云南大学数学与统计学实验教学中心

实验报告

课程名称：数值计算方法实验	**学期**：2015—2016 学年第一学期	**成绩**：
指导教师： 李耀堂	**学生姓名**：金洋	**学生学号**：20131910023
实验名称： **松弛法**		
实验编号：No. 6	**实验日期**： **2015.12.16**	**实验学时**： **3**
学院： 数学与统计学院	**专业**： **信息与计算科学**	**年级**：2013 级

一、实验目的

练习利用松弛法解线性方程组；

二、实验内容

用松弛法解

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

分别取$\omega = 1.03, \omega = 1, \omega = 1.1$。要求当$\left\| x^{(K)} - x^{(K-1)} \right\| < 5 \times 10^{-6}$时迭代终止，并对每个$\omega$值确定迭代次数（初值$x^{(0)} = (0,0,0)^T$）。

三、实验环境

PC 计算机；

MATLAB R2014a；

四.实验方法：松弛法

方法简述：

设 $Ax = b$，令 $B = I - A$

$\therefore (I - B)x = b \Rightarrow x = Bx + b$

$\therefore x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$

令 $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$，则 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + Ax^{(k)} + r^{(k)} = x^{(k)} + r^{(k)}$.

松弛法的基本思想便是在校正项前乘一个参数ω，通过调节ω来调控算法的收敛性。以下用该思想来改进解$Ax = b$的 Gauss-Seidel 方法。

（1）SOR 分量形式：

可以对 Gauss-Seidel 的分量形式做如下变换

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \\
&= \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \\
&= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})
\end{aligned}
$$

在校正项上乘一个因子ω，就成了松弛法的分量形式：

$$
x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \qquad (*)
$$

当ω>1, 称为逐次超松弛迭代法；

当ω<1, 称为低松弛迭代法；

当ω=1，即为 Gauss-Seidel 迭代法；

（2）SOR 矩阵形式：

可以对(*)式改写为矩阵形式：

$$
x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}[b - Lx^{(k+1)} - (D+U)x^{(k)}]
$$

即

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]x^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}b \\
&= H_\omega x^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}b
\end{aligned}
$$

H_ω 称为 SOR 的迭代矩阵。

五、实验过程

1 实验步骤

①编程：用 MATLAB 语言编出源程序。

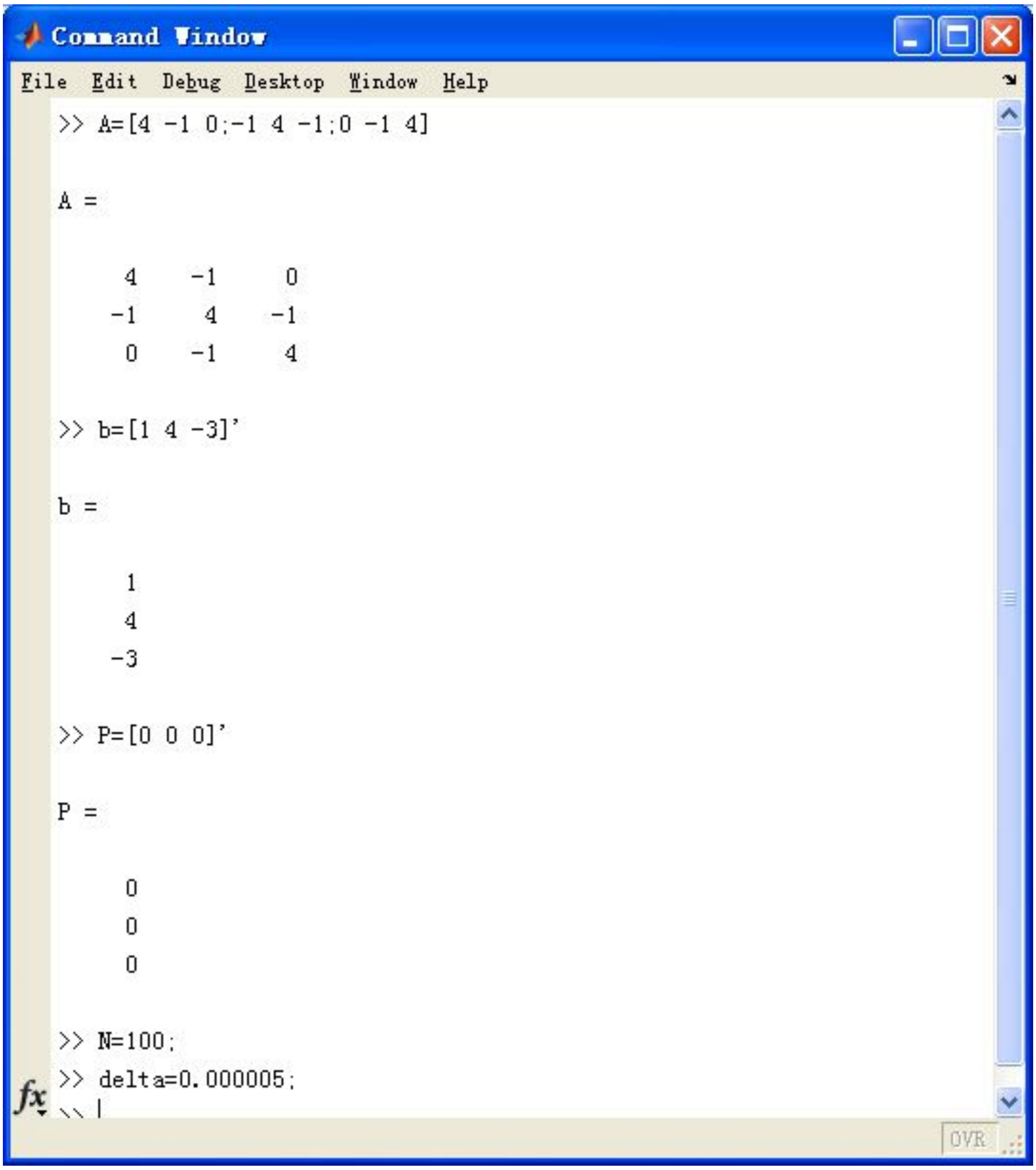
②开机,键入所编程序源代码.

③调试程序, 修改错误至能正确运行.

④运行程序并输出计算结果.

⑤尝试改进

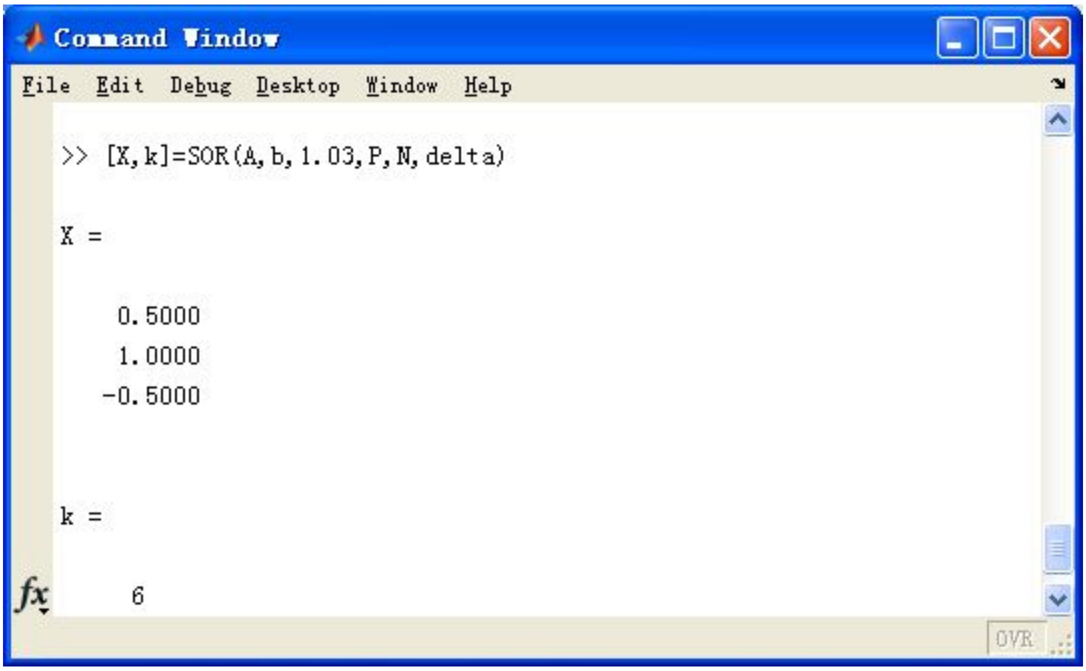
输入 A，b，初值 P，最大迭代次数 N，精确度 delta 如下：



运行结果

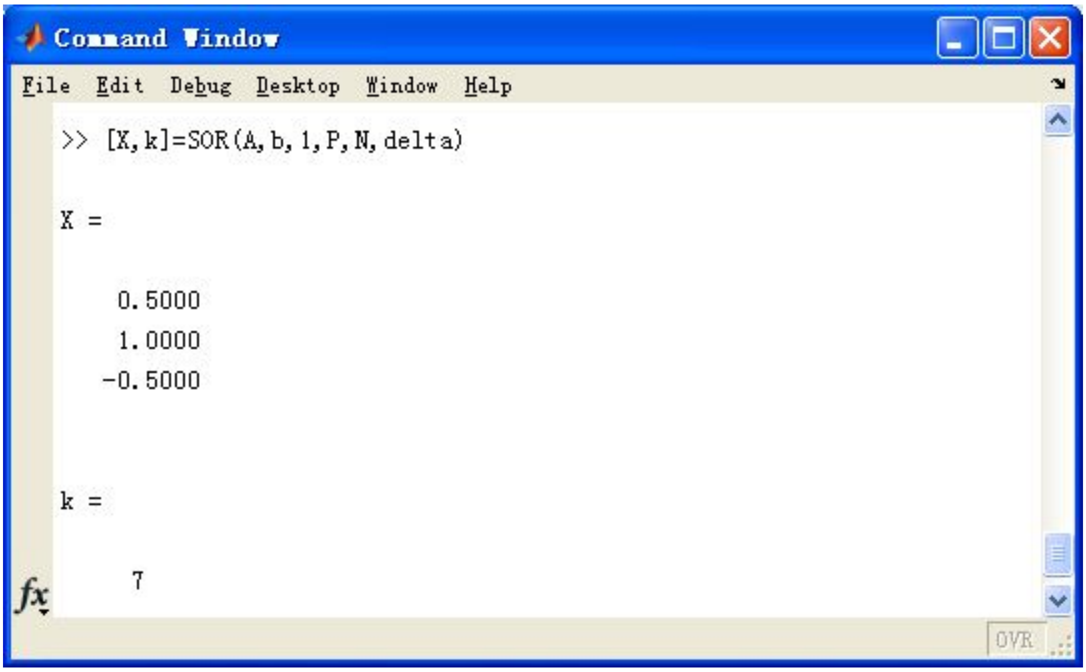
①SOR 分量形式运行结果如下：

$$\omega = 1.03:$$



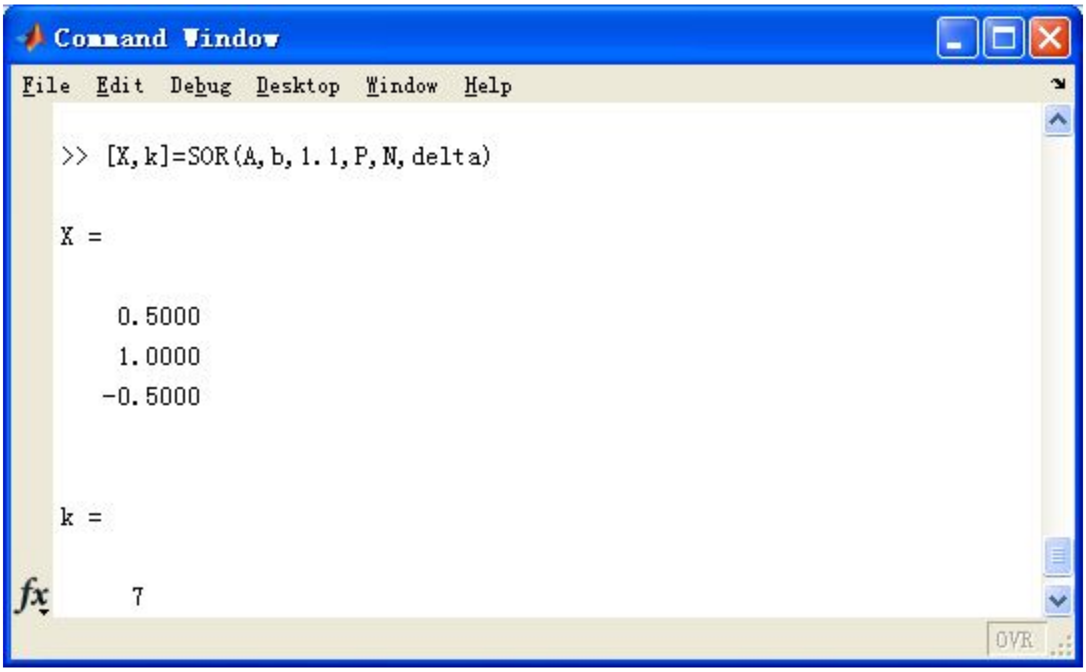
即迭代次数 6 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

$\omega=1$:



即迭代次数 7 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

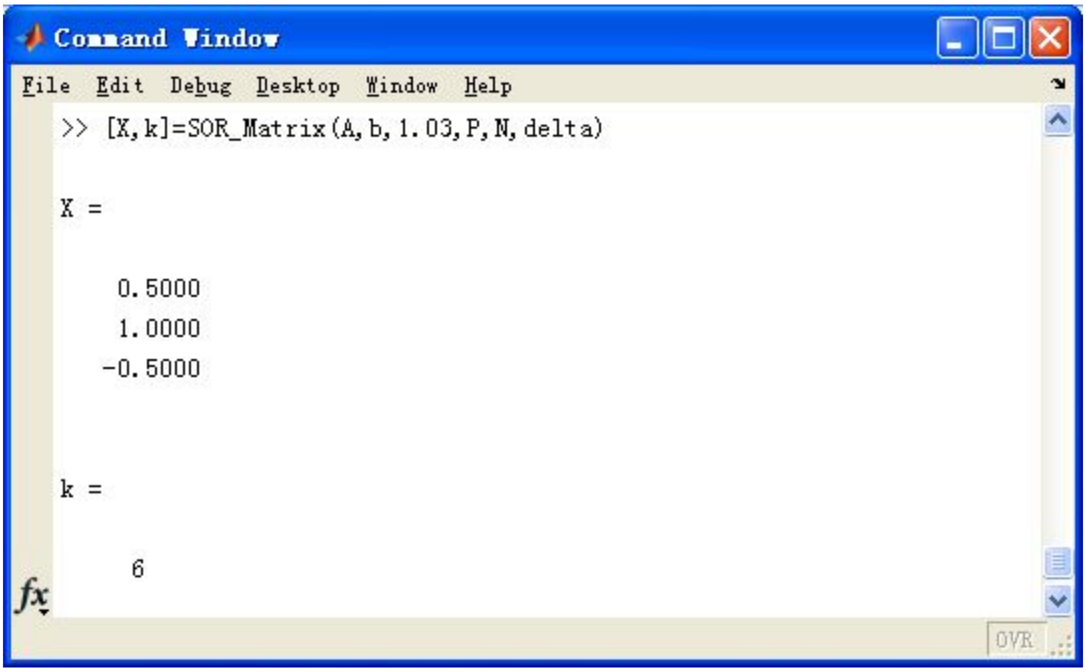
$\omega=1.1$:



即迭代次数 7 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

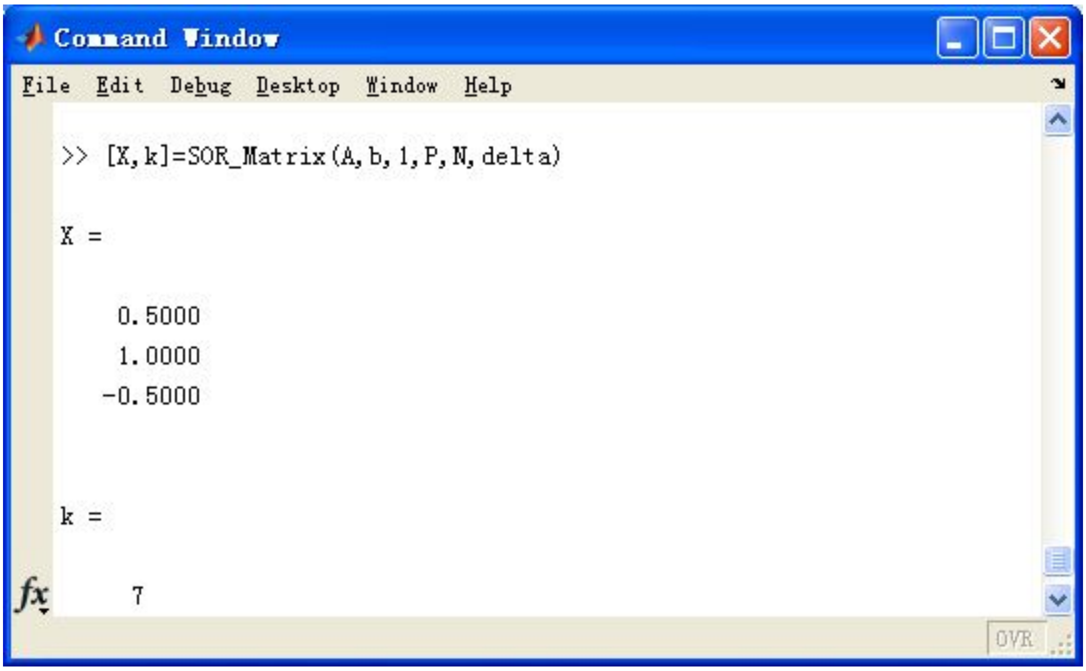
②SOR 方法矩阵形式运行结果如下：

$\omega = 1.03$:



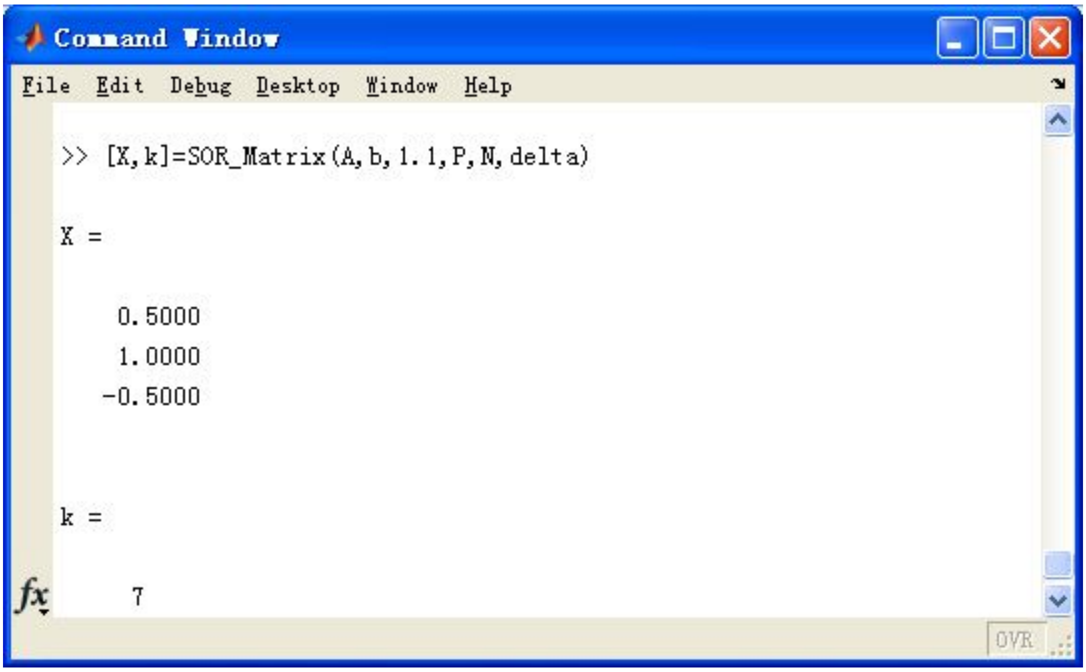
即迭代次数 6 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

$\omega = 1$:



即迭代次数 7 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

$\omega = 1.1$:



即迭代次数 7 次，解为 X=(0.5000, 1.0000, -0.5000)’;

2 关键代码及其解释

①SOR 法分量形式

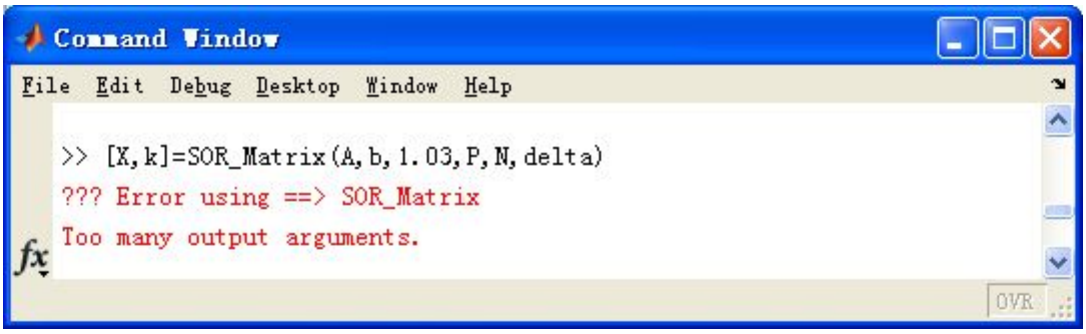
```
while (k<=N)
   for i=1:n

      %计算新的迭代值

      X(i)= X(i)+w*( b(i)-A(i,1:i-1)* X(1:i-1)-  A(i,i:n) *
P(i:n) )/A(i,i);
   end

   %检验精读，若精读符合要求，退出循环
   if (max(abs(X-P) )<=delta)
       break;
   end
   %将新值保存在 P 中
   P=X;
   %迭代次数加 1
   k=k+1;
End
```

②SOR 法矩阵形式：

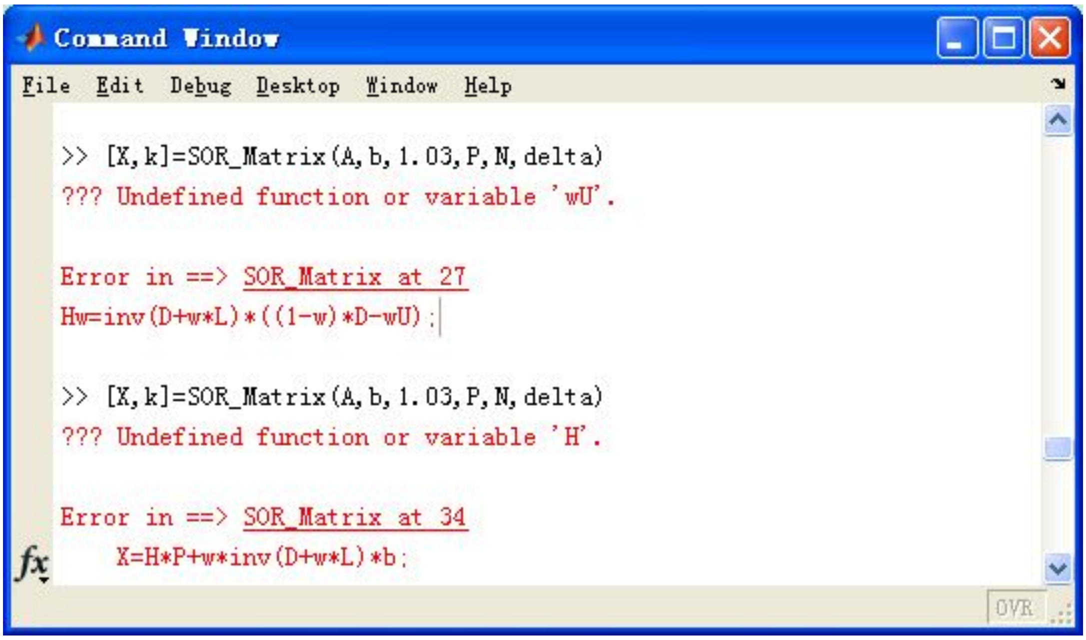
```
%迭代矩阵
Hw=inv(D+w*L)*((1-w)*D-w*U);


%k 记录迭代次数
k=1;
while (k<=N)
    %计算新的迭代值
    X=Hw*P+w*inv(D+w*L)*b;

    if (max(abs(X-P) )<=delta)
       break;
   end
   %将新值保存在 P 中
   P=X;
   %迭代次数加 1
   k=k+1;
end
```

3 调试过程

①未调整好函数的输出个数，导致引用函数出错



②函数变量名前后不一致



六、实验总结

1．遇到的问题及解决过程

①使用分量形式方法，$x_1^{(K+1)},x_2^{(K+1)},\cdots,x_{i-1}^{(K+1)},x_i^{(K)},\cdots,x_n^{(K)}$来 计算 $x_i^{(K+1)}$一开始难以解决；

②由分量形式推到出矩阵形式碰到问题，引入 D,L,U 矩阵后得到解决；

2．产生的错误及原因分析

①MATLAB 计算中，会检验矩阵的维度来确定运算是否合理，故在前期要仔细检测输入数据的正确性；

②MATLAb 的函数调用中，调用的格式必须与函数定义的格式相同，包括输出参数、输入参数的类型和个数。

③MATLAB 可以直接进行矩阵运算，这使得许多$\sum$ 运算，在 C 语言中需要二重循环才能表达，而在 MATLAB 中可以用一个语句完成

3．体会和收获。

①Gauss-Seidel 是一种优秀的解线性方程组的迭代法，但是人们想在迭代过程中通过自己的控制来加速收敛，松弛法便满足了这样的要求；

②对于不同的ω，松弛法的收敛速度是不一样的，以 Gauss-Seide 迭代法为例当ω>1, 称为逐次超松弛迭代法；当ω<1, 称为低松弛迭代法；当ω=1，即为 Gauss-Seidel 迭代法；

③ 对于松弛法，我们希望找到ω，使得$\rho(H_\omega)$最小，这样的ω成为“最佳松弛因子”，然而目前只有少数特殊类型的矩阵，才有确定的最佳松弛因子的理论公式。对于一般的矩阵，寻找最佳松弛因子还是一个正在探讨中的问题。

④在程序实现上，SOR 法与之前的 Gauss-Seidel 迭代法代码格式基本相同，只需改动关键处加上ω即可；

七、程序源代码：

①SOR 法分量形式

SOR.m

```
function [X,k]=SOR(A,b,w,P,N,delta)
%Input  -A n*n 非奇异矩阵
%       -b n*1 矩阵
%       -w 松弛因子
%       -P n*1 矩阵，初始值
%       -N 最大迭代次数
%       -delta 精确度
%Output -X n*1 使用 SOR 方法得到的方程组 AX=b 的解
%       -k 迭代次数

if (w<=0 || w>=2)
    error('松弛因子 w 不合法.')
end

%求维数
n=length(b);

%初始化 X
X=zeros(n,1);

%k 记录迭代次数
k=1;
while (k<=N)
   for i=1:n

      %计算新的迭代值

      X(i)= X(i)+w*( b(i)-A(i,1:i-1)* X(1:i-1)-  A(i,i:n) *
P(i:n) )/A(i,i);
   end

   %检验精读，若精读符合要求，退出循环
   if (max(abs(X-P) )<=delta)
       break;
   end
   %将新值保存在 P 中
   P=X;
   %迭代次数加 1
   k=k+1;
end
```

②**SOR 法矩阵形式：**

SOR_Matrix.m

```
function [X,k]=SOR_Matrix(A,b,w,P,N,delta)
%Input  -A n*n 非奇异矩阵
%       -b n*1 矩阵
%       -w 松弛因子
%       -P n*1 矩阵，初始值
%       -N 最大迭代次数
%       -delta 精确度
%Output -X n*1 使用 SOR 矩阵形式方法得到的方程组 AX=b 的解
%       -k 迭代次数
if (w<=0 || w>=2)
    error('松弛因子 w 不合法.')
end

%求维数
n=length(b);
%初始化 X
X=zeros(n,1);

%分别得到 A 的下三角矩阵 L,上三角矩阵 U,对角线矩阵 D
L=tril(A,-1);
U=triu(A,1);
D=diag(diag(A));

%迭代矩阵
Hw=inv(D+w*L)*((1-w)*D-w*U);

%k 记录迭代次数
k=1;
while (k<=N)
    %计算新的迭代值
    X=Hw*P+w*inv(D+w*L)*b;

    if (max(abs(X-P) )<=delta)
       break;
   end
   %将新值保存在 P 中
   P=X;
   %迭代次数加 1
   k=k+1;
end
```

八、教师评语