算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2015年9月

第七章　平 面 图

7.1　图的可平面性

定义7.1 设G=（V，E）是一个图，称G是可平面图的，如果存在一个平面嵌入，使得G中的任何两条边在平面上所对应的Jordan曲线（除端点外）都没有交点，称G具有相应的平面嵌入。

注意：对于同一个平面图来说，可能存在多种平面嵌入，至少有两种。

例　图$G=K_5$-e和$K_{3,3}$-e是平面图，它有多种平面嵌入。但是，　$G=K_5$和$K_{3,3}$不是平面图。

平面图G的边将平面剖分为若干个连通的区域，每个这样的区域称为图G的一个面。对于每个平面图，恰好有一个面是无界的，称为外平面，其余的面称为内平面。

定义7.2 设G=（V，E）是一个平面图，称G是极大平面图，如果$G \cup \{uv\}$不是平面图，这里 $uv \notin E(G)$。

问题：如何判定一个平面图G是极大图？

定义7.3 设G=（V，E），是一个平面图称G是一个三角剖分图，如果G的任何一个面的边界是一个3-圈

定理7.1 设G是平面图，则G是极大图当且仅当G是一个三角剖分图。

下面构造平面图的对偶图：

设G=（V，E）是一个平面图，可构造G的对偶图G*=(V*, E*), 其中V*={ $F_i \mid F_i$ 是G的一个面}和 $E^* = \{F_iF_j \mid F_i, F_j \in V^*, F_i$与$F_j$有一条公共边}。易知, (G*)*=G。

设G是平面图，则其对偶图G*的顶点数等于G的面数，G与G*的边数相等，对偶图G*的顶点v*的度$d_{G*}(v^*)$等于G中相应面F的度$d_G(F)$。

定理7.2 设G=（V，E）是平面图，则G

$$\sum_F d(F) = 2|E|$$

这里对G的面F求和。

Tait猜想（1880）每个3点连通的3正则平面图都有Hamilton圈。

Tutte在1946年给出一个46阶的反例，否定了Tait猜想。

定理7.3 （Grinberg，1960）设G=（V，E）是n阶平面图，G含有Hamilton圈C，以f_i'、f_i''分别表示在圈C的内部和外部的度为i的面数，则

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(f_i' - f_i'') = 0$$

定理7.4 （Tutte,1956）任何一个4-点连通的平面图都有Hamilton圈。

定理7.5 （Thomassen,1983）任何一个4-点连通的平面图都是Hamilton-连通的。

7.2 Euler公式

定理7.6（Euler公式）设G=（V，E）是连通的平面图，则 $|V|-|E|+|F|=2$，这里F是所有平面构成的集合.

证明：对面数 $f=|F|$ 进行数学归纳证明。

（1）当f=1时，则G是一棵树，有 $|E|=|V|-1$，于是 $|V|-|E|+|F|=|V|-|V|+1+1=2$。

（2）假设f=k时，命题成立，即

$$|V|-|E|+k=2.$$

对于 $f=k+1\geqslant 2$，于是G存在一个圈C，取 $e\in E(C)$，去掉图G的圈C上的一条边e。考虑图G-e，这里G-e仍为连通图，则 $|V(G-e)|-(|E|-1)+k=2$，即 $|V|-|E|+(k+1)=2$。 证毕

定理7.7（Euler公式）设G=（V，E）是平面图，且含有c(G)个连通分支，则 |V|-|E|+|F|= c(G)+1,这里F是G的面构成的集合，|F|是面数。

推论7.1 设G=(V,E)是（连通）平面图，若G的围长为g（3≦g<+∞），则

$$|E(G)|\le \frac{g}{g-2}(n-2)$$

证明：由于 $2|E|=\sum_{i=1}^{|F|} d(f_i)\ge g|F|$，有 $|F|\le \frac{2|E|}{g}$

代入Euler公式， 有

$$|E|\le n+|F|-2\le n+\frac{2|E|}{g}-2$$

从而得到

$$|E| \le \frac{g}{g-2}(n-2)$$

推论7.2 设G=(V,E)是一个简单平面图,当 $|V|\geqslant 3$时,有 $|E|\leqslant 3|V|-6$。(此时 $g\geqslant 3$)

推论7.3 设G=(V,E)是一个简单平面图，则 $\delta(G)\leqslant 5$。

证明: 假设 $\delta(G)\geq 6$，则推出

$$|E|=\frac{1}{2}\Sigma d(v_i) \ge \frac{1}{2}n\delta \ge 3n > 3n-6$$

而G是平面图，由推论7.2， 有 $|E|\leqslant 3|V|-6$，矛盾。 故 $\delta(G)\leq 5$。

推论7.4 图K_5和图$K_{3,3}$不是平面图。

证明：假设 K_5 是平面图，易知，|V|=5，|E|=10。应用推论7.2，有 |E|≤3|V|-6，即10≤15-6=9，矛盾。 说明K_5不是平面图。

假设 $K_{3,3}$ 是平面图，则|E|=9，|V|=6；由推论7.2|E|≤[g/(g-2)](|V|-2)得到

9≤4[g/(g-2)]，说明 g≤19/5，但是g是正整数$K_{3,3}$，从而g≤3，而 $K_{3,3}$中最短圈的长度为4。从而说明不是平面图。

推论7.5 Petersen图不是平面图。

证明：假设Petersen是平面图，则$|V|=10$，$|E|=15$，其围长$g=5$，由推论7.1得到$|E|\le[g/(g-2)](|V|-2)$，即$15\le[5/(5-2)](10-2)=40/3$，矛盾，从而说明Petersen不是平面图。

7.3 **Kuratowski 定理**

定义7.4（加细图）设G=(V,E)是一个图，在G的一些边上增加一些新的顶点，得到的新图H称为图G的加细图。

对于 $K_5, K_{3,3}$ 的所有加细图，它们均是非平面图。

定理7.8 （**Kuratowski，1930**）设G=(V,E)是一个图，则G=(V,E)是平面图的充分必要条件是G不含 图K_5和图$K_{3,3}$及其加细图。

7.4 平面图的染色

给定一个平面图G=(V,E)，可对G进行点(边)染色；同样，可以对G进行面染色。

定义7.5 给定一个平面图G=(V,E)，图G的正常k面染色(proper k-face-coloring)是指对图G的面安排k种颜色，每个面安排一种颜色，使得每两个相邻的面染成不同的颜色。这样的最小正整数k称为图G的面染色数，记为 $\chi^*(G)$。

四色猜想：任意给定一个平面图G，是否能对G的面使用4种颜色进行正常染色?

利用平面图与其对偶图的关系，有

$$\chi^*(G)=\chi(G^*)$$

定理7.9（四色定理，Appel，Hakan and Koch,1977）每一个平面图都是4点可染色的。

证明：（采用计算机来构造多种构型，略）

定理7.10（五色定理，Heawood，1890)每一个平面图都是5点可染色的。

证明：（对图G的顶点数n进行归纳证明）

当n≤5时，容易知道图G是5点可染色的。下设n≥5。因为G是平面图，由推论7.3知道δ(G)≤5，则不妨设δ(G)=5（理由？）。

令点v满足d(v)＝δ(G)＝5。取H=G-v，则H是n-1阶平面图，利用归纳假设，H是5点可染色的，即设$\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$是H的一个正常5点染色，V_i其中的顶点称为i色点。因为d(v)=5，记$N_G(v)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，可以得到$N(v)\cap V_i\neq\Phi$ i=1, 2, …, 5（理由？），不妨设$v_i\in V_i$，如图

考虑图$G_{1,3}=G[V_1\cup V_3]$。如果v_1,v_3不在图$G_{1,3}$的同一个分图中，则把v_1所在分图的1色换成3色，把3色换成1色，于是得到H的另一个正常5点染色$\{V_1',V_2',V_3',V_4',V_5'\}$，这里$v_1,v_3\in V_3'$。

于是 $\{V_1^{'} \cup \{v\}, V_2^{'}, V_3^{'}, V_4^{'}, V_5^{'}\}$ 就是G的一个正常5点染色。

如果v_1,v_3在图$G_{1,3}$ 的同一个分图中，于是存在一条（v_1—v_3）路P，使得 $V(P) \subseteq V_1 \cup V_3$。因为圈 $C: vv_1Pv_3v$ 把平面划分成两个区域，而v_2, v_4分别属于不同的区域。

考虑图$G_{2,4} = G[V_2 \cup V_4]$ ，则点v_2,v_4不可能在图$G_{2,4}$的同一个分图中，类似上面的方法，可以得到G的一个正常5点染色。 证毕

推论7.6 每个平面地图是5面可染色的。