算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2015年9月

第九章　有向图

9.1 有向图(Directed graphs)

　　定义9.1 ：设V为一个有限集合，A是V上的一个关系，i.e. $A \subseteq V \times V$ ，则A对应的图形称为一个有向图，记为D=（V，A）。换言之，有向图D包含一个二元组（V，A），其中V是一个集合，A是集合V的一些有序二元组构成的集合。V中的元素称为有向图的顶点，A中的元素称为有向图的弧（arc）。

有向图D=（V，A）可以用图形来表示，用圆点（或圆圈）来表示的D顶点，当 $e=(u,v)\in A$ 时，用一条从u到v的有向线段来表示弧e。当 $e=(u,v)\in A$ 时，称u为弧e的起点，v为弧e的终点。

定义9.2：设D=（V，A）为有向图，D中一些点弧交错序列 $\mu=v_{i_1}e_{i_1}v_{i_2}e_{i_2}\cdots e_{i_{k-1}}v_{i_k}$,称为从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的一条有向路，如果 $e_{i_j}=v_{i_j}v_{i_{j+1}}$ ，j=1,2,…，k 。v_{i_1} 与 v_{i_k} 分别是路μ的起点和终点。当 $v_{i_1}=v_{i_k}$ 时，称μ为闭的有向回路。

特别，当路μ中的所有顶点互不相同时，称μ为简单的有向路。约定以后的有向路均是简单有向路。

为了方便，通常用相应的顶点来表示有向路。

设D=(V,A)为有向图，对顶点u，称D中以u为起点的弧的数目为u的出度，记为 $d^+(u)$，称D中以u为终点的弧的数目为u的入度, 记为 $d^-(u)$ 。

定理9.1(握手定理)设D=(V,A)为有向图，则有

$$\sum_{u\in V} d_D^+(u) + \sum_{u\in V} d_D^-(u) = 2|A|$$

定义9.3：设D=(V,A)为有向图，称D为一个强连通有向图(strongly connected digraph)，如果对任意顶点u和v，D中存在从u到v的有向路，也存在从v到u的有向路。

问题9.1：给定一个有向图D=(V,A)，如何判定D是强连通的？

问题9.2：给定一个有向图D=(V,A)及两个顶点 $s,t \in V$ ，如何找到从s到t的一条有向路?

定义9.3 设D=(V,A;w)为有向图, $w: A \to R^{+}$ ，当P是一条从s到t的有向路，称P上所有弧的权重之和为路有向路P的权重。如果路P的权重是所有从s到t的有向路权重的最小者，即w(P)=min{w(Q)|Q是D中从s到t的路｝，称P是从s到t的最短路，其权重为w(P)。

问题9.3：给定一个有向图D=(V,A;w)及 $s,t\in V$， $w:A\rightarrow R^{+}$ ，如何找到从s到t的一条最短有向路?

定义9.4:设D=(V,A)为有向图, $\emptyset\neq S\subset V$ ，构造 $\Phi^{+}(S)=\{(u,v)\in A|u\in S,v\notin S\}$ 和 $\Phi^{-}(S)=\{(u,v)\in A|u\notin S,v\in S\}$ ，称它们分别是由S所确定的正向反圈和逆向反圈.

利用反圈法来构造从s到t的最短路：三个条件，（1）初值怎么选，（2）选弧的条件，（3）结束条件。

①初值 $X^{(0)}=\{s\}, E^{(0)}=\varnothing, \lambda(s)=0$

②选弧条件　在 $\Phi^{+}(X^{(k)})$ 中选弧e=(u,v)满足：$\lambda(u)+w(u,v)=$

Min $\{\lambda(x)+w(x,y) \mid$

$(x,y)\in\Phi(X^{(K)}), x\in X^{(k)}, y\notin X^{(k)}\}$

$\lambda(v)=\lambda(u)+w(u,v)$

③终止条件

当 $t \in X^{(k)}$时，找到一条从s到t的路；

当 $t \notin X^{(k)}, \Phi^{+}(X^{(k)}) = \varnothing$ 时，则不存在从s到t有向路。

定义9.5：设D=(V,A)为有向图，构造一个新图G=(V,E)，其中$E = \{uv \mid (u,v) \in A\}$，称G是D的基础图。

可知：若有向图D是强连通的，则D的基础图是连通的；反之不然。

9.2 树形图

定义9.6设T=(V,A)为有向图，称T是一棵树形图，如果T的基础图是一棵树，存在一个顶点$v_1 \in V$，使$d^-(v_1)=0$，对于$\forall v \in V-\{v_1\}$一定有$d^-(v)=1$。

定义9.7设D=(V,A;w)为有向图，$w: A \to R^+$，T=(V,A')是D的一个支撑子图，称T是D的一棵支撑树形图，如果T是一棵树形图。并称w(T)为树形图T的权重。

问题9.4 给定一个有向图D=(V,A)，如何寻找D的一棵支撑树形图?

问题9.5 给定一个赋权有向图D=(V,A;w)，如何寻D的一个最小支撑树形图？

能够利用反圈法来寻找有向图D的支撑树形图（即寻找以 v_1 为根的支撑树形图），从而，能够判定D是强连通的；但是不能用反圈法来寻找有向图D的最小支撑树形图（反例）。

用反圈法来寻找有向图D的支撑树形图

（即寻找以 v_1 为根的支撑树形图）

①初值： $X^{(0)}=\{v_1\}$

②选弧条件：在 $\Phi^+(X^{(k)})$ 中选一条弧或多条弧

③终止条件：

当 $X^{(k)}=V$ 时,找到以 v_1 为根的支撑树形图

当 $X^{(k)}\neq V$,但 $\Phi^+(X^{(k)})=\varnothing$ 时,说明不存在以 v_1 为根的支撑树形图。

注：在选弧条件中可以加入BFS算法。

问题9.6　能否用反圈法来寻找以 v_1 为根的最小支撑树形图?

问题9.7 设D=(V,A)为有向图,如何判定D是强连通的?

问题9.8 设D=(V,A)为有向图,能否找到D的一个支撑子图 $D'=(V,A')$,使得 D' 为强连通图?

算法　强连通子图

① 任取一个顶点$v_1 \in V$；

② 利用反圈法寻找以v_1为根的支撑树形图$T_1=$（V，E_1）（如果不存在v1为根的支撑树形图，说明有向图D不是强连通的，停止）

③利用反圈法寻找以v_1为根的反向支撑树形图$T_2=$（V，E_2）（如果不存在v_1为根的反向支撑树形图，说明有向图D不是强连通的，停止）

④ 输出支撑子图$D^*=$（V，$E_1 \cup E_2$）（需要说明D^*是强连通支撑子图）

定理9.1 上述算法能够判定有向图D=(V,A)是强连通的；该算法也能够找到D的一个支撑子图 $D^{'}=(V,A^{'})$,使得 $D^{'}$ 为强连通图。反圈法求最短路的算法复杂性就是该算法的复杂性。

问题9.9设D=(V,A;w)为一个赋权有向图,能否找到D的一个支撑子图 $D^{'}=(V,A^{'})$,使得为强连通图,并且 $w(D')$ 达到最小?

不能利用反圈法寻找有向图D的最小支撑树形图（反例）。

问题9.10 （入弧划分问题）设D=(V,A;w)为一个赋权有向图,能否找到D的一个支撑子图 $D'=(V,A')$,使得对D中的每个顶点v在 D' 中的入次至多为1,并且 $w(D')$ 达到最小?

问题9.11 （出弧划分问题）设D=(V,A;w)为一个赋权有向图,能否找到D的一个支撑子图 $D'=(V,A')$,使得对D中的每个顶点v在 D' 中的出次至多为1,并且 $w(D')$ 达到最小?

算法　Greedy

Begin

① 对D中的每个顶点v，如果存在进入v的入弧，就选取权重最大的入（出）弧，把所有选取的弧全体记为E*;

② 输出有向图D*=（V，E*）。

End

问题9.12 给定一个赋权有向图D=(V,A;w)，如何寻找D的一个支撑树形图T，使得w(T)达到最小？

求赋权有向图D=(V,A;w) 的一个最小支撑树形图算法是由朱永津、刘振宏（1965）和Edmonds（1967）分别独立设计的。

算法 Arborescence

给定有向图D=（V，A；w），算法分两个步骤：

步骤一. 首先令$D_1=(V_1,A_1)=D$，对任意弧e，取$w^{(1)}(e)=w(e)$和$p_1=|V|$。一般地，设已有$D_k=(V_k,A_k)$，$w^{(k)}(e)=w(e)$和$p_k=|V|$。

(1) 对V_k中每个顶点v_i，在D_k中取指向v_i的一条权重最小的弧。记这样的弧全体为W_k。

若$|W_k|<p_k-1$，算法停止，D_k中不存在支撑树形图，从而D中不存在支撑树形图；

若 $|W_k| = p_k - 1$，令 $F_k = W_k$，转入(2)；

若 $|W_k| = p_k$，则从 W_k 中去掉一条权重最大的弧，记所得的弧集合仍为 F_k，转入(2)；

(2) 考察图 $H_k = (V_k, F_k)$

若H_k中不含有回路，则H_k就是D_k的最小支撑树形图，转入步骤二；

若H_k中含有回路 $\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \cdots, \mu_{r_k}^{(k)}$，在$D_k$中收缩每个回路得到得到 r_k个伪点，$y_i^{(k+1)}, i = 1, 2, \cdots, r_k$ 及收缩图 $D_{k+1} = (V_{k+1}, A_{k+1})$，并修正权函数$w^{(k)}$，得 $w^{(k+1)}$，满足：

$$w^{(k+1)}(e_j)=\begin{cases} w^{(k)}(e_j) & \text{若弧 } e_j \text{ 的终点不是伪点} \\ w^{(k)}(e_j)-w^{(k)}(e_{tj}^{(k)})+m_t^{(k)} & \text{若弧 } e_j \text{ 的终点是伪点} \end{cases}$$

这里$e_{tj}^{(k)}$是回路 $\mu_t^{(k)}$ 中与 e_j在 D_k 中在同一终点的弧，$m_t^{(k)}$是回路 $\mu_t^{(k)}$中最大权弧的权。

一般地，收缩回路后，得到多重图，在修改弧的权重后只需保留权重最小的弧即可，从而得到简单有向图D_{k+1}。对D_{k+1}及函数$w^{(k+1)}$，回到步骤一。

步骤二. 已知 $H_k=(V_k,F_k)$是 D_k 的最小支撑树形图。下面由此去求 D_{k-1} 中的最小树形图。

记 $H_k=(V_k,F_k)$ 为当前图 D_k 的最小树形图，此时有 $H^{(k)}=H_k(V^{(k)}=V_k,F^{(k)}=F_k)$

设 $y_t^{(k)}$是 H_k 中的一个伪点，对回路 $\mu_t^{(k-1)}$，取 $A_t^{(k-1)}=E(\mu_t^{(k-1)})-\{e_t\}$， $t=1,2,\cdots,r_{k-1}$

当 $y_t^{(k)}$ 是 H_k 的根时，e_t 是回路$\mu_t^{(k-1)}$ 中的最大权弧；当 $y_t^{(k)}$ 不是 H_k 的根时，则H_k中有一条弧e指向 $y_t^{(k)}$ 。此时e_t是 $\mu_t^{(k-1)}$上与e有同一终点的弧。

于是得到 $V^{(k-1)}=V_{k-1}$ 和 $F^{(k-1)}=F^{(k)}\cup(\bigcup_{t=1}^{r_{k-1}}A_t^{(k+1)})$

则 $H^{(k-1)}=(V^{(k-1)},F^{(k-1)})$ 是D_{k-1}中最小支撑树形图。

对 $H^{(k-1)}=(V^{(k-1)},F^{(k-1)})$ 重复上述步骤二，直到得到 $H^{(1)}=(V^{(1)},F^{(1)})$ ，从而得到$H^{(1)}$是D_1（即D）的最小支撑树形图。