算　法　图　论

云南大学数学系

李 建 平

2015年9月

第八章　独立集和团

8.1 独立集（independent set）

定义8.1设G=(V,E)是一个图，$S\subset V$，称S为（点）独立集，如果S中的任意两个顶点都不相邻。

最大独立集问题：给定一个图G，要寻找G的一个独立集S，使|S|是所有独立集中的最大者，即若S'为任意独立集，有$|S'|\leq|S|$。

最大独立集问题是NP-完备问题。

定义8.2 若S为G的最大独立集，则规定G的独立数为｜S｜，记为 $\alpha(G)$。

设G=(S,T;E)是二部图，则

$$\alpha(G) \geq \max\{|S|, |T|\}。$$

定义8.3 设G=(V,E)是一个图，称C⊂V为G的一个点覆盖，如果任意的边e=uv∈E，有或者u∈C，或者v∈C。

最小点覆盖问题：给定一个图G，要寻找G的一个点覆盖C，使|C|是所有点覆盖中的最小者，即若C’为任意点覆盖，则有|C|≤|C’|。

定义8.4 若C是图G的最小点覆盖，规定｜C｜为G的点覆盖数，记为 $\beta(G)$ 。

最小点覆盖问题是NP-完备问题。

定理8.1 设G=(V,E)是一个图，则

$$\alpha(G)+\beta(G)=|V|$$

证明　首先有如下事实：S是G的点独立集当且仅当V-S是G的点覆盖集。事实上，若S是G的点独立集，则G的任何一边至少有一个端点在V-S中，从而V-S是点覆盖集；反之，若C是G的点覆盖集，则不可能存在一条边的两个端点都在V-C中，故V-C是点独立集。

由此，如果S_0是G的最大独立集，C_0是G的最小点覆盖集，则有

$$\alpha(G)=|S_0|\geq|V-C_0|=|V|-\beta(G)$$

和

$$\beta(G)=|C_0|\leq|V-S_0|=|V|-\alpha(G)$$

从而 $\alpha(G)+\beta(G)=|V|$。 证毕

从定理8.1可知，求一个图的最大独立集问题与最小点覆盖集问题是等价的。

最小点覆盖问题和最大独立集问题都是NP-完备性问题，目前还没有多项式算法找到它们的最优解.但是，二部图的最小点覆盖问题和最大独立集问题可以利用二部图匹配算法找到最优解。

下面算法能够求得二部图$G=(S, T; E)$最小点覆盖和最大独立集：

二部图的最小点覆盖问题和最大独立集的求解算法：

1. 在给定的二部图G上，利用反圈法找到G的一个最大匹配M，并且得到相应的A_1，A_2，A_3，A_4；
2. 取集合$C=A_2\cup A_3$，于是C就是图G的最小点覆盖集合；
3. 取集合$I=A_1\cup A_4$，于是I就是图G的最大独立集。

定义8.5 设G=(V,E)是一个图， M$\subseteq$E称为G的一个边独立集（或匹配），如果M中任两条边都没有公共的端点。元素个数最大的边独立集称为最大边独立集，称其最大个数为G边独立数，记为 $\alpha'(G)$。

定义8.6 设G=(V,E)为一个图，且不含孤立点，称E'$\subseteq$E为G的一个边覆盖集，如果对任意的一个顶点u，都存在一条边e以u为端点。元素个数最小的边覆盖集称为最小边覆盖集，称其最小个数为G边覆盖数，记边覆盖数为$\beta'(G)$。

定理8.2 设G=(V,E)是一个图，并且G不含孤立点，即d(G)≥1，则 $\alpha'(G)+\beta'(G)=|V(G)|$。

8.2 团（clique）

定义8.7 设G=(V,E)是一个图，S ⊆V，称S是一个团，如果S中的任何两个端点都相邻。进一步，若对于任意的团S',使|S'|≤$,|称S为G的一个最大团。

最大团问题：给定图G，要寻求S ⊆ V，使得S是一个团，并且｜S｜达到最大。

最大团问题是NP完备的。

定理8.3 最大团问题等价于最大独立集问题，反之亦然。（？）

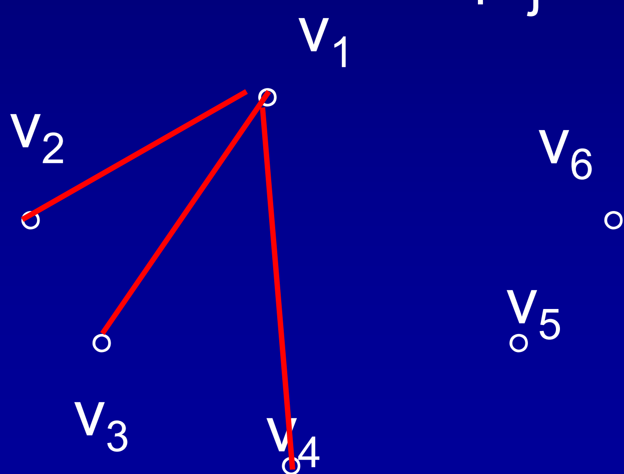
问题1 如何求二部图中的最大团问题？

问题2 如何求平面图中的最大团问题？

8.3 Ramsey定理

例　设有6个人，则一定存在3个人彼此认识或者彼此不认识。

解：构造一个6阶图，如果第i人与第j人认识v_iv_j把染成红色；如果第i人与第j人不认识，把v_iv_j染成蓝色。



对于任意的一点v_1，不妨设它与v_2,v_3,v_4认识，则$d_G(v_1)\geq 3$，否则考虑$d_{\bar{G}}(v_1)\geq 3$ 。

若$v_2v_3 \in E$，或$v_2v_4 \in E$，或$v_3v_4 \in E$，则 $v_1v_2v_3$

构成团，或$v_1v_2v_4$构成团，或$v_1v_3v_4$构成团。

若$v_2v_3 \in E$,且$v_2v_4 \in E$,且$v_3v_4 \in E$，则$v_2v_3v_4$

可构成一个独立集。 证毕

如果是5个人，则上述结果不成立。反例如下：

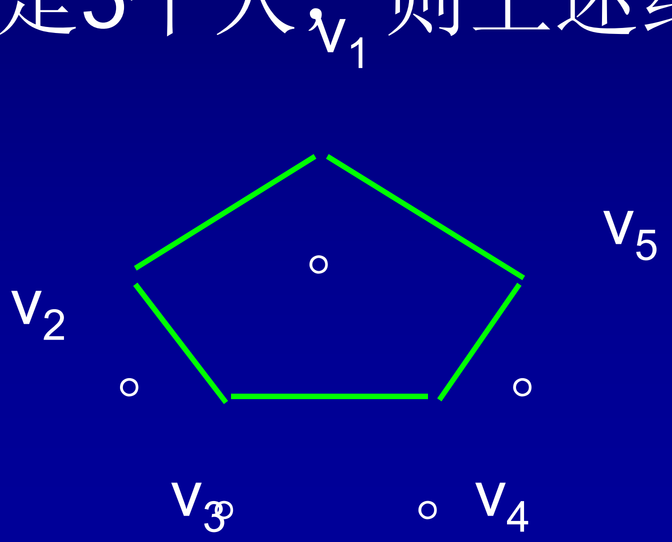


图8.1

定义8.8 给定两个正整数r_1，r_2，在顶点数为n的图G中，若存在一个子图K_{r1}或者存在一个子图$K_{r_2}^C$,称这样的最小正整数n为(由r_1,r_2所确定的)Ramsey数，记为$R(r_1,r_2)$。

问题：对于给定的正整数r_1和r_2，如何确定Ramsey数$R(r_1,r_2)$？ (很难)

定理8.4 (1) $R(r_1,2)=r_1$，$R(2,r_2)=r_2$

(2) $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$

(3) $R(r_1,r_2)=R(r_2,r_1)$

对于一般的$R(r_1,r_2)$，有这样的表：　　图8.2

r_2 \ r_1	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28/29	36	39/44
4		18	25/28	34/44				
5			42/55	51/94				

定理8.5 对于任意给定的正整数$r_1,r_2\geq 2$，则 $R(r_1,r_2)\leq R(r_1,r_2-1)+R(r_1-1,r_2)$

证明：对r_1+r_2使用数学归纳法，

易知，$R(r_1,1)=1$，　　$R(1,r_2)=1$

$R(r_1,2)=r_1$，　　$R(2,r_2)=r_2$

$R(r_1,2)=r_1\leq 1+(r_1-1)=R(r_1,1)+R(r_1-1,2)$

$R(2,r_2)=r_2\leq (r_2-1)+1=R(2,r_2-1)+R(1,r_2)$

说明对于较小的r_1+r_2，原命题成立，即此时的$R(r_1,r_2-1)$和$R(r_1-1,r_2)$已经被完全确定。

记$k=R(r_1,r_2-1)+R(r_1-1,r_2)$，对于任意的

k阶图G，其补图记为G^c，对于任意的点$v_1 \in V(G)$，有

$$d_G(v_1)+d_{G^c}(v_1)=k-1$$

$$=R(r_1,r_2-1)+R(r_1-1,r_2)-1$$

则或者$d_G(v_1) \ge R(r_1-1,r_2)$ 或者$d_{G^c}(v_1) \ge R(r_1,r_2-1)$。当 $d_G(v_1) \ge R(r_1-1,r_2)$时，说明$|N_G(v_1)| \ge R(r_1-1,r_2)$。考虑由$N_G(v_1)$所得到的诱导子图$H=G[N_G(v_1)]$。由于H的顶点数$\ge R(r_1-1,r_2)$，则根据归纳假设，即$R(r_1-1,r_2)$存在，有或者 H含有$r_1-1$个顶

的团，即H含有K_{r1-1}，再把v_1加上那个子图，于是G含有K_{r1}；或者 H含有r_2个顶点的独立集，即H含有K_{r2}^c，于是G含有K_{r2}^c。

类似地，可证$d_{G^c}(v_1)\geq R(r_1,r_2-1)=R(r_2-1, r_1)$时，结论也成立。

定理8.6 (Erdos and Szekeres, 1935)

$$R(r_1,r_2)\leq C_{r_1+r_2-2}^{r_1-1}=C_{r_1+r_2-2}^{r_2-1}$$

证明：（用数学归纳法）当r_1,r_2较小时，上式成立。假设当$r_1+r_2<k$时，上式成立，即 $R(r_1-1,r_2)\leq C_{r_1+r_2-3}^{r_1-2}$ 和 $R(r_1,r_2-1)\leq C_{r_1+r_2-3}^{r_1-1}$

当$r_1+r_2=k$时，则利用定理8.5，有

$R(r_1,r_2)\le R(r_1,r_2-1)+R(r_1-1,r_2)$

$$\le C_{r_1+r_2-3}^{r_1-2}+C_{r_1+r_2-3}^{r_1-1}$$

$$\le C_{r_1+r_2-2}^{r_1-1}=C_{r_1+r_2-2}^{r_2-1}$$

证毕