M. Gastineau, Numerical estimation of the sensitivity of INPOP planetary ephemerides to general relativity parameters, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **123**, 325 (2015).
- [21] V. Viswanathan, A. Fienga, O. Minazzoli, L. Bernus, J. Laskar, and M. Gastineau, The new lunar ephemeris INPOP17a and its application to fundamental physics, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476**, 1877 (2018).

- [22] V. Viswanathan, A. Fienga, M. Gastineau, and J. Laskar, INPOP17a planetary ephemerides, *Notes Sci. Tech. de l’Institut de Mec. Celeste* **108** (2017).
- [23] A. K. Verma and J.-L. Margot, Mercury’s gravity, tides, and spin from MESSENGER radio science data, *J. Geophys. Res. (Planets)* **121**, 1627 (2016).
- [24] C. Talmadge, J.-P. Berthias, R. W. Hellings, and E. M. Standish, Model-Independent Constraints on Possible Modifications of Newtonian Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1159 (1988).
- [25] A. Hees, T. Do, A. M. Ghez, G. D. Martinez, S. Naoz, E. E. Becklin, A. Boehle, S. Chappell, D. Chu, A. Dehghanfar, K. Kosmo, J. R. Lu, K. Matthews, M. R. Morris, S. Sakai, R. Schödel, and G. Witzel, Testing General Relativity with Stellar Orbits around the Supermassive Black Hole in Our Galactic Center, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 211101 (2017).
- [26] K. Pearson, On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling, in *Breakthroughs in Statistics: Methodology and Distribution*, edited by S. Kotz and N. L. Johnson (Springer, New York, 1992), pp. 11–28.
- [27] D. W. Scott, On optimal and data-based histograms, *Biometrika* **66**, 605 (1979).
- [28] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya *et al.*, GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 221101 (2017).

# Supplemental materials: Constraining the mass of the graviton with the planetary ephemeris INPOP

L. Bernus <sup>1</sup>, O. Minazzoli <sup>3,4</sup>, A. Fienga <sup>2,1</sup>, M. Gastineau <sup>1</sup>, J. Laskar <sup>1</sup>, P. Deram <sup>2</sup>

<sup>1</sup>IMCCE, Observatoire de Paris, PSL University, CNRS, Sorbonne

Université, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>2</sup>Géoazur, Observatoire de la Côte d'Azur, Université Côte d'Azur, IRD, 250 Rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France

<sup>3</sup>Centre Scientifique de Monaco, 8 Quai Antoine 1er, Monaco

<sup>4</sup>Artemis, Université Côte d'Azur, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, BP4229, 06304, Nice Cedex 4, France

## NUMERICAL ANALYSIS

To model and confront the massive graviton to Solar System observations, we add its contribution to the INPOP17b Solar System model (including asteroid masses), and then fit the newly obtained ephemeris according to the procedure described in [1]. For a fixed value of  $\lambda_g$ , we fit the parameters of the whole model to the data.

We have performed an iterative fit of the INPOP17b parameters of the ephemeris for each given values of  $\lambda_g$ . In order to compare the tested and the reference solutions, one needs to apply exactly the same procedure in each case. Accordingly, the same data and weights are used. As usual, weights are representative of data uncertainty and distribution. The comparison between the residuals of a solution with a massive graviton to the residuals of the reference solution gives a measurement of the sensibility of the ephemeris to the effects of a massive graviton. For each value of  $\lambda_g$  we compute the standard deviation of the residuals of range observations. More specifically, we exhibit residuals obtained with observations for Cassini mission, Messenger mission, and Mars Odyssey and Mex mission. Other observations are less relevant due to less accurate data and/or high correlation with  $\lambda_g$ . This algorithm processes for 1024 different fixed values of  $\lambda_g$  between  $1 \times 10^{13}$  and  $8 \times 10^{13}$  km. We plot the different standard deviations with respect to  $\lambda_g$  for each iteration. We remove the values of the reference solution standard deviations <sup>1</sup> listed in Table I. In Table I, we indeed give the  $1\sigma$  standard deviations of INPOP17b residuals together with the  $1\sigma$  differences obtained between INPOP17b and the Jet Propulsion Laboratory ephemeris DE436 <sup>2</sup> geocentric distances on the time interval of the data sample. The latter gives an idea of the internal accuracy of the reference ephemeris itself. At about the 10th iteration, the standard deviations for the three sets of residuals stop evolving — meaning that the adjustment has converged. We report the plot of the

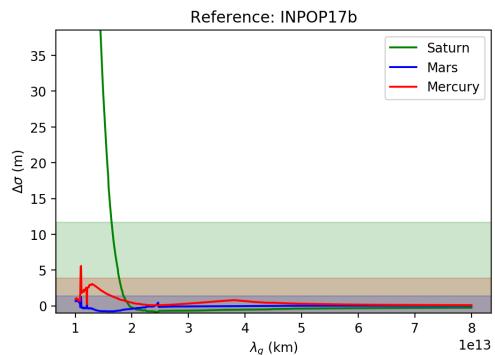


FIG. 1. Plot of the standard deviations with respect to  $\lambda_g$  after 12 iterations of the data fit. The values of the reference solution INPOP17b standard deviations (given in Table I) have been removed. The colored areas correspond to zones where the standard deviations of each observable are considered a priori as being marginally to not significant. The limits come from the estimation of the internal accuracy of the ephemeris obtained through the comparison with DE436, see Table I as well as text below. [A rigorous evaluation of the significance of the deterioration is made in the main part of the manuscript.]

standard deviations of the last iteration (the 13th) in Fig. 1.

An important point to have in mind is that Mars data constrain the global fit of parameters to observations — thanks to the important weight in the fit given to the Mars Odyssey and MEX missions accurate data in the reference solution <sup>3</sup>. So, while in Will's analysis [3], the high quality of Martian data is expected to allow the best constraints on  $\lambda_g$ , this high quality actually helps to better adjust the whole set of parameters — but they do not significantly constrain  $\lambda_g$ . Alternatively, given the fact that Saturn's semi-major axis is less correlated to  $\lambda_g$  (see Table I in the main part of the manuscript), it is not surprising to see in Fig. 1 that Saturn positions

<sup>1</sup> i.e. for  $\lambda_g = +\infty$

<sup>2</sup> Which is based on DE430 ([2]).

<sup>3</sup> As mentioned above, weights are representative of data uncertainty and distribution.

Observations	Time Intervals	#	(O-C) INPOP17b	INPOP17b-DE436
			$1\sigma$ [m]	$1\sigma$ [m]
Mercury (Messenger)	2011 : 2013.2	950	7.2	3.9
Mars (Ody, MEX)	2002 : 2016.4	52946	5.0	1.4
Saturn (Cassini)	2004 : 2014	175	32.1	11.7

TABLE I. Summary of data selected for monitoring INPOP sensitivity to  $\lambda_g$ . Columns 2 and 3 provide the time coverage of the sample and the number of observations per sample respectively. Column 4 gives the  $1\sigma$  standard deviation of residuals obtained with INPOP17b. These standard deviations are taken as reference values in the text. The last column indicates the  $1\sigma$  differences between INPOP17b and DE436 for geocentric distances and for interval of time covered by the two ephemeris adjustments.

deduced from the Cassini observations are actually the most constraining on  $\lambda_g$ .

It is found that the variation of the standard deviations of the selected residuals dominates compared to the variations of the mean values of the residuals, for all values of  $\lambda_g$ . Therefore, in the following, we focus on standard deviations of data.

As one can see in Fig. 1, after 12 iterations, only residuals deduced from Saturn positions obtained with Cassini show important deviations at a high value of  $\lambda_g$ . On the other hand, all the values of standard deviation of Mars data are below 1.5 m higher than the reference value. Around  $\lambda_g = 1.5 \times 10^{13}$  km, Messenger data go a little above 3 m higher than the reference value, but decrease then as  $\lambda_g$  decreases, while Mars standard deviation does exactly the opposite — indicating a compensating mechanism between the two sets of standard deviations, whose controlling parameters are indeed highly correlated. Of course, the compensating mechanism is actually across the whole set of residuals and depends on both the weights attributed to the different data and to the correlations between various parameters. In the end, only residuals deduced from Cassini show a significant (and monotonic) increase as  $\lambda_g$  decreases, as one can see in Fig. 1.

## DISCUSSION

The significant level of correlation between  $\lambda_g$  and the Solar System parameters indicates that any signal introduced by  $\lambda_g < +\infty$  can in part be re-absorbed during the fit of all the parameters. As a consequence, as explained previously, analyses based on postfit residuals tend to overestimate the constraint on  $\lambda_g$ . We can illustrate this further with the following example.

We look at the standard deviations of residuals with respect to  $\lambda_g$  without re-adjusting all the Solar System parameters — which effectively corresponds to do a sort of postfit analysis, in the sense that one considers Solar System parameters to be given beforehand by previous analyses. This gives an indication of the amplitude of

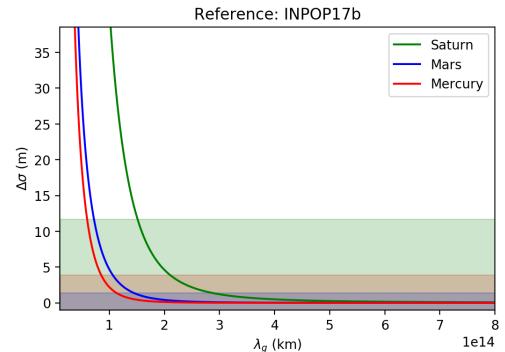


FIG. 2. Plot of the standard deviations variations with respect to  $\lambda_g$  without adjusting the Solar System parameters. As expected,  $\lambda_g$  seems to have a much more important impact compared to the case in Fig. 1, where one has adjusted the Solar System parameters after adding the  $\lambda_g$  parameter. [Note that the scale of the x-axis here is different with respect to Fig. 1].

the effect of  $\lambda_g < +\infty$  on the ephemeris, when the Solar System parameters are (wrongly) considered to be known beforehand. The standard deviations for Saturn Cassini residuals are shown in Fig. 2. If one applies the same statistical analysis on those residuals — instead of on the residuals obtained after adjusting the Solar System parameters as in Fig. 1 of the main part of the manuscript — one would mistakenly get at an improvement of more than a factor 20 on the constraint of  $\lambda_g$ , as it can be seen in Fig. 3 (the postfit analysis gives  $\lambda_g \leq 4.98 \times 10^{14}$  km instead of  $1.83 \times 10^{13}$  km, for the 90% C.L. bound).

Note, however, that the method to get the constraint in this section is different from the one in [3], such that one cannot have a fair comparison between the two methods. Indeed, the constraint above relies on a Pearson  $\chi^2$  test, while the analysis in [3] uses constraints obtained from studies that used various alternative selecting criteria — none of which being a Pearson  $\chi^2$  test — in addition to different space-time models. More particularly, the results in [3] do not follow from a reconstruction of the ephemerides when considering a Yukawa suppression in the planetary dynamics. Instead, in [3], the

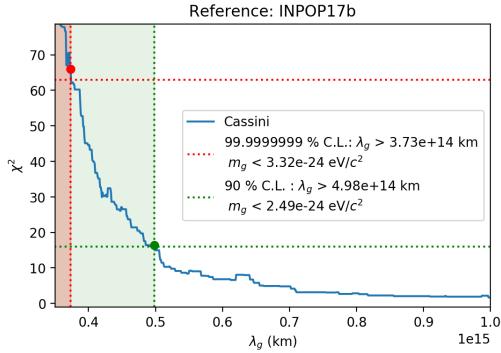


FIG. 3. Plot of  $\chi^2(\lambda_g)$ , and the constraints one would have deduced for  $\lambda_g$  without re-adjusting the Solar System parameters. It would lead to a spurious improvement of a factor 27.2 and 22.4 for the 90% and 99.999999% C.L. bounds respectively, compared to the global fit analysis.

author derives uncertainties for the graviton's Compton wavelength from a re-interpretation of various uncertainties given in several published studies [4–10]. These had derived those uncertainties from the residuals obtained after considering other space-time models than the one that is based on a Yukawa suppression of the Newtonian potential. Therefore it is impossible for the author in [3] to take into account the new correlations between  $\lambda_g$  and other parameters induced by the introduction of Yukawa suppression in the equations of motion, because in [3], the planetary orbits are not integrated, nor are they fitted to observational data.

The present work is an attempt to carefully strengthen the work initiated by [3], by fitting integrated planetary motions to actual data when the Newtonian potential possesses a Yukawa suppression.

Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mecanique Celeste **108** (2017), last Accessed: 2018-11-13.

- [2] W. M. Folkner, J. G. Williams, D. H. Boggs, R. S. Park, and P. Kuchynka, “The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431,” Interplanetary Network Progress Report **196**, 1–81 (2014).
- [3] Clifford M Will, “Solar system versus gravitational-wave bounds on the graviton mass,” *Classical and Quantum Gravity* **35**, 17LT01 (2018).
- [4] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev, “Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft,” *MNRAS* **432**, 3431–3437 (2013), [arXiv:1306.3043 \[astro-ph.EP\]](#).
- [5] A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, “Tests of GR with INPOP15a planetary ephemerides: estimations of possible supplementary advances of perihelia for Mercury and Saturn,” ArXiv e-prints (2016), [arXiv:1601.00947 \[gr-qc\]](#).
- [6] A. K. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, “Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity,” *Astronomy and Astrophysics* **561**, A115 (2014), [arXiv:1306.5569 \[astro-ph.EP\]](#).
- [7] A. Fienga, J. Laskar, P. Exertier, H. Manche, and M. Gastineau, “Numerical estimation of the sensitivity of INPOP planetary ephemerides to general relativity parameters,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **123**, 325–349 (2015).
- [8] R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith, and M. T. Zuber, “Precession of Mercury’s Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft,” *AJ* **153**, 121 (2017).
- [9] A. Genova, E. Mazarico, S. Goossens, F. G. Lemoine, G. A. Neumann, D. E. Smith, and M. T. Zuber, “Solar system expansion and strong equivalence principle as seen by the NASA MESSENGER mission,” *Nature Communications* **9**, 289 (2018).
- [10] A. S. Konopliv, S. W. Asmar, W. M. Folkner, Ö. Karatekin, D. C. Nunes, S. E. Smrekar, C. F. Yoder, and M. T. Zuber, “Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters,” *Icarus* **211**, 401–428 (2011).

---

[1] V. Viswanathan, A. Fienga, M. Gastineau, and J. Laskar, “INPOP17a planetary ephemerides,” Notes

D

CONTRAINTES SUR LA SUPPRESSION YUKAWA DU  
POTENTIEL NEWTONIEN AVEC L'ÉPHÉMÉRIDE  
PLANÉTAIRE INPOP19A (ARTICLE)

---



## Constraint on the Yukawa suppression of the Newtonian potential from the planetary ephemeris INPOP19a

L. Bernus,<sup>1,2</sup> O. Minazzoli<sup>3,4</sup>, A. Fienga,<sup>2,1</sup> M. Gastineau,<sup>1</sup> J. Laskar,<sup>1</sup> P. Deram,<sup>2</sup> and A. Di Ruscio<sup>2,5</sup>

<sup>1</sup>IMCCE, Observatoire de Paris, PSL University, CNRS, Sorbonne Université,  
77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

<sup>2</sup>Géoazur, Observatoire de la Côte d'Azur, Université Côte d'Azur,  
IRD, 250 Rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France

<sup>3</sup>Centre Scientifique de Monaco, 8 Quai Antoine 1er, Monaco  
<sup>4</sup>Artemis, Université Côte d'Azur, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur,  
BP4229, 06304, Nice Cedex 4, France

<sup>5</sup>Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Sapienza Università di Roma,  
via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italy



(Received 5 May 2020; accepted 16 June 2020; published 6 July 2020)

We use the latest solution of the ephemeris INPOP (19a) in order to improve our previous constraint on the existence of a Yukawa suppression to the Newtonian potential, generically associated to a graviton's mass. Unlike the ephemeris INPOP17a, several residuals are found to degrade significantly at roughly the same amplitudes of the Compton wavelength  $\lambda_g$ . As a consequence, we introduce a novel statistical criterion in order to derive the constraint with INPOP19a. After checking that it leads to a constraint consistent with our previous result when applied on INPOP17b, we apply the method to the new solution INPOP19a. We show that the residuals of Mars orbiters, Cassini, Messenger, and Juno, degrade significantly when  $\lambda_g \leq 3.43 \times 10^{13}$  km with a 99.7% confidence level—corresponding to a graviton mass bigger than  $3.62 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>. This is a stronger constraint on the Compton wavelength than the one obtained from the first gravitational-wave transient catalog by the LIGO-Virgo Collaboration in the radiative regime, since our 90% C.L. limit reads  $\lambda_g > 3.93 \times 10^{13}$  km ( $m_g < 3.16 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>).

DOI: [10.1103/PhysRevD.102.021501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.021501)

### I. INTRODUCTION

It has long been suggested that Solar System observations could be used to put stringent constraints on the existence of a Yukawa suppression of the Newtonian potential [1], which is generically associated to the hypothesis that the gravitational field may possess a mass [2,3]. In a recent publication [4], we used the planetary ephemeris INPOP17b to constrain the Compton wavelength in the Yukawa suppression to be larger than  $1.83 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L.—corresponding to a mass of the gravitational field smaller than  $6.76 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>. INPOP (Intégrateur Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris) [5] is a planetary ephemeris that is built by integrating numerically the equations of motion of the main planets, the Moon and 14000 asteroids of our Solar System following the formulation of [6], and by adjusting to Solar System observations such as lunar laser ranging or space mission observations. With the constant improvement of the solar system model and the permanent addition of new data, new versions of the ephemeris are derived and distributed on a regular basis since 2006 [5,7–9]. The new solution INPOP19a benefits from the use of nine Jupiter very accurate positions deduced from the Juno mission. It also benefits from

new Cassini data including i) data obtained during the final phase of the mission in 2017 (labeled *Grand Finale* here) and ii) Navigation and Gravity flybys data obtained between 2006 and 2016 (labeled *r* in the following). Both data sets were analyzed from raw recordings by our team, focusing specifically on uncertainty estimation. In INPOP17b, Cassini data were also used but with a more limited time coverage (from 2004 to 2014) and were produced by JPL [10] but without a clear estimation of the uncertainties. In [11], one will find the details on our Cassini data analysis and on deduced uncertainties whereas full comparisons with INPOP17a are given in [9]. INPOP19a shows also improvements relative to INPOP17b thanks to the introduction in the dynamical modeling of the perturbation of a trans-Neptunian objects (TNO) ring [11]. Indeed, as explained in [11,12], the use in INPOP of the very accurate positions of Saturn obtained during the last phase the Cassini mission (Grand Finale), requires the introduction in the dynamical modeling of the perturbations induced by trans-Neptunian objects for a better representation of the Grand Finale observations. Such an introduction has been done in using a ring potential with a mass estimated with the INPOP19a adjustment. The estimation

of this mass has been published in [11] and constraints on the unknown P9 planets have also been obtained with this modeling [12]. Overall, by comparing with INPOP17b, the accuracy of Jupiter orbit was improved by 2 orders of magnitudes. For Saturn, the improvement between INPOP17a and INPOP19a is of a factor 30 for the Grand Finale and 2.6 for the period between 2006 and 2016. More details of this update can be found in [11,12].

Statistics on the residuals of various INPOP solutions are sometimes used in order to derive constraints on various alternative theories, e.g., [13]. However, we explained in our previous publication [4] that doing so tends to overestimate the constraints on alternative theories. The reason being that the fit to the data is model dependent. Hence, the fitted parameters of the INPOP ephemerides are in general valid for general relativity only. Meaning that for alternative theories, the best fit of the parameters will in most cases be different from the ones obtained while assuming general relativity. Alternative theory parameters are indeed usually highly correlated to other parameters of the ephemeris [4], such that potential effects of alternative theories could be in part absorbed by the modification of other parameters of the ephemeris. Therefore, a rigorous estimation of the constraint on alternative theory parameters calls for a new global fit of the ephemeris parameters to the data in the framework of the considered alternative theory.

To do so in the framework of a Yukawa suppression of the Newtonian potential, we start off with an ephemeris that assumes general relativity (INPOP17b or 19a). We then add the extra acceleration term that is due to the Yukawa suppression to the numerical integrator, which, at the leading perturbative order, reads [4]

$$\delta a^i = \frac{1}{2} \sum_P \frac{GM_P x^i - x_P^i}{\lambda_g^2 r}, \quad (1)$$

for a set of values of  $\lambda_g$  between  $10^{13}$  and  $10^{14}$  km. Next we reperform a global fit of the INPOP parameters to the data according to the procedure described in [14] for each value of  $\lambda_g$ . We then evaluate statistically the level of  $\lambda_g$  at which the residuals are too degraded with respect to the original solution. In this work, we presents results obtained while using the latest updated ephemeris, INPOP19a. Contrary to what happened with INPOP17b for which only the residuals deduced from the Cassini radio experiment were significantly degraded with the considered values of  $\lambda_g$ , residuals from several different data sets and planets—not only Cassini and Saturn—degrade simultaneously with INPOP19a (see Fig. 2). Therefore, in order to take into account all the degradations simultaneously, we derived a new statistical method with respect to our previous publication [4], which we shall present now.

## II. GLOBAL OBSERVATIONAL $\chi^2$ CONSTRAINT

Now, let us consider that the global fit of the ephemeris parameters has already been performed, such that the residuals are minimized for each value of  $\lambda_g$ . Let us consider such a solution for a given value of  $\lambda_g$ , and we then define its observational  $\chi^2$ ,

$$n\chi^2(\lambda_g) = \sum_{\Omega_j} n_j \frac{\sigma_j^2(\lambda_g)}{\sigma_{o,j}^2}, \quad (2)$$

where  $\Omega_j$  are the different observational sets that we get from different sources (Cassini, Messenger, optical etc.),  $n_j$  is the number of points of each data sets,  $n = \sum_j n_j$  is the total number of observations,  $\sigma_{o,j}$  is the experimental uncertainty of observation  $j$ , and  $\sigma_j^2(\lambda_g)$  is the standard dispersion of the residuals between the simulated observables with a Yukawa suppression with a Compton wavelength  $\lambda_g$  and the observations of the set  $j$ . We note  $\chi^2(\infty) = \chi_r^2$ , the observational  $\chi^2$  of the reference solution. If the residuals are in a linear vicinity of 0 and follow a Gaussian distribution,  $n\chi^2$  follows a  $n$  degrees of freedom  $\chi^2$  law, and that when  $n \rightarrow \infty$ ,

$$z(\lambda_g) = \sqrt{\frac{n}{2}}(\chi^2(\lambda_g) - \chi_r^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3)$$

In other words,  $z$  tends to follow a normal distribution centered around 0 and of standard dispersion equal to 1.

However, we have tested that some observations are almost insensitive to the Yukawa suppression, so we do not need to compute all the simulations of the observations. We show in the next section how sensitive or nonsensitive observations were chosen in this study. According to each specific alternative theory, each ephemeris can have its sensitive and nonsensitive observational data, and they should all be analyzed case-by-case. In INPOP, the weights correspond to the observational uncertainties. Under these assumptions, let  $\Omega$  be the set of all the observations, and  $\tilde{\Omega}$  the set of sensitive observations with  $\tilde{n}$  the total number of sensitive observations, and

$$\tilde{n}\tilde{\chi}^2 = \sum_{j \in \tilde{\Omega}} n_j \frac{\sigma_j^2(\lambda_g)}{\sigma_{o,j}^2}. \quad (4)$$

Let us assume that if  $j$  is a nonsensitive observational data set, we have  $\sigma_j(\lambda_g) = \sigma_{r,j}$  (where the label  $r$  indicates the reference ephemeris, here INPOP19a). Under these assumptions, a straightforward calculation leads to

$$\chi^2(\lambda_g) - \chi_r^2 = \frac{\tilde{n}}{n}(\tilde{\chi}^2(\lambda_g) - \tilde{\chi}_r^2). \quad (5)$$

However, it appears that the observational uncertainties of the sensitive observations are very close to the standard dispersions of the reference solution, such that we can set

$$\forall j \in \tilde{\Omega}, \quad \sigma_{r,j} = \sigma_{o,j}, \quad (6)$$

without loss of generality. Indeed, for the reference solution (here INPOP19a), we have  $\chi_r^2 \approx 1.0036$ . A straightforward differential calculation shows that in order to get  $\chi_r^2 = 1$  modifying only the observational uncertainties, each  $\sigma_{o,i}$  should be modified as follows:

$$\delta\sigma_{o,i} = (\chi_r^2 - 1) \frac{n_i \sigma_{r,i}^2}{\sigma_{o,i}^3} \left( 2 \sum_{\Omega_i} n_i^2 \sigma_{r,i}^4 / \sigma_{o,i}^6 \right)^{-1}. \quad (7)$$

Since we have  $\sigma_{r,i} \approx \sigma_{o,i}$ , we get

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{o,i} &\approx \frac{1}{2} (\chi_r^2 - 1) \left( 1 + \sum_{j \neq i} \frac{n_j \sigma_{o,i}^2}{n_i \sigma_{o,j}^2} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{\chi_r^2 - 1}{2} \approx 0.2\%. \end{aligned} \quad (8)$$

Therefore, modifying  $\sigma_{o,i}$  by less than 0.2% would be enough to set  $\chi_r^2$  to 1. On another hand, we know that the observational uncertainties are difficult to estimate with accuracy as they are the combination of several contributions (instrumental uncertainties, calibrations, incomplete modelings etc...). Therefore it is legitimate to set  $\tilde{\chi}_r^2 = 1$  in what follows. Equation (5) then becomes

$$\chi^2(\lambda_g) - \chi_r^2 = \frac{\tilde{n}}{n} (\tilde{\chi}^2(\lambda_g) - 1). \quad (9)$$

From here, using (3), we see that

$$z(\lambda_g) = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{2}} (\tilde{\chi}^2(\lambda_g) - 1), \quad (10)$$

follows a 0-centered normal distribution of dispersion equal to 1. We can then compute the likelihood of each ephemeris,:;

$$L(\lambda_g) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z(\lambda_g)} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (11)$$

This quantity is interpreted as the probability of a tested theory to be likely—here, the Yukawa suppression of the Newtonian potential. For the reference solution, we have  $L_r = 1/2$ . This means that a tested theory which reproduces the same  $L$  that the reference solution has as many chances to be a better theory than a worse one, with respect to the reference solution. In this case, the residuals are the same or very close to the one of the reference. If  $L > 1/2$ , the theory is said to be better than the reference solution, with smaller residuals. If  $L < 1/2$ , the theory is said to be

worse, following a degradation of the residuals. With this method we can detect if some values of  $\lambda_g$  improve or degrade the residuals. If  $L$  becomes very close to 1, then the theory is said to be much better than the reference theory. In order to compare our result to the existing literature, we consider a 90% C.L. criterion, corresponding to  $L(\lambda_g) < 0.1$ . Nevertheless, as for the classical Gaussian distributed variable, we also take the equivalent of the  $3 - \sigma$  criterion: theories for which  $L(\lambda_g) < 0.003$  will be rejected with a probability of 99.7%. Table II gives the constraints on  $\lambda_g$  according to different criteria.

### III. RESULTS AND DISCUSSION

#### A. Results with INPOP17b

Before using this test with INPOP19a, let us confirm that the new criterion defined in the previous section gives consistent results compared to the one obtained with INPOP17b [4]. We had already computed the residuals standard dispersion with respect to  $\lambda_g$ . With INPOP17b the Cassini residuals are the by far the most sensitive to the Yukawa suppression (see Fig. 1 of the Supplemental Material of [4]). When the residuals of the other data begin to increase, the ones from Cassini are already too big to be acceptable. Therefore, the sensitive  $\tilde{\chi}^2(\lambda_g)$  is limited to Cassini data and Eq. (10) reduces to

$$z(\lambda_g) = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{2}} \left( \frac{\sigma_{\text{Cassini}}^2(\lambda_g)}{\sigma_{\text{Cassini}}^2(\text{ref})} - 1 \right), \quad (12)$$

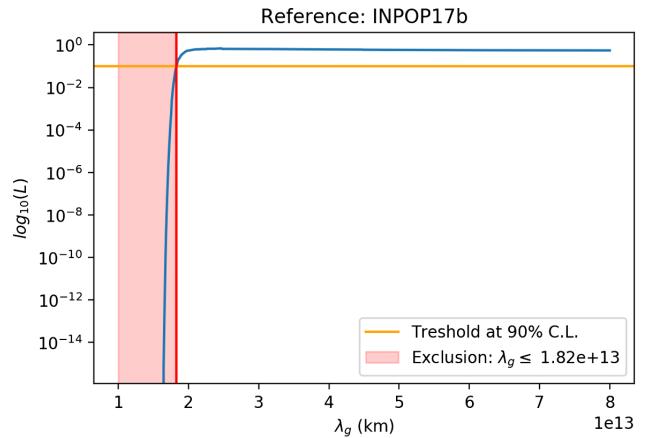


FIG. 1. Likelihood for each value of  $\lambda_g$  of the Yukawa suppression deduced from INPOP17b. The horizontal segment represents the 90% C.L.; while the red vertical segment indicates the value of  $\lambda_g$  at that limit. The shaded area is the exclusion region. The likelihood is given for each point of the considered set of values for  $\lambda_g$ . In order to be conservative, we identify first the lowest value of  $\lambda_g$  such that  $L(\lambda_g)$  is still above the threshold, and then we consider the next (lower) value to this one as our constraint. The same procedure is applied in Figs. 3 and 4. The constraint reads  $\lambda_g > 1.82 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L.

where  $\tilde{n}$  is the number of observations of Cassini in INPOP17b and  $\sigma_{\text{Cassini}}(\text{ref})$  is the INPOP17b standard deviation for Cassini. From the statistics of the residuals in [4], one can directly deduce the likelihood of the massive graviton when INPOP17b is taken as a reference solution. We show this in Fig. 1, where we focus on the 90% C.L. limit. Our new statistical method applied on the residuals obtained in [4] lead to  $\lambda_g > 1.82 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L.; whereas the method that was used in [4] led to  $\lambda_g > 1.83 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L. As the results obtained with the two criteria are consistent, we can state that the likelihood criterion described above is validated.

## B. Results with INPOP19a

Following the same procedure as explained in [4], we computed 576 ephemerides with fixed values of  $\lambda_g$  from  $10^{13}$  km to  $10^{14}$  km, fitting all the other parameters of the model for finding the optimal solution. For each of them we computed  $\chi^2(\lambda)$  defined in Eq. (4) and then deduced the likelihood. We do 26th iteration for each value of  $\lambda_g$  in order to have a convergence of the parameters in each case. The sensitive observations that were retained for the computation of  $L(\lambda_g)$  are summarized in Table I. All the data used for the adjustment procedure, sensitive or not, are listed in the documentation of INPOP19a [9]. To have the same kind of data in the statistical computation, we computed a daily average of Mars Express and Mars Odyssey such that there are 5993 Martian points. From this and Table I we get  $\tilde{n} = 7856$ , and accordingly we can compute  $L(\lambda_g)$  of Eq. (11).

We show the residual standard dispersions of the most sensitive observations in Fig. 2. We note that, contrary to the results obtained with INPOP17a [4], the considered residuals now degrade roughly simultaneously. However, as  $\lambda_g$  decreases, Cassini and Messenger are the first degraded residuals, the ones for Mars come just after, and Juno residuals are the least to be degraded. We note that the residuals of Cassini reduced by our team [9,11] increase

TABLE I. Summary of the data sets and their average observational uncertainties  $\sigma_r$ , in meters. Messenger data were provided by [15]. “Cassini JPL” data are those given by JPL [10]. Cassini Navigation and Gravity flybys data and Grand Finale are those reduced by our team [9,11].

Observations	#	Dates	$\sigma_r$ (m)
Messenger	1065	2011–2014	4.1
Mars Express	27849	2005–2017	2.0
Mars Odyssey	18234	2002–2014	1.3
Cassini JPL	166	2004–2014	25
Cassini Navigation and Gravity flybys	614	2006–2016	6.1
Cassini Grand Finale	9	2017	2.7
Juno	9	2016–2018	18.5

around  $\lambda_g = 3 \times 10^{13}$  km, then decrease, then, at last, increase significantly around  $2.5 \times 10^{13}$  km. We observe the same behavior, whereas less significantly, with the JPL Cassini data. Mars data have a more monotonic behavior.

Here we can see that the Pearson test that we used for INPOP17b in [4] would not have been possible with INPOP19a since several observational data sets have their residuals degraded at the same time. Indeed, the degradation of the residuals due to the Yukawa suppression is better distributed on the several data sets than in INPOP17b; thus a global analysis and a global criterion were necessary.

In Fig. 2, we also see the evolution of the residual standard dispersion of Venus Vex mission. One can see that when they are significantly degraded for low values of  $\lambda_g$ , all the other residuals are already high. One can deduce that Venus Vex mission will not contribute directly to constrain the Yukawa suppression. This example illustrates how we have chosen the sensitive observations and the nonsensitive observations for INPOP19a. We have taken the example of Venus because it was the most sensitive set of data that was removed, but according to this process, more than half of the observations were not sensitive and removed. It is important to note that even if only the sensitive data were used for the statistical criterion, all of them were used for the adjustment procedure.

We then compute  $L(z(\lambda_g))$  for the selected data sets, and we get Fig. 3. As expected, the results of the simulation tell us that  $L(z(\lambda_g))$  reaches very low values for low values of  $\lambda_g$  and converges to 1/2 when  $\lambda_g$  tends to infinity. In order to be conservative, we first find the lowest value of  $\lambda_g$  such

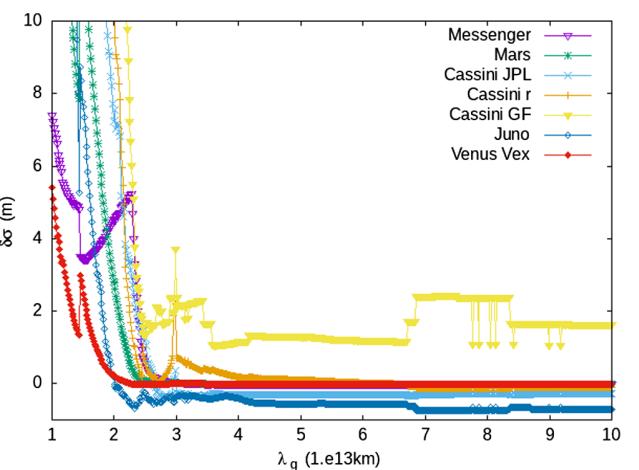


FIG. 2. The standard dispersion of each sensitive data sets residuals have been plotted with respect to the Compton wavelength of the graviton. We have removed the standard dispersion of the reference solution residuals to each data sets (see Table I). “Cassini JPL” corresponds to data provided by JPL, “Cassini r” corresponds to the Cassini Navigation and Gravity flybys data reduced by our team, “Cassini GF” corresponds to the Grand Finale of Cassini, and Mars correspond to a daily average of the data of Mars Odyssey and Mars Express.

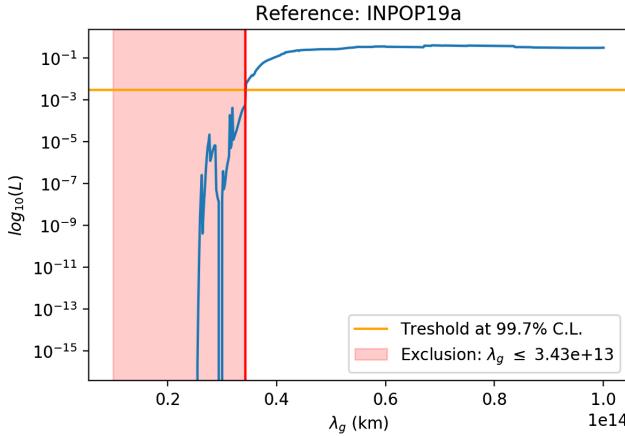


FIG. 3. Likelihood for each value of  $\lambda_g$  of the Yukawa suppression from INPOP19a. The horizontal line represents the 99.7% C.L.; while the vertical line indicates the value of  $\lambda_g$  at that limit. The shaded area is the exclusion region. The constraint reads  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km at the 99.7% C.L.

that  $L(\lambda_g)$  is still above a given threshold (e.g., 0.1 or 0.003). We then identify the next (lower) value to this one as our constraint. The results read  $\lambda_g > 3.93 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L.,  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km at the 99.7% C.L., and  $\lambda_g > 2.69 \times 10^{13}$  km at the 99.99997% C.L. This is a significant improvement of our previous constraint. In particular, let us note that our 90% C.L. constraint is now stronger than the one reported by the LIGO-Virgo Collaboration in the radiative limit from the first gravitational-wave transient catalog [16]—which reads  $\lambda_g \geq 2.6 \times 10^{13}$  km ( $m_g \leq 4.7 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) at the 90% C.L. This can be explained by the very good update of our planetary ephemeris INPOP from INPOP17b to INPOP19a—as it has been discussed in the Introduction. As we have said in our previous work [4], we remind that the fact that our constraint has the same order of magnitude that the one of LIGO-Virgo Collaboration is a pure coincidence, because they check different phenomenology from

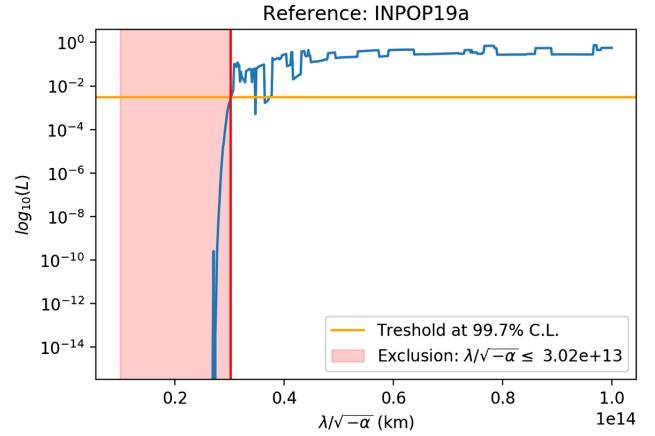


FIG. 4. Likelihood with respect to the fifth force parameters  $\lambda/\sqrt{-\alpha}$  for INPOP19a with negative values of  $\alpha$ . The horizontal line represents the 99.7% C.L.; while the vertical segment indicates the value of  $\lambda_g$  at that limit. The shaded area is the exclusion region. The constraint reads  $\lambda/\sqrt{-\alpha} > 3.02 \times 10^{13}$  km at the 99.7% C.L.

different types of data: orbital in our study and radiative in LIGO-Virgo Collaboration’s work [16]. Finally, one can notice that the fit procedure works better here than in INPOP17b, because most of the sensitive data sets (Messenger, Mars range missions, Cassini, Juno) are degraded simultaneously for higher values of  $\lambda_g$ , whereas in INPOP17b, only Cassini were significantly degraded [4]. This probably shows that the errors are more balanced between the different observations in INPOP19a.

In [4], we noted that our result also constrains the *fifth force formalism*. This force transforms the Newtonian potential into  $V(r)=V_{\text{Newton}}(r)(1+\alpha \exp(-r/\lambda))$ . Indeed, we had shown that our constraint on  $\lambda_g$  could be converted on a constraint on a combination of the fifth force parameters  $\lambda/\sqrt{\alpha}$  if  $\lambda_g \gg r$  and  $\alpha \ll 1$ . In order to encompass both negative and positive values of  $\alpha$ , we also perform the same numerical simulations with an opposite term for the additional acceleration of Yukawa suppression. We report the result in Fig. 4. If  $\alpha < 0$ , the limit reads

TABLE II. Constraints at 90%, 99.7% and 99.99997% C.L. for the Compton length  $\lambda_g$  in the case of the Yukawa suppression and for the ratio  $\lambda/\sqrt{|\alpha|}$  for the fifth force. For  $\lambda_g$ , the constraints given in columns 2 to 5 are minimum values when for  $m_g$ , the indicated constraints are maximum values. Values obtained with INPOP19a are given in columns 4 to 6 when values obtained with INPOP17b [4] and by GWTC-1 from LIGO-Virgo Collaboration [16] are given for comparisons in columns 2 and 3.

	GWTC-1	INPOP17a		INPOP19a		
		90% C.L.	99.7% C.L.	90% C.L.	99.7% C.L.	99.99997% C.L.
<b>Yukawa suppression</b>						
$\lambda_g$	$2.6 \times 10^{13}$ km	$1.83 \times 10^{13}$ km	$3.93 \times 10^{13}$ km	$3.43 \times 10^{13}$ km	$2.69 \times 10^{13}$ km	
$m_g$	$4.7 \times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup>	$6.76 \times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup>	$3.16 \times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup>	$3.62 \times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup>	$4.61 \times 10^{-23}$ eV/c <sup>2</sup>	
<b>Fifth force</b>						
$\lambda/\sqrt{ \alpha }$ for $\alpha > 0$		$1.83 \times 10^{13}$ km	$3.93 \times 10^{13}$ km	$3.43 \times 10^{13}$ km	$2.69 \times 10^{13}$ km	
$\lambda/\sqrt{ \alpha }$ for $\alpha < 0$			$3.77 \times 10^{13}$ km	$3.02 \times 10^{13}$ km	$2.82 \times 10^{13}$ km	

$\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.77 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L., and  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.02 \times 10^{13}$  km at the 99.7% C.L. Whereas if  $\alpha > 0$ , the limit reads  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.93 \times 10^{13}$  km at the 90% C.L.,  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.43 \times 10^{13}$  km at the 99.7% C.L. and  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 2.82 \times 10^{13}$  km at the 99.99997% C.L. As one could have expected, one gets similar results for negative and positive values of  $\alpha$ .

#### IV. CONCLUSION

We used a new statistical criterion to infer the constraint on a Yukawa suppression of the Newtonian potential—generically associated to a massive gravity theory—at the Solar system scales by using a global fit with planetary ephemeris. The new method is based on the global observational  $\chi^2$  analysis and a likelihood criterion. After verifying that the new criterion led to the same result as our former (less general) one when applied to

INPOP17b, we applied this analysis on our new ephemeris INPOP19a. The constraint reads  $\lambda_g > 3.43 \times 10^{13}$  km (or  $m_g < 3.62 \times 10^{-23}$  eV/c<sup>2</sup>) with a 99.7% confidence level. For the fifth force theory, if  $\lambda \gg r$  and  $\alpha \ll 1$  the constraint reads  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.02 \times 10^{13}$  km if  $\alpha < 0$ , and  $\lambda/\sqrt{|\alpha|} > 3.43 \times 10^{13}$  km if  $\alpha > 0$ , with a 99.7% C.L.

This is a significant improvement with respect to our previous constraint with INPOP17b. In particular, we noted that our 90% C.L. constraint is now stronger than the one given by the LIGO-Virgo Collaboration in the radiative limit from the first gravitational-wave transient catalog [16]—although we wish to remind the reader that constraints from gravitational waves and from Solar System ephemeris are complementary since they test different effects that could be explained by a massive graviton. We expect further improvements in the future thanks to new data from spatial probes—in particular from Juno and BepiColombo in a near future—and to potential improvements of the Solar System model.

- 
- [1] C. M. Will, Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries, *Phys. Rev. D* **57**, 2061 (1998).
  - [2] C. de Rham, Massive gravity, *Living Rev. Relativity* **17**, 7 (2014).
  - [3] C. de Rham, J. T. Deskins, A. J. Tolley, and S.-Y. Zhou, Graviton mass bounds, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 025004 (2017).
  - [4] L. Bernus, O. Minazzoli, A. Fienga, M. Gastineau, J. Laskar, and P. Deram, Constraining the Mass of the Graviton with the Planetary Ephemeris Inpop, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 161103 (2019).
  - [5] A. Fienga, H. Manche, J. Laskar, and M. Gastineau, INPOP06: A new numerical planetary ephemeris, *Astron. Astrophys.* **477**, 315 (2008).
  - [6] T. D. Moyer, *Deep Space Communications and Navigation Series* (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003), Vol. 2.
  - [7] A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **111**, 363 (2011).
  - [8] A. Fienga, J. Laskar, P. Exertier, H. Manche, and M. Gastineau, Numerical estimation of the sensitivity of INPOP planetary ephemerides to general relativity parameters, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **123**, 325 (2015).
  - [9] A. Fienga, P. Deram, V. Viswanathan, A. Di Ruscio, L. Bernus, D. Durante, M. Gastineau, and J. Laskar, *INPOP19a Planetary Ephemeris*, Notes Scientifiques et Techniques de l’Institut de Mécanique Céleste Vol. 109 (IMCCE, Paris, France, 2019).
  - [10] A. Hees, W. M. Folkner, R. A. Jacobson, and R. S. Park, Constraints on modified Newtonian dynamics theories from radio tracking data of the Cassini spacecraft, *Phys. Rev. D* **89**, 102002 (2014).
  - [11] A. Di Ruscio, A. Fienga, D. Durante, L. Iess, and M. Laskar, and J. Gastineau, Analysis of Cassini radio tracking data for the construction of INPOP19a: A new estimate of the Kuiper belt mass, *Astron. Astrophys.*, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037920>.
  - [12] A. Fienga, A. Di Ruscio, L. Bernus, P. Deram, D. Durante, J. Laskar, and L. Iess, New constraints on the location of P9 obtained with the INPOP19a planetary ephemeris, *Astron. Astrophys.*, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037919>.
  - [13] C. M. Will, Solar system versus gravitational-wave bounds on the graviton mass, *Classical Quantum Gravity* **35**, 17LT01 (2018).
  - [14] V. Viswanathan, A. Fienga, M. Gastineau, and J. Laskar, *INPOP17a Planetary Ephemerides*, Notes Scientifiques et Techniques de l’Institut de Mécanique Céleste Vol. 108 (IMCCE, Paris, France, 2017).
  - [15] A. K. Verma and J.-L. Margot, Mercury’s gravity, tides, and spin from MESSENGER radio science data, *J. Geophys. Res.* **121**, 1627 (2016).
  - [16] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, Tests of general relativity with the binary black hole signals from the ligo-virgo catalog gwtc-1, *Phys. Rev. D* **100**, 104036 (2019).

# E

## DÉRIVATION DES ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

---

Nous donnons une forme explicite des équations d'Euler-Lagrange en formalisme post-newtonien pour la théorie du dilaton léger. Enfin, nous obtenons les équations d'Einstein-Infeld-Hoffmann-Lorentz-Droste modifiées dans le cas d'un dilaton léger.

### E.1 ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE À PARTIR DU LAGRANGIEN GLOBAL

#### E.1.1 Quantités utiles

$$\frac{d|\mathbf{b}|^n}{dt} = \frac{n}{2}(\mathbf{b}^2)^{n/2-1}2\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{b}} = n|\mathbf{b}|^{n-2}\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad (355)$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r_{AB}} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \quad (356)$$

$$\frac{dv_A^4}{dt} = 4v_A^2 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{a}_A \quad (357)$$

$$\frac{dn_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{r_{AB}} [\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B - ((\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{n}_{AB}) \mathbf{n}_{AB}] \quad (358)$$

$$\frac{\partial r_{AB}^n}{\partial \mathbf{r}_X} = n(r_{AB}^2)^{n/2-1} \mathbf{r}_{AB} (\delta_A^X - \delta_B^X) = nr_{AB}^{n-2} \mathbf{r}_{AB} (\delta_A^X - \delta_B^X). \quad (359)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{AB}}{\partial \mathbf{r}_X} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_X} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right) \quad (360)$$

$$= \left( \frac{\mathbf{u}}{r_{AB}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_{AB} \frac{-\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \right) (\delta_A^X - \delta_B^X) \quad (361)$$

$$= \frac{1}{r_{AB}} [\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{AB}) \mathbf{n}_{AB}] (\delta_A^X - \delta_B^X). \quad (362)$$

#### E.1.2 Dérivation des équations d'Euler-Lagrange

Pour éviter de mélanger les indices des planètes dans les dérivations, nous allons dériver  $L$  par rapport à  $z_X$  et  $v_X = dz_X/dt$ . Ce travail suit la même méthode que [46] mais se généralise à un dilaton léger. D'après (229) nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dp_X}{dt} = & \mu_X \mathbf{a}_X \left( 1 - \delta_X + \frac{v_X^2}{2c^2} + \frac{2\gamma+1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_X \mu_B}{r_{XB}} \right) + \frac{\mu_X}{c^2} (\mathbf{v}_X \cdot \mathbf{a}_X) \mathbf{v}_X \\
& - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_X \mu_B}{r_{XB}} \left( \frac{4\gamma+3}{2} \mathbf{a}_B + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{n}_{XB}) \mathbf{n}_{XB} \right) \\
& + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \mu_X \mu_B \frac{\mathbf{r}_{XB}}{r_{XB}^3} \left( -\frac{3}{2} (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB})^2 \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{XB})(\mathbf{v}_X \cdot \mathbf{n}_{XB}) + \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_X \right) \\
& - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_X \mu_B}{r_{XB}^2} \left\{ -(2\gamma+1)((\mathbf{n}_{XB} \cdot (\mathbf{v}_X - \mathbf{v}_B))(\mathbf{v}_X - \mathbf{v}_B) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{XB} \cdot \mathbf{v}_X) \mathbf{v}_B - \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{XB} \cdot \mathbf{v}_B) \mathbf{v}_X \right\}
\end{aligned} \tag{363}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z_X} = & \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \mu_A \mu_B \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}^3} (\delta_A^X - \delta_B^X) \left[ 1 + \delta_{AB} + \frac{2\gamma+1}{c^2} v_A^2 \right. \\
& \left. - \frac{4\gamma+3}{2c^2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{AB}) (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) - \frac{2\beta-1}{c^2} \sum_{C \neq A} \frac{\mu_C}{r_{AC}} \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{\mu_A \mu_B}{r_{AB}} \left[ -\frac{1}{2c^2} \frac{1}{r_{AB}} \left\{ (\mathbf{v}_A - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{AB}) \mathbf{n}_{AB}) (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\mathbf{v}_B - (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{AB}) \mathbf{n}_{AB}) (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{AB}) \right\} (\delta_{XA} - \delta_{XB}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{c^2} \sum_{C \neq A} \mu_C \frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}^3} (2\beta + d\beta^A - 1) (\delta_A^X - \delta_C^X) \right]
\end{aligned} \tag{364}$$

$$\begin{aligned}
= & - \sum_{B \neq X} \mu_X \mu_B \frac{\mathbf{r}_{XB}}{r_{XB}^3} \left[ 1 + \delta_{AB} + \frac{2\gamma+1}{2c^2} (v_X^2 + v_B^2) \right. \\
& \left. - \frac{4\gamma+3}{2c^2} \mathbf{v}_X \cdot \mathbf{v}_B - \frac{3}{2c^2} (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{XB}) (\mathbf{v}_X \cdot \mathbf{n}_{XB}) \right] \\
& - \frac{1}{2c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_X \mu_B}{r_{XB}^2} [(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{XB}) \mathbf{v}_X + (\mathbf{v}_X \cdot \mathbf{n}_{XB}) \mathbf{v}_B] \\
& - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \mu_X \mu_B \frac{\mathbf{r}_{XB}}{r_{XB}^3} \left( (2\beta + d\beta^X - 1) \sum_{C \neq X} \frac{\mu_C}{r_{XC}} \right. \\
& \left. + (2\beta + 2d\beta^B - 1) \sum_{C \neq B} \frac{\mu_C}{r_{BC}} \right)
\end{aligned} \tag{365}$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_X &= F_X^{-1} \left[ \boldsymbol{H}_X - \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{v}_X \cdot \boldsymbol{a}_X) \boldsymbol{v}_X \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_B}{r_{XB}} \left( \frac{4\gamma+3}{2} \boldsymbol{a}_B + \frac{1}{2} (\boldsymbol{a}_B \cdot \boldsymbol{n}_{XB}) \boldsymbol{n}_{XB} \right) \right] \end{aligned} \quad (366)$$

où

$$F_X = 1 - \delta_X + \frac{v_X^2}{2c^2} + \frac{2\gamma+1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_B}{r_{XB}} \quad (367)$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_X &= \sum_{B \neq X} \mu_B \frac{\boldsymbol{r}_{XB}}{r_{XB}^3} \left[ 1 + \delta_{BX} - \frac{3}{2} (\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{n}_{XB})^2 - (2\gamma+2) \boldsymbol{v}_X \cdot \boldsymbol{v}_B \right. \\ &\quad \left. + (\gamma+1) v_B^2 + \frac{2\gamma+1}{2} v_X^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_B}{r_{XB}^2} [(2\gamma+1) (\boldsymbol{n}_{XB} \cdot (\boldsymbol{v}_X - \boldsymbol{v}_B)) (\boldsymbol{v}_X - \boldsymbol{v}_B) - (\boldsymbol{n}_{XB} \cdot \boldsymbol{v}_B) \boldsymbol{v}_B] \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq X} \mu_B \frac{\boldsymbol{r}_{XB}}{r_{XB}^3} \left( (2\beta + 2d\beta^X - 1) \sum_{C \neq X} \frac{\mu_C}{r_{XC}} \right. \\ &\quad \left. + (2\beta + 2d\beta^B - 1) \sum_{C \neq B} \frac{\mu_C}{r_{BC}} \right) \end{aligned} \quad (368)$$

## E.2 ÉQUATIONS D'EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN-LORENTZ-DROSTE

Notons que comme dans [46], la résolution exacte des équations d'Euler-Lagrange (366) conserve exactement les intégrales premières suivantes : moment linéaire (équation (230)), moment angulaire (équation (231)), et l'énergie (équation (232)). Mais elles ne sont pas pratiques à intégrer car elles ne se présentent pas sous la forme d'une équation différentielle ordinaire, pour la résoudre numériquement il faut donc inverser une matrice à chaque appel de la dérivée, ce qui n'est pas pratique. En effectuant des approximations newtoniennes à l'ordre  $O(c^{-2})$ , on peut obtenir une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 mais on perd le caractère exact des intégrales premières, un signal continu en  $O(c^{-4})$  persiste. En posant

$$F_X^{-1} = 1 + \delta_X - \frac{v_X^2}{2c^2} - \frac{2\gamma+1}{c^2} \sum_{B \neq X} \frac{\mu_B}{r_{XB}} + \mathcal{O}(c^{-4}) \quad (369)$$

et en négligeant tous les termes d'ordre  $O(c^{-4})$  qui apparaissent lorsqu'on développe les produits, on retrouve bien l'équation (308).

