IT-EX02

**学号：20131910019**

**姓名：张振宇**

**专业：信息与计算科学（经济信息分析）**

查阅资料,思考并回答下述问题：

1. **解释函数的凸性与凹性。**

答：➀若对于任意的及满足则称函数在区间(a,b)上是凸的。如果仅当或者，上式成立，则称函数是严格凸的。

➁如果为凸函数，则称函数是凹的。如果函数总是位于任何一条弦的下面，则该函数是凸的；如果函数总是位于任何一条弦的上面则称函数是凹的。

**2.以几何图形看,凸函数与凹函数有什么特点。**

答：以几何图形看,凸函数总是位于任何一条弦的下面；凹函数总是位于任何一条弦的上面。

**3.对于随机变量，凹 (凸 )函数与期望算子若交换作用顺序,有什么结论成立？试予以证明。**

答：对于随机变量，凹 (凸 )函数与期望算子若交换作用顺序，结论是：证明如下：只证明离散情形，对于两点分布，不等式变为这由凸函数的定义可直接得到。假定当分布点个数为时，定理成立，此时记则有

其中第一个不等式由归纳假设得到，第二个不等式由凸性的定义可得。通过对连续性的讨论，该证明可以推广到连续分布情形。

**4.以不同方式证明信息不等式。**

答：信息不等式为当且仅当对任意的等号成立。

证明方法一：



所以

证明方法二：



所以

**5.证明互信息的非负性。**

答：证明：当且仅当（即X与Y为相互独立),等号成立。

**6.证明条件的作用使得不确定性减少。**

答：即证明

证明：

所以即条件的作用使得不确定性减少。

**7.证明熵的最大性。**

答：

证明如下：



其中的不等式可以由推出。

**8.将相对熵看成概率分布对( p,q) 的泛函数,证明相对熵的凸性**。

答：要求证明

证明：将对数和不等式应用于公式左边的每一项



对所有的x求和，得到所要的性质。

**9.证明熵的凹性。**

答：证明：是给定的凹函数其中的u为个结果的均匀分布。从而H的凹性可由D的凸性直接得到。

**10.将两个随机变量的联合分布看成边际分布 与条件分布的乘积， 则互信息是边际分布 和条件分布的泛函数,证明下述结论:**

固定条件分布，作为边际分布的泛函数，信息是凹性函数。

固定边际分布，作为条件分布的泛函数，信息是凸性函数。

答：证明：固定条件分布时，将互信息展开



固定条件分布，则p(y)是关于p(x)的线性函数。因而，关于p(y)的凹函数H(Y)也是p(x)的凹函数。上式第二项是关于p(x)的线性函数。因此，它们的差仍是关于p(x)的凹函数。

固定边际分布时，先固定p(x)，并考虑两个不同的条件分布。相应的联合分布分别为和，且各自的边际分布为p(x)，和。考虑条件分布

它是和的组合，其中。相应的联合分布也是对应的两个联合分布的组合Y的分布也是一个组合，因此，如果假设为边际分布的乘积，则有由于互信息是联合分布和边际分布乘积的相对熵，有相对熵为关于二元对的凸函数，由此可知，互信息是条件分布的凸函数。

**11. 解释马尔科夫链。**

答：如果Z的条件分布仅依赖于Y的分布，而与X是条件独立的，则称随机变量X,Y,Z依序构成的马尔科夫链（记为X→Y→Z)具体的讲，若X,Y,Z的联合概率密度函数写为则X,Y,Z构成马尔科夫链X→Y→Z。

**12. 解释信息处理不等式 .(提示 :信息不增 )。**

答：信息处理不等式，若X→Y→Z，则有

证明由链式法则，将互信息以两种不同方式展开：



由于给定Y条件下，X与Z是条件独立的，因此有又由于则有



当且仅当，等号成立。类似的可以证明。