云南大学数学与统计学实验教学中心

实验报告

课程名称：大学数学实验	**学期**：2014~2015 学年下学期	**成绩**：
指导教师：　李朝迁	**学生姓名**：金洋	**学号**：20131910023
实验名称：线性代数方程组解决实际问题		
实验编号：七	**实验日期**：　6 月 2 日	**实验学时**：　1
学院：　数学与统计学院	**专业**：　信息与计算科学	**年级**：　2013 级

一、实验目的

1．通过实例学习用线性代数方程组解决简化的实际问题；

二、实验内容

1.完成课本 P89 5.1.1 题；

2.习题 6-9 任选一作为作业

三、实验环境

Windows 操作系统；

MATLAB R2014a；

四、实验过程

实验 1：

问题：题目见课本 P89

（1）如果某年对农业、工业、建筑业、运输邮电、批零餐饮和其他服务的外部需求分别为 1500, 4200, 3000, 500, 950, 3000 亿元，问这 6 个部门的总产出分别应为多少？

（2）如果 6 个部门的外部需求分别增加 1 个单位，问它们的总产出应分别增加多少？

（3）投入产出分析称为可行的，是指对于任意给定的、非负的外部需求，都能得到非负的总产出。为了可行，直接消耗系数应满足什么条件？

实验求解：

（1）引入如下数据量：

n~共 n 个部门；

x_i~第 i 部门的总产出；

d_i~对第 i 部门的外部需求；

x_{ij}~第 j 部门总产出对第 i 部门的直接消耗，且有 $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i, i = 1,2,3,\cdots, n.$ ①

a_{ij}~直接消耗系数——第 j 部门单位产出对第 i 部门的直接消耗 且有

$a_{ij} = x_{ij} / x_j, i = 1,2,3,\cdots,n$ ②

将②代入①得 $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i, i = 1,2,3,\cdots, \quad n.$ ③

设 $A = (a_{ij})_{n*n}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)^T$

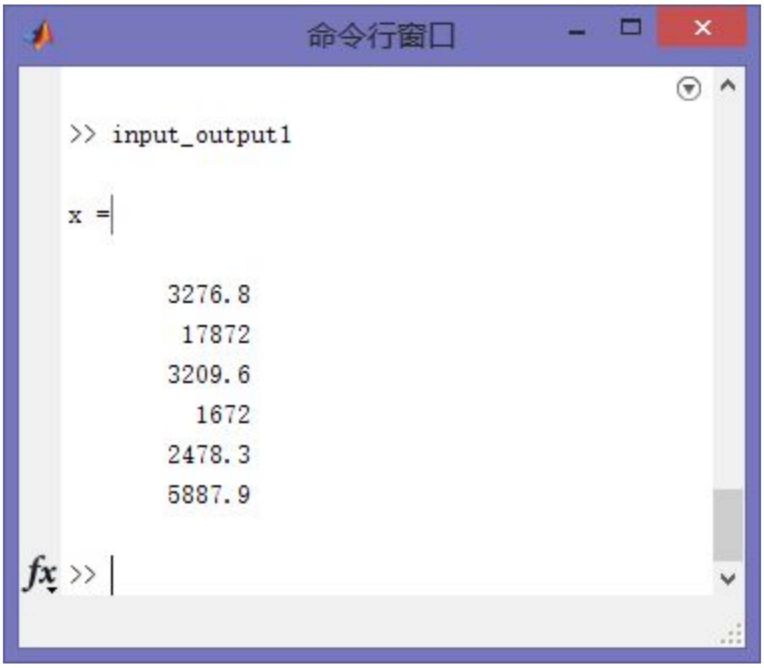
③式可写为 $x = Ax + d$ 即 $(I - A)x = d$

编写如下程序：

input_output1.m

```
%直接消耗系数矩阵 A
A=[0.159   0.047   0.080   0.008   0.054   0.002
0.171   0.512   0.502   0.257   0.238   0.226
0.002   0.001   0.001   0.013   0.010   0.023
0.021   0.031   0.045   0.104   0.029   0.027
0.027   0.045   0.049   0.027   0.056   0.050
0.050   0.076   0.095   0.143   0.094   0.100];

%外部需求
d=[1500, 4200, 3000, 500, 950, 3000]';

x=(eye(6)-A)^(-1)*d
```

输出为



所以 6 个部门总产出分别为 3276.8, 17872, 3209.6, 1672, 2478.3, 5887.9 亿元.

(2)总产出对外部需求线性, $\therefore \Delta x=(I-A)^{-1}\Delta d$

若农业的外部需求增加 1 单位 $\Delta d=(1,0,0,0,0,0)^T$，Δx 为$(I-A)^{-1}$的第 1 列

其余外部需求增加 1 单位 ，Δx 为$(I-A)^{-1}$的其余各列. 如下

```
命令行窗口

>> dx=(eye(6)-A)^(-1)

dx =

      1.2266      0.14125      0.18267     0.065751      0.11483
     0.56236       2.3327       1.3554      0.82535      0.72839
   0.0074935     0.010583       1.0117     0.023129     0.017531
    0.054869     0.095865      0.11447       1.1583     0.070657
    0.070868      0.13097      0.13962     0.089815       1.1107
     0.13254      0.23486      0.26417      0.26922      0.19697

fx >>
```

（3）要使对任意的需求 d≥0，$(I-A)x=d$ 中使得 $x\geqslant\mathbf{0}$(x 每个元素非负，下同），则只需$(I-A)^{-1}$每个元素非负. 如何求$(I-A)^{-1}$？

$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^k)=I-A^{k+1}$，∵A≥0，故只需 $A^{k+1}\to 0(k\to\infty)$ 就有

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\geq 0$$

而 $A^k\to 0$ 与 $\|A^k\|=\|A\|^k\to 0$ 等价，故只要 $\|A\|_1<1$ 即 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}<1,\qquad j=1,2,\cdots,n$

此时产出分析是可行的

实验 2：

问题：种群的繁殖与稳定收获：种群的数量因繁殖而增加，因自然死亡而减少，对于人工饲养的种群（比如家畜）而言，为了保证稳定的收获，各个年龄的种群数量应维持不变。种群因雌雄个体的繁殖而改变，为方便起见以下种群数量均指其中的雌性。

种群年龄记作 $\mathrm{k}=1,2,3,\ldots,n$，当年年龄 k 的种群数量记作 x_k，繁殖率记作 b_k（每个雌

性个体 1 年繁殖的数量），自然存活率记作 s_k（$s_k = 1 - d_k, d_k$ 为一年的死亡率），收获量记作 h_k，则来年年龄 k 的种群数量 $\tilde{x}_k$ 应为

$\tilde{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k, \tilde{x}_{k+1} = s_k x_k - h_k (k = 1,2,...,n-1)$。要求各个年龄的种群数量每年维持不变就是要使 $\tilde{x}_k = x_k (k = 1,2,...,n)$。

（1）若 b_k, s_k 已知，给定收获量 h_k，建立求各年龄的稳定种群数量 x_k 的模型（用矩阵、向量表示）。

（2）设 $n = 5, b_1 = b_2 = b_5 = 0, b_3 = 5, b_4 = 3, s_1 = s_4 = 0.4, s_2 = s_3 = 0.6$，如要求 $h_1 \sim h_5$ 为 500, 400, 200, 100, 100，求 $x_1 \sim x_5$。

（3）要使 $h_1 \sim h_5$ 均为 500，如何达到？

实验求解

（1）由题得 $\tilde{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k$，　$\tilde{x}_{k+1} = s_k x_k - h_k (k = 1,2,...,n-1)$，即为：

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n \\ \tilde{x}_2 = s_1 x_1 - h_1 \\ \tilde{x}_3 = s_2 x_2 - h_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n = s_{n-1} x_{n-1} - h_{n-1} \end{cases} \qquad ①$$

若要求各个年龄的种群数量每年维持不变，即要使得 $\tilde{x}_k = x_k$，代入上式则有：

$$\begin{cases} (b_1 - 1)x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + ... + b_n x_n = 0 \\ s_1 x_1 - x_2 = h_1 \\ s_2 x_2 - x_3 = h_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} x_{n-1} - x_n = h_{n-1} \end{cases} \qquad ②$$

令 $A=\begin{bmatrix} b_1-1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ s_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$，$x=[x_1,x_2,x_3,\dots,x_n]^T$，$h=[0,h_1,h_2,\dots,h_{n-1}]^T$，

则②即为：$\mathrm{A}x=h$，故 $x=A^{-1}*h$ 就为方程组的解.

(2)按照（1）中建立好模型后，将

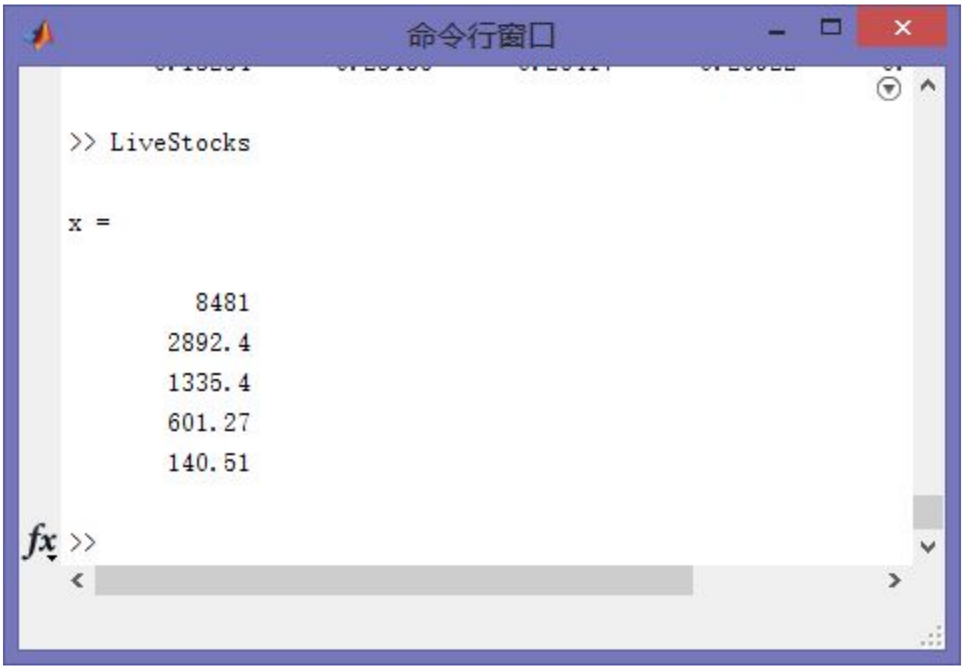
$\mathrm{n}=5, b_1=b_2=b_5=0, b_3=5, b_4=3, s_1=s_4=0.4, s_2=s_3=0.6, \mathrm{h}=[0\ 500\ 400\ 200\ 100]'$，

代入程序中求解

LiveStocks.m

```
n=5;
A=[-1 0 5 3 0;
    0.4 -1 0 0 0;
    0 0.6 -1 0 0;
    0 0 0.6 -1 0;
    0 0 0  0.4 -1];
h=[0 500 400 200 100]';
x=A^(-1)*h
```

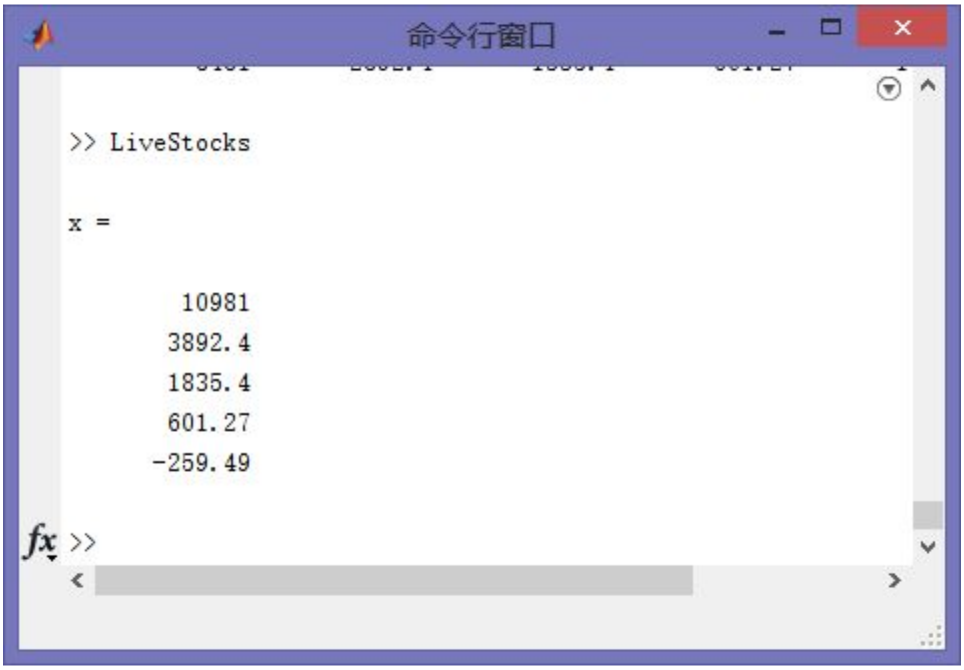
结果为



∴ $x_1 \sim x_5$ 分别为 8481 2892.4 1335.4 601.27 140.51. 且 x_5>100, 可以达到收获量.

(3)先尝试 h=[0 500 500 500 500]'

结果为



x_5<0,不能达到收获量.

∴需要改动繁殖率和存活率

$$A=\begin{bmatrix} b_1-1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ s_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & -1 \end{bmatrix}$$

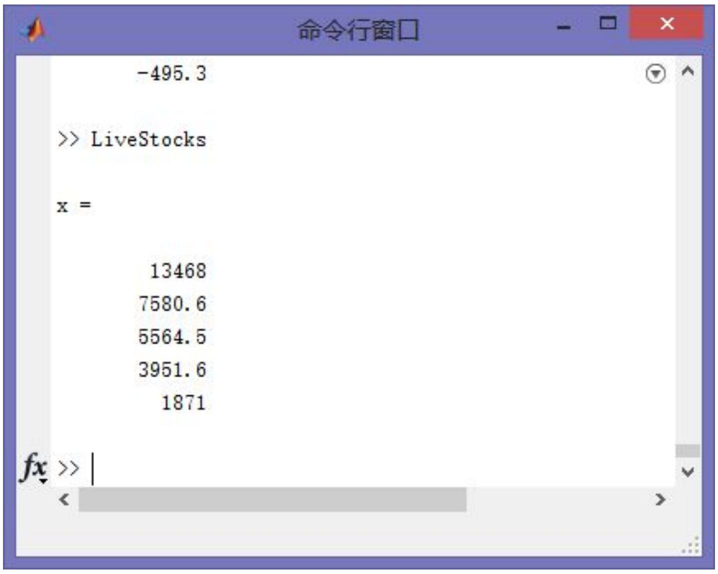
```
>> A^-1

ans =

    1.5823     6.4557     10.759     4.7468     0
   0.63291     1.5823     4.3038     1.8987     0
   0.37975    0.94937     1.5823     1.1392     0
   0.22785    0.56962    0.94937   -0.31646     0
  0.091139    0.22785    0.37975   -0.12658    -1

>>
```

理论上只需改动 A^{-1} 中的小数值元素，$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 将 A^{-1} 中每个元素用 b，s 表示出来，即可知对哪些值进行改动，但是操作显复杂。

另一种思路，控制变量法，将 A 中某些元素减小或增大，其余元素不动，看每一个元素的变化对结果是什么影响

```
A=[-1 0 1 2 0;
    0.6 -1 0 0 0;
    0 0.8 -1 0 0;
    0 0 0.8 -1 0;
    0 0 0  0.6 -1];
```

改动 $s_1=s_4=0.6$, $s_2=s_3=0.8$，$b_3=1$，$b_4=2$



此时可以达到题目要求，$x_1 \sim x_5$ 分别为 13468　　7580.6　　5564.5　　3951.6　　1871.

启示：要努力提高存活率.

五、参考文献

[1]姜启源，谢金星，邢文训，张立平. 大学数学实验[M]（第 2 版）. 北京：清华大学出版社，2010 年 12 月；

六、教师评语