算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

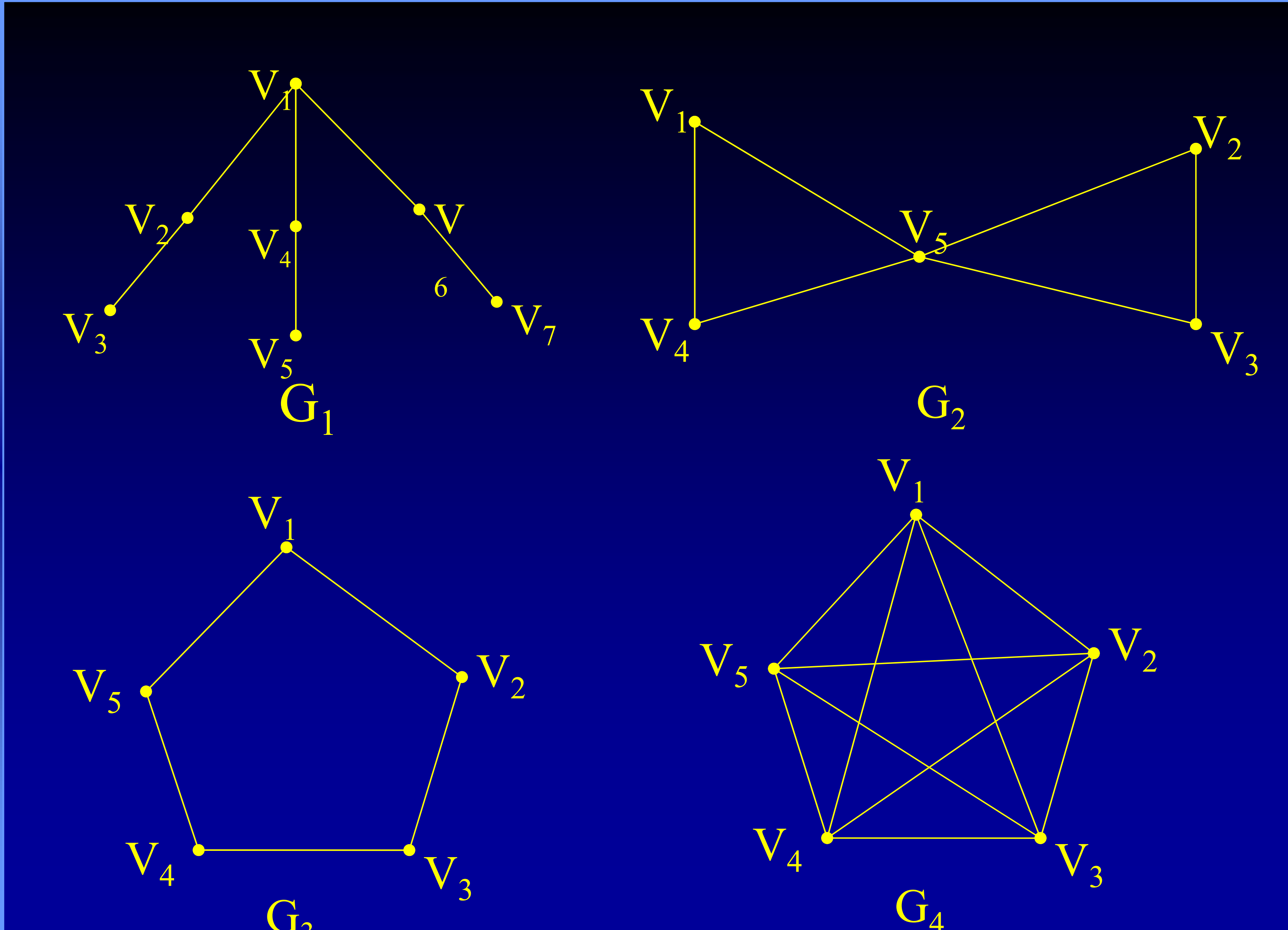
2015年9月

第三章 图的连通性

3.1 连通性(connectivity)

在介绍本章的一些基本概念之前,我们先看一些例子.

例　下面各个连通图中,至少删除多少个顶点后，所得到的诱导子图成为不连通图?至少删除多少条边后，所得到的诱导子图成为不连通图?



V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
G_1
V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
G_2
V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
G_3
V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
G_4

定义3.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图，$V'\subset V$，称 V' 为 G 的一个点割集（点截集），如果 $G-V'$ 是不连通的或者 $G-V'$ 为单点集图。进一 步，当 $|V'|=k$ 时，称 V' 为 G 的 k 点割集。

定义3.2 设 $G=(V,E)$ 是一个图，称 G 的点连通度为 k，如果 G 不存在点数是 $k-1$ 的点割集，k 是满足条件的最小正整数，记 G 的点连通度为 $\kappa(G)$。

特别地，n 阶完全图的点连通度为 $n-1$ 。
如果C为G的点割集,且|C|=1，i.e. C={v}，称v为G的一个割点。

定义3.3 设 G 是一个图，k 是正整数，称 G 是 k 点连通的，如果 $\kappa(G) \geq k$。

如果G是k-连通图，则G也是(k-1)-连通图(k≧2)。一个非完全图的连通图是k-连通的当且仅当它的每个割集至少含有k个点。

定义3.4 设$G=(V,E)$是一个图，$E'\subset E$，称E'为G的一个边割集（边截集），如果$G-E'$是不连通的。进一步，当$|E'|=k$时，称E'为G的k-边割集。

定义3.5 设$G=(V,E)$是一个图，称G的边连通度为k，如果G不存在边数是$k-1$的边割集，k是满足上述条件的最小正整数，记G的边连通度为$\kappa'(G)$或$\lambda(G)$。

定义3.6 设G是一个图，k是正整数，称G是k-边连通的，如果$\kappa'(G)\geq k$。

设G=(V,E)为一个图,如果E’是G的边割集,且|E’|=1, i.e ., E’={e},则称e为G的一条割边.

定理3.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图，有

$$\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)$$

其中 $\delta(G)=min\{d(v)|v\in V\}$。

证明： 设 v 是 G 中度最小的顶点，即 $d(v)=\delta(G)$。显然，v 是图 $G-\Phi(v)$ 的一个孤立点，于是有 $\kappa'(G)\le|\Phi(v)|=\delta(G)$

下证 $\kappa(G)\le\kappa'(G)$

设 E' 是 G 的最小边割集，即 $|E'|=\kappa'(G)$，记

$$G-E'=G_1\cup G_2$$

构造点集

$$V' = \{v \in V(G_1) \cap V(E')\} \text{和} V'' = \{v \in V(G_2) \cap V(E')\}$$

则 V' 和 V'' 都是 G 的点割集，设 $V^* = \min\{|V'|, |V''|\}$，则

$$\kappa(G) \le |V^*| \le \kappa'(G) \le \delta(G)$$

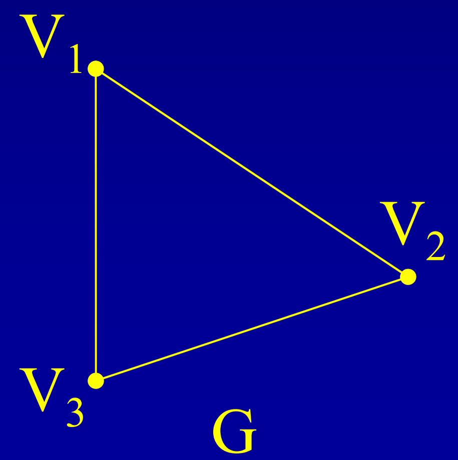
得证。

问题：给定一个图G，如何求得G的点连通度和边连通度？

3.2 块 (block)

定义3.7 设G=(V,E)为一个连通图,称图G是一个块,如果G不含有任何割点.

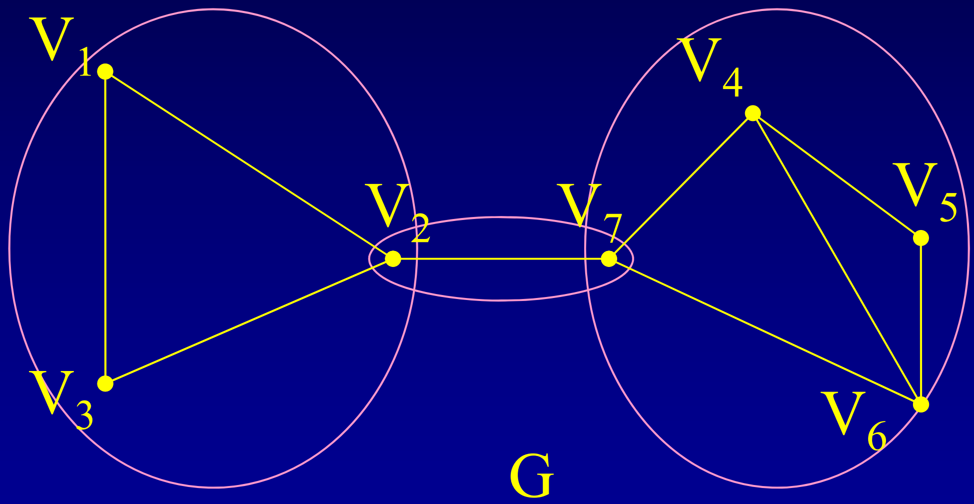
例如 下列图G是一个块.



一般地，如果一个块的顶点数(即$|V|\geq 3$)，则它是2-连通图。

定义3.8： 设$G=(V,E)$为一个图，B是G的一个子图，称B是G的一个块，如果B是G的一个连通子图，并且B作为子图不含有割点，使得B中的顶点数达到最大(极大)，即B是G的一个极大连通子图且不含有任何割点.

下列图G中含有3个块



图G作为块，具有如下一些性质:

1. 一条边是一个块当且仅当它是一条割边

2. 树的每一条边是树的一个块

3. 一个圈中的每一条边都不是该圈的一个块

命题:一个连通图中的两个块最多只有一个交点（反证法）.

定理3.2 下面命题是等价的:

1. G是2-连通图;

2. G是一个块;

3. G 中的任何两个顶点均在一个圈上;

4. G中的任何一个顶点和任何一条边均在一个圈上;

5. G中的任何两条边均在一个圈上。

注:该定理只是适用在2-连通图中,不能推广到k-连通图的情形.例如一个含有k个顶点的一个圈它是2-连通,不是k-连通的.

定理3.3　设G＝(V，E）是一个图（|V|≧3），下面的条件是等价的。

1. G是2-连通图；

2. G不含有割点；

3. G中任意两个点都至少有两条内部点不交的路；

4. $\delta(G)$≧2，G中任何两条边在同一个圈上。

定义3.9 设G＝（V，E）为一个图，s，t$\in$V为G中的两个点，P，Q为G中连结点s与t的两条路，称P，Q为G中两条内部（点）不交的路，如果（P－{s，t}）$\cap$（Q－{s，t}）＝ Φ ，i.e. ，路P，Q除了s与t点以外，没有其它的公共顶点。

定义3.10 设G＝（V，E）为一个图,s，t$\in$V为G中的两个点，P，Q为G中连结s与t的两条路，称P,Q为G中两条内部边不交的路，如果E(P)$\cap$E(Q)＝ Φ ，i.e.，路P,Q无公共边。

若P与Q是两条内部点不交的路，则P与Q是两条内部边不交的路。

定理3.4（Whitney）：一个至少含有3个顶点的图G＝（V，E）是2-连通的 当且仅当（if and only if，iff） 对图G中任意的两个顶点u、v，图G中至少存在两条内部点不交的路。

证明：（充分性）已知对于图G中任意的两个点u，v至少存在两条内部点不交的路。如果删除除v外的任何一个顶点，都不能分离u和v。这是因为对于每对u，v由已知条件可知，删除任何一个顶点后，图G仍然保持连通，故G是2-连通的。

（必要性）假设图G是2-连通图。任意的两个点u、v，我们对u到v的距离d (u, v)用数学归纳法证明u、v在图G中都有两条内部点不交的路。

①当d (u, v)=1时，因为k'(G) ≥k(G) ≥2, 所以G－uv是连通的，在图G－uv中有一条u -v的路，故u，v两个点在图G中有两条路:边uv与G－uv中的u-v路是内部点不交的路。

②假设d (u，v)= k-1时，结论成立，这里$k \geq 2$，不妨设d (u,v)=k，w是u-v的最短路上最靠近v的第一个点，则有d (u,w) =k-1,由归纳假设则在G中有两条内部点不交的u-w的路，分别设为P与Q。

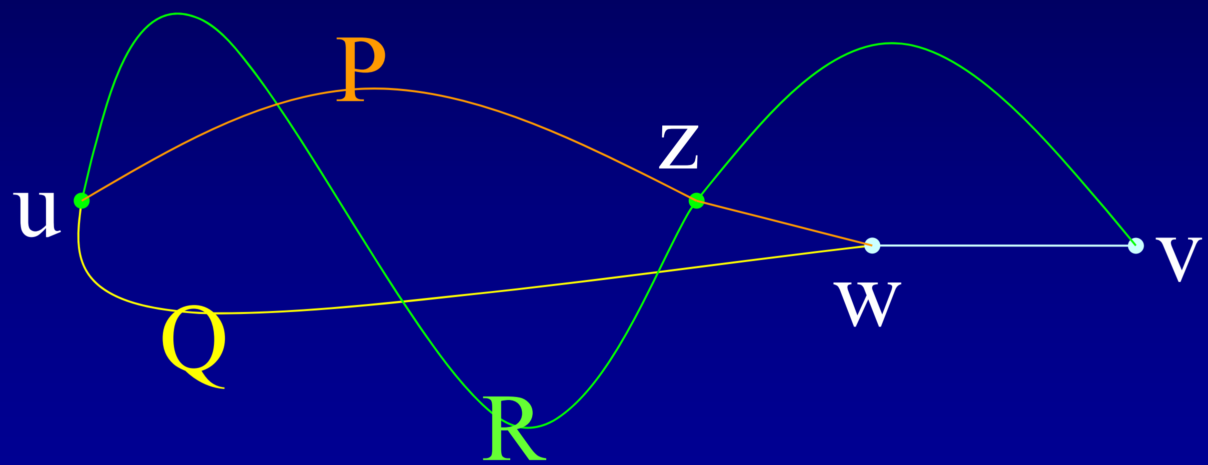
如果$v \in V(P) \cup V(Q)$，则结论成立。

如果$v \notin V(P) \cup V(Q)$,因为G是2-连通图，G-w也是连通图且G-w中有一条u-v的路R。

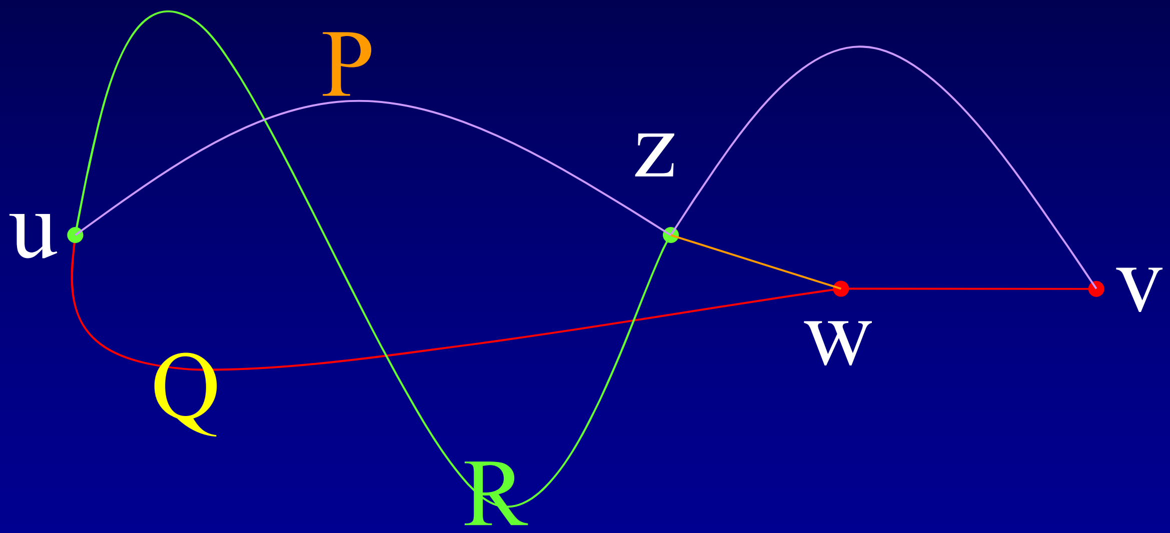
ⅰ若R与P、Q不相交，则结论成立。

ⅱ若R与P、Q相交，设z为R上最靠近v点且$\in P \cup Q$。不妨设$z \in P$（否则设$z \in Q$），则我们可以得到两条内部点不交的u-v路：

一条是在P上取u-z的路并上在R上取z-v的路；
另外一条是Q∪wv。如下图所示：



u-v的两条内部点不交的路为：用不同的颜色：红色和紫色表示。



3.3 Menger型定理

问题：设有图$G=(V,E)$，k是正整数，如何判定G是k-连通的（或G是k-边连通的）？

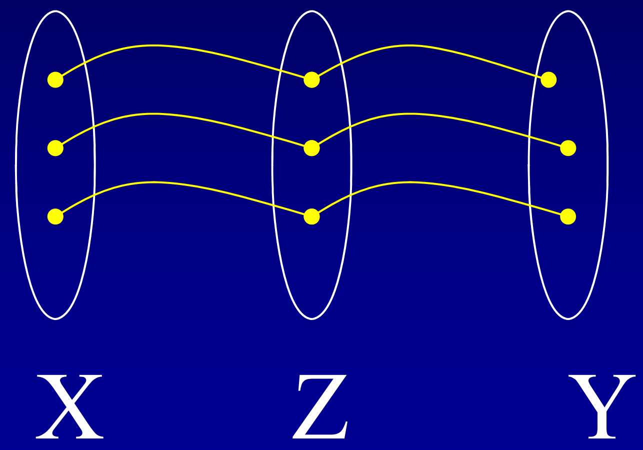
定义3.11 设G＝（V，E）是一个图，图G中两个顶点集X，Y $\subseteq$ V，P是连结顶点x，y的一条路，其中x $\in$X，y $\in$Y，如果路P的其它顶点均不属于X∪Y，称P是一条X-Y的路。特别地：当z$\in$ X∩Y，则z自身就是一条X-Y的路（该路的长度为0）。

定义3.12 设X、Y、Z $\subseteq$V，称Z为X-Y的分离集，如果任何一条X-Y的路均与Z相交。特别地：X（或Y）就是一个X-Y的分离集。

定义3.13 设G＝（V，E）为一个图，s，t ∈V为图G中的两个点，P_i（i＝1，2，…，k）为G中连结s与t的k条路，称P_i（i＝1，2，……，k）为G中从s到t 的k条内部点不交的路，如果$(P_i-\{s,t\})\cap(P_j-\{s,t\})=\Phi$，$(i\neq j$，i、$j=1,\cdots,k)$，i.e.,这k条路$P_1,\cdots,P_k$中，除了两个点s，t 外，路$P_1,\cdots,P_k$ 均为无其它公共顶点。

定义3.14 设G＝（V，E）为一个图，P，Q为图G中的两条路，称P，Q为点不交的路，如果$P\cap Q=\Phi$.

定理3.5（Menger定理）设G＝（V，E）为一个图，k是一个正整数，对于图G中任意的两个点集X，Y$\subseteq$ V，在G中存在k条点不交的X-Y的路iff G中每个X-Y的分离集至少包含k个顶点。



分离集Z中至少含有k个点。

证明:（必要性）如果图G中任意的两个点集X，Y $\subseteq$ V，在G中存在k条点不交的X-Y的路，图G中任何X-Y的分离集必包含有每一条X-Y的路上至少一个点，所以，每个X-Y的分离集至少包含k个点。

（充分性）不妨设G中存在k个点的X-Y分离集，但不包含k－1个点的X-Y分离集。

对 $\lambda(G)=|V(G)|+|E(G)|$采用数学归纳法。

①存在一个X-Y分离集Z，使|Z|=k且Z≠Y， Z≠X。令G_{xz}（G_{yz}）是由所有X-Z的路（Y-Z的路）上的点生成的子图。因Z是一个X-Y分离集，则

$V(G_{xz}) \cap V(G_{yz}) \subseteq Z$。

因Z是点数最小的X-Y分离集，且Z≠Y，于是存$v\in Y-Z$，且$v\notin G_{xz}$,所以$\lambda(G_{xz})<\lambda(G)$。此外，因为$G_{xz}$中的X-Z分离集也是G中X-Y分离集，所以$G_{xz}$中的每个分离集的点数≥k，由归纳假设，在$G_{xz}$中存在k条点不交的X-Z的路。同理，$G_{yz}$中存在k条点不交的Y-Z的路。又因为|Z|=k，于是G中存在k条点不交的X-Y的路（见构造图示）。

②每个包含k个点的X-Y分离集或者与X重合，或者与Y重合。

不妨设，某个分离集与X重合，则|X|=k，若$X\subseteq Y$，则结论成立。

若X $\not\subset$ Y，则存在x∈X－Y。因X－{x}不是分离集，则存在一条边xy，使y $\notin$ X，令G'＝G－{xy}，则 λ（G'）< λ（G）。

若G'的每个X-Y分离集至少有k个点，由归纳假设结论成立。

若G'中包含k－1个点X-Y的分离集Z，则Z∪{x} (Z ∪{y})是G中X-Y的分离集。因G中不含k－1个点分离集，则|Z∪{x}|= |Z∪{y}|=k.根据情况②的假设，必有 Z∪{x}= X和Z∪{y}=Y。于是Z中的每一个点是X-Y路，加上边xy就得到G中k条点不交的X-Y路。

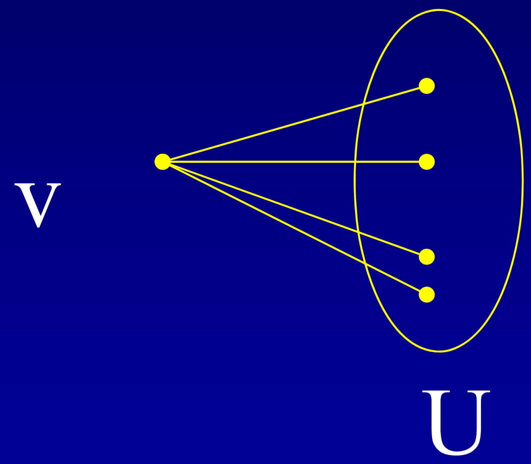
证毕

定理3.6（Menger定理）设G＝（V，E）为一个图，k是正整数，图G是k-连通的iff对于G中任意两点u、v∈ V，在G中存在k条内部点不交的路。

定理3.7（Menger定理）设G＝（V，E）为一个图，k是正整数，图G是k-边连通的iff 对于G中任意两点u、v∈ V，在G中存在k条内部边不交的路。

扇（Fan）

定义3.14设G＝（V，E）为一个图，点集U ⊂ V，v∈ V－U，所谓v-U扇是指存在|U|条v-u(任意u ∈U)路的集合，使得任何两条路仅有一个公共顶点v。



v-U扇

定理3.8 设G＝（V，E）为一个图，则G是k-连通图 iff 对于任何k个点的集合$U \subset V$及$v \in V-U$，总存在v-U扇。

引理3.9 如果G是一个k-连通图，在图G中增加一个新的点y及与y相邻的k条边后得到一个新图G’，则图G’是k-连通的

定理3.8的证明：（必要性）G是k-连通图，在G中任意取一个点$v \in V$，及含有k个点的点集U，且$v \notin U$。在原图G上构造一个新图G’：即在图G中增加一个新点y，并增加k条边使得y与U中的每一个点都有一条边相邻

则新图G’仍是k-连通图。因此，v-y有k条内部点不交的路，删除所增加的y点和k条与y相邻的边，得到一个v-U的扇。

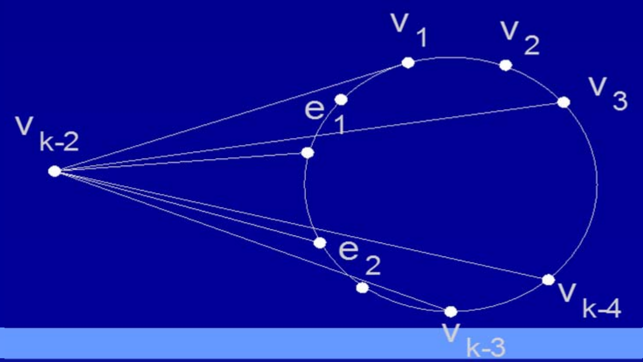
（充分性）由条件知，在G中任意取一个点v∈V，及含有k个点的点集U，且v $\notin$ U，都有v-U的扇，所以 $\delta(G)\geq k$。在图G中，任取w点及N（w），且|N(w)|=k，由已知条件，任意取z $\notin$N（w）∪{w}，则形成z-N（w）扇，故存在w-z的k条内部点不交的路，再由w与z的任意性，知G是k-连通图。

定理3.10 若图 G是 k-连通图，则 G中任何两条边 e_1,e_2 及任何 $k-2$ 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_{k-2}$ 一定在一个圈上。

证明： 对k 用归纳法

当 $k=2$ 时，G 是2-连通图，由Menger定理(或定理3.3)可得证。

当 $k\geq3$ 时，不妨设这 $k-2$ 个点不是 e_1,e_2 的端点。因 G是 k-连通的，则 $G-v$ 是$(k-1)$-连通的 。于是存在圈 μ 包含 e_1,e_2 及 $k-3$ 个点$v_1,v_2,\cdots,v_{k-3}$ 。利用定理3.8的结论存在一个 v_{k-2}-μ 扇。如图所示：



在上图中容易找到一个圈包含e_1,e_2及$v_1,v_2,\cdots,v_{k-2}$。

定理3. 11 设$G=(V,E)$是k-连通图，对于任意k个点$v_1,v_2,\cdots,v_k$，存在一个圈包含这k个点。

可以利用上面定理证明过程中找圈的方法来证明此定理。

3.4 网络流理论及其应用

网络流理论包含很多有效的算法，如最大流算法等，并有很多的实际应用。这里，利用定理6-7与最大流算法，来解决如何判断一个图是k-连通图或是k-边连通图的问题。

3.4.1 最大流问题

定义3.15 设有一个网络（有向图）N=（V，A；c；s，t），其中c：$A \rightarrow R^{+}$，对于任意的e∈A，有一个常数c(e)（称为弧e的容量），且网络中有一个发点（source vertex）s，一个收点（sink vertex）t，即s，t ∈V。如果存在一

个函数f： $A\to R^+$，满足以下条件：

①网络中任意一条弧$e\in A$，有$0\leq f(e)\leq c(e)$

②对于网络中任何除s，t以外的节点$u\in V-\{s, t\}$，有：

$\sum_{v:(u,v)\in A} f(u,v)=\sum_{v':(v',u)\in A} f(v',u)$。

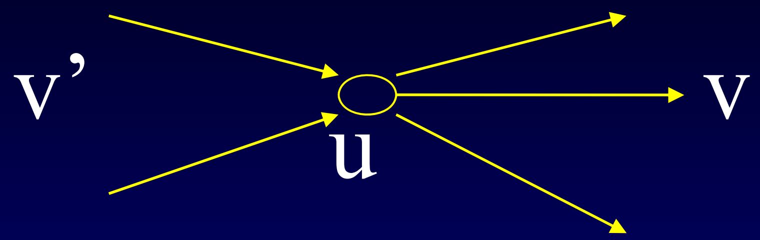
称f是N中从s到t的一个可行流（feasible flow），并称点u为平衡点。

如果f是可行流，记：

$v(f)=\sum_{u:(s,u)\in A} f(s,u)-\sum_{v:(v,s)\in A} f(v,s)$，

称v(f)为流f从s点到t点的流量（值）。

易知，$f\equiv 0$是一个可行流（零流）。

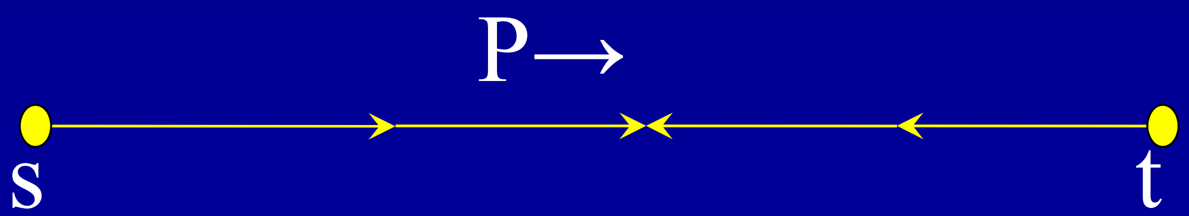


$$\sum_{v:(u,v)\in A} f(u,v) = \sum_{v':(v',u)\in A} f(v',u)$$

流的平衡点示意图

最大流问题：设有网络N＝（V，A；c；s，t），如何求N上的一个（可行）流f，使v（f）达到最大？ 或者使得v(f)=k,k为给定的正整数。

设P是网络N的基础图中从s到t的路，它对应于N中的点弧交错序列，规定路P的方向是从s到t的方向。若一条弧e∈ A，在P上出现的方向如果与P的方向相同，称e为正向弧（P^+），否则称e为反向弧（P^-）。



具有顶点和弧容量限制的最大流问题

定义3.16 设有网络N＝（V，A；c，c’；s，t），这里c：A→R^+，c’：V→R^+，如果存在f： A→R^+满足：

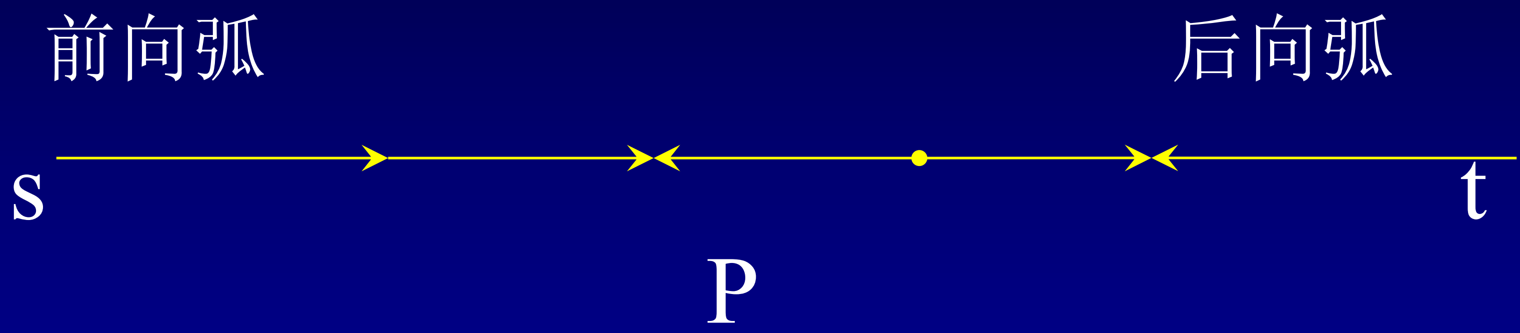
$$(1)\forall e=(u,v)\in E,\ 有:0\le f(u,v)\le c(u,v)$$

$$(2)\forall u\ne s,t,\ 有:\sum_{v:(u,v)\in A} f(u,v)=\sum_{v':(v',u)\in A} f(v',u)$$

$$(3)\forall u\ne s,t,\ 有:\sum_{v:(u,v)\in A} f(u,v)\le c'(u)$$

称 f 为一个（可行）流。

定义：设有网络N＝（V，A；c；s，t），f是N上的一个s →t的流。P是N的基础图中s到t的路，称P是N中从s到t的增广路。如果：



①对于路P上任意的正向弧$e \in P^{+}$，有$f(e)<c(e)$

②对于路P上任意的正向弧$e' \in P^{-}$，有$f(e')>0$

定理3.12 设N＝（V，A；c；s，t）为一个网络，f是N上的一个流，则f是N中从s到t的最大流 iff 网络N中不存在关于流f的增广路。

利用反圈法来寻找增广路（Ford－Fulkerson）

①初值：$X^{(0)}=\{s\}$，$f(e)=0$

②选弧条件：

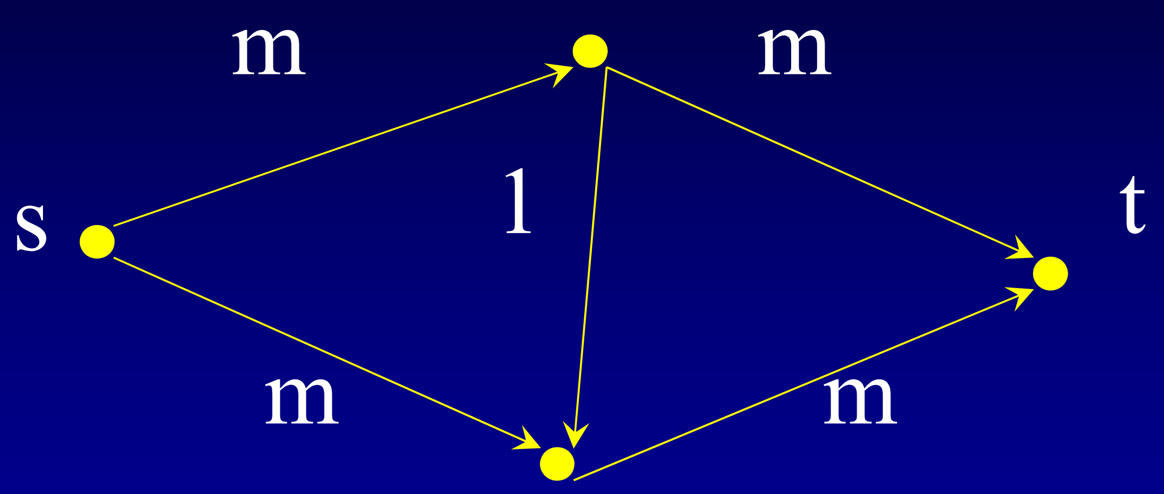
选边$e=(u,v)\in\phi^{+}(X^{(k)})$，有$f(u,v)<c(u,v)$；

选边$e'=(u',v')\in\phi^{-}(X^{(k)})$，有$f(u',v')>0$

③终止条件：

当$t\in X^{(k)}$时，找到一条或多条增广路；当$t\notin X^{(k)}$且在$\phi^{+}(X^{(k)})$或$\phi^{-}(X^{(k)})$中无弧可选，此时，f已为最大流。

但是Ford—Fulkerson算法不是一个“好算法”，我们可以看下面一个例子。



Edmonds和Karp在找增广路的过程中增加限制条件：寻找弧数最小的增广路（最短增广路）

定理3.13 设N＝（V，A；c；s，t）为一个网络，利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得N上的最大流；并且，当容量函数c是整数函数时，能够求得N上的整数最大流。

3.4.2 最大流算法的应用

应用1 设D＝（V，A）为一个有向图，s,t为D中固定顶点，k是固定正整数，如何在D中求出从s到t的k条内部弧不交的有向路？

构造网络N＝（V，A；c；s，t），对任意的弧e，取c(e)=1，利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得N上流量值为k的流f（如果最大流的流值至少为k）；由定理3.13保证流f是整数流。

注意到所有弧e满足c(e)=1，说明f(e)=0,1，于是把满足f(e)=1的弧e取出，构成集合A*，进而就得到从s到t的k条内部弧不交的有向路。

应用2 设G＝（V，E）为一个无向图，s,t为G中固定顶点，k是固定正整数，如何在G中求出从s到t的k条内部边不交的无向路?

构造一个有向图D＝（V，A），对G中的每一条边e，在D中构造两条弧e’和e’’，并取每条弧的容量为1，利用Edmonds-Karp算法能够求得N上流量值为k的流f（如果最大流的流值至少为k）；由定理3.13保证流f是整数流。

注意到所有弧e满足c(e)=1，说明f(e)=0,1，于是把满足f(e)=1的弧e取出，构成集合A*，进而就得到从s到t的k条内部弧不交的有向路，把集合A* 中的弧对应到E中的边，就得到G中从s到t的k条内部边不交的无向路。

应用3 如何判断一个图是k-边连通图？

利用定理3.7：（Menger定理）设G＝（V，E）为一个图，k是正整数，图G是k-边连通的iff 对于G中任意两点u、v∈ V，在G中存在k条内部边不交的路。

对图G中任意两个定点s和t，利用应用2中的方法，如果都存在k条内部边不交的路，则G是k-边连通图；否则G不是k-边连通图。

应用4 设D＝（V，A）为一个有向图，s,t为D中固定顶点，k是固定正整数，如何在D中求出从s到t的k条内部点不交的有向路?

方法1：可以构造网络N，使得网络N的顶点与弧全具有单位1的容量限制，然后修改Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得N上流量值为k的流f（如果最大流的流值至少为k）；由定理3.13保证流f是整数流。

注意到所有顶点与弧全具有单位1的容量限制，说明f(e)=0,1，于是把满足f(e)=1的弧e取出，构成集合A*，进而就得到从s到t的k条内部点不交的有向路。

方法2：可以构造网络N，把原来有向图D中的每个定点v对应到N中的两个顶点v’，v”，并构造一条弧（v’，v”），对于原来有向图D中的每个定点v，如果有弧（u，v），在N中构造弧（u”，v’），如果有弧（v，u），在N中构造弧（v”，u’），使得网络N的弧全具有单位1的容量限制，然后利用Ford-Fulkerson算法或Edmonds-Karp算法能够求得N上流量值为k的流f（如果最大流的流值至少为k）；由定理3.13保证流f是整数流。

注意到所有弧全具有单位1的容量限制，说明f(e)=0，1，于是把满足f(e)=1的弧e取出，构成集合A*，再对应到原来有向图D中的有向路，进而就得到从s到t的k条内部点不交的有向路。

应用5 设G＝（V，E）为一个无向图，s,t为G中固定顶点，k是固定正整数，如何在G中求出从s到t的k条内部点不交的无向路？

构造一个有向图D＝（V，A），对G中的每一条边e，在D中构造两条弧e’和e’’，并取每个顶点和每条弧的容量为1，利用Edmonds-Karp算法能够求得N上流量值为k的流f（如果最大流的流值至少为k）；由定理3.13保证流f是整数流。

利用应用4的方法，就得到G中从s到t的k条内部点不交的无向路。

应用6 如何判断一个图是k-点连通图？

利用定理3.6：（Menger定理）设G＝（V，E）为一个图，k是正整数，图G是k-点连通的iff 对于G中任意两点u、v∈ V，在G中存在k条内部点不交的路。

对图G中任意两个定点s和t，利用应用5中的方法，如果都存在k条内部点不交的路，则G是k-点连通图；否则G不是k-点连通图。