算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2015年9月

第五章 匹配

5.1 匹配 (Matching)

定义5.1 设$G=(V, E)$是一个图，称 $M\subseteq E$ 是G 的一个匹配(matching)，如果M 中任何两边都没有公共端点。特别，$\emptyset$, $\{e\}$是G 的匹配。

设M为G的一个匹配，称$e\in M$ 为图G的匹配边，称$e'\in E-M$ 为图G的自由边，即未匹配边。对顶点$v\in V$，如果存在$e\in M$，使得v为e 的端点，称v为已盖点（匹配点），否则称未盖点。

定义5.2 设$G=(V, E)$是一个图，M 称为图G的最大匹配，如果对任意匹配M'，均有|M|≥|M'|. 进而，可称M 是完美匹配，若图G的每一个顶点都是已盖点。

定义5.3 设$G=(V, E)$是一个图，M是G的一个匹配，如果任意一条不在M中的边均与M中的某条边关联,则称M是一个极大匹配.

最大匹配M是一个极大匹配；反之不然.

最大（基数）匹配问题:设有图$G=(V, E)$，如何求一个匹配M，使得|M|达到最大。

定义5.4 设M为图$G=(V, E)$的一个匹配，u为一个未盖点，P是以u为端点的一条路，称P为G中关于M的一条交错路(M-alternating path)，如果路P中出现的边交替为自由边、匹配边、自由边、匹配边，……；特别，若P能够连接两个未盖点u和v，则称P为增广路(M-augmenting path)。

定理5.1(Berge)设$G=(V, E)$是一个图，M是G的一个匹配，则M是G的最大基数匹配当且仅当图G中不存在关于M的增广路。

证明：（充分性）假设M是G的最大基数匹配，但图G中还存在增广路$P=v_1v_2\cdots v_{2k+1}v_{2k+2}$，其中$v_{2i-1}v_{2i}$为自由边，$v_{2i}v_{2i+1}$为匹配边，$i=1,\cdots,k$，构造集合$M'=M\oplus E(P)=(M-E(P))\cup(E(P)-M)$，可知$M'$是$G$的一个匹配，并且$|M'|=|M|+1$，矛盾。

（必要性）设G中不存在增广路，但M不是最大匹配，即$|M'|>|M|$。不妨设$|M'|=|M|+1$.
考虑$H=G[M\oplus M']$，对于图H中的每个顶点u，则$d_H(u)\leqslant 2$，于是H被划分为一些孤立点、一些路和一些偶圈的并集。由于$|M'|=|M|+1$可知，H中存在一条路P，使得$|M'(P)|=|M(P)|+1$，从而P是关于M的增广路，得出矛盾。

5.2 二部图的匹配算法

问题 设$G=(S, T; E)$为二部图，求G的最大（基 数）匹配。

为方便，称S中的点为S型点，称T中的点为T型点，也称M中的边为M边，称E-M中的边为非M边

因为增广路的长度总为奇数，当二部图G有增广路时，其两个端点分别是S型点和T型点。

可用反圈法求二部图的匹配：

（1）选初值：取$X^{(0)}=\{u\in S \mid u\text{是关于}M\text{的未盖点}\}$

（2）在$\Phi(X^{(k)})$中的选边u_iu_j原则, 这里

$(u_i\in X^{(k)}, u_j\in V-X^{(k)})$：

（2.1）若$u_i \in X^{(k)} \cap S$，则只能选以u_i为端点的非M边。

（2.2）若$u_i \in X^{(k)} \cap T$，则只能选以u_i为端点的M边。

（3）若在某步出现下列情况之一时，停止。

情形1 $X^{(k)}$中有T型未盖点，即已找到增广路，进行增广匹配。

情形2 上述情形1不存在，而$\Phi(X^{(k)})$中无边可选，说明G不存在关于M的增广路，进而M为最大匹配。

反圈法求二部图G的最大匹配的正确性：

设情形1出现，因为反圈法的每步保证（$X^{(K)}$，$E^{(K)}$）是森林，其中每棵子树都以$X^{(0)}$中的点为根，从而根与任一点之间的唯一路必是交错路（这样的树称为交错树）。故，若有某个非饱和的T型点属于$X^{(k)}$，则该点与树根的唯一路就是一条增广路。

设情形2出现，取$X^*=X^{(k)}$，$X^c=V-X^{(k)}$。记$A_1=S\cap X^*$，$A_2=T\cap X^*$，$A_3=S\cap X^c$，$A_4=T\cap X^c$。于是得到四个论断：

1. 所有非饱和的S型点都在A_1中；

2. 所有非饱和的T型点都在A_4中；

3. $[A_1, A_4]$为空集；

4. $[A_2, A_3] \cap M = \Phi$

（否则，$\Phi(X^*)$中出现可选边）。

定理5.2 上述反圈法能够求得二部图 $G=(S, T; E)$的最大（基 数）匹配。

对情形2出现时图的结构进行分析，可得到

定理5.3 设$G=(S, T; E)$是二部图，一定存在一个最大匹配M，使得所有的最大度点都是饱和点。

证明：令M^*是图G中的最大匹配，使得M^*含有最多的最大度点，则M^*满足定理要求。若不然，设存在一个最大度点v不是饱和点，不妨设$v\in S$，可设v是S中仅有的非饱和点。对匹配M^*应用反圈法，因M^*为最大匹配，则情形2出现。由论断1-4可知，$|A_1|=|A_2|+1$，此时A_1中必有某个饱和点不是最大度点（否则有

$$|A_1|\Delta(G)=\sum_{u\in A_1}d(u)\le\sum_{u\in A_2}d(u)\le|A_2|\Delta(G)$$

这与$|A_1|=|A_2|+1$矛盾）。设v_i是A_1中不是最大度点，记P为算法中得到的交错路（$v-v_i$），则P是长度为偶数的交错路。令$M'=M^*\oplus E(P)$，则关于M'，v是饱和点，这与M^*满足的选取矛盾。

推论5.1 k正则二部图必有完美匹配。

推论5.2 (Hall)在二部图$G=(S,T;E)$中，存在一个匹配M，使得S中不含非饱和点iff对任意$X\subseteq S$，有$|X|\le|N(X)|$.

5.3 二部图匹配算法的应用

定义5.4 设$G=(V,E)$为一个图，$C\subset V$，称C为G的一个点覆盖，如果G中的任何一条$e=uv$，均有或者$u\in C$，或者$v\in C$.

最小点覆盖问题 给定一个图$G=(V,E)$，如何寻找图G的一个点覆盖C，使$|C|$达到最小.

定义5.5 设$G=(V,E)$为一个图，$I\subset V$，称I为G的一个独立集，如果I中的任何两个点都不相邻.

最大独立集问题 给定一个图$G=(V,E)$，如何寻找图G的一个独立集I，使$|I|$达到最大.

最小点覆盖问题和最大独立集问题都是NP-完备性问题，目前还没有多项式算法找到它们的最优解.但是，二部图的最小点覆盖问题和最大独立集问题可以利用二部图匹配算法找到最优解。

定理5.4 下面算法能够求得二部图$G=(S, T; E)$最小点覆盖和最大独立集。

二部图的最小点覆盖问题和最大独立集的求解算法：

1. 在给定的二部图G上，利用反圈法找到G的一个最大匹配M，并且得到相应的A_1，A_2，A_3，A_4；
2. 取集合$C=A_2 \cup A_3$，于是C就是图G的最小点覆盖集合；
3. 取集合$I=A_1 \cup A_4$，于是I就是图G的最大独立集。

5.4 赋权二部图的匹配算法

定义5.5 设$G=(V, E)$是一个赋权图，$w: E\to R^+$，M是G的一个匹配，M称为赋权图G的最优匹配，如果对任意匹配M'，均有$w(M)\geq w(M')$.

一般地，最优匹配M不一定是一个最大匹配；反之亦然.

最优匹配问题:设有图$G=(V, E)$是一个赋权图，如何求一个匹配M，使得w(M)达到最大。

这里，利用最小费用流算法来设二部赋权图的最优匹配。

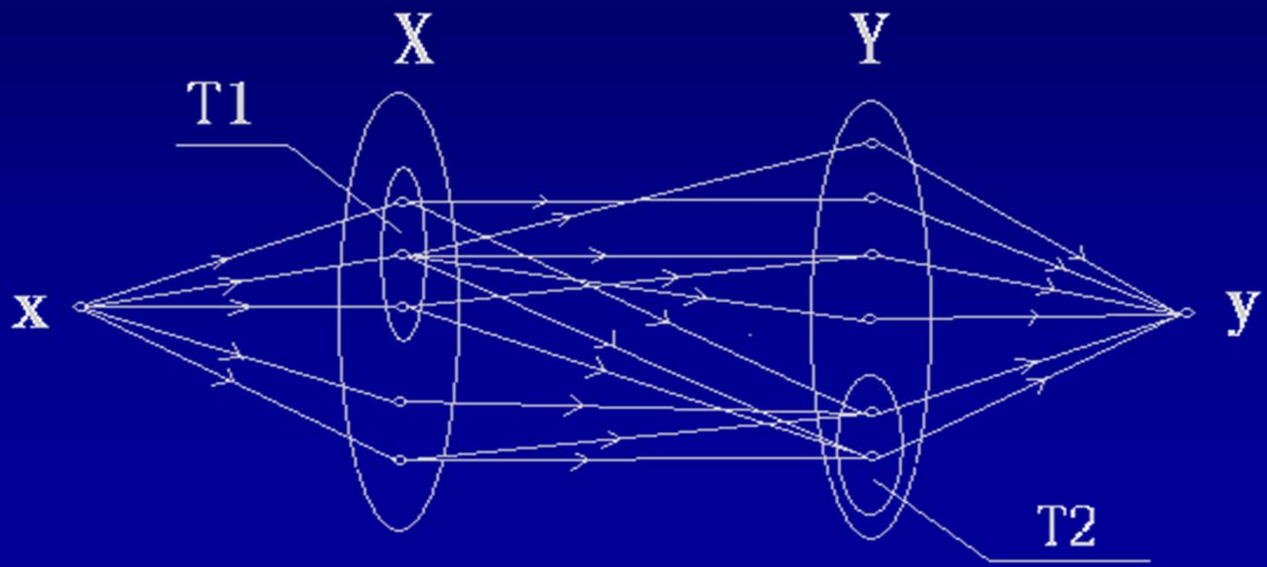
设$G=（S，T；E；w）$是一个赋权二部图，w：E→R^+，不妨设G是一个完全二部图，否则，增加上一些边，规定其权重为0；进一步，不妨设|S|=|T|，否则，增加上一些顶点和一些边，规定其权重为0；于是得到图G是完全二部图$K_{n,n}$.

于是，在二部图G上寻找最优匹配就是在二部图G上寻找最优（最大权重）的完美匹配。

对于给定的完全二部图G，对G中每条边e的权重改变为$w^*(e)=d-w(e)$，这里d为比较大的正数，于是赋权二部图$G=（S，T；E；w）$上的最大权重完美匹配就对应于赋权二部图$G=（S，T；E；w^*）$上的最小权重完美匹配。从而可以利用

最小费用流算法来求二部赋权图的最小权重完美匹配。

设G是给定的完全二部图$K_{n,n}$，其上的最小权重完美匹配M一定含有n条边，我们构造一个网络D_G，于是得到下面结果。



定理5.5 图G 的最大匹配数目n恰好等于D_G中整数最大流的流值n，并且G中的最小权重完美匹配的费用恰好是网络D_G的流值为n的最小费用；反之亦然。

证明：（充分性）设M为G的一个完美匹配，构造D_G 中的一个整数流，对于$uv \in M$，取$f(u,v)=1$，$uv \notin M$，取$f(u,v)=0$。对于$su \in E$，u为已盖点，取$f(s,u)=1$，对于u为未盖点，取$f(s,u)=0$。对于$vt \in E$，v为已盖点，取$f(v,t)=1$，对于v为未盖点，取$f(v,t)=0$。可以检验f为D_G的一个可行流，并且$V(f)=n$。

反之，若f是D_G上的整数流，构造G中的边集合$M=\{uv\in E \mid f(u,v)=1\}$。可检验M为$G$的一个匹配，并且$v(f)=n$。

容易得知，G中的最小权重完美匹配的费用恰好是网络D_G的流值为n的最小费用；反之亦然。

5.5 一般图的匹配算法

最大匹配问题:设有图$G=(V, E)$，如何求一个匹配M，使得|M|达到最大?

定理5.1(Berge)设$G=(V, E)$是一个图，M是G的一个匹配，则M是G的最大基数匹配当且仅当图G中不存在关于M的增广路。

算法思路：设M为图G的一个匹配，反复利用定理5.1(Berge)，进行增广匹配运算，直到没有关于当前匹配M的增广路为止。

具体步骤在这里省略，可参考下面文献。

1. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Elsevier Science Publishing Co. Inc.,1999.

2. 田丰、马仲蕃，图与网络流理论，科学出版社，1987.

3. D.B. West, Introduction to Graph Theory (第二版)， PRENTICE HALL, 2001.

最优匹配问题：设有图$G=(V, E)$ 是一个赋权图，w：E→R^+，如何求一个匹配M，使得w(M) 达到最大？

算法思路：对于给定的匹配M，可以利用线性规划理论，建立新的图，然后在新图上利用求最大匹配问题算法，从而可以进行求解。

具体步骤在这里省略，可参考下面文献。

4. C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity (第二版), Printice-Hall, 2000.