算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2013年9月

参 考 书

1. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Elsevier Science Publishing Co. Inc.,1999.
2. 田丰、马仲蕃，图与网络流理论，科学出版社，1987.
3. D.B. West, Introduction to Graph Theory (第二版)， PRENTICE HALL, 2001.
4. C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity (第二版), Printice-Hall, 2000.

内 容 摘 要

第七章 独立集和团

第八章 平面图

第九章 有向图

第十章 网络理论

第十一章 NP-完备性理论

第一章 图和子图

1.1 图与简单图

现实世界的许多事例用图形来描写可能是方便的,这种图形是由一个点集以及这个点集中的某些点对的连线构成的.

例如 点可以表示人,连线表示一对朋友;或者用点表示通讯站,而连线表示通讯线路.注意:在这类图形中,人们主要感兴趣的是给定两点是否有一根连线,而连接的方式则无关紧要.这类事例的数学抽象就产生了图的概念.

定义1.1 图(graph)G是指由非空有限集合V和V中某些元素的无序对的集合E构成的二元组(V,E)，记为G= (V,E)。V称为G的顶点集合(vertex set)，其中的元素称为G的顶点(vertex)。 E称为G的边集(edge set)，其中的元素称为G的边(edge)。

如果$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则E中元素e与V中某两个元素构成的无序对$\{v_i,v_j\}$相对应，记$e=v_iv_j$或$e=v_jv_i$。

图可以用图形来表示，用小圆点(圈)表示

G的顶点，用小圆点之间的线段表示G的边。

例如 图1.1就表示图G=(V，E)，其中 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$,其中 $e_1=v_1v_2$, $e_2=v_1v_2$, $e_3=v_2v_3$, $e_4=v_3v_4$, $e_5=v_4v_5$, $e_6=v_5v_2$, $e_7=v_4v_4$.

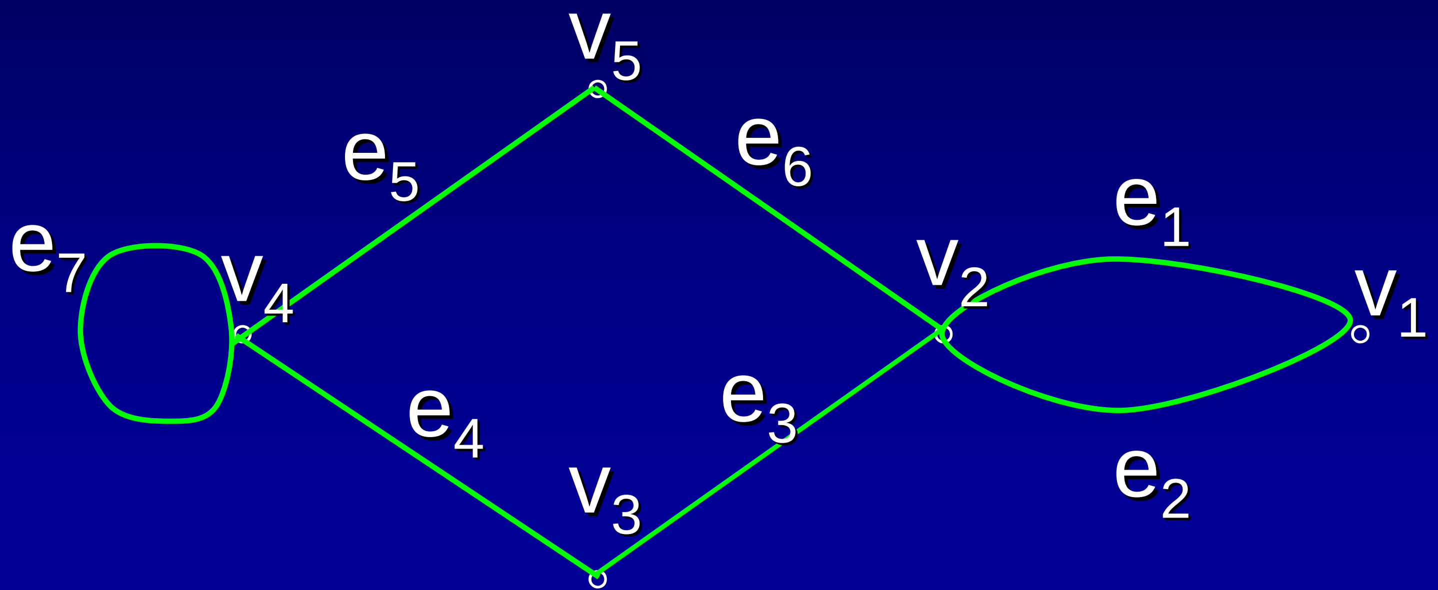


图1.1图的图形表示

关系:设V为一个集合,称R是V上的一个关系,如果R⊂V×V,这里V×V={(x,y)︱x,y∈V}。进而R满足对称性,如果(x,y)∈R,有(y,x)∈R。

图G=(V,E)可认为是V上的对称关系图。

设G=(V,E)是一个图,若$e=v_iv_j\in E$,则称顶点v_i和v_j是相邻的(adjacent),并称v_i和v_j为边e的端点(end-vertex),也称e与v_i,v_j是关联的(incident).若e_1, $e_2\in E$,且e_1和e_2有公共的端点,则称e_1与e_2是相邻的. 我们把G中所有与顶点v相邻的顶点的集合称为v的邻域(neighbors),记为$N_G(v)$或简

记为N(v).

特别，两个端点重合的边称为环(loop)；如果有两条边的端点是同一对顶点,则称这两条边为重边(multiple edges)。

既没有环也没有重边的图称为简单图(simple graph)；没有环的图称为无环图(unlooped graph)；边集为空集的图称为空图(empty graph)，至少有一条边的图称为非空图(nonempty graph)。

一个图的顶点数称为该图的阶(order)。

1.2 子图

设$G=(V,E)$为一个图,$H=(V',E')$也是一个图,称H为G的一个子图(subgraph),如果$V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$,并且对任意的边$e=uv\in E'$必须有$u,v\in V'$,记为$H\subseteq G$, 此时也称G为H的母图(super graph).

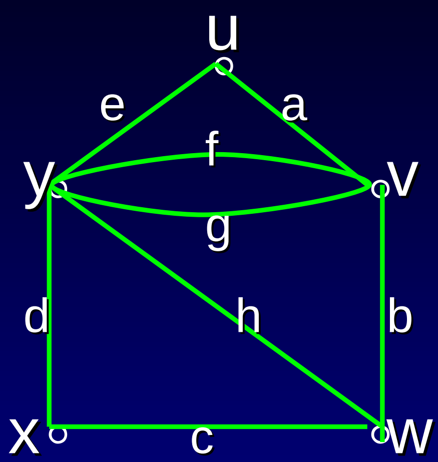
设$H=(V',E')$为$G=(V,E)$的一个子图,称H为G的生成(支撑)子图(spanning subgraph),如果$V'=V$.

设$G=(V,E)$是一个图,$V'\subseteq V$,构造一个新图

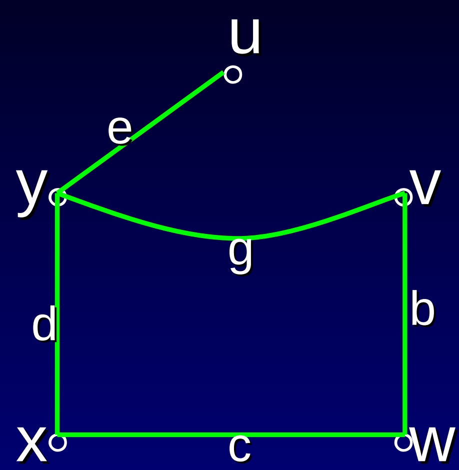
H’=(V’,E’),其中E’={uv∈E｜u,v∈V’},称H为图G中由V’所诱导得到的子图(subgraph reduced by V’),记为H’=G[V’].

设G=(V,E)为一个图,E’⊆E,构造一个新图H=(V’,E’),其中V’={u,v∈V｜e=uv∈E’}，称H为E’给出的边诱导子图(edge-induced subgraph by E’),记为H=G[E’].

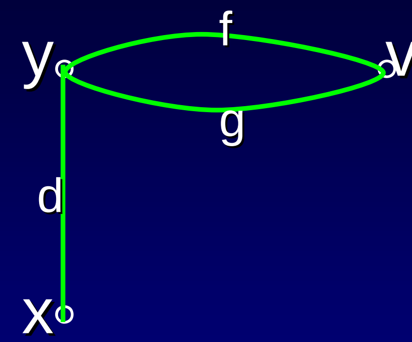
下图中画出了这些不同类型的子图：图1.2



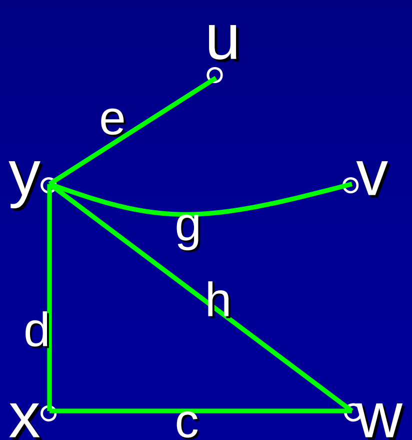
图G



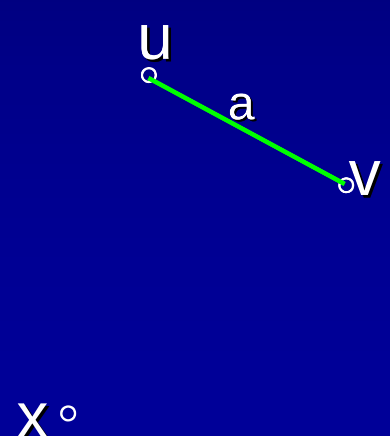
G的一个生成子图



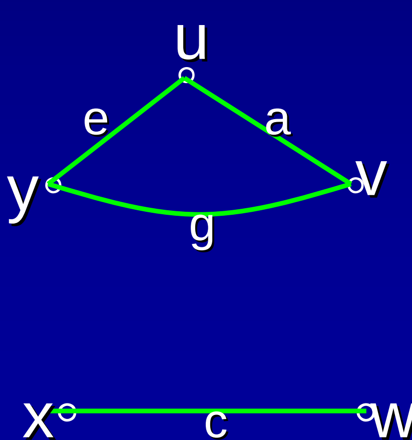
G－{u,w}



G－{a,b,f}



导出子图G[{u,v,x}]



边导出子图

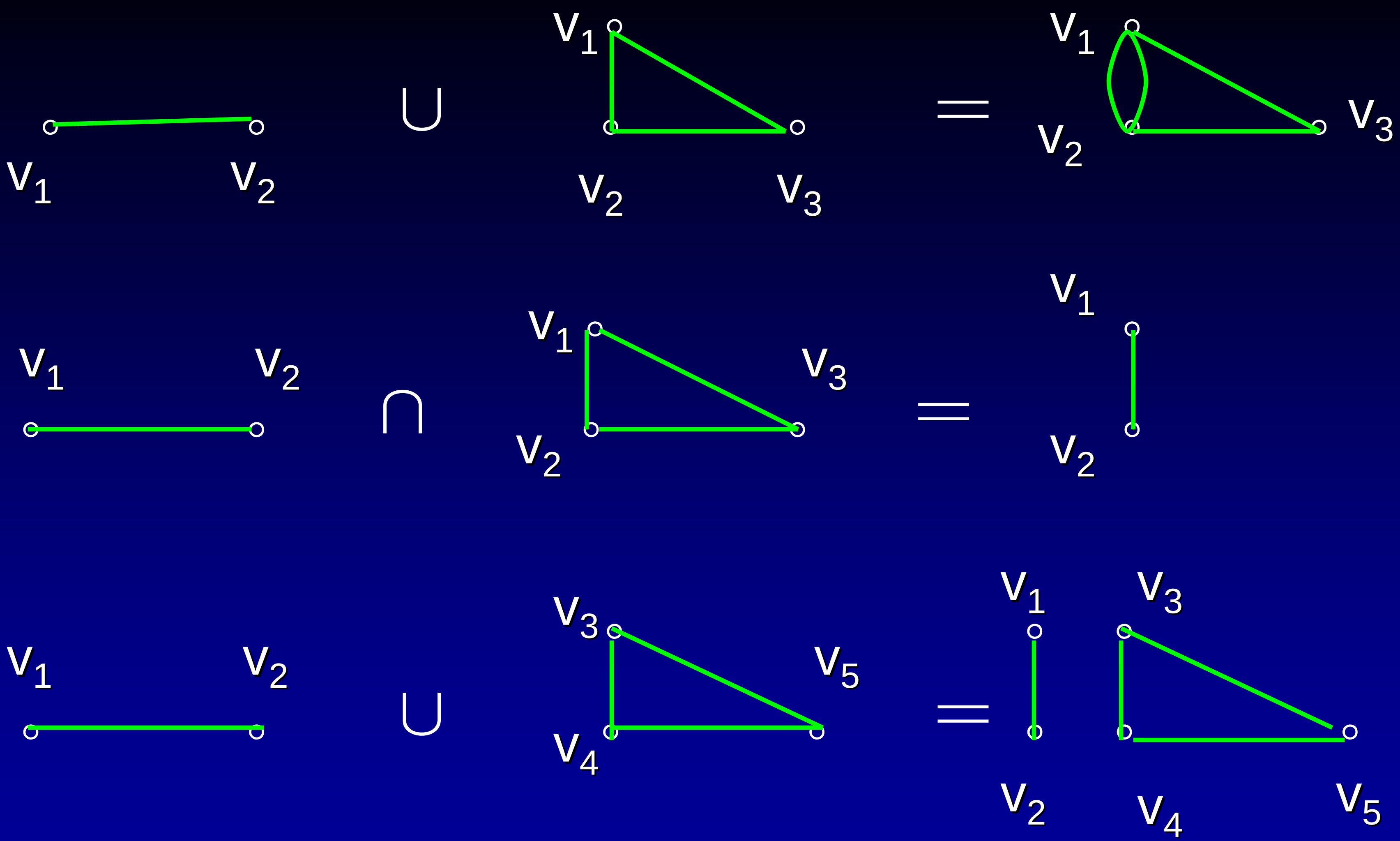
设$G_1=(V_1,E_1)$,$G_2=(V_2,E_2)$为两个图,构造一个新图$H=(V',E')$,其中$V'=V_1\cup V_2$, $E'=E_1\cup E_2$, 称H为G_1和G_2的和,记为$H=G_1\cup G_2$.

当$V_1\cap V_2=\varnothing$时,构造一个新图$H=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2\cup E_{1,2})$,其中$E_{1,2}=\{uv \mid u\in V_1, v\in V_2\}$, 称H为$G_1$,$G_2$的直和,记为$G_1\oplus G_2$.

设$G=(V,E)$是一个图, $E'\subseteq E$, $(E-E'\subseteq E)$, 于是有由$E-E'$得到诱导子图$G[E-E']$,记$G-E'=G[E-E']$, 特别，记$G-e=G[E-\{e\}]$.

设$G=(V,E)$是一个图, $V'\subseteq V$, $(V-V'\subseteq V)$, 于是有由$V-V'$得到诱导子图$G[V-V']$,记$G-V'=G[V-V']$，特别, 记$G-v=G[V-\{v\}]$.

设$G=(V,E)$是一个图,在G中增加上一些边(此时也不属于E)该集合记为E',于是得到一个新图$H=(V,E\cup E')$,记为$G\cup E'$或者$G+E'$.



v_1 v_2 ∪ v_1 v_2 v_3 = v_1 v_2 v_3
v_1 v_2 ∩ v_1 v_2 v_3 = v_1 v_2
v_1 v_2 ∪ v_3 v_4 v_5 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5

图1.3

1.3 图的同构

设G=(V,E)和H=(V’,E’)为两个图,称G和H是相等的(等同的) (记G=H),如果V(G)=V’(H), E(G)=E’(H)。两个恒等的图可用同一个图形来表示。

考虑下面两图

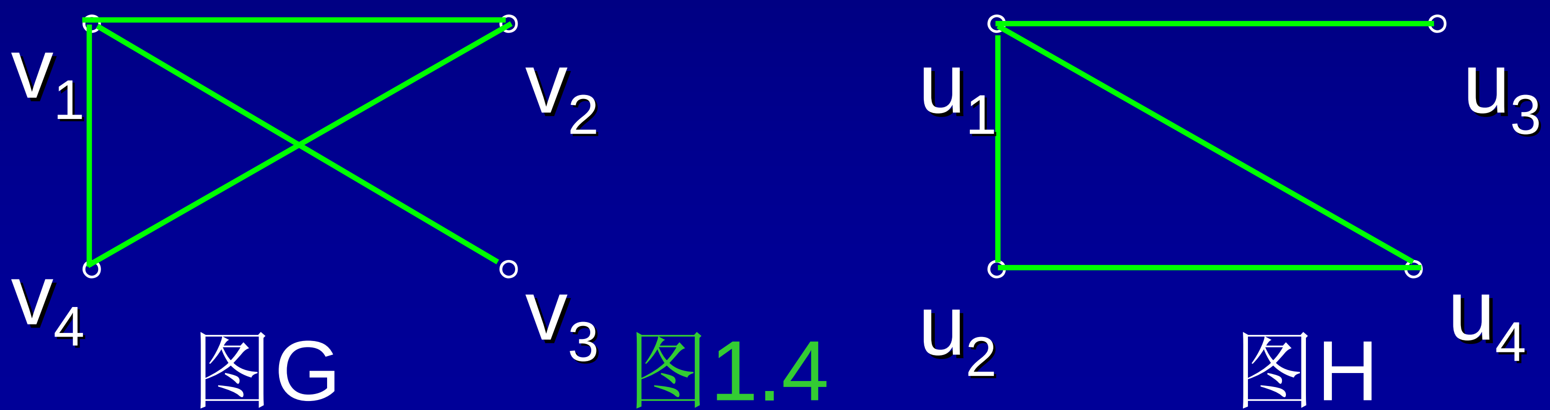


图1.4

定义1.2 设$G=(V,E)$和$H=(V',E')$为两个图,称G和H是同构的,如果存在一个双射$\phi:V\to V'$满足当$uv\in E$, 这里$u,v\in V$, 当且仅当$\phi(u)\phi(v)\in E'$,这里$\phi(u),\phi(v)\in V'$,记为$G\cong H$.

要证明两个图是同构的,就必须指出它们之间的一个同构双射.如果图G和H是同构的,显然G和H有相同的结构,差异只是顶点和边的名称不同.由于我们主要感兴趣的是图的结构性质,所以在画图时常常略去标号;一个无标

号的图可以认为是同构图的等价类的代表.

　　我们给一个图的顶点和边赋以标号的目的,主要是为了便于称呼它们.例如,讨论简单图时,把端点是u和v的边称为“边uv”是方便的.

问题：给定两个图G,H，是否存在一个同构映射 ϕ:V→V’，使得G≌H?

　　这是一个很困难的问题，目前还没有办法求解。

Ulam猜想 （ Ulam，1929）设图G有n个顶点$u_1,u_2,\ldots,u_n$，图H有n个顶点$v_1,v_2,\ldots,v_n$，如果对每个i （$1\leqslant i\leqslant n$），均有

$$G-u_i\cong H-v_i$$

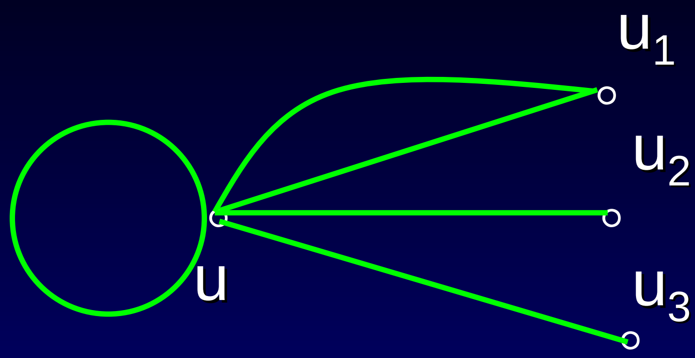
则有$G\cong H$。

1.4 度(次)

定义 图G=(V,E)中顶点v的度(degree)是图G中与v关联的边的数目(与v关联的每个环要计算两次),记为$d_G(v)$或者记为d(v).

称顶点v为偶点(even vertex),如果d(v)是偶数;称顶点v为奇点(odd vertex),如果d(v)是奇数.称顶点v为孤立点(isolated vertex),如果d(v)=0.称顶点v为悬挂点(pendant vertex),如果d(v)=1.

例如　图G如下图

图1.5 

则$d(u)=6$

对于一个给定的图$G=(V,E)$,$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,可以得到一个序列$(d_{i1},d_{i2}\cdots d_{in})$,其中$d_j=d(v_j)$, $d_{i1}\leqslant d_{i2}\leqslant\cdots\leqslant d_{in}$,称$(d_{i1},d_{i2}\cdots d_{in})$,为图G的度序列.

思考 设$G=(V,E)$是n阶简单图,是否存在$u,v\in V$,使得 $d(u)=d(v)$?

定理1.1 (握手定理) 设G=(V,E)是一个图,

则 $\sum_{v\in V}d(v)=2|E|$.

此定理的证明很显然,因为图G的每条边和两个顶点相关联.

推论1.1 设G=(V,E)是一个图,则G中奇数顶点的个数为偶数.

证明: 我们把图G的顶点集V划分为两部分V_1和V_2,其中V_1是G中所有的奇点集合,V_2是G中所有的偶点集合,则$V=V_1\cup V_2$,$V_1\cap V_2=\varnothing$,由

上述定理可得

$$\Sigma_{v\in V1}d(v) + \Sigma_{v\in V2}d(v)=2|E|,$$

而$\Sigma_{v\in V2}d(v)$是偶数，　所以$\Sigma_{v\in V1}d(v)$也是一个偶数,即可得到$|V_1|$是偶数.

1.5 路与连通性

设G=(V,E)是一个图,点边交错序列 $P=v_{i1}e_{i1}v_{i2}e_{i2}\cdots v_{ik}e_{ik}v_{ik+1}e_{ik+1}$称为G中连接$v_i$和$v_{ik+1}$的一条路(path),如果$e_{ij}=v_{ij}v_{ij+1}$, j=1,2,…, k.(这些顶点和边可以相同,也可以不同)

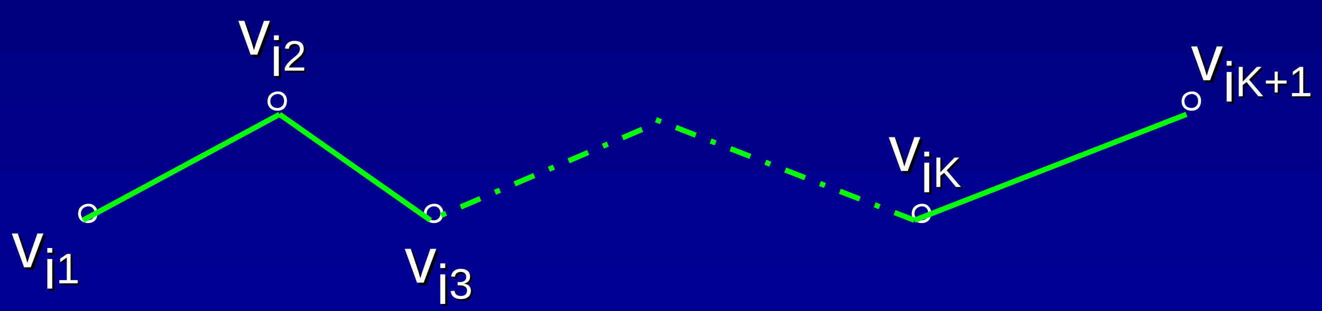


图1.6 路P的图示

当路P中v_{i1},v_{i2}，…，v_{ik}，v_{ik+1}是互不相同时,称P为简单路(或路)，称v_{i1}和v_{ik+1}为路P的两个端点,其它点称为内部点，称路P的长度(length)为k.

称图G=(V,E;w)为赋权图,如果G=(V,E)为图,并且有函数w:E→R^+或w:V→R^+.

设P是连接v_{i1}和v_{ik+1}的路,称P为一个圈(cycle)(回路),如果v_{i1}=v_{ik+1};此时圈的长度就是P中的所含边的数目(也是P中的顶点数目).

定理1.2　设G=(V,E)为n阶图, P是G中的任何一条连接u和v的路,则G中存在(另)一条连接u和v的路,其长度≤n－1.(特别地,当u=v时,长度≤n)

同样,设C为图G中的一个圈,当u的顶点互不相同时, C的长度≤n.

定义　设G=(V,E)是一个图, 称G是连通图(connected graph),如果对于任意的点u,v∈V, G中都存在一条路P来连接u和v.否则称G是不连通的。

例如　下图是不连通的，但是每部分是连通的。

图1.7

设G=(V,E)是一个图,在V上定义一个关系R，uRv 当且仅当 G中存在一条路P(u,v)来连接顶点u和v, 则能够验证关系R是V上的一个等价关系.

通过等价关系R，可构造等价类$[u]_R=\{v\in V \mid uRv\}$，于是图G能够被划为一些子图$G_1,G_2 \cdots G_k$,这里$G_i$是由G的某一个等价类构成的子图,称$G_i$为G的连通分支(component).这里k称为G的连通分支数目,则记ω（G）=k.

当ω（G）=1时, 也称G称为连通图.

问题:①设G是一个图,如何判定G是一个连通图?

②设G是一个图,设计算法求出G的所有连通分支?

设计算法的思想:

(1) 定义

(2) 搜索图

(3) 计算传递闭包

Algorithm: Searching

Input: 使用邻接表或矩阵表示图G=(V,E)，固定顶点v_1.

Output: 自v_1有路可到达的顶点所构成的诱导子图

Begin

1. Q:= {v_1}
2. While (Q≠ Ø) do

    设v是Q中任意一个顶点， 从Q中去掉v，并访问v;

    对顶点v的所有邻点u∈N(v), do

        If (u未被访问) then

            把顶点u加入Q中

3. 输出"自v_1有路可到达的顶点所构成的诱导子图"

End

1.6 几类特殊的图类

- 完全图（complete graph）

  给定一个图G，称为完全图，如果G中任何两个顶点之间都有一条边相连；如果它有n个顶点,记为K_n。

- 补图(complement graph)

  记G=(V,E)为一个图，构造一个图$\overline{G}=(V,\overline{E})$,其中$\overline{E}=\{uv \mid u,v\in V, uv\notin E\}$，称$\overline{G}$为G的补图。

- 零图（空图）

　　设G=(V,E)为一个图，称G为零图，如果对于G中的任何两个顶点u,v均满足$uv \notin E$，记为K_n^c。

- 二部图(偶图，bipartite graph)

　　设 G=(V,E)为一个图,其中$V=V_1 \cup V_2$,且$V_1 \cap V_2=\emptyset$,对于任意的边$e=uv \in E$,有或者$u \in V_1$，$v \in V_2$,或者$u \in V_2$,$v \in V_1$,记为$G=(V_1,V_2;E)$。

- k-部图(k-partirte graph):

设G是一个图,称G为K部图,如果 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_K$, 对任意的边 $e=uv\in E$,有 $u\in V_i, v\in V_j, (i\neq j)$.

问题:如何判断一个图是二部图?

定理1. 设G是一个图,则G是二部图的充要条件是G中不含奇圈.

证明: 必要性是显然的.

充分性 不妨设G是连通图(否则考虑它的每个连通分支). 任取一点 $v\in V$,令

$$S = \{u \in V \mid d(v,u)\text{是偶数}\}$$
$$T = \{u \in V \mid d(v,u)\text{是奇数}\}$$

因G是连通的, 故V被剖分为S, T.

只要证明对任一$e = xy \in E$必有$x \in S, y \in T$。若不然,不妨设 $x, y \in S$,令μ_1是长度最短的 v—x 路, μ_2是最短的v—y 路,则由S的定义知μ_1, μ_2 的路长都是偶数.设$z \in V(\mu_1) \cap V(\mu_2)$,使$z \xrightarrow{\mu_1} x$和$z \xrightarrow{\mu_2} y$ 除 z 外,无其它公共点.则 $z \xrightarrow{\mu_1} xy \xrightarrow{\mu_2} z$ 是奇圈.但这与假设矛盾.

证毕.

1.7 反圈(anticircuit)

设有G=(V,E)为一个图, $\varnothing \neq S \subset V$ ，构造一个集合 $[S,\bar{S}]_G = \{uv \in E \mid u \in S, v \notin S\}$ 称它为由S所确定的反圈,记作 $\Phi(S) = [S,\bar{S}]$

性质:设G=(V,E)为一个图, $\varnothing \neq S \subset V$ ，C为G中任何一个圈,则 $|\Phi(S) \cap E(C)|$ 为偶数.

1.8 距离(distance)

设G=(V,E)是一个图，u,v∈V, P是连接u,v的一条路,称P是连接u,v的一条最短路,如果P的长度是连接u,v间路的最小长度,

i.e., $|E(P)|=\min\{|E(Q)|: Q$连接u,v的路$\}$

$=\min\{|E(Q)|\}$.

称|E(P)|为u,v间 的(最小)距离,记为 $d_G(u,v)=|E(P)|$.

如果在图G中不存在连接u,v的路,则称u,v间距离为∞,记为$d_G(u,v)=\infty$.

问题:设G=(V,E)是一个图, u,v∈V,如何求得从u到v的距离$d_G(u,v)$.

利用搜索算法**Searching**