

算 法 图 论

云南大学数学系

李 建 平

2016年9月

参 考 书

1. J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Elsevier Science Publishing Co. Inc.,1999.
2. 田丰、马仲蕃, 图与网络流理论, 科学出版社, 1987.
3. D.B. West, Introduction to Graph Theory (第二版), PRENTICE HALL, 2001.
4. C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity (第二版), Printice-Hall, 2000.

内 容 摘 要

第一章 图和子图

第二章 树与路

第三章 图的连通性

第四章 欧拉问题和哈密尔顿问题

第五章 匹配问题

第六章 染色问题

第七章 独立集和团

第八章 平面图

第九章 有向图

第十章 网络理论

第十一章 NP-完备性理论

第一章 图和子图

1.1 图与简单图

现实世界的许多事例用图形来描写可能是方便的,这种图形是由一个点集以及这个点集中的某些点对的连线构成的.

例如 点可以表示人,连线表示一对朋友;或者用点表示通讯站,而连线表示通讯线路.注意:在这类图形中,人们主要感兴趣的是给定两点是否有一根连线,而连接的方式则无关紧要.这类事例的数学抽象就产生了图的概念.

定义1.1 图(graph) G 是指由非空有限集合 V 和 V 中某些元素的无序对的集合 E 构成的二元组 (V, E) ，记为 $G = (V, E)$ 。 V 称为 G 的顶点集合(vertex set)，其中的元素称为 G 的顶点(vertex)。 E 称为 G 的边集(edge set)，其中的元素称为 G 的边(edge)。

如果 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，则 E 中元素 e 与 V 中某两个元素构成的无序对 $\{v_i, v_j\}$ 相对应，记 $e = v_i v_j$ 或 $e = v_j v_i$ 。

图可以用图形来表示，用小圆点(圈)表示

G 的顶点，用小圆点之间的线段表示 G 的边。

例如 图1.1就表示图 $G=(V, E)$ ，其中

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$, 其中
 $e_1=v_1v_2$, $e_2=v_1v_2$, $e_3=v_2v_3$, $e_4=v_3v_4$, $e_5=v_4v_5$,
 $e_6=v_5v_2$, $e_7=v_4v_4$.

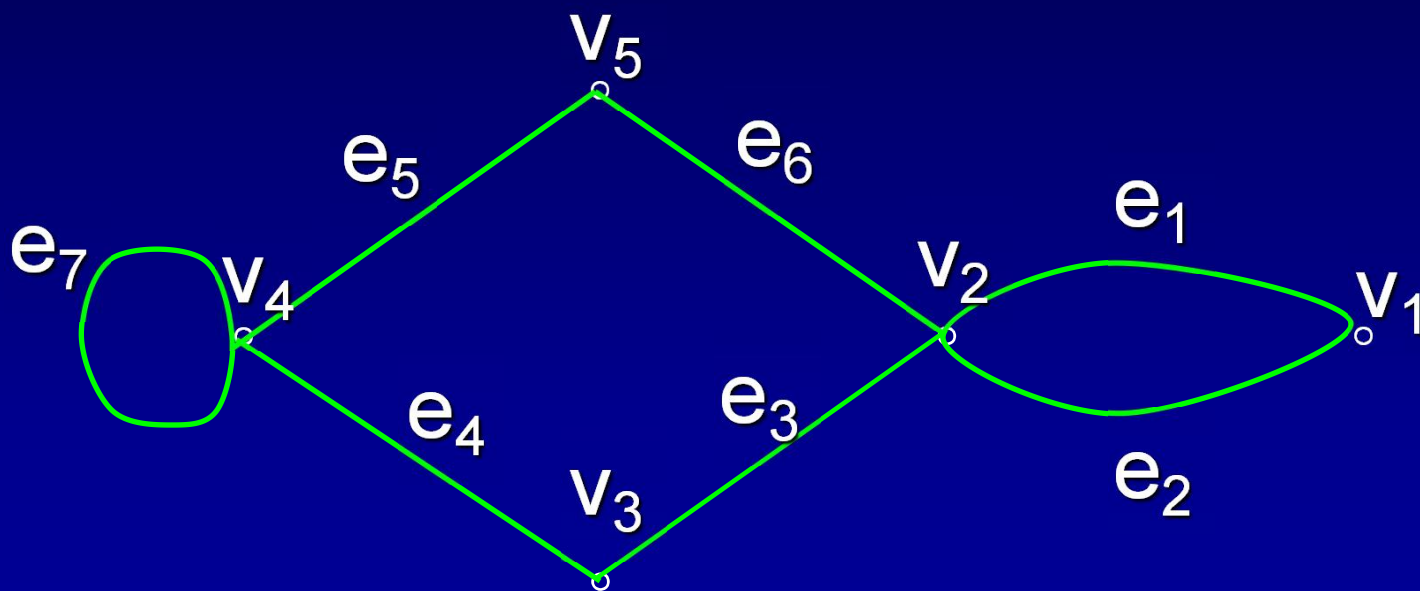


图1.1图的图形表示

关系: 设 V 为一个集合, 称 R 是 V 上的一个关系, 如果 $R \subset V \times V$, 这里 $V \times V = \{(x, y) \mid x, y \in V\}$ 。进而 R 满足对称性, 如果 $(x, y) \in R$, 有 $(y, x) \in R$ 。

图 $G=(V, E)$ 可认为是 V 上的对称关系图。

设 $G=(V, E)$ 是一个图, 若 $e=v_i v_j \in E$, 则称顶点 v_i 和 v_j 是相邻的(adjacent), 并称 v_i 和 v_j 为边 e 的端点(end-vertex), 也称 e 与 v_i, v_j 是关联的(incident). 若 $e_1, e_2 \in E$, 且 e_1 和 e_2 有公共的端点, 则称 e_1 与 e_2 是相邻的. 我们把 G 中所有与顶点 v 相邻的顶点的集合称为 v 的邻域(neighbors), 记为 $N_G(v)$ 或简

记为 $N(v)$.

特别, 两个端点重合的边称为环(loop); 如果有两条边的端点是同一对顶点, 则称这两条边为重边(multiple edges)。

既没有环也没有重边的图称为简单图(simple graph); 没有环的图称为无环图(unlooped graph); 边集为空集的图称为空图(empty graph), 至少有一条边的图称为非空图(nonempty graph)。

一个图的顶点数称为该图的阶(order)。

1.2 子图

设 $G=(V,E)$ 为一个图, $H=(V',E')$ 也是一个图,称 H 为 G 的一个子图(subgraph),如果 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$,并且对任意的边 $e=uv\in E'$ 必须有 $u,v\in V'$,记为 $H\subseteq G$,此时也称 G 为 H 的母图(super graph).

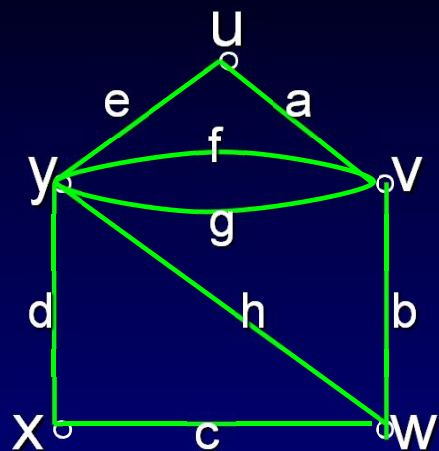
设 $H=(V',E')$ 为 $G=(V,E)$ 的一个子图,称 H 为 G 的生成(支撑)子图(spanning subgraph),如果 $V'=V$.

设 $G=(V,E)$ 是一个图, $V'\subseteq V$,构造一个新图

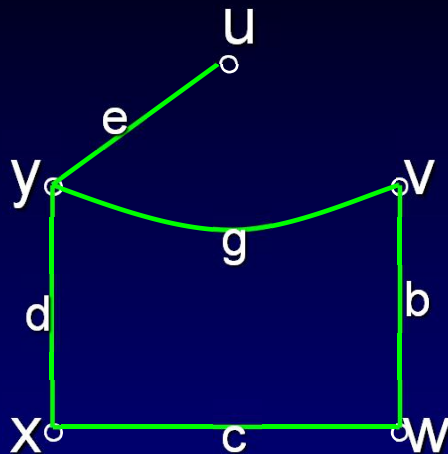
$H'=(V',E')$,其中 $E'=\{uv\in E \mid u,v\in V'\}$,称 H 为图 G 中由 V' 所诱导得到的子图(subgraph reduced by V'),记为 $H'=G[V']$.

设 $G=(V,E)$ 为一个图, $E'\subseteq E$,构造一个新图 $H=(V',E')$,其中 $V'=\{u,v\in V \mid e=uv\in E'\}$,称 H 为 E' 给出的边诱导子图(edge-induced subgraph by E'),记为 $H=G[E']$.

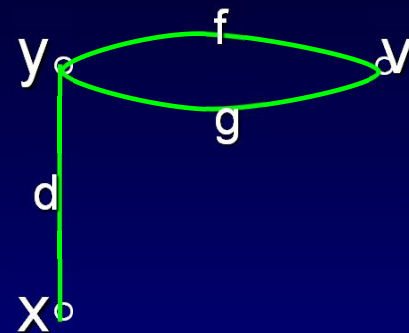
下图中画出了这些不同类型的子图: 图1.2



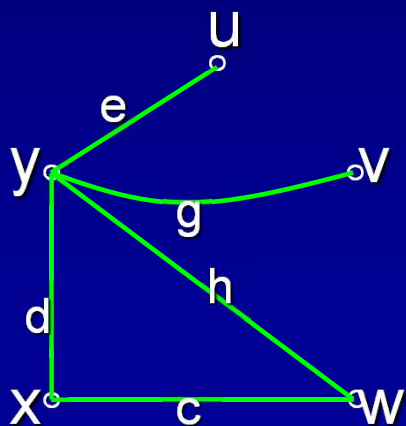
图G



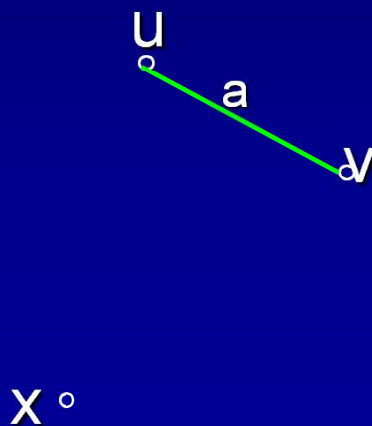
G的一个生成子图



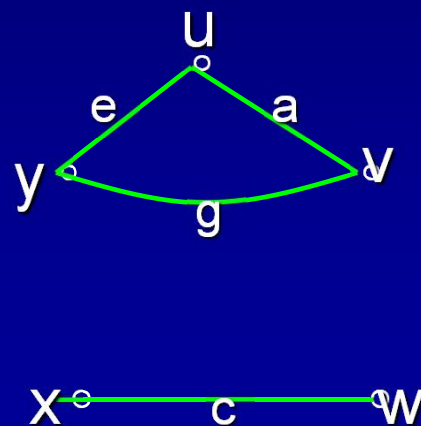
$G - \{u, w\}$



$G - \{a, b, f\}$



导出子图 $G[\{u, v, x\}]$



边导出子图

设 $G_1=(V_1, E_1), G_2=(V_2, E_2)$ 为两个图,构造一个新图 $H=(V', E')$,其中 $V'=V_1 \cup V_2$,
 $E'=E_1 \cup E_2$, 称 H 为 G_1 和 G_2 的和,记为 $H=G_1 \cup G_2$.

当 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 时,构造一个新图 $H=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$,其中 $E_{1,2}=\{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$,
称 H 为 G_1, G_2 的直和,记为 $G_1 \oplus G_2$.

设 $G=(V, E)$ 是一个图, $E' \subseteq E, (E - E' \subseteq E)$,
于是有由 $E - E'$ 得到诱导子图 $G[E - E']$,记
 $G - E' = G[E - E']$, 特别, 记 $G - e = G[E - \{e\}]$.

设 $G=(V,E)$ 是一个图, $V'\subseteq V$, $(V-V'\subseteq V)$, 于是有由 $V-V'$ 得到诱导子图 $G[V-V']$, 记 $G-V'=G[V-V']$, 特别, 记 $G-v=G[V-\{v\}]$.

设 $G=(V,E)$ 是一个图, 在 G 中增加上一些边 (此时也不属于 E) 该集合记为 E' , 于是得到一个新图 $H=(V,E\cup E')$, 记为 $G\cup E'$ 或者 $G+E'$.

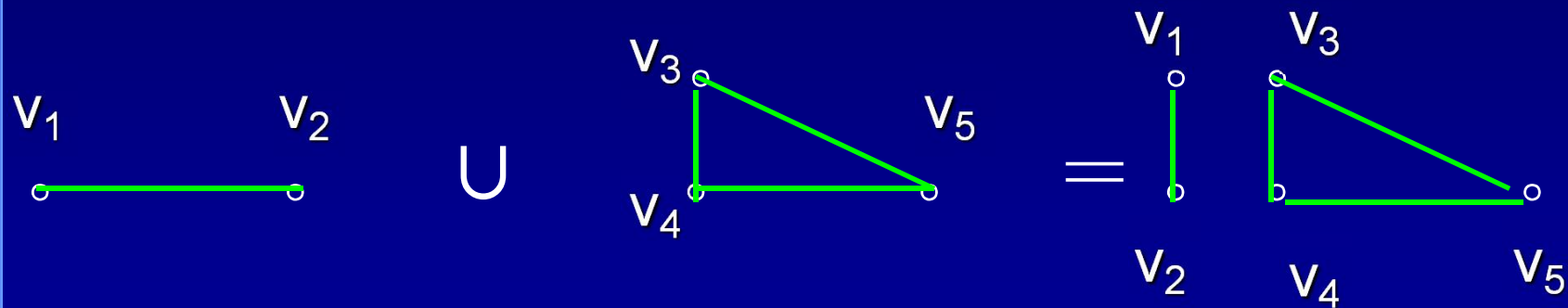
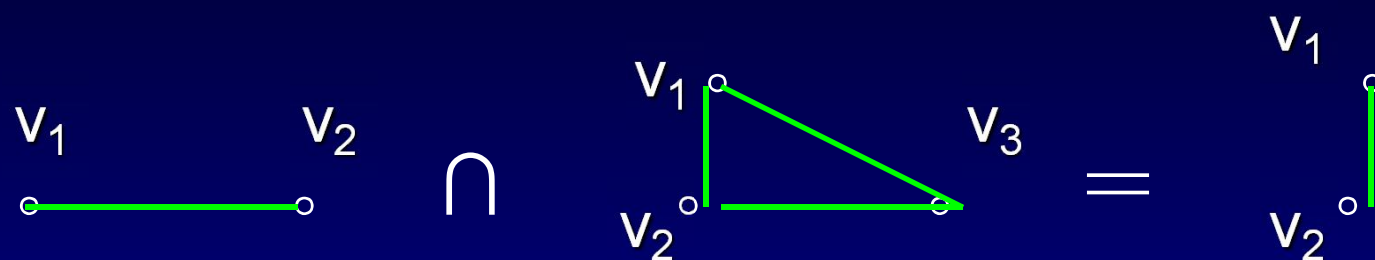
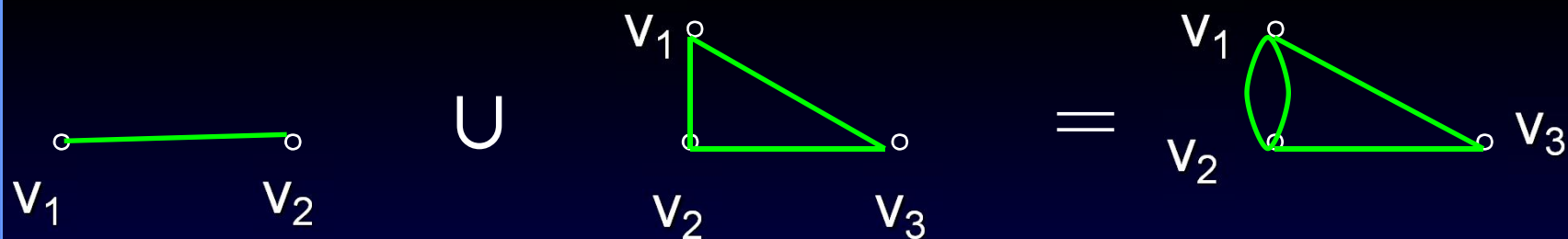
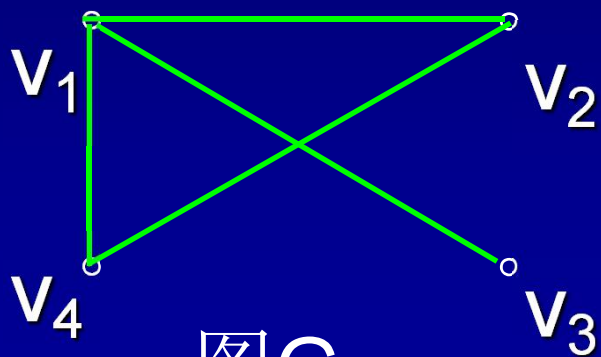


图1.3

1.3 图的同构

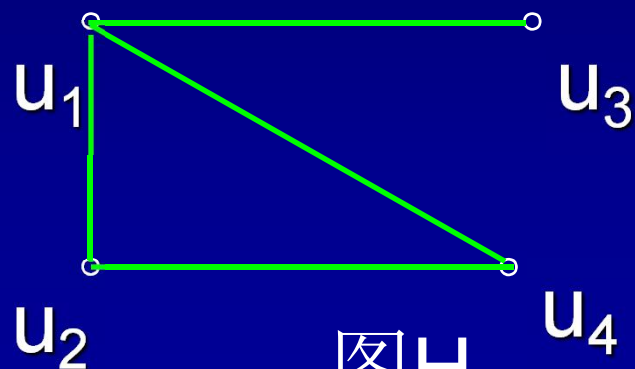
设 $G=(V,E)$ 和 $H=(V',E')$ 为两个图,称 G 和 H 是相等的(等同的) (记 $G=H$),如果 $V(G)=V'(H)$, $E(G)=E'(H)$ 。两个恒等的图可用同一个图形来表示。

考虑下面两图



图G

图1.4



图H

定义1.2 设 $G=(V,E)$ 和 $H=(V',E')$ 为两个图,称 G 和 H 是同构的,如果存在一个双射 $\phi:V\rightarrow V'$ 满足当 $uv\in E$, 这里 $u,v\in V$, 当且仅当 $\phi(u)\phi(v)\in E'$,这里 $\phi(u),\phi(v)\in V'$,记为 $G\cong H$.

要证明两个图是同构的,就必须指出它们之间的一个同构双射.如果图 G 和 H 是同构的,显然 G 和 H 有相同的结构,差异只是顶点和边的名称不同.由于我们主要感兴趣的是图的结构性质,所以在画图时常常略去标号;一个无标

号的图可以认为是同构图的等价类的代表.

我们给一个图的顶点和边赋以标号的目的,主要是为了便于称呼它们.例如,讨论简单图时,把端点是 u 和 v 的边称为“边 uv ”是方便的.

问题: 给定两个图 G, H , 是否存在一个同构映射 $\phi: V \rightarrow V'$, 使得 $G \cong H$?

这是一个很困难的问题, 目前还没有办法求解。

Ulam猜想 (Ulam, 1929) 设图 G 有 n 个顶点 u_1, u_2, \dots, u_n , 图 H 有 n 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_n , 如果对每个 i ($1 \leq i \leq n$), 均有

$$G - u_i \cong H - v_i$$

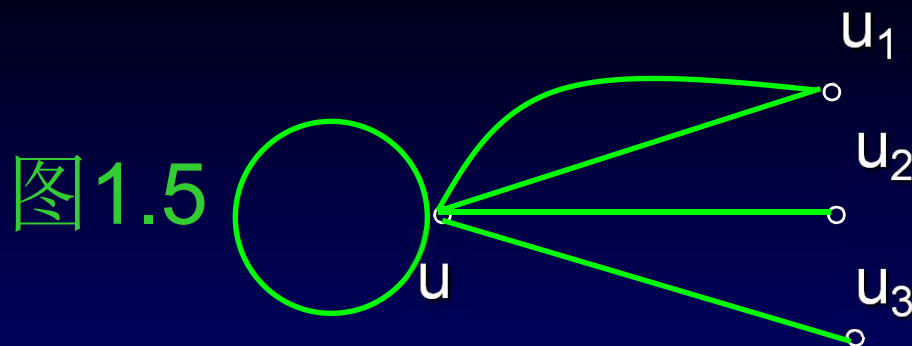
则有 $G \cong H$ 。

1.4 度(次)

定义 图 $G=(V, E)$ 中顶点 v 的度(degree)是图 G 中与 v 关联的边的数目(与 v 关联的每个环要计算两次), 记为 $d_G(v)$ 或者记为 $d(v)$.

称顶点 v 为偶点(even vertex), 如果 $d(v)$ 是偶数; 称顶点 v 为奇点(odd vertex), 如果 $d(v)$ 是奇数. 称顶点 v 为孤立点(isolated vertex), 如果 $d(v)=0$. 称顶点 v 为悬挂点(pendant vertex), 如果 $d(v)=1$.

例如 图G如下图



则 $d(u)=6$

对于一个给定的图 $G=(V,E)$, $V=(v_1, v_2, \dots, v_n)$, 可以得到一个序列 $(d_{i1}, d_{i2} \dots d_{in})$, 其中 $d_j=d(v_j)$, $d_{i1} \leq d_{i2} \leq \dots \leq d_{in}$, 称 $(d_{i1}, d_{i2} \dots d_{in})$, 为图G的度序列.

思考 设 $G=(V,E)$ 是n阶简单图, 是否存在 $u, v \in V$, 使得 $d(u)=d(v)$?

定理1.1 (握手定理) 设 $G=(V,E)$ 是一个图,
则 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

此定理的证明很显然,因为图 G 的每条边和两个顶点相关联.

推论1.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图,则 G 中奇数顶点的个数为偶数.

证明: 我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2 ,其中 V_1 是 G 中所有的奇点集合, V_2 是 G 中所有的偶点集合,则 $V=V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$,由

上述定理可得

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2|E|,$$

而 $\sum_{v \in V_2} d(v)$ 是偶数, 所以 $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 也是一个偶数, 即可得到 $|V_1|$ 是偶数.

1.5 路与连通性

设 $G=(V,E)$ 是一个图,点边交错序列

$P=v_{i1}e_{i1}v_{i2}e_{i2}\cdots v_{ik}e_{ik}v_{ik+1}e_{ik+1}$ 称为 G 中连接 v_i 和 v_{ik+1} 的一条路(path),如果 $e_{ij}=v_{ij}v_{ij+1}$, $j=1,2,\cdots,k$.(这些顶点和边可以相同,也可以不同)

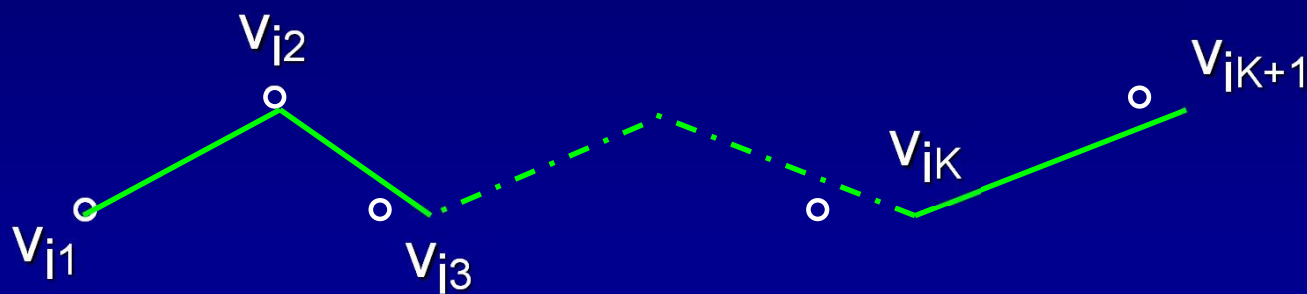


图1.6 路 P 的图示

当路 P 中 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_{ik+1}$ 是互不不同时,称 P 为简单路(或路),称 v_{i1} 和 v_{ik+1} 为路 P 的两个端点,其它点称为内部点,称路 P 的长度(length)为 k .

称图 $G=(V, E; w)$ 为赋权图,如果 $G=(V, E)$ 为图,并且有函数 $w: E \rightarrow R^+$ 或 $w: V \rightarrow R^+$.

设 P 是连接 v_{i1} 和 v_{ik+1} 的路,称 P 为一个圈(cycle)(回路),如果 $v_{i1}=v_{ik+1}$;此时圈的长度就是 P 中的所含边的数目(也是 P 中的顶点数目).

定理1.2 设 $G=(V,E)$ 为 n 阶图, P 是 G 中的任何一条连接 u 和 v 的路, 则 G 中存在(另)一条连接 u 和 v 的路, 其长度 $\leq n-1$. (特别地, 当 $u=v$ 时, 长度 $\leq n$)

同样, 设 C 为图 G 中的一个圈, 当 u 的顶点互不相同时, C 的长度 $\leq n$.

定义 设 $G=(V,E)$ 是一个图, 称 G 是连通图 (connected graph), 如果对于任意的点 $u, v \in V$, G 中都存在一条路 P 来连接 u 和 v . 否则称 G 是不连通的。

例如 下图是不连通的，但是每部分是连通的。



图1.7

设 $G=(V,E)$ 是一个图,在 V 上定义一个关系 R , uRv 当且仅当 G 中存在一条路 $P(u,v)$ 来连接顶点 u 和 v , 则能够验证关系 R 是 V 上的一个等价关系.

通过等价关系 R , 可构造等价类 $[u]_R=\{v \in V \mid uRv\}$, 于是图 G 能够被划为一些子图 $G_1, G_2 \cdots G_k$, 这里 G_i 是由 G 的某一个等价类构成的子图, 称 G_i 为 G 的连通分支(component). 这里 k 称为 G 的连通分支数目, 则记 $\omega(G)=k$.

当 $\omega(G)=1$ 时, 也称 G 称为连通图.

问题:①设 G 是一个图,如何判定 G 是一个连通图?

②设 G 是一个图,设计算法求出 G 的所有连通分支?

设计算法的思想:

(1) 定义

(2) 搜索图

(3) 计算传递闭包

Algorithm: Searching

Input: 使用邻接表或矩阵表示图 $G=(V,E)$, 固定顶点 v_1 .

Output: 自 v_1 有路可到达的顶点所构成的诱导子图

Begin

1. $Q := \{v_1\}$

2. **While** ($Q \neq \emptyset$) **do**

 设 v 是 Q 中任意一个顶点, 从 Q 中去掉 v , 并访问 v ;

 对顶点 v 的所有邻点 $u \in N(v)$, **do**

If (u 未被访问) **then**

 把顶点 u 加入 Q 中

3. 输出 “自 v_1 有路可到达的顶点所构成的诱导子图”

End

1.6 几类特殊的图类

- 完全图 (complete graph)

给定一个图 G ，称为完全图，如果 G 中任何两个顶点之间都有一条边相连；如果它有 n 个顶点，记为 K_n 。

- 补图(complement graph)

记 $G=(V,E)$ 为一个图，构造一个图 $\overline{G}=(V,\overline{E})$ ，其中 $\overline{E}=\{uv \mid u,v \in V, uv \notin E\}$ ，称 \overline{G} 为 G 的补图。

- 零图（空图）

设 $G=(V,E)$ 为一个图，称 G 为零图，如果对于 G 中的任何两个顶点 u,v 均满足 $uv \notin E$ ，记为 K_n^c 。

- 二部图(偶图, bipartite graph)

设 $G=(V,E)$ 为一个图,其中 $V=V_1 \cup V_2$, 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 对于任意的边 $e=uv \in E$, 有或者 $u \in V_1, v \in V_2$, 或者 $u \in V_2, v \in V_1$, 记为 $G=(V_1, V_2; E)$ 。

- **k-部图(k-partite graph):**

设 G 是一个图,称 G 为 K 部图,如果
 $V=V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$, 对任意的边 $e=uv \in E$, 有
 $u \in V_i, v \in V_j, (i \neq j)$.

问题:如何判断一个图是二部图?

定理1. 设 G 是一个图,则 G 是二部图的充要条件是 G 中不含奇圈.

证明: 必要性是显然的.

充分性 不妨设 G 是连通图(否则考虑它的每个连通分支). 任取一点 $v \in V$, 令

$$S = \{u \in V \mid d(v, u) \text{ 是偶数}\}$$

$$T = \{u \in V \mid d(v, u) \text{ 是奇数}\}$$

因 G 是连通的, 故 V 被剖分为 S, T .

只要证明对任一 $e = xy \in E$ 必有 $x \in S, y \in T$ 。
若不然, 不妨设 $x, y \in S$, 令 μ_1 是长度最短的
 $v-x$ 路, μ_2 是最短的 $v-y$ 路, 则由 S 的定义
知 μ_1, μ_2 的路长都是偶数. 设 $z \in V(\mu_1) \cap V(\mu_2)$
, 使 $z \xrightarrow{\mu_1} x$ 和 $z \xrightarrow{\mu_2} y$ 除 z 外, 无其它公共
点. 则 $z \xrightarrow{\mu_1} xy \xrightarrow{\mu_2} z$ 是奇圈. 但这与假设
矛盾.

证毕.

1.7 反圈(anticircuit)

设有 $G=(V,E)$ 为一个图, $\emptyset \neq S \subset V$, 构造一个集合 $[S, \bar{S}]_G = \{uv \in E \mid u \in S, v \notin S\}$ 称它为由 S 所确定的反圈, 记作 $\Phi(S)=[S, \bar{S}]$

性质: 设 $G=(V,E)$ 为一个图, $\emptyset \neq S \subset V$, C 为 G 中任何一个圈, 则 $|\Phi(S) \cap E(C)|$ 为偶数.

1.8 距离(distance)

设 $G=(V,E)$ 是一个图, $u,v \in V$, P 是连接 u,v 的一条路, 称 P 是连接 u,v 的一条最短路, 如果 P 的长度是连接 u,v 间路的最小长度, i.e., $|E(P)| = \min\{|E(Q)|: Q \text{ 连接 } u,v \text{ 的路}\}$
 $= \min \{|E(Q)|\}.$

称 $|E(P)|$ 为 u,v 间的(最小)距离, 记为
 $d_G(u,v) = |E(P)|.$

如果在图 G 中不存在连接 u,v 的路, 则称 u,v 间距离为 ∞ , 记为 $d_G(u,v) = \infty.$

问题: 设 $G=(V,E)$ 是一个图, $u,v \in V$, 如何求得从 u 到 v 的距离 $d_G(u,v)$.

利用搜索算法 **Searching**