算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2015年9月

第六章 染色

6.1 边染色（edge-coloring）

定义6.1 给定一个无向图G=(V,E)，图G的k边染色是指对图G的边安排k种颜色，使得每条边安排一种颜色。也即，把图G的边集合E划分为不同的子集合E_1，E_2，…，E_k，使得每个E_i染同种颜色。

定义6.2 图G的正常边染色(proper k-edge-coloring)是指相邻的边染不同的颜色。也即，对图G的边集合E划分为不同的子集合E_1，E_2，…，E_k，每个E_i是一个匹配（边无关集）。这样的

最小正整数k称为图G的边染色数，记为 $\chi'(G)$ 。

边染色数问题：

1. 设G=(V,E)为一个图，求最小的正整数k，使得图G存在一个正常k边染色，即求边染色数$\chi'(G)$

2. 设G=(V,E)是一个图，k是给定的正整数，问G是否存在一个正常的k边染色？

一般地，图的边染色数问题NP-完备性问题，目前还没有多项式算法找到它们的最优解.但是，二部图的边染色数问题可以利用二部图匹配算法找到最优解。

定理6.1:设G=（S，T；E）是一个二部图,则

$\chi'(G)=\Delta(G)$, 其中△(G)为G的最大的度.

引理6.1（定理5.3）设G=（S，T；E）是二部图，一定存在一个最大匹配M，使得所有的最大度点都是饱和点。

定理6.1之证明：对于给定的二部图G，利用二部图匹配算法求得G的一个最大匹配M_1，对$G_1=G-M_1$再二部图匹配算法求得G1的一个最大匹配M_2，…，这样可以得到图G的边子集被划分为△(G)个集合M_1，M_2，…，$M_\triangle$，从而可对G进行△染色，说明$\chi'(G)\le\Delta(G)$ 。另方面，易知 $\chi'(G)\ge\Delta(G)$ 。故定理6.1得证。

设G=(V,E)为一个图，$\varepsilon=\{E_1,E_2,\cdots E_k\}$为G的正常k边染色，若顶点$v_j$的关联中至少有一条边$e_i$属于$E_i$，称该边$e_i$为i色边，也称颜色i在顶点$v_j$处出现. 记$G[i,j]=G[E_i\cup E_j]$，在$G[i,j]$中包含顶点v的连通分图记为$G_v[i,j]$. 用$A(v,\varepsilon)$表示在顶点v处未出现的颜色构成的集合.

定理6.1之证明二：对边数|E|进行归纳证明，即:若e是一条边，G-e是△(G-e)可染色的，则G是△(G)可染色的;若△(G-e)= △(G)-1，则结论成立。

当 $\Delta(G-e)=\Delta(G)$ 时，设e=uv，ε 是G-e的一个边$\Delta(G)$正常染色，则 $A(u,\varepsilon)\neq\phi$ 和 $A(v,\varepsilon)\neq\phi$ 。

(1)若 $A(u,\varepsilon)\cap A(v,\varepsilon)\neq\phi$ ，设 $j\in A(u,\varepsilon)\cap A(v,\varepsilon)$ 则用颜色j来染边e，则G用 ε 能够得到正常的 $\Delta(G)$ 边染色。

(2)若 $A(u,\varepsilon)\cap A(v,\varepsilon)=\phi$ ，令 $\alpha\in A(u,\varepsilon)$ 和 $\beta\in A(v,\varepsilon)$ ，则 α 在v处出现，β 在u 处出现。

因为G是二部图，有 $u\notin G_v[\alpha,\beta]$ 。把 $G_v[\alpha,\beta]$ 中的 α,β 两色互相交换，则得到G-e的另一个正常染色 ε' ，可知 $\alpha\in A(v,\varepsilon')$ 。

因为 $\alpha\in A(u,\varepsilon')$ ，于是把边e染色 α ，就得到G的一个正常 $\Delta(G)$ 边染色。

定理6.2(Vizing, Gupta) 设G=（V，E）是简单图，则 $\Delta \le \chi'(G) \le \Delta+1$。

证明: 只要证明 $\chi'(G) \le \Delta+1$ 即可。

对|E|进行归纳。设e_1是一条边，不妨设 $\Delta(G-e_1)=\Delta(G)=\Delta$ 。设G-e_1是 $\Delta+1$ 边染色的，现证G也是 $\Delta+1$边染色的。

令 $e_1=vw_1$ ，且 ε_1 是 $G-e_1$ 的一个 $\Delta+1$ 边染色，那么 $A(v,\varepsilon_1)\ne\phi$ ，$A(w_1,\varepsilon_1)\ne\phi$ 。不妨设

$$A(v,\varepsilon_1)\cap A(w_1,\varepsilon_1)=\phi$$

令$\alpha \in A(v,\varepsilon_1),\beta_1 \in A(w_1,\varepsilon_1)$ 则 β_1 在v处出现，设$e_2=vw_2$是β_1色边，去掉边e_2的染色，把边 e_1 染为β_1 色，得$G-e_2$的 $\Delta+1$ 边染色ε_2。

在 $G-e_2$中有 $\beta_1 \in A(w_2,\varepsilon_2)$。不妨设$v,w_1,w_2$属于$G[\alpha,\beta_1]$的同一分图。（否则把$G_{w_2}[\alpha,\beta_1]$中边的染色互换一下，而边$e_2$染成$\alpha$ 色，可得G的 $\Delta+1$ 边染色）。因此在ε_2中，点 w_2处最多出现 $\Delta-1$ 种颜色，故存在$\beta_2 \in A(w_2,\varepsilon_2)$。不妨设$\beta_2$ 在v出现，设 $e_3=vw_3$ 是染为 β_2 色的边。现去掉边e_3上的染色，把e_2 染成β_2 色，得到$G-e_3$的$\Delta+1$ 边染色ε_3 ,$\beta_2 \in A(w_3,\varepsilon_3)$

同样不妨设v,w_2,w_3 在 $G[\alpha,\beta_2]$ 的同一个分图

中。重复着一过程，在某一步得到 $G-e_k$ 的一个 $\Delta+1$ 边染色 $\varepsilon_k(e_k=vw_k)$，色 α 在 w_k 处出现，并存在某个 $i<k$ 使 $\beta_i\in A(w_k,\varepsilon_k),(\beta_k=\beta_i)$

同时 $\beta_i\in A(w_{i+1},\varepsilon_k),\ldots,\beta_{k-1}\in A(w_k,\varepsilon_k)$

不妨设 v,w_i,w_{i+1} 在 $G[\alpha,\beta_i]$ 的同一个分图H中（否则，把 $G_{w_i}[\alpha_1,\beta_i]$ 中的颜色互换，并染 vw_{i+1} 为色 α，vw_{i+2} 为 β_{i+1}，$\cdots$，vw_k 为 β_{k-1}，得到G的 $\Delta+1$ 边染色）。因为 $\alpha\in A(v,\varepsilon_k)$ $\beta_i\in A(w_{i+1},\varepsilon_k)$，故H是一条过 w_i 的 $v-w_{i+1}$ 路。

因为$\beta_i(=\beta_k)\in A(w_k,\varepsilon_k)$，所以$w_k\notin H$，从而$G_{w_k}[\alpha,\beta_i]$与$H$是点不交的。把$G_{w_k}[\alpha,\beta_i]$中的颜色互换，得$G-e_k$的$\Delta+1$边染色$\varepsilon_k{}'$，使$\alpha\in A\left(w_k,\varepsilon_k{}'\right)$用$\alpha$染边$e_k=vw_k$，则由$\varepsilon_k{}'$就得到G的一个$\Delta+1$正常染色。 证毕。

定理6.3 (Thomason,1978) 图$K_{1,k}$是仅有的唯一k边可染色图(k≧4).

6.2 点染色（vertex-coloring）

定义6.3 给定一个无向图G=(V, E)，图G的k点染色是指对图G的顶点安排k种颜色，使得每个顶点安排一种颜色。也即，把图G的顶点集合V划分为不同的子集合V_1，V_2，…，V_k，使得每个V_i中的元素染同种颜色。

定义6.4 图G的正常边染色(proper k-coloring)是指相邻的顶点染不同的颜色。也即，对图G的顶点集合V划分为不同的子集合V_1，V_2，…，V_k，每V_i是一个独立集 。这样的最小正整数k称为图G的点染色数，记为 $\chi(G)$ 。

点染色数问题:

1. 设G=(V, E)为一个图, 求最小的正整数k, 使得图G存在一个正常k点染色，即求点染色数 $\chi(G)$

2. 设G=(V, E)是一个图，k是给定的正整数, 问G是否存在一个正常的k点染色?

一般地，图的点染色数问题NP-完备性问题，目前还没有多项式算法找到它们的最优解。当图G=(V,E)为二部图，有 $\chi(G)=2$。对一般图G=(V,E)，有 $2\le\chi(G)\le\Delta(G)+1$ 。

定理6.4设G是一个图，则 $\chi(G)\le \max\delta(G')+1$，这里对G的所有子图 G' 取最大。

证明：令 $k=\max\delta(G')$。取 $G'=G$，可知 $k\ge\delta(G)$。取点 v_1 满足 $d_G(v_1)\le k$。令 $G_1=G-v_1$，由k的定义，在图 G_1 中存在点 v_2，满足 $d_{G_1}(v_2)\le k$。令 $G_2=G_1-v_2$，重复上述过程，把V中的顶点排列为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，并且有性质：v_j 与 $\{v_{j+1},\cdots,v_n\}$ 中至多k个点相邻，即 $d_{G_{j-1}}(v_j)\le k$。下面用k+1种颜色依次给顶点染色。开始时，用某种颜色染顶点 v_n，令 $G_{n-1}=G[\{v_n\}]$。

设有子图 $G_j = G\left[\{v_n, v_{n-1}, \cdots, v_{j+1}\}\right]$ 已有正常k+1点染色, 因为$d_{G_{j-1}}(v_j) \le k$, 说明 $A(v_j, G_j) \ne \varnothing$ ， 从而用颜色 $\alpha \in A(v_j, G_j)$ 来对顶点 v_j 进行染色, 于是图 $G_{j-1} = G\left[\{v_n, v_{n-1}, \cdots, v_{j+1}, v_j\right]$ 可正常k+1染色；重复上述过程可得到G的正常k+1染色, 故 $\chi(G) \le k+1$ 。

定理6.5 设G=(V,E)为一个（连通）图,则

$$2 \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

例如　设K_n为n个顶点的完全图，则 $\chi(K_n)=n$ ，即 $\chi(K_n)=\Delta(K_n)+1$ 。

例如　C_n是具有n个顶点的圈，　则（1）当n为偶数时，$\chi(C_n)=2$ ；（2）当n为奇数时，$\chi(C_n)=3$

完全图和奇圈的点染色数等于△(G)+1；再没有别的图了。

定理6.6(Brooks)设G=(V,E)为一个图,并且G不是完全图和奇圈,则 $\chi(G)\le\Delta(G)$，△(G)表示G的顶点的最大度。（证明略）

6.3 区间图的染色

定义6.5（区间图）设$G=(V, E)$是一个图，称G是一个区间图，如果对于任意$v\in V$，在直线上对应于一个区间I_v，对于每两个顶点$u, v\in V$，当$uv\in E$当且仅当$I_v \cap I_u \neq \emptyset$，此时称$\{I_u\}$为区间图G的一种表达方式。

如下图的区间图表达方式：

这里区间图表达方式为：$G=(V, E)$，其中

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$和

$E=\{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$

可求得 $\chi(G)=3$ 。

问题1：设G是区间图，则 $\chi(G)=?$

问题2：设G是区间图，则最大团数 $\omega(G)=?$

一般地，设G是任意图，则有 $\omega(G)\le\chi(G)$。

问题3：设G是一个区间图, 求其最大独立集。

在区间图G中，对于任意顶点$v\in V$，可取 $I_v=$（b_v, d_v)，可设b_v, d_v为正整数。给定区间图G及其表达式，要求G的最大独立集、最大团及染色数。

定理6.7 设G为一个区间图，则$\omega(G)=\chi(G)$。

设G为一个区间图，构造一个网络图D（如下），则G中的最大独立集的元素个数等于网络D中从0到N流量为1的最小费用流的费用值的相反数。

（1）已有最大独立集 I，可得到流量为1的最小费用流f费用=-$|I|$。

网络图的具体构造方法如下：

构造一个网络：$D=(V_D, A_D, C_D, P_D, 0, N)$

$V_D=\{0, 1, 2, \ldots, N-1, N\}$ （$N\le 2n-1$）

$A_D=$（1型）$\{(b_i, d_i) \mid 1\le i\le n\}\cup$

（2型）$\{(j, j+1) \mid 1\le j\le N-1\}$

$C_D: A_D\to R^+$，这里 $C_D(e)=1$

$P_D: A_D\to R$，（1型）这里 $P_D(e)=-1$

（2型）这里 $P_D(e)=0$

(2)给定D中从0到M的流量值为1的整数流，来构造区间图G的独立集

$$I=\{(b_v, d_v) \mid f(b_v, d_v)=1,\ v\in V\}$$

则I是一个独立集，$|I|$等于流f的费用的相反数。

利用找最大独立集的方法，找到一个最大独立集L，把I中所有的区间图用颜色1去染色，重复上述过程直到所有区间图被染色，此时的染色数等于最后一个区间图使用的颜色号码。

另一种算法：(Greedy算法)

对区间图中所有的右端点进行排序，如果两 个区间图右端点相同则看其左端点。把所有区间排列为$I_1 \le I_2 \le \cdots \le I_n$；然后从标号最小的区间开始染色：如果区间没有重叠，就用到目前为止的最小标号染色；如果区间有重叠，就用到目前为止未使用的最小标号染色。这样得到的最大标号，就是区间图的染色数。

说明：因为区间图是一种完美图(perfect graph)。