20131910023-金洋-IT-EX02

查阅资料，思考并回答下述问题：  
1. 解释函数的凸性与凹性。

答：

定义：若对于任意的及，满足

，

则称f(x)在区间(a,b)是凸的。如果仅当，上式成立，则称函数f是严格凸的。

定义：如果-f是凸函数，则称f是凹的；

2. 以几何图形看，凸函数与凹函数有什么特点。

答：凸函数总是位于任何一条弦的下面；凹函数总是位于任何一条弦的上面；

3. 对于随机变量，凹 (凸 )函数与期望算子若交换作用顺序，有什么结论成立？试予以证明。

答：对于凸函数f和一个随机变量X，则有，若f是严格凸的，当且仅当X=EX，等号成立.（对于凹函数f和一个随机变量X，则有，若f是严格凹的，当且仅当X=EX，等号成立.）

证明：对于两点分布，不等式变为

;

假定当分布点个数为k-1时，定理成立，记，则有





1. 以不同方式证明信息不等式。

信息不等式：设为两个概率密度函数，则，当且仅当任意的x,p(x)=q(x),等号成立。

证法一：设A={x:p(x)>0}为x的支撑集，则



由于logt是关于t飞严格凹函数，当且仅当恒为常量时，①取等号.所以.

又仅当时，②的等号成立；故c=1；

所以，当且仅当任意的x,p(x)=q(x),等号成立，.

证法二：由对数和不等式



当且仅当=c，等号成立。因为p(x),q(x)都是概率密度函数，则，所以当且仅当对任意的x,p(x)=q(x),等号成立。

5. 证明互信息的非负性。

对任意两个随机变量X,Y，I(X;Y)>=0, 当且仅当X与Y相互独立，等号成立.

证明：由互信息定义和相对熵的非负性，



由相对熵的等号成立条件，当且仅当时，即X,Y相互独立时，等号成立.

6. 证明条件的作用使得不确定性减少。

H(X|Y)<=H(X), 当且仅当X与Y相互独立，等号成立。

证明：0<=I(X;Y)=H(X)-H(X|Y).

7. 证明熵的最大性。

H(p1 ,..., pi ,...,pn )≤logn，当且仅当X服从均匀分布时，即时，等号成立.

证法一：设随机变量X，是样本空间，是上均匀分布的概率密度函数，p(x)是X的密度函数，则,

又由于相对熵的非负性，则.

∴，当X为均匀分布时，可以取等号。

证法二：



又对于x>0,则有（当且仅当x=1时等号成立），两侧同乘log(e)后，有

故



当且仅当，——当X为均匀分布时，可以取等号。

8. 将相对熵看成概率分布对（ p，q）的泛函数，证明相对熵的凸性。

D(p||q)关于分布对(p,q)是凸的，即，如果和为两对概率密度函数，则对于所有的，有



证明：将对数和不等式应用于上式左边



1. 证明熵的凹性。

H(p)是关于p的凹函数.

证明: 由7中证法一得，即.

u为n个结果的均匀分布，D是凸的，故H是凹的;

10. 将两个随机变量的联合分布看成边际分布与条件分布的乘积，则互信息是边际分布和条件分布的泛函数，证明下述结论:  
(1) 固定条件分布，作为边际分布的泛函数，互信息是凹性函数。  
(2) 固定边际分布，作为条件分布的泛函数，互信息是凸性函数。

证明：

1. 

如果固定p(y|x),则由全概率公式，p(y)是关于p(x)的线性函数。因而，关于p(y)的凹函数H(Y)也是p(x)的凹函数。上式中第二项是关于p(x)的线性函数。因此，它们的差仍然是p(x)的凹函数.

1. 先固定p(x),并考虑两个不同的条件分布和。相应的联合分布分别为和，且各自的边际分布是和。考虑条件分布



相应的联合分布亦是对应的两个联合分布的组合，



Y的分布也是一个组合



因此，如果设

由于互信息是联合分布和边际分布乘积的相对熵，有



相对熵为关于二元对(x,y)的凸函数，由此可知，互信息是条件分布的凸函数.

1. 解释马尔科夫链 。

答：如果Z的条件分布仅依赖于Y的分布，而与X是条件独立的，则称随机变量X，Y，Z依序构成马尔科夫链(记为X→Y→Z)。具体讲，若X,Y,Z的联合概率密度函数可写为，则X,Y,Z构成马尔可夫链X→Y→Z.

12. 解释信息处理不等式 .(提示 :信息不增 )。

信息处理不等式:若X→Y→Z，则有I(X;Y)>=I(X;Z)

证明：



由于在给定Y的条件下，X与Z是条件独立的，因此,

又由于，则有，当且仅当(即X→Y→Z构成马尔可夫链)，等号成立，类似地可以证明.

（ 答 案 提 交 方 式 ： 电 子 稿 ， 电 子 邮 箱infosecynu2015@163.com,文 件 命 名 规 范 :学 号 -姓名 -IT-EX02.docx