云南大学数学与统计学实验教学中心

实验报告

课程名称：大学数学实验	**学期**：2014~2015 学年下学期	**成绩**：
指导教师： 李朝迁	**学生姓名**：金洋	**学号**：20131910023
实验名称：非线性方程求解		
实验编号：八	**实验日期**： 6 月 8 日	**实验学时**： 1
学院： 数学与统计学院	**专业**： 信息与计算科学	**年级**： 2013 级

一、实验目的

1.掌握用 MATLAB 软件求解非线性方程和方程组的基本用法，并对结果作初步分析.

2.联系用非线性方程和方程组建立实际问题的模型并进行求解.

二、实验内容

1. 利用 help 调用 fzero,fsolve 和 solve.学习使用并对 $\sin x = \frac{x^2}{2}$ 求解；

2. 构造迭代公式，对 $\sin x = \frac{x^2}{2}$ 求其近似根，并与 1 中进行比较；

3. 解课后习题 3-8；

三、实验环境

Windows 操作系统；

MATLAB R2014a；

四、实验过程

实验 1:

问题描述：利用 help 调用 fzero,fsolve 和 solve.学习使用并对 $\sin x = \frac{x^2}{2}$ 求解；

实验求解：

①fzero 用于求单变量方程的根，基本调用格式为

[x,fval,exitflag,output]=fzero(@f,x0,options,P1,P2,...)，其中，

x:变号点的近似值；

fval:x 对应的函数值；

exitflag：是否找到异号点；

output：程序运行和停止的有关信息；

@f：函数名；

x0:迭代初值，或求根区间

②fsolve 用于非线性方程组的求解

[x,fval,exitflag,output，jacobian]=fzero(@f,x0,options,P1,P2,...)

各变量含义同 fzero，其中 jacobian：x 点所对应的雅可比矩阵.

③slove 用来求解方程的符号解析式，也能解一些简单方程的数值解，但能力若（往往不精确或不完整）.

g=solve(eq1,eq2,...,eqn,var1,var2,...,varn).

eq 代表一个符号表达式或字符串，var 代表变量名称，即对方程组 eq1,eq2,...,eqn 中指定的 n 个变量 var1,var2,...,varn 求解.

三者具体使用如下：

f1.m

```
function y=f1(x)
y=sqrt(2*sin(x));
```

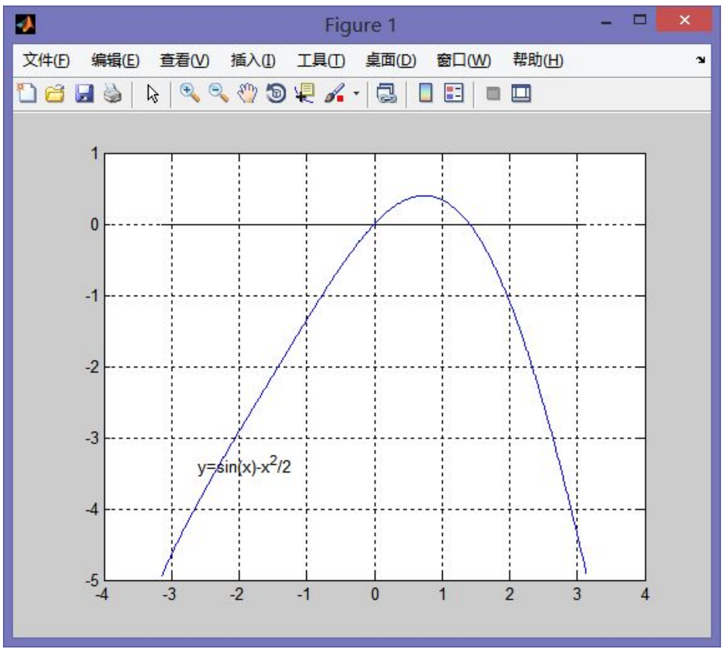
f2.m

```
function y=f2(x)
y=sin(x)-x*x/2+x;
```

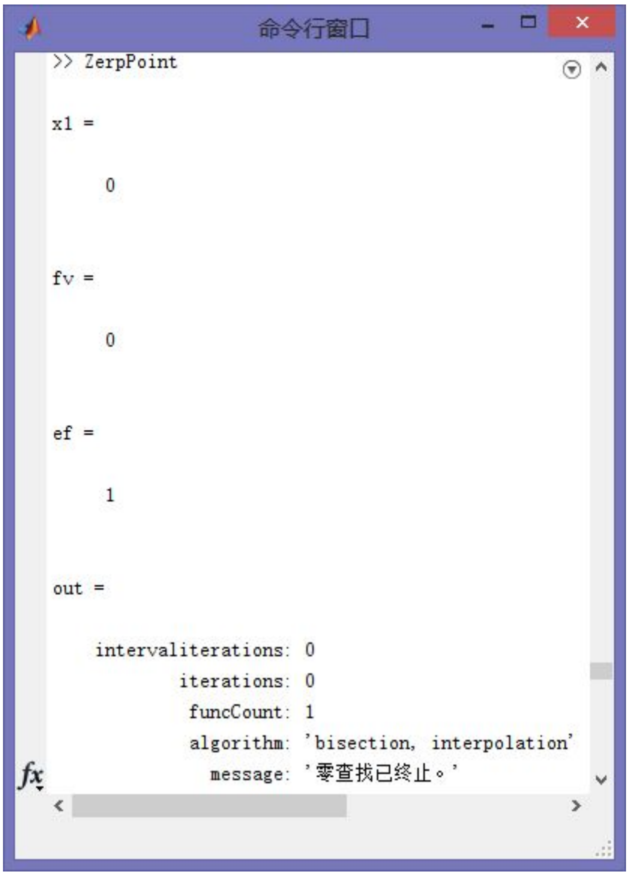
ZerpPoint.m

```
x=-pi:0.01:pi;
z=0*x;
plot(x,z,'k',x,sin(x)-x.^2/2),grid on,gtext('y=sin(x)-x^2/2')%画出y=sin(x)-x^2/2 的图形，图形与 x 轴交点即为方程的解
%用 fzero 求解
[x1,fv,ef,out]=fzero(inline('sin(x)-x^2/2'),0)
[x1,fv,ef,out]=fzero(inline('sin(x)-x^2/2'),1.5)
%用 fsolve 求解
[x2,fv,ef,out,jac]=fsolve(inline('sin(x)-x^2/2'),0)
[x2,fv,ef,out,jac]=fsolve(inline('sin(x)-x^2/2'),1.5)
%用 solve 求解
syms x
x3=solve('sin(x)-x^2/2==0',x)
```

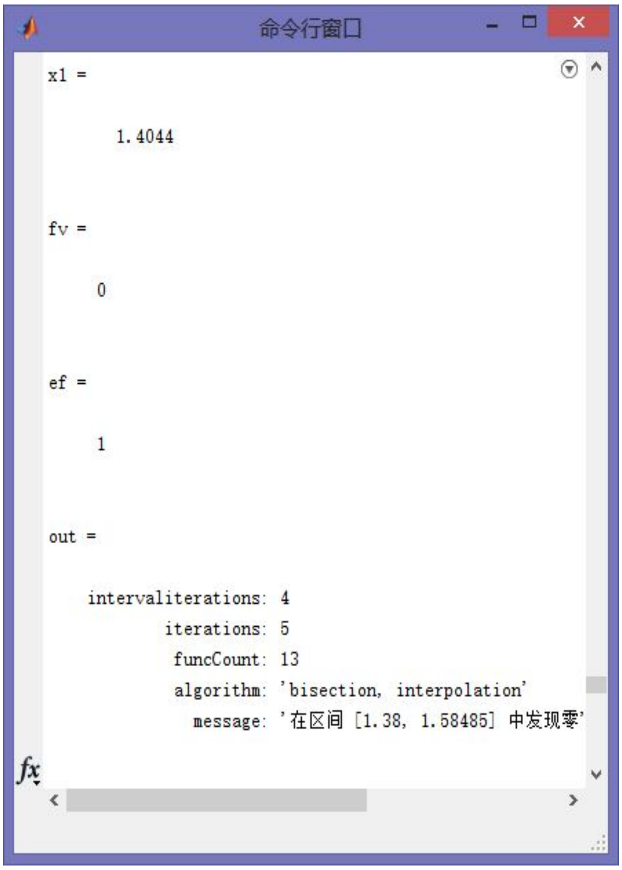
输出为：



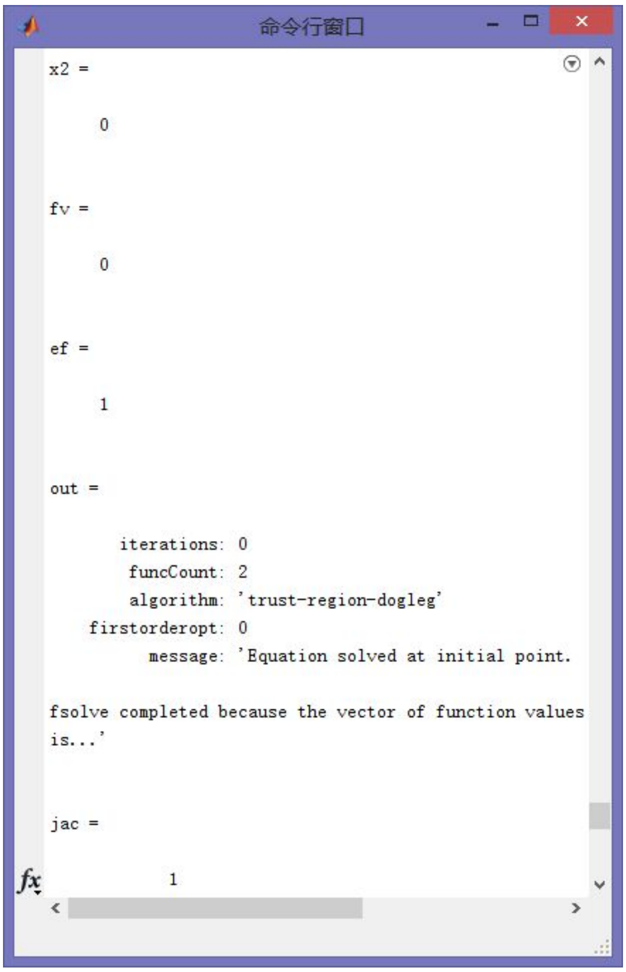
可以看出原方程有两个根，大约为 0 和 1.4.



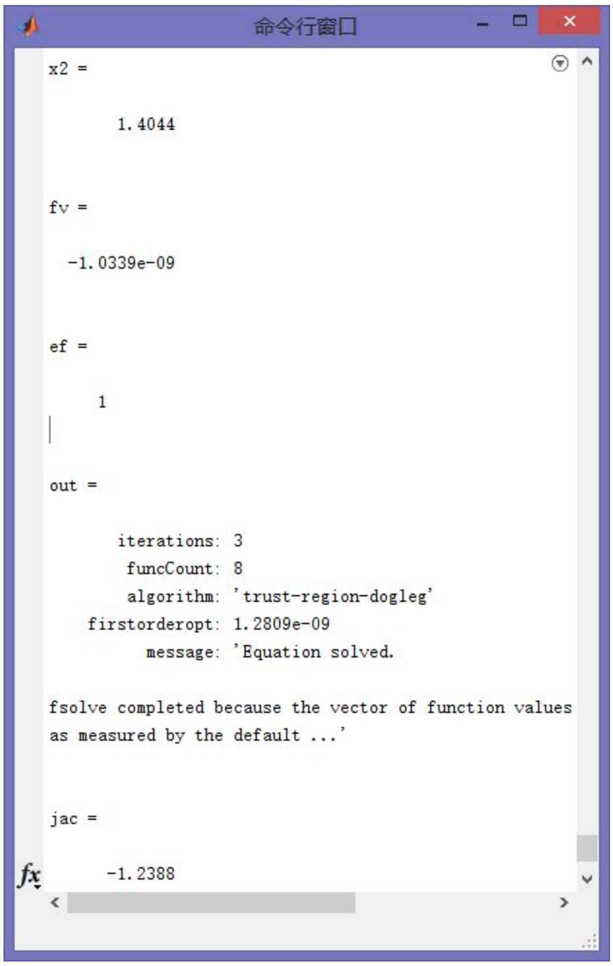
```
命令行窗口
>> ZerpPoint

x1 =

     0


fv =

     0


ef =

     1


out =

    intervaliterations: 0
            iterations: 0
             funcCount: 1
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '零查找已终止。'
```



```
命令行窗口
x1 =

    1.4044


fv =

     0


ef =

     1


out =

    intervaliterations: 4
            iterations: 5
             funcCount: 13
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '在区间 [1.38, 1.58485] 中发现零'
```



```
命令行窗口
x2 =

     0


fv =

     0


ef =

     1


out =

       iterations: 0
        funcCount: 2
        algorithm: 'trust-region-dogleg'
    firstorderopt: 0
          message: 'Equation solved at initial point.

fsolve completed because the vector of function values
is...'


jac =

     1
```



```
命令行窗口
x2 =

    1.4044


fv =

  -1.0339e-09


ef =

     1


out =

       iterations: 3
        funcCount: 8
        algorithm: 'trust-region-dogleg'
    firstorderopt: 1.2809e-09
          message: 'Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values
as measured by the default ...'


jac =

   -1.2388
```

由以上结果可知，fzero，fsolve 都解得了接近精确值的数值解 0, 1.4044，且由于输入了迭代初值，解是完整的；

而 solve 只输出了一个解 x3=0，并没求出完整解.

实验 2：

问题描述：构造迭代公式，对 $\sin x = \frac{x^2}{2}$ 求其近似根，并与实验 1 中进行比较；

实验求解：构造两个迭代公式

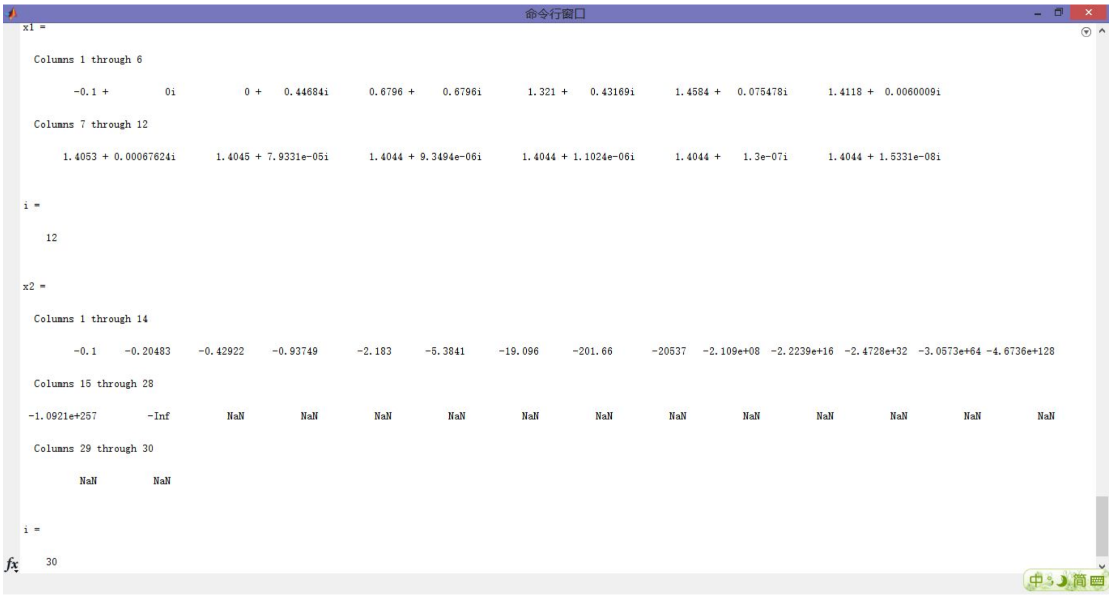
$$x_{k+1} = \sqrt{2\sin(x_k)}\ ; \qquad\qquad x_{k+1} = \sin(x_k) - \frac{x_k^{\ 2}}{2} + x_k$$

迭代法程序如下：

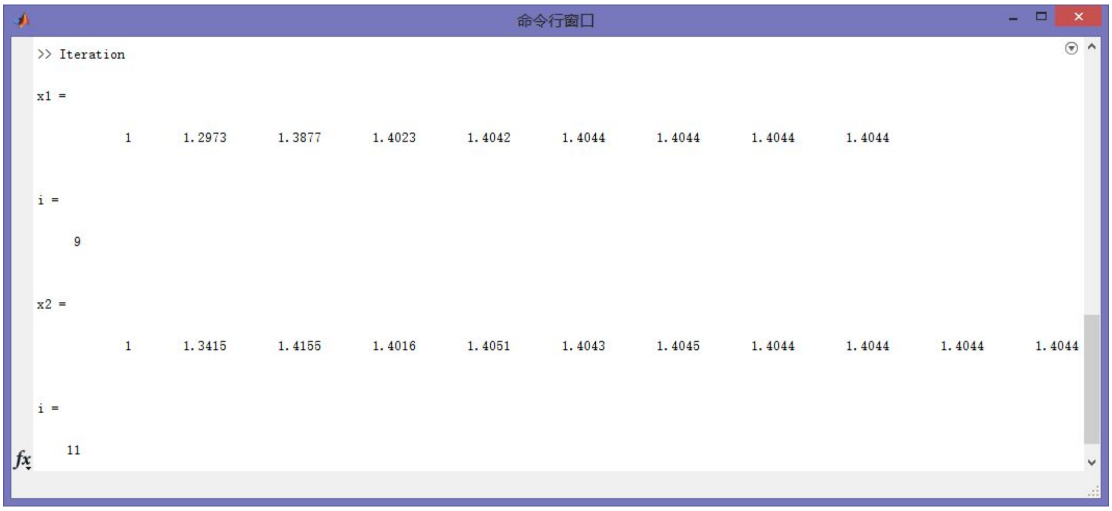
```
n=30;%迭代步数
precision=10^-6;%精度

%用迭代公式 1 进行求解
x1=-0.1;%初值
for i=2:n
   x1(i)=f1(x1(i-1));
   if abs(x1(i)-x1(i-1))<=precision
       break
   end
end
x1,i

%用迭代公式 2 进行求解
x2=-0.1;%初值
for i=2:n
   x2(i)=f2(x2(i-1));
   if abs(x2(i)-x2(i-1))<=precision
```

```
      break
   end
end
x2,i
```

当初始值为 x=-0.1 时，迭代公式 1 经过 12 步迭代得到了其中一个近似数值解 1.4044 + 1.5331e-08i，迭代公式 2 并不收敛，无法求得解



当初始值 x=1 时，两个迭代公式分别进行 9 次和 11 次迭代得到了同样的结果，且与 1 中一致.



牛顿法程序如下

Newton.m

```
n=30;%迭代步数
precision=10^-6;%精度

%用牛顿割线法进行求解
```

```
x=1;x(2)=4%初值
for i=3:n
   x(i)=x(i-1)-( f(x(i-1)) *  (x(i-1)-x(i-2))  )  /   ( f(x(i-1))-
f(x(i-2)));
   if abs(x1(i)-x1(i-1))<=precision
       break
   end
end
x,i
```

输出为：

经过 12 步迭代，得到其中一解 1.4044，同实验 1.

实验 3：

问题描述：

(1)小张夫妇以按揭方式贷款买了 1 套价值 20 万元的房子，首付了 5 万元，每月还款 1000 元，15 年还清。问贷款利率是多少？

(2)某人欲还贷 50 万元购房,他咨询了两家银行,第一家银行开出的条件是每月还 4500，15 年还清；第二家银行开出的条件是每年还 45000 元，20 年还清。从利率方面看，哪家银行较优惠（简单地假设年利率=月利率*12）？

实验求解：

（1）设 a_i 表示第 i 个月后还欠银行的钱（万元），r 为贷款月利率，b 为每月还款钱数（万元），则有

$$a_1 = a_0 * (1+r) - b;$$
$$a_2 = a_1 * (1+r) - b;$$
$$\cdots$$
$$a_n = a_{n-1} * (1+r) - b;$$

由上述迭代式可以推出

$$
\begin{aligned}
a_n &= (a_{n-2} * (1+r) - b) * (1+r) - b \\
&= a_{n-2} * (1+r)^2 - b((1+r)+1) \\
&= (a_{n-3} * (1+r) - b) * (1+r)^2 - b((1+r)+1) \\
&= a_{n-3} * (1+r)^3 - b((1+r)^2 + (1+r) + 1) \\
&\cdots \\
&= a_0 * (1+r)^n - b((1+r)^{n-1} + (1+r)^2 + (1+r) + 1) \\
&= a_0 * (1+r)^n - b\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad ①
\end{aligned}
$$

①中在第 n=15*12=180 个月后还清贷款，令①=0，将 a_0, r, b, n 用具体数值代入，用 fzero 求解，即可求出月利率 r

构造 rate 函数，输入 r,a0,b,n，输出在 n 个月后还欠银行的钱

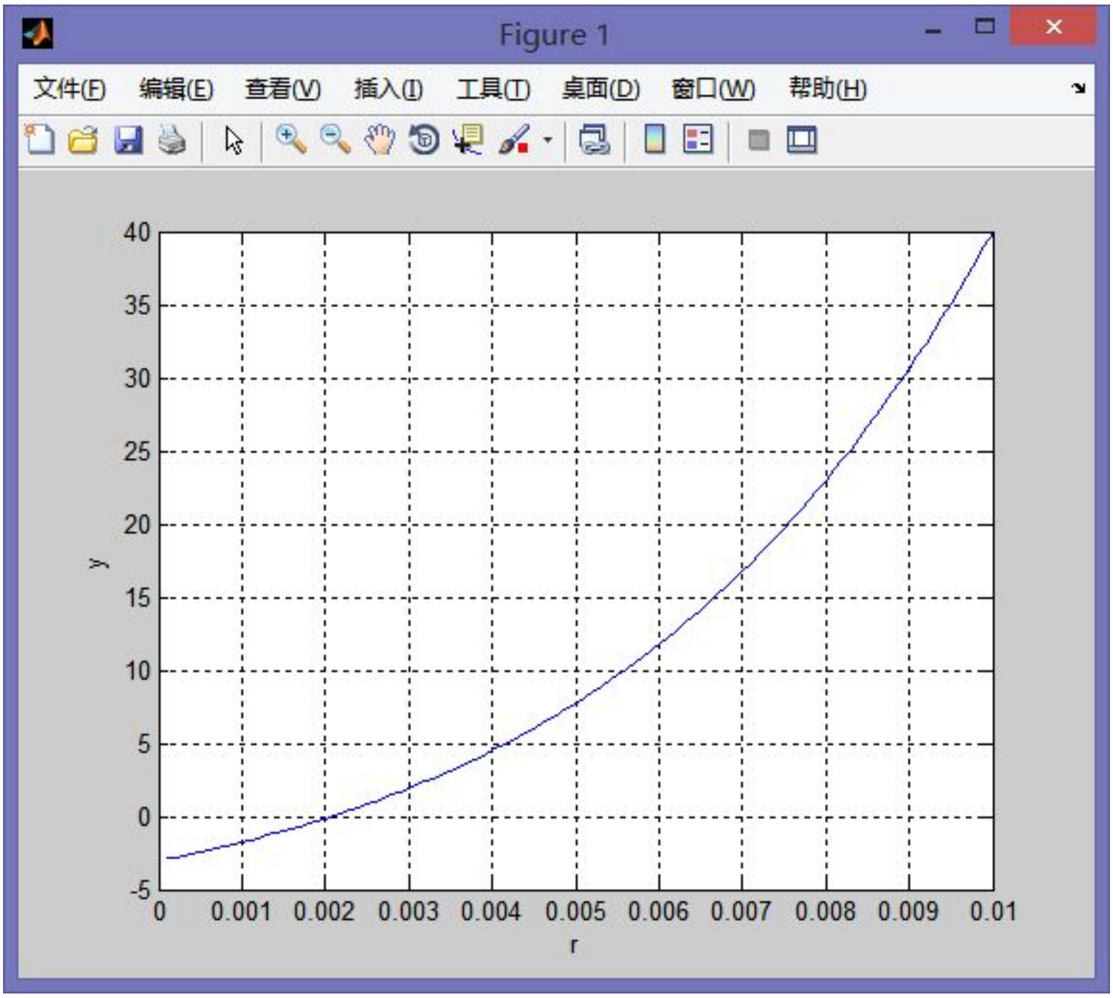
rate.m

```
function y=rate(r,a0,b,n)
y=a0.*(1+r).^n-b.*((1+r).^n-1)./r;
```

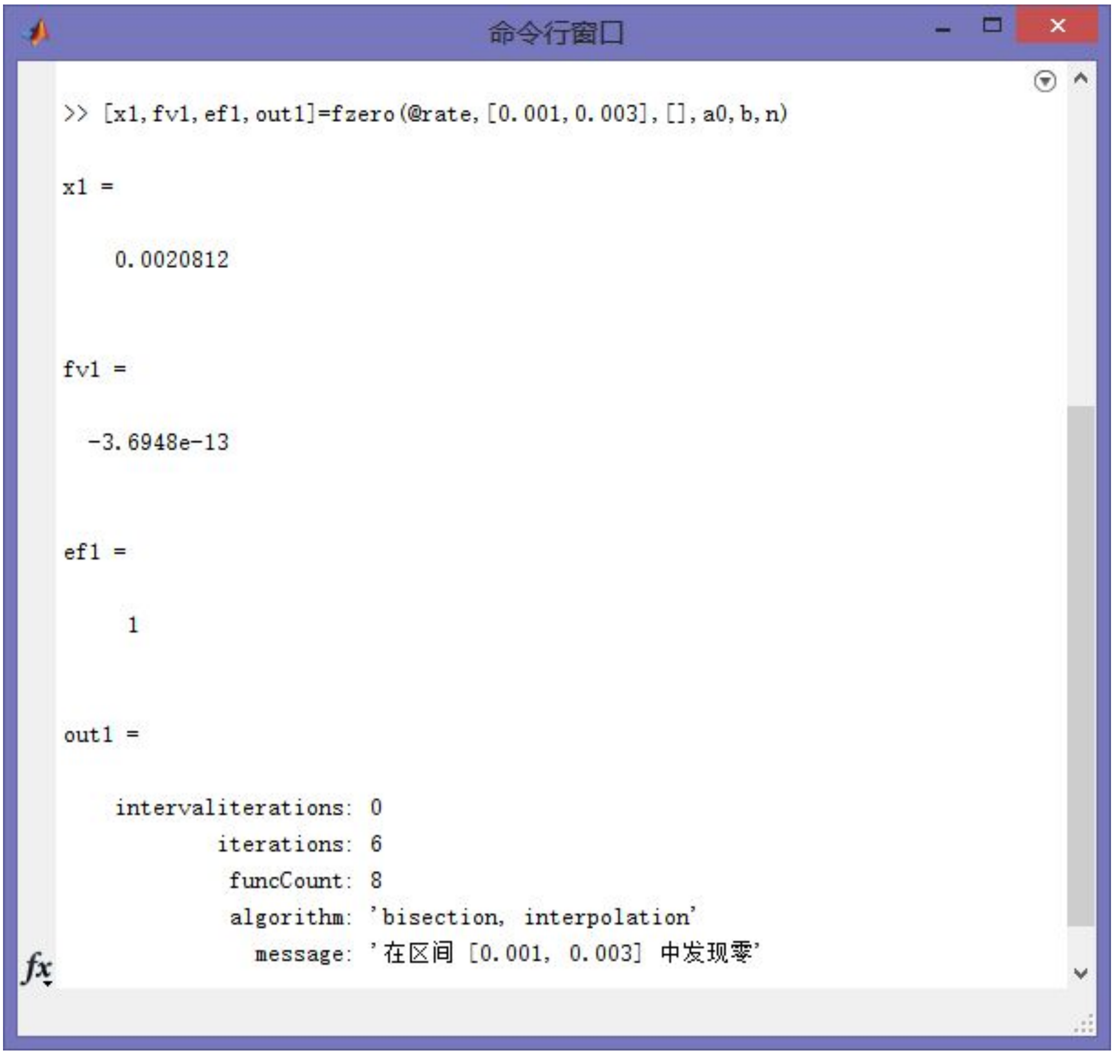
给定（1）中的初始数值后，根据常识，使 r 在[0,0.01]内变动，通过图像观察当还清贷款时，r 所在的大致区间

Loan.m

```
a0=15;
b=0.1;
n=15*12;
r=0:0.0001:0.01;
y=rate(r,a0,b,n);
%判断根所在大致区间
plot(r,y),grid on,xlabel('r'),ylabel('y')


%[x1,fv1,ef1.out1]=fzero(@rate,[,],[],a0,b,n)
```



可以看出当 r∈[0.001,0.003]时，图像与 r 轴有交点，故 fzero 中的参数有根区间设为[0.001,0.003]，调用 fzero 命令即可求出 r



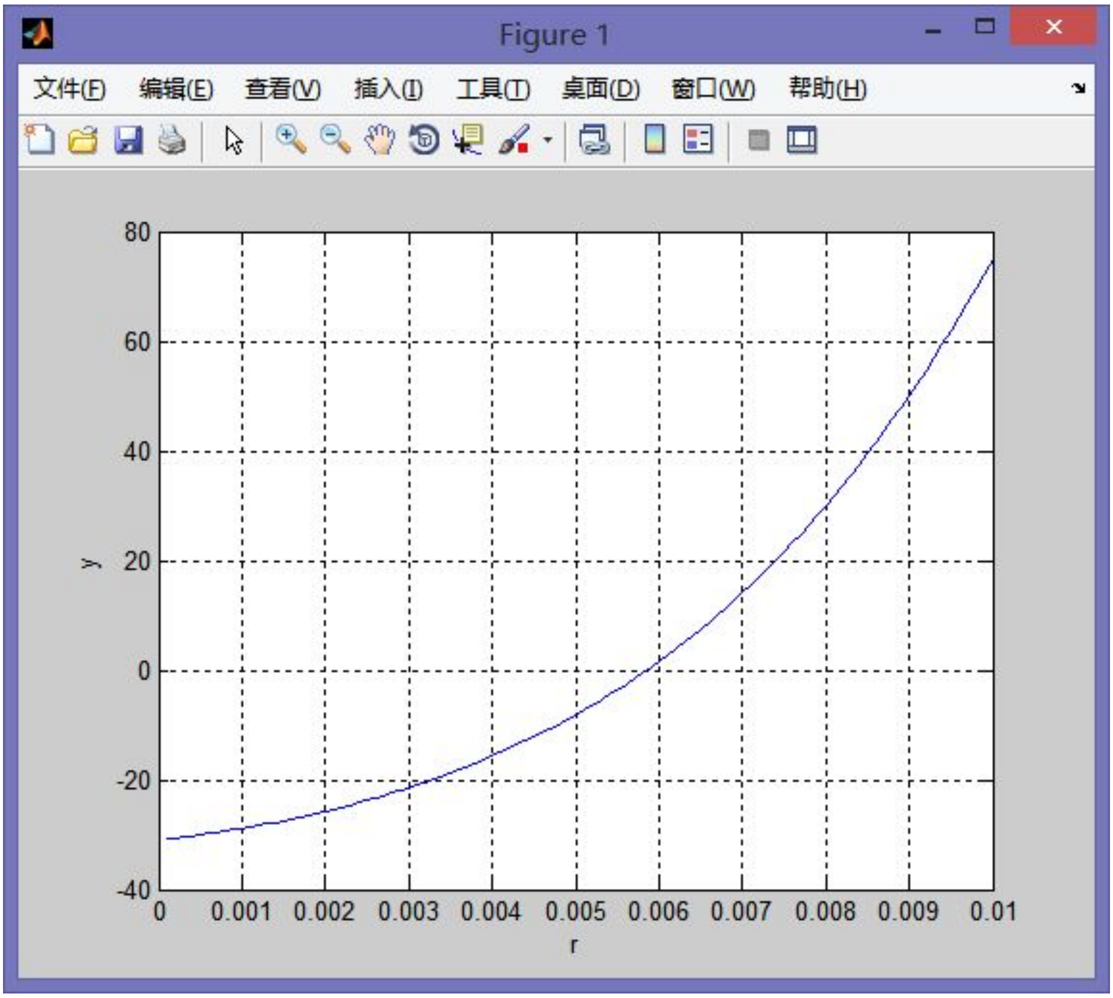
∴贷款月利率为 r==0.0020812=0.20812%.

（2）第一家银行的做法同（1）；第二家银行也可以按照（1）的方法，但是需把年当做月计算，最终得出的利率乘 12 作为年利率.

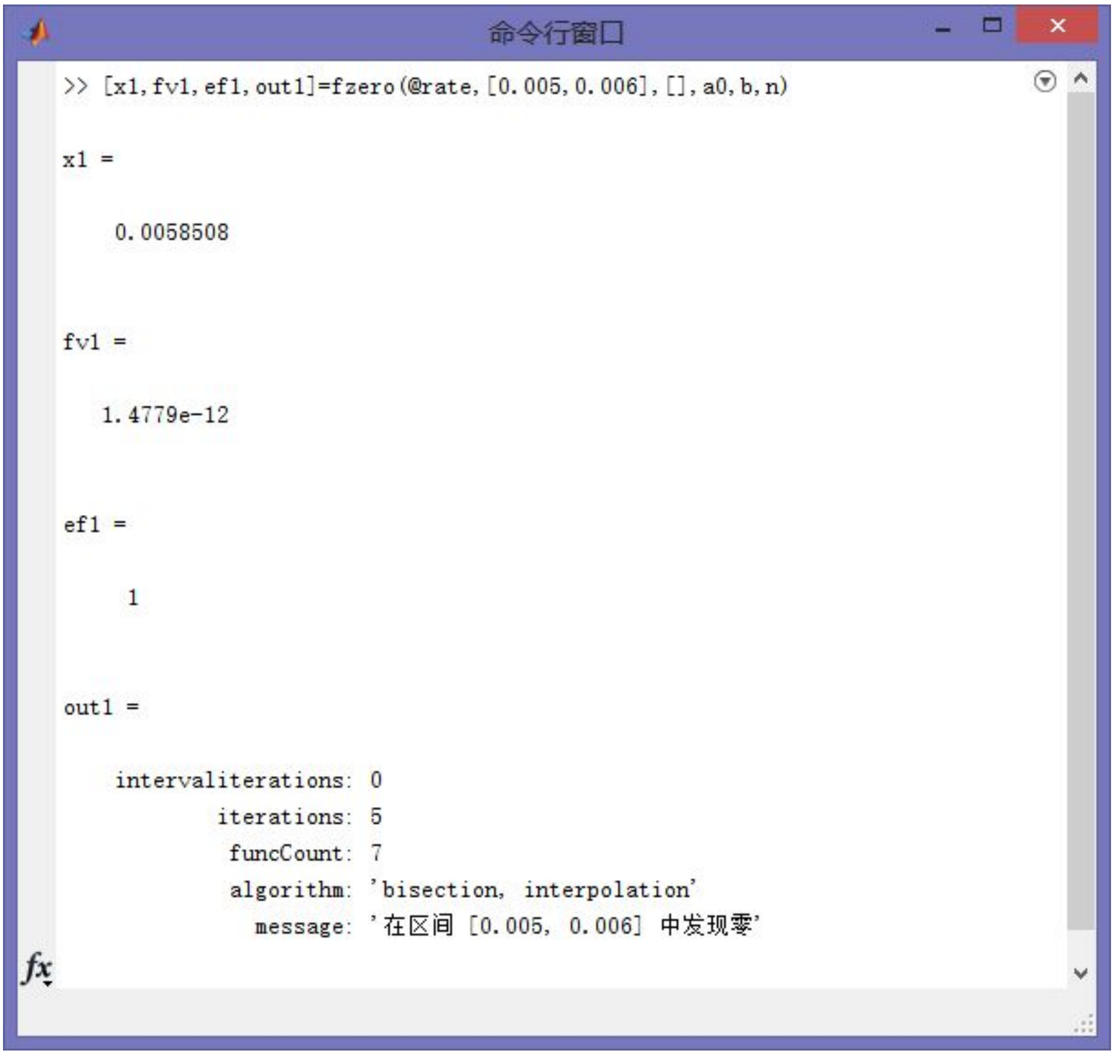
第一家：

Loan.m

```
a0=50;
b=0.45;
n=15*12;
r=0:0.0001:0.01;
y=rate(r,a0,b,n);
%判断根所在大致区间
plot(r,y),grid on,xlabel('r'),ylabel('y')
%[x1,fv1,ef1.out1]=fzero(@rate,[,],[],a0,b,n)
```



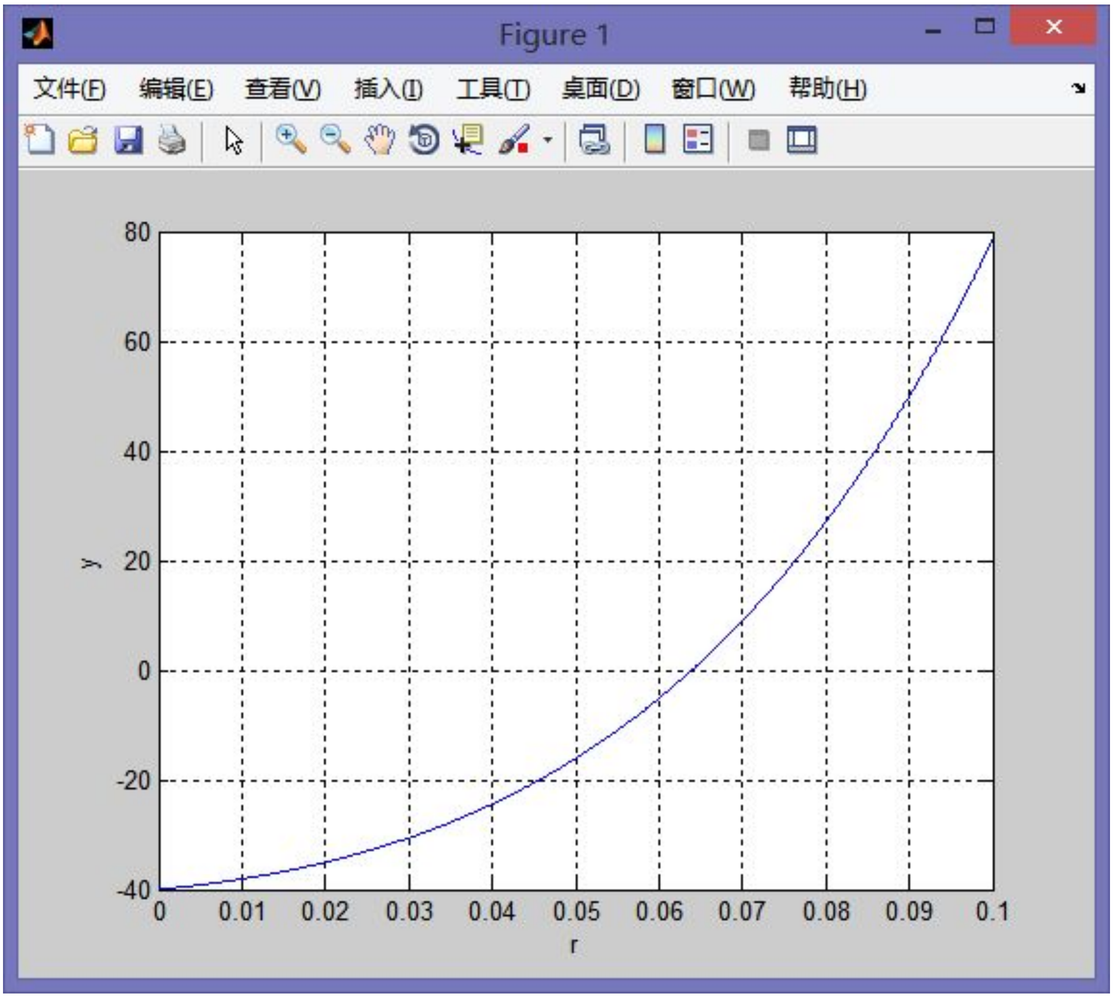
有根区间为[0.005,0.006]



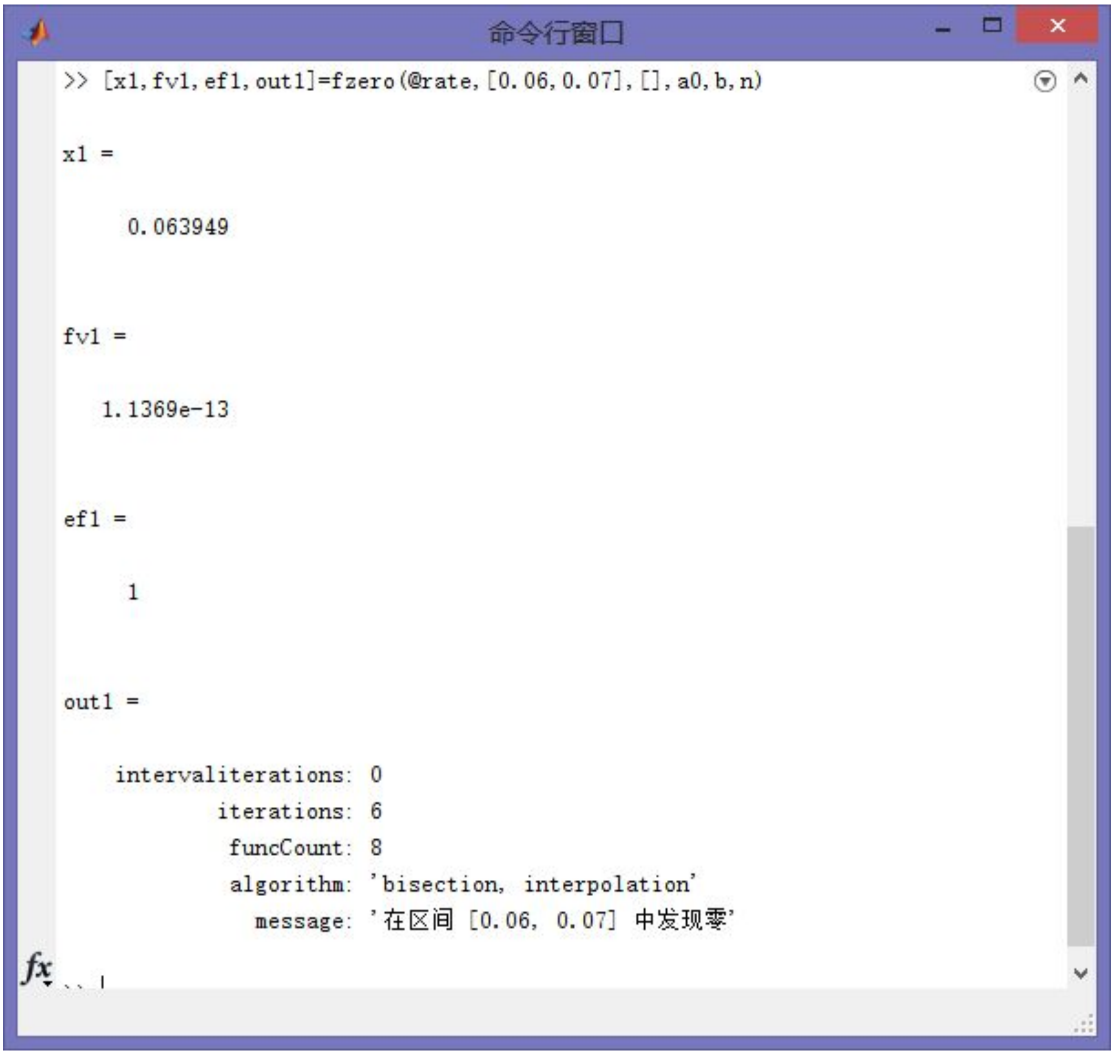
∴第一家月利率为 r1=0.0058508=0.58508%.

第二家：（先将年利率看做“月利率”）

```
a0=50;
b=4.5;
n=20;
r=0:0.0001:0.1;
y=rate(r,a0,b,n);
%判断根所在大致区间
plot(r,y),grid on,xlabel('r'),ylabel('y')
%[x1,fv1,ef1.out1]=fzero(@rate,[,],[],a0,b,n)
```



有根区间为[0.06,0.07]



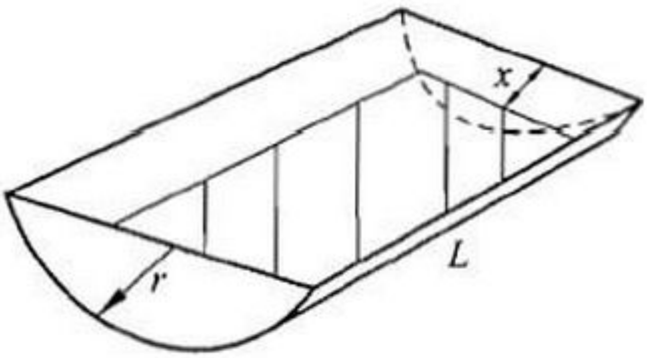
```
命令行窗口
>> [x1,fv1,ef1,out1]=fzero(@rate,[0.06,0.07],[],a0,b,n)

x1 =

    0.063949


fv1 =

  1.1369e-13


ef1 =

     1


out1 =

    intervaliterations: 0
            iterations: 6
             funcCount: 8
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '在区间 [0.06, 0.07] 中发现零'
```

解得年利率为 6.3949%，转换为月利率为 r2=6.3949%/12=0.53291%<r1

∴从利率方面看，第二家更优惠

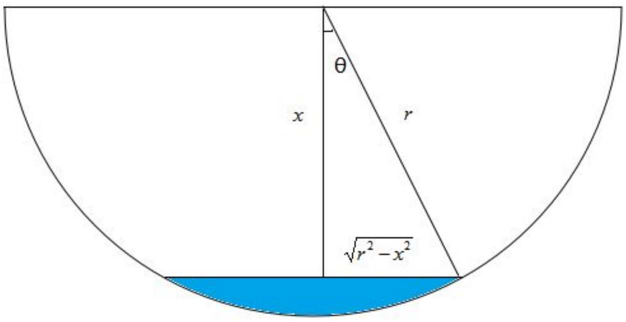
实验 4：

问题描述：水槽由半圆柱体水平放置而成，如图所示，圆柱体长 L，半径 r，当给定水槽内盛水的体积 V 后，要求计算从水槽边沿到水面的距离 x.今已知 L=25.4m，r=2m，求 V 分别为 10，50，100m3 的 x.



模型及其求解：水槽是水平放置的，盛水的部分也为柱体，体积=底面积*高. 根据盛水部分和总体积之比等于底面积之比，可建立方程求解.

盛水部分的底面积可根据平面几何知识求出：



$$\theta=\arccos(\frac{x}{r})$$

$$S_{水}=\frac{\pi r^2*\theta}{\pi}-x\sqrt{r^2-x^2}$$

故建立方程 $\frac{V}{V_{总}}=\frac{S_{水}}{S_{总}}$,即

$$\frac{V}{\frac{\pi r^2 L}{2}}=\frac{\frac{\pi r^2*\theta}{\pi}-x\sqrt{r^2-x^2}}{\frac{\pi r^2}{2}}$$，化简得 $r^2*\arccos\frac{x}{r}-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{V}{L}=0$ ②

做②左式的函数文件

water.m

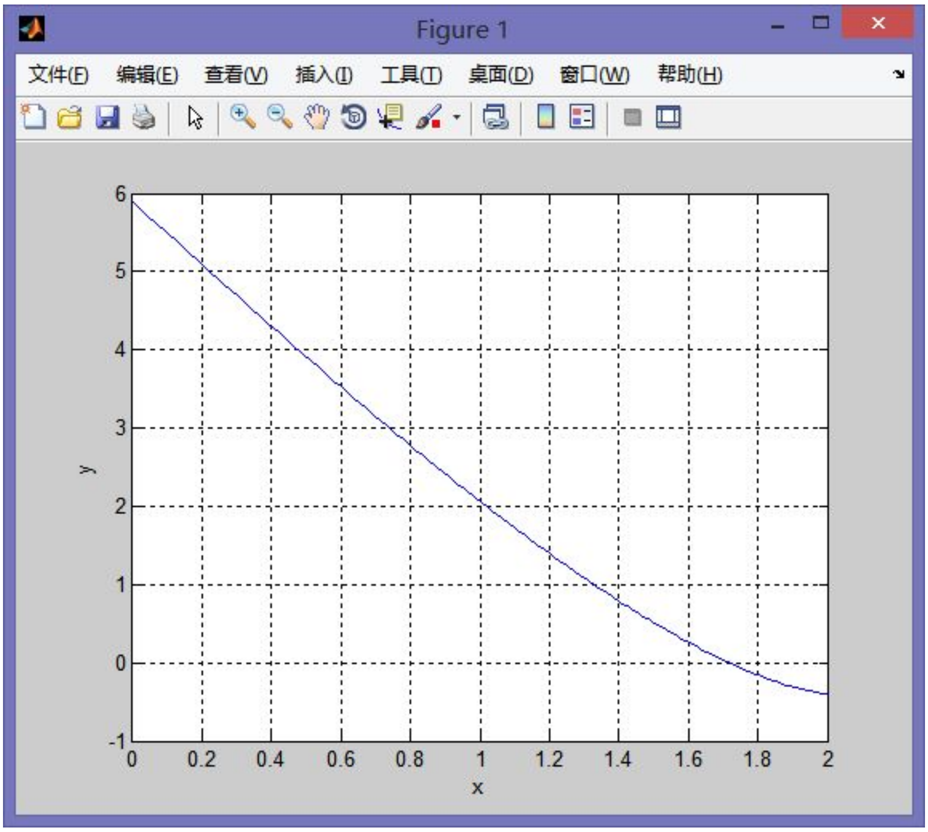
```
function y=water(x,r,V,L)
y=r*r*acos(x/r)-x.*sqrt(r*r-x.^2)-V/L;
```

给定 r,V,L 中的初始数值后，使 x 在[0,2]内变动，作出②式左侧的图像，当②成立时，判断 x 所在的大致区间

Trough.m

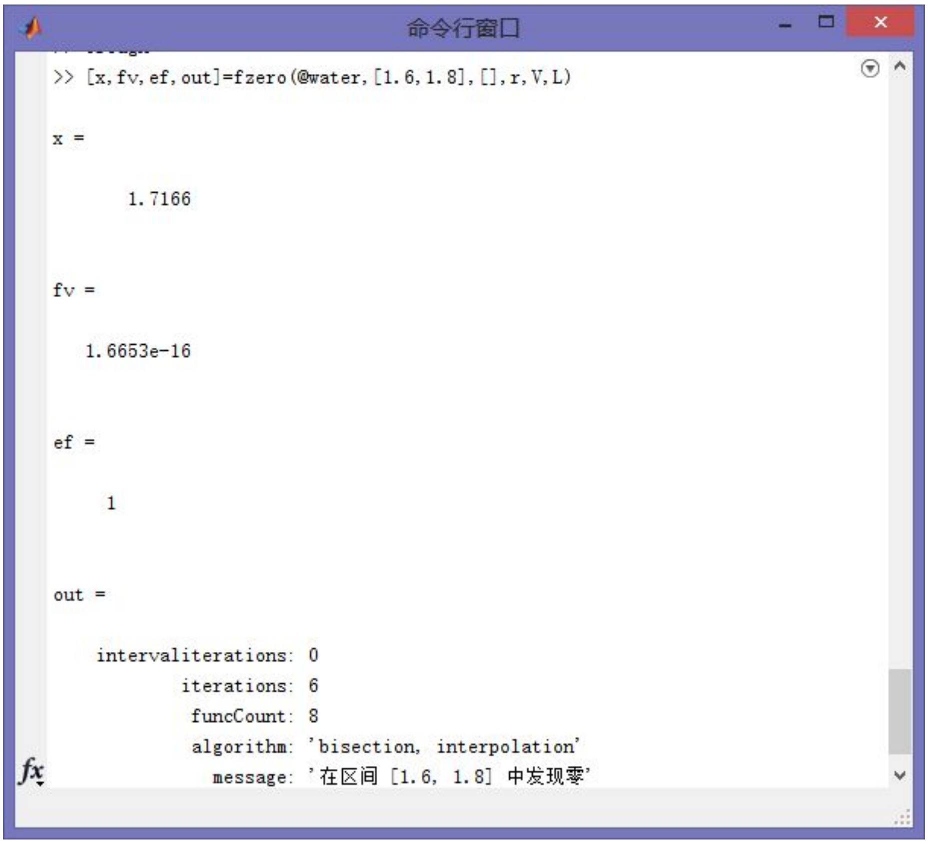
```
r=2;
V=10;
L=25.4;
x=0:0.01:2;
y=water(x,r,V,L);
%判断根所在大致区间
plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
%[x,fv,ef,out]=fzero(@water,[,],[],r,V,L)
```

输出图像为



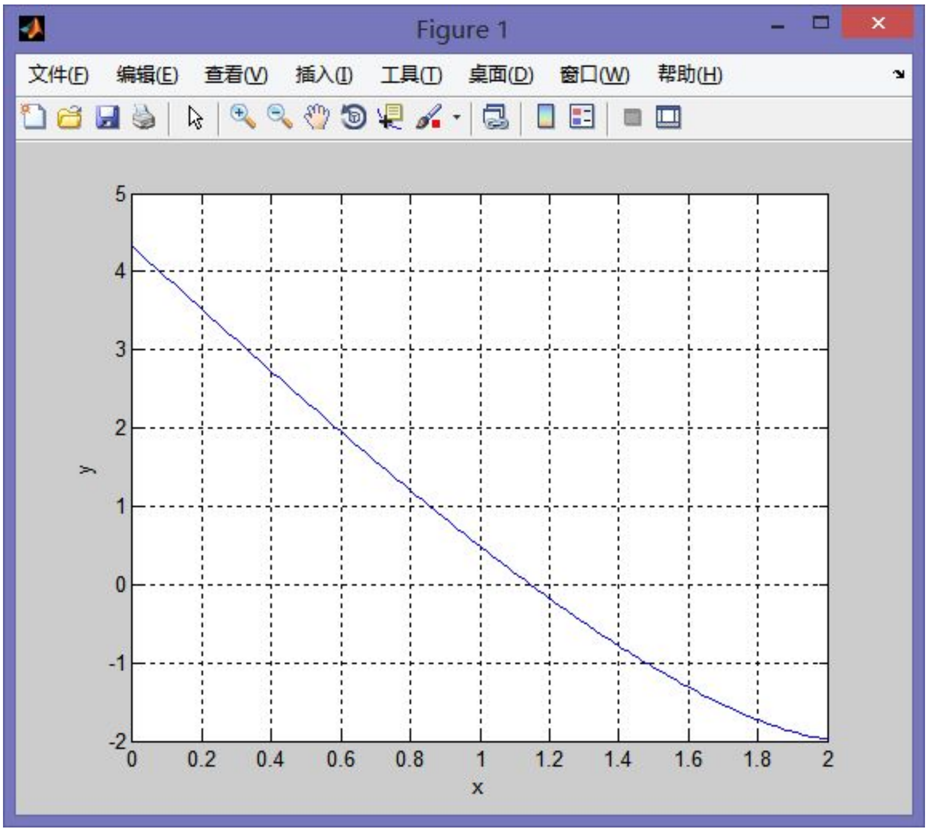
由图像得有根区间为[1.6,1.8]

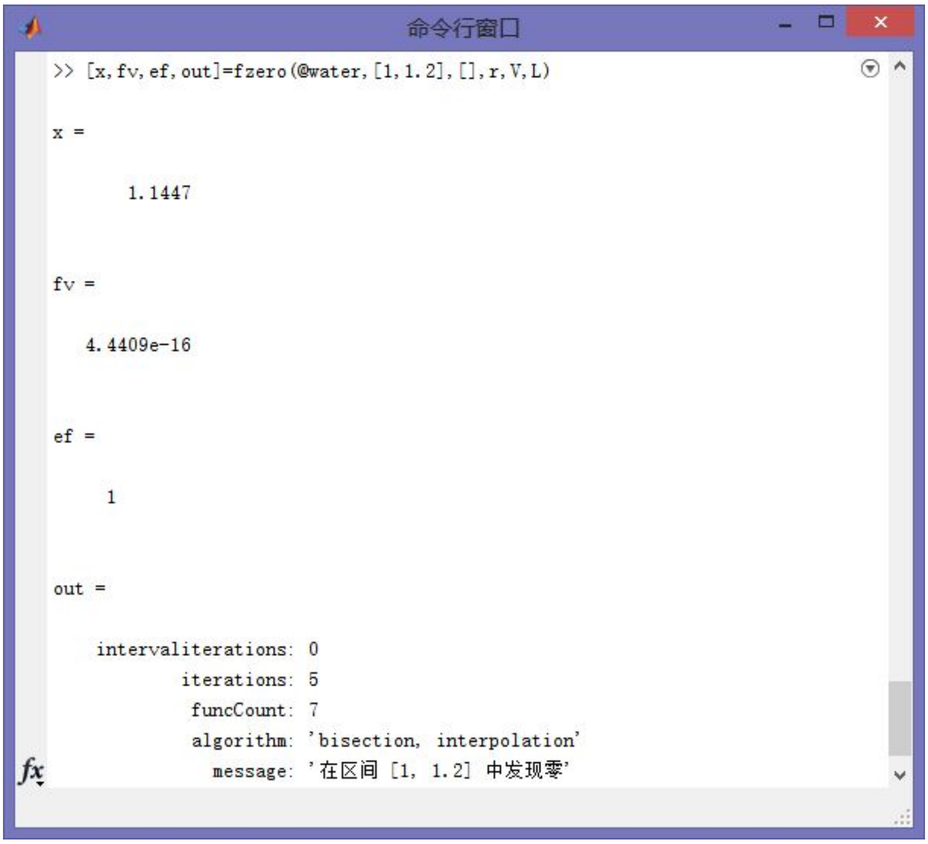
利用 fzero 命令求②的解



故当 $V=10m^3$ 时，x=1.7166m.

同理运用上面的方法

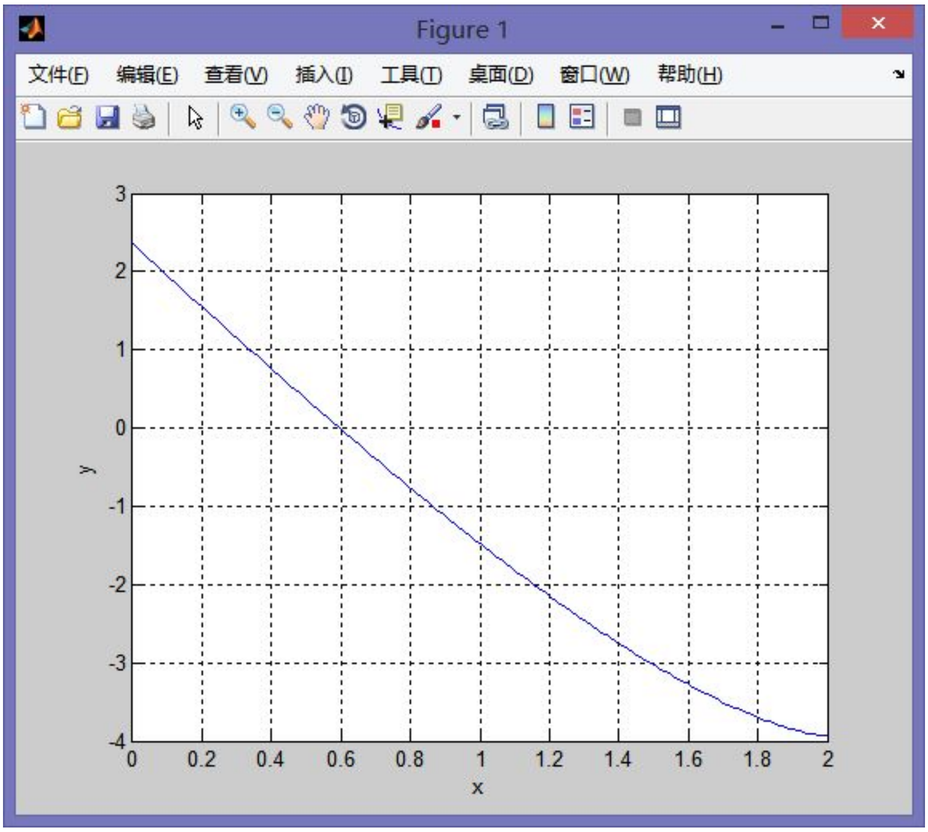


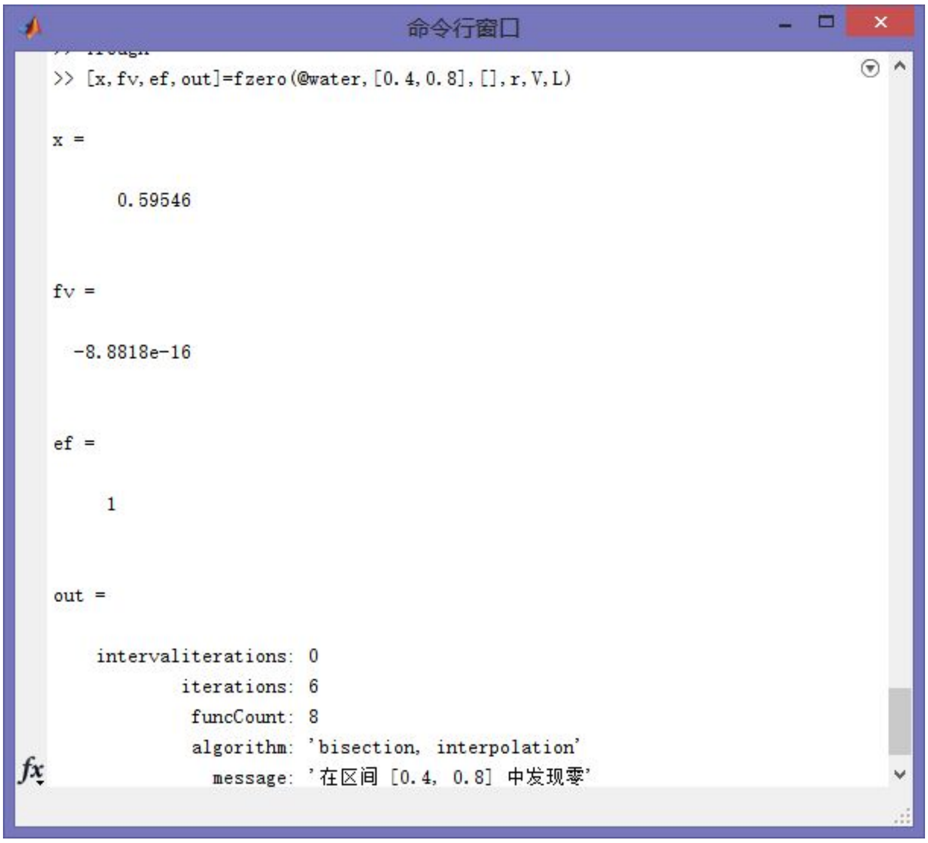


```
命令行窗口
>> [x,fv,ef,out]=fzero(@water,[1,1.2],[],r,V,L)

x =

    1.1447


fv =

   4.4409e-16


ef =

     1


out =

    intervaliterations: 0
            iterations: 5
             funcCount: 7
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '在区间 [1, 1.2] 中发现零'
```

当 $V=50m^3$ 时，x=1.1447

当 V=100m³ 时，x=0.59546;






```
>> [x,fv,ef,out]=fzero(@water,[0.4,0.8],[],r,V,L)

x =

     0.59546


fv =

  -8.8818e-16


ef =

     1


out =

    intervaliterations: 0
            iterations: 6
             funcCount: 8
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '在区间 [0.4, 0.8] 中发现零'
```

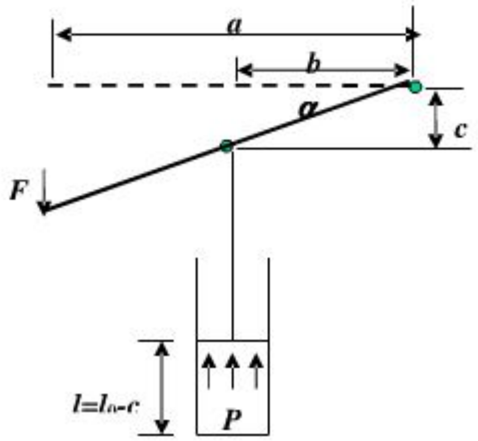
当 $V=100m^3$ 时，x=0.59546;

实验 5：

问题描述：由汽缸控制关闭的门，门宽 a，门枢在 H 处，与 H 相距 b 出有一门销，通过活塞与圆柱形的汽缸相连，活塞半径 r，汽缸长 l_0,汽缸内气体的压强 p_0。当用力 F 推门，使门打开一个角度 α 时，活塞下降的距离为 c，门销与 H 的水平距离 b 保持不变，于是汽缸内的气体被压缩，对活塞的压强增加。已知在绝热条件下，气体的压强 p 和体积 V 满足 $pV^{\gamma}=c$，其中 γ 是绝热系数，C 是常数。试利用开门力矩和作用在活塞上的力矩相平衡的关系(对门枢而言)，球在一定的力 F 作用下，门打开的角度 α 。设 a=0.8m，b=0.25m，r=0.04m，l_0=0.5m，$p_0=10^4$N/m²， γ=1.4，F=25N.

模型及其求解：此处由于 $p_0=10^4$N/m²，故应该忽略大气压的影响(气缸所处环境可能是实验环境).

同时一扇门的长度不可能变动应始终为 a，故 F 的作用点与 H 的直线距离始终为 a；设气缸通过活塞对门的作用力为 F_2,由于门销与 H 的水平距离 b 保持不变，故实际上门销在门转动的过程中可以在门上有小范围移动.



理解清题意后，可以根据力矩平衡建立方程：

$$F_2 * b - F\cos\alpha * a = 0. \quad ③$$

其中 $F_2 = pS = p\pi r^2$ ④

根据绝热状态，由 $p_0V_0^{\gamma}=pV^{\gamma}$，∴ $p=\dfrac{p_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}=p_0\left(\dfrac{l_0}{l_0-b\tan\alpha}\right)^{\gamma}$ ⑤

将④⑤代入③得 $p_0\left(\dfrac{l_0}{l_0-b\tan\alpha}\right)^{\gamma}\pi r^2 * b - F\cos\alpha * a = 0.$ ⑥

做⑥左式的函数文件

door.m

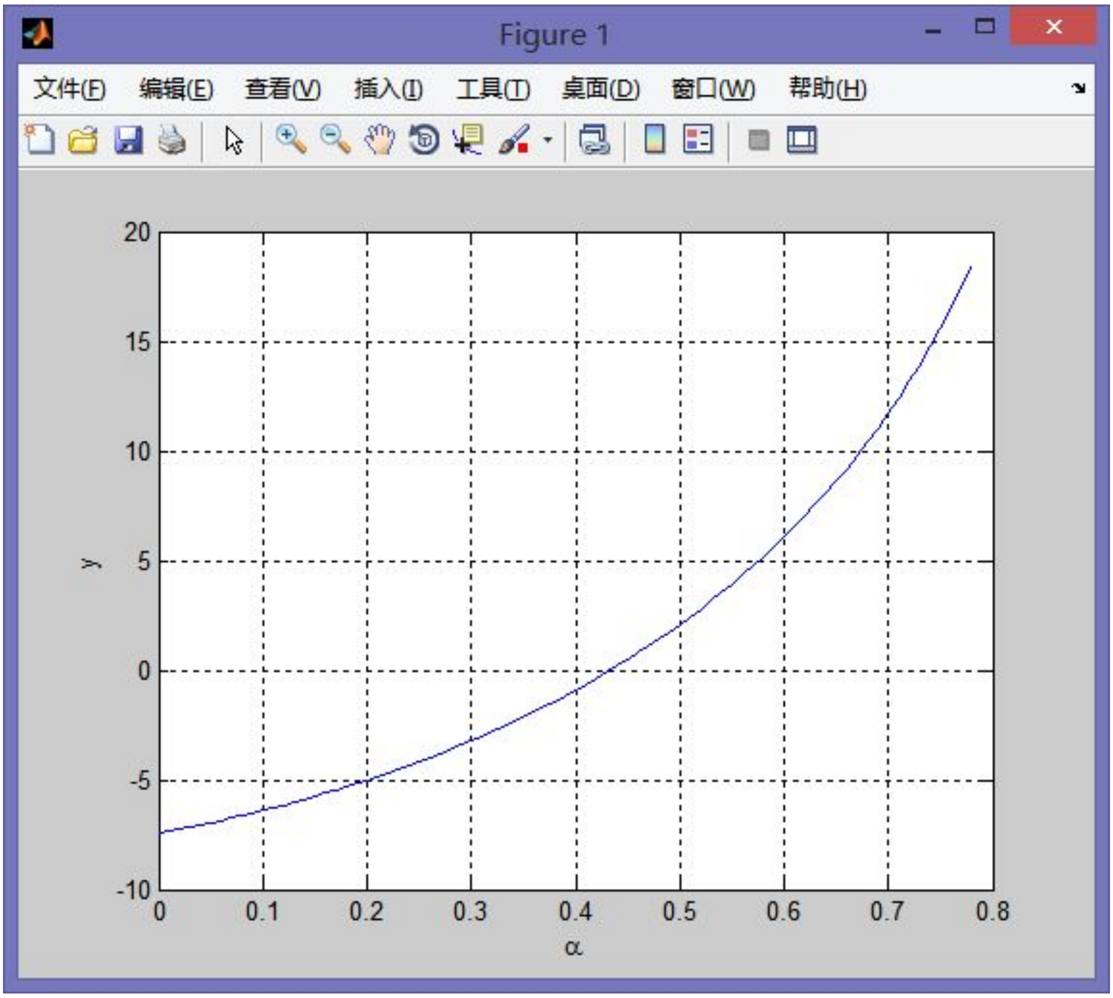
```
function y=door(ar,a,b,r,l0,p0,v,F)
y=p0*(l0./(l0-b*tan(ar))).^v*pi*r^2*b-F*cos(ar)*a;
```

给定 a,b,r,l0,p0,v,F 的初始数值后，使 α 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 内变动，作出函数的图像，当⑥成立时，判断 α 所在的大致区间

Controldoor.m

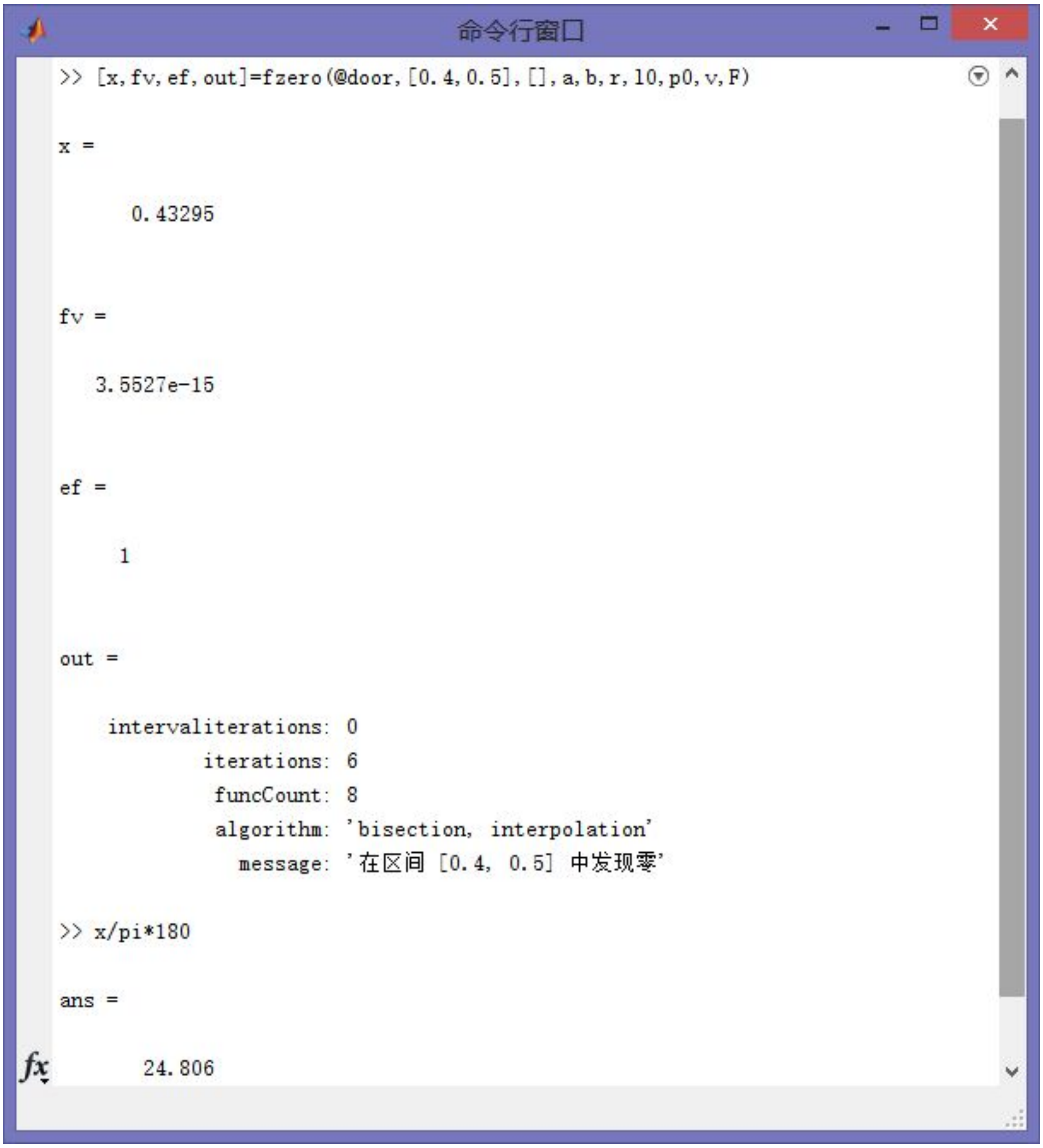
```
a=0.8;
b=0.25;
r=0.04;
l0=0.5;
p0=10000;
v=1.4;
F=25;
ar=0:0.01:pi/4;
y=door(ar,a,b,r,l0,p0,v,F);
%判断根所在大致区间
plot(ar,y),grid on,xlabel('\alpha'),ylabel('y')
%[x,fv,ef,out]=fzero(@door,[,],[],a,b,r,l0,p0,v,F)
```

输出图像为



由图像得有根区间为[0.4,0.5]

利用 fzero 命令求⑥的解



```
命令行窗口
>> [x,fv,ef,out]=fzero(@door,[0.4,0.5],[],a,b,r,10,p0,v,F)

x =

    0.43295


fv =

  3.5527e-15


ef =

     1


out =

    intervaliterations: 0
            iterations: 6
             funcCount: 8
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: '在区间 [0.4, 0.5] 中发现零'

>> x/pi*180

ans =

   24.806
```

解得 α=0.43295=24.806°.

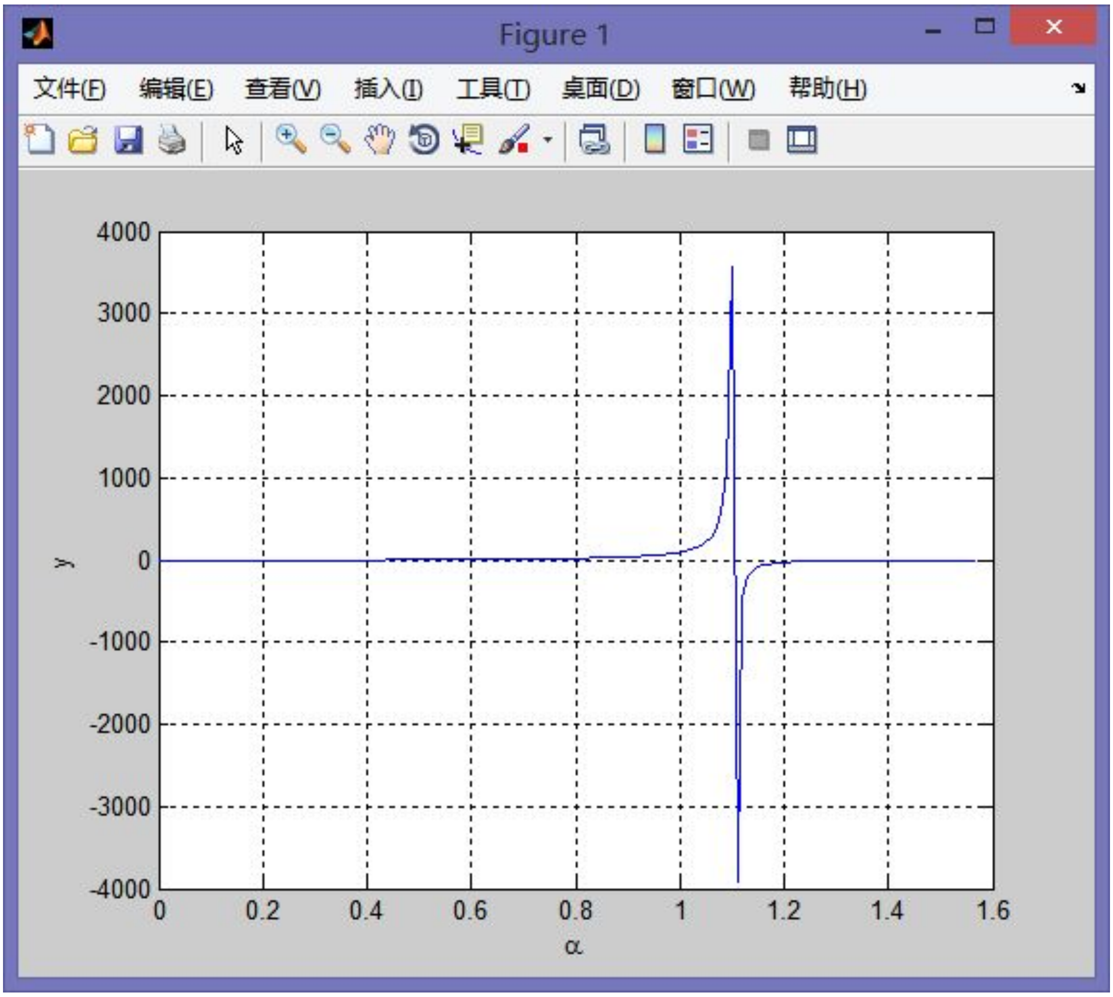
结果分析：本题的条件一眼看与实际十分不符合，例如气缸内的初始气压问题、门转动过程中水平投影不变……

①此处由于 $p_0=10^4N/m^2$，考虑到气缸所处环境可能是实验环境，故做忽略大气压来解题；

②最先看到门销并不理解为何物。题目要求"门销与 H 的水平距离 b 保持不变"，故猜测门销在门转动的过程中可以在门上有小范围移动，查阅了门销的图片后，发现这种猜测是合理的，也符合门销的功能.

③同时一扇门的长度不可能变动应始终为 a，故 F 的作用点与 H 的直线距离始终为 a；但并不能理解书本图中为何转动后门在水平的投影仍为 a.

④做图前，需设定 α 的初始值，当将其设为 $[0,\frac{\pi}{2}]$，得到如下图案：



在α=1.1 左右时图像发生了激变，α=1.1 时，即为气缸已经到底，$\alpha=\arctan(\frac{l_0}{b})=\arctan(\frac{0.5}{0.25})=1.1071$，前边半段也符合实际，角度越大气缸内的气体压缩得越厉害，产生的推力越大.

实验 6：

问题描述：给定 4 种物质对应的参数 a, b, c 和交互作用矩阵 Q 如下：

$$a_1=18.607, a_2=15.841, a_3=20.443, a_4=19.203$$
$$b_1=2643.31, b_2=2755.64, b_3=4628.96, b_4=4117.07$$
$$c_1=239.73, c_2=219.16, c_3=252.64, c_4=227.44$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.192 & 2.169 & 1.611 \\ 0.316 & 1.0 & 0.477 & 0.524 \\ 0.377 & 0.360 & 1.0 & 0.296 \\ 0.524 & 0.282 & 2.065 & 1.0 \end{bmatrix}$$

在压强 p=760mmHg 下，为了形成均相共沸混合物，温度和组分别是多少？

模型及其求解：模型建立后为两个方程

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0.$$

$$x_i\left(\frac{b_i}{T+c_i} + \ln\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j q_{ij})\right) + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j q_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} x_k q_{jk}} - 1 - a_i + \ln P\right) = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

编写 M 文件：

azeofun.m

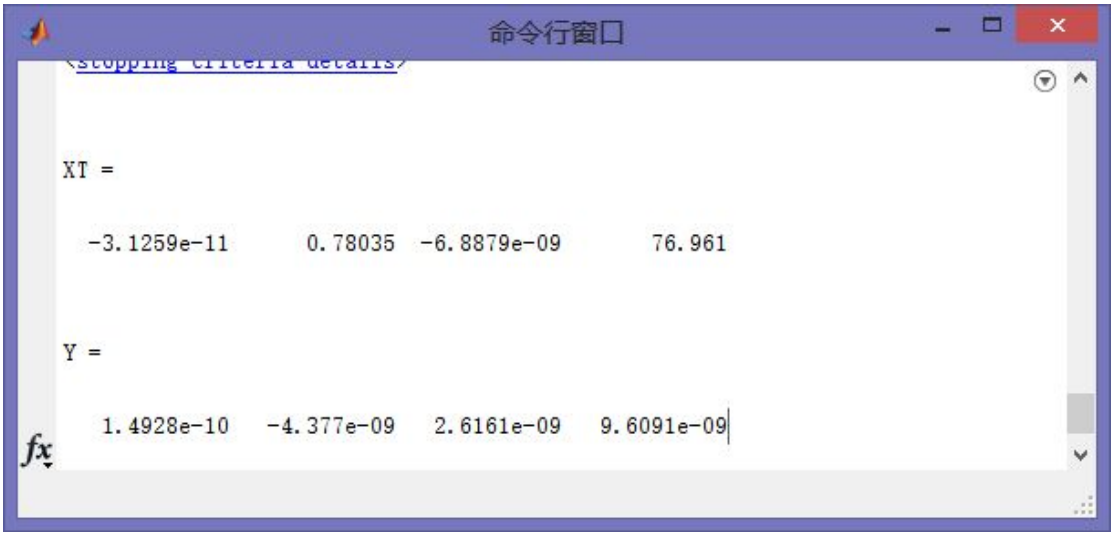
```
function f=azeofun(XT,n,P,a,b,c,Q)
x(n)=1;
for i=1:n-1
    x(i)=XT(i);
x(n)=x(n)-x(i);
end
T=XT(n);
p=log(P);
for i=1:n
    d(i)=x*Q(i,1:n)';
    dd(i)=x(i)/d(i);
end
for i=1:n
    f(i)=x(i)*(b(i)/(T+c(i))+log(x*Q(i,1:n)')+dd*Q(1:n,i)-a(i)-1+p);
end
```

给定 n, P, a, b, c, Q，对于不同的初值 XT0，用 fsolve 求解

Azeotrope.m

```
n=4;
P=760;
a=[18.607,15.841,20.443,19.293]';
b=[2643.31,2755.64,4628.96,4117.07]';
c=[239.73,219.16,252.64,227.44]';
Q=[1.0,0.192,2.169,1.611;0.316,1.0,0.477,0.524;0.377,0.360,1.0,0.296;
0.524,0.282,2.065,1.0];
XT0=[0.5,0.5,0,90];
[XT,Y]=fsolve(@azeofun,XT0,[],n,P,a,b,c,Q)
```

得到结果



①XT0=[0.5,0.5,0,90]

XT = -3.1259e-11 0.78035 -6.8879e-09 76.961

Y = 1.4928e-10 -4.377e-09 2.6161e-09 9.6091e-09

②XT0=[0.5,0,0.5,60];

XT =1.7982e-09 0.58582 0.41418 71.966

Y = -7.1862e-09 -2.6234e-09 3.0138e-07 -2.7862e-07

③XT0=[0,0.5,0.5,60];

XT = -6.8346e-14 0.58582 0.41418 71.966

Y = 2.7314e-13 -2.9251e-10 2.9347e-09 -2.1501e-09

④XT0=[0.33,0.33,0,60];

XT = -1.0191e-17 0.58582 0.41418 71.966

Y = 4.0726e-17 -7.7958e-11 7.3673e-10 -4.608e-10

⑤XT0=[0.1,0.2,0.3,120];

XT = -2.9507e-14 -1.1476e-11 -9.2624e-08 97.771

Y = 1.2218e-13 2.1543e-11 6.9653e-08 -4.2909e-08

⑥XT0=[0.4,0.2,0.1,200]

XT = 5.8749e-12 -1.3388e-07 1 82.557

Y = -2.1271e-11 1.9475e-07 1.4571e-07 -2.1932e-07

⑦XT0=[0,0.5,0,80];

XT = -9.883e-10 0.78035 3.3931e-06 76.961

Y = 4.7198e-09 5.6472e-08 -1.2888e-06 8.5203e-07

……

由于共沸混合物，是指由两种或两种以上物质组成的液体混合物，当在某种压力下被蒸馏或局部汽化时，在气体状态下和液体状态下保持相同的组分。

经过多组数据测试，只发现类似③和⑦为可行解：

即 $x_1=0, x_2=0.58582, x_3=0.41418, x_4=0, \mathrm{T}=71.966$

或 $x_1=0, x_2=0.78035, x_3=0, x_4=0.21965, \mathrm{T}=76.961$.

五、实验总结

1. 对于非线性方程，尤其是等式两边含有三角函数、指数函数、对数函数这样的超越方程，由于没有解析解，通常我们会显得束手无策。但图解法给了我们很大的启示。在要求精度不是很高的情况下，我们可以通过迭代法得到误差很小的近似解，这对于工程方面的应用有着巨大的意义。以上思想再结合计算机能快速处理数据的优点，解非线性方程已不再是难题；

2. 不同的迭代公式存在是否收敛、收敛速度不确定的问题。牛顿切线法产生的迭代序列为 2 阶收敛，常用牛顿切线法构造迭代公式,为了避免牛顿切线法求导数的复杂，也可以使用割线法，但需注意需要两个迭代初值；

3. fzero 命令中需要迭代初值或有根区间，对于复杂的函数可先作出其图像，再确定迭代初值或有根区间；

六、参考文献

[1]姜启源，谢金星，邢文训，张立平.大学数学实验[M]（第 2 版）. 北京：清华大学出版社，2010 年 12 月；

七、教师评语