# 云南大学数学与统计学实验教学中心

# 实验报告

| | | |
|---|---|---|
| **课程名称**：数值计算方法实验 | **学期**：2015—2016 学年第一学期 | **成绩**： |
| **指导教师**： 李耀堂 | **学生姓名**：金洋 | **学生学号**：20131910023 |
| **实验名称**： **高斯消元法** | | |
| **实验编号**：No. 3 | **实验日期**： **2015.10.23** | **实验学时**： **3** |
| **学院**： 数学与统计学院 | **专业**： **信息与计算科学** | **年级**：2013 级 |

## 一、实验目的

练习利用高斯消元法解线性方程组；

## 二、实验内容

设Ax=b是线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

用高斯消元法求解此方程组；

## 三、实验环境

PC 计算机；

MATLAB R2014a；

## 四.实验方法：高斯消元法

方法简述：

1.上三角形方程组的求解：

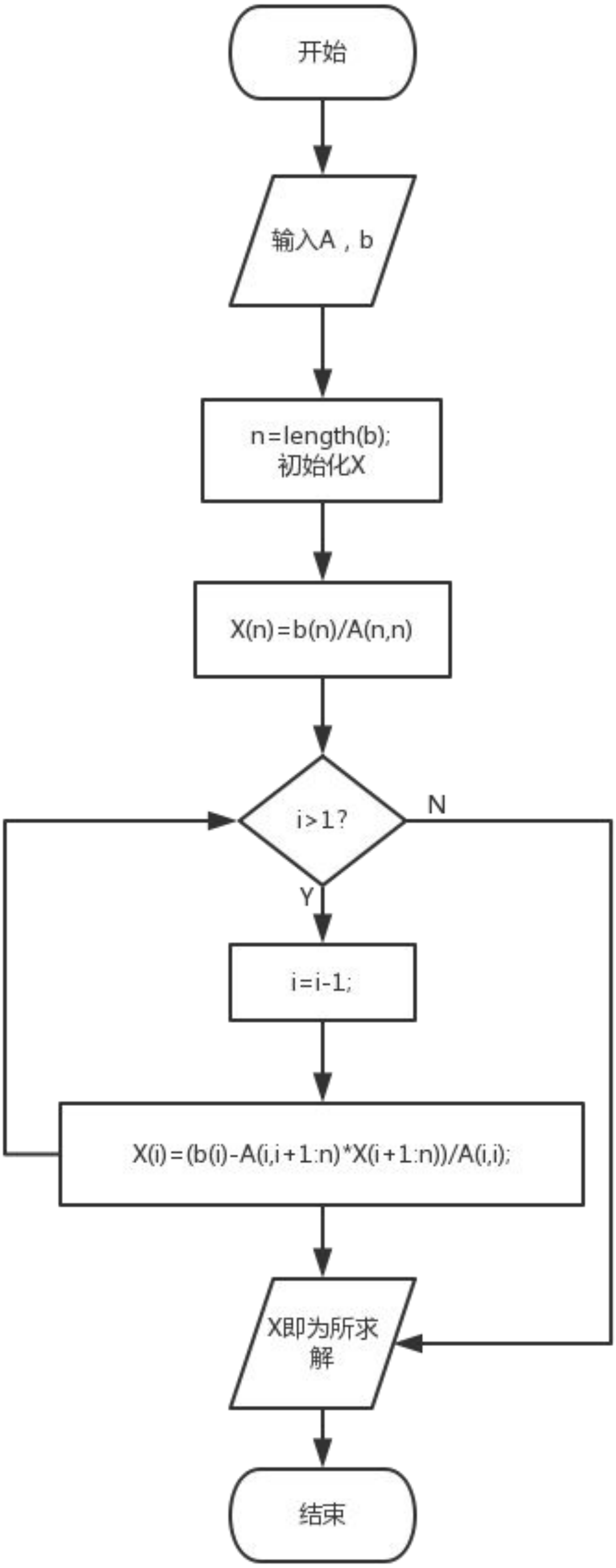
$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = b_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ u_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $u_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots, n$ .令为

UX=b，其中 U 为上三角矩阵。

上三角形线性方程组使用“回代”解法，即
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}} \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{b_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} u_{1j}x_j}{u_{11}} \end{cases}$$

算法流程图如下：


开始
输入A，b
n=length(b);
初始化X
X(n)=b(n)/A(n,n)
i>1?
N
Y
i=i-1;
X(i)=(b(i)-A(i,i+1:n)*X(i+1:n))/A(i,i);
X即为所求
解
结束

2.高斯消元法：Ax=b，其中 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in R^n$

利用初等变换将 Ax=b 化成上三角形方程，然后利用回代过程求解，简记为“消元过程”+“回代过程”；

由于消元的过程可以看做是矩阵的初等变换，于是只需看 AX=b 的增广矩阵（A|b）的变换过程。

初始输入时

$$(A|b)=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix}\text{对应于 } A^{(1)}X=b^{(1)}$$

如果 $a_{11}^{(1)}\neq 0$，可以消去第一列中除 $a_{11}$ 以外的所有元素，取 $m_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(i=2,3,\cdots,n)$，第 i 行减去第一行乘上 $m_{i1}$ (i=2,3,…，n),得到

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}\text{对应于 } A^{(2)}X=b^{(2)},$$

这是 $A^{(1)}X=b^{(1)}$ 的等价方程。

如果 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，取 $m_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}(i=k+1,k+2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)}(j=k,k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)} \end{aligned}$$

这样把 $a_{k+1,k},\cdots,a_{n,k}$ 位置全变为 0.由此可知，如果 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，（k=1，2，…，n-1），则消元法可以进行到底，增广矩阵变为

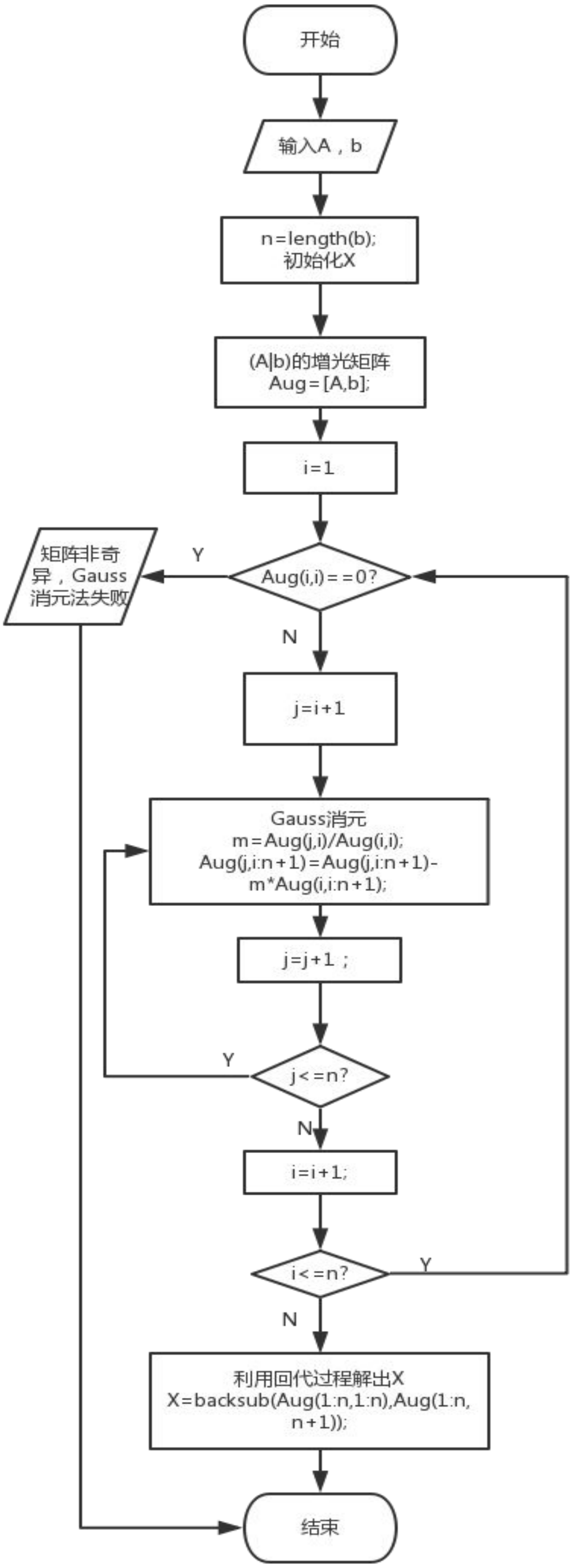
$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

对应于三角形方程组

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

此方程组可以用回代法解出。

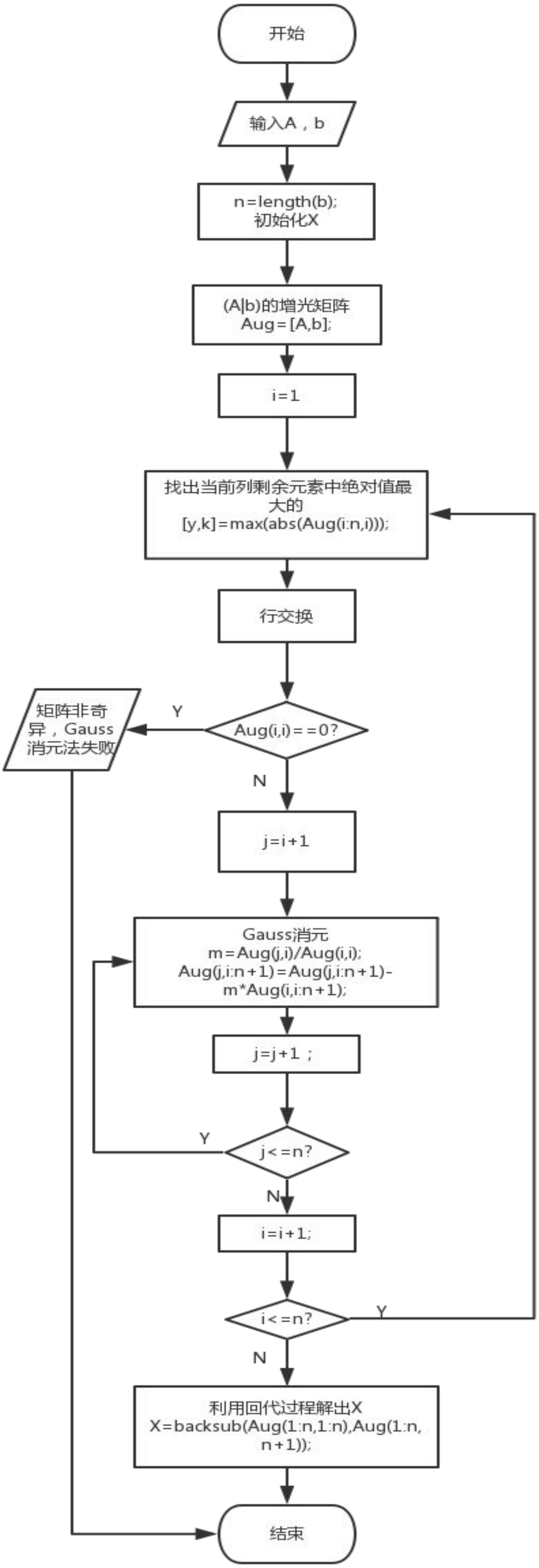
算法流程图如下：


开始
输入A，b
n=length(b);
初始化X
(A|b)的增光矩阵
Aug=[A,b];
i=1
Aug(i,i)==0?
Y
矩阵非奇异，Gauss消元法失败
N
j=i+1
Gauss消元
m=Aug(j,i)/Aug(i,i);
Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-m*Aug(i,i:n+1);
j=j+1 ；
j<=n?
Y
N
i=i+1;
i<=n?
Y
N
利用回代过程解出X
X=backsub(Aug(1:n,1:n),Aug(1:n,n+1));
结束

3.列主元消元法

列主元素消去法是为控制舍入误差而提出来的一种算法,在 Gauss 消去法的消元过程中,若出现 a=0,则消元无法进行,即使其不为 0,但很小,把它作为除数,就会导致其他元素量级的巨大增长和舍入误差的扩散,最后使计算结果不可靠.使用列主元素消去法计算,基本上能控制舍入误差的影响,并且选主元素比较方便。

算法流程图如下


开始
输入A，b
n=length(b);
初始化X
(A|b)的增光矩阵
Aug=[A,b];
i=1
找出当前列剩余元素中绝对值最大的
[y,k]=max(abs(Aug(i:n,i)));
行交换
Aug(i,i)==0?
Y
矩阵非奇异，Gauss消元法失败
N
j=i+1
Gauss消元
m=Aug(j,i)/Aug(i,i);
Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-m*Aug(i,i:n+1);
j=j+1；
j<=n?
Y
N
i=i+1;
i<=n?
Y
N
利用回代过程解出X
X=backsub(Aug(1:n,1:n),Aug(1:n,n+1));
结束

## 五、实验过程

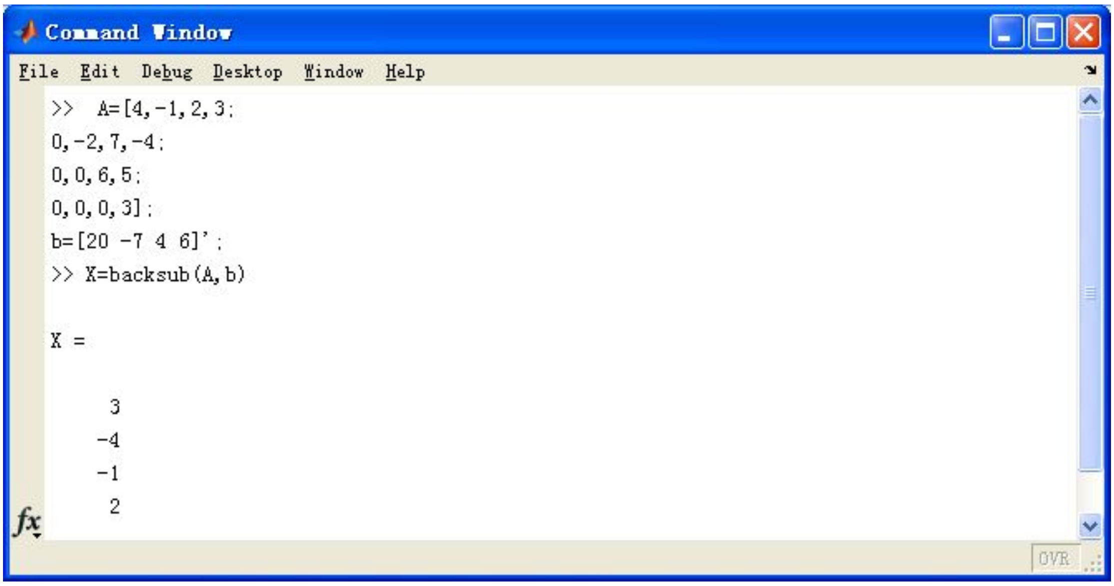
### 1 实验步骤

①编程：用 MATLAB 语言编出源程序。
②开机,键入所编程序源代码.
③调试程序，修改错误至能正确运行.
④运行程序并输出计算结果.
⑤尝试改进

### 运行结果

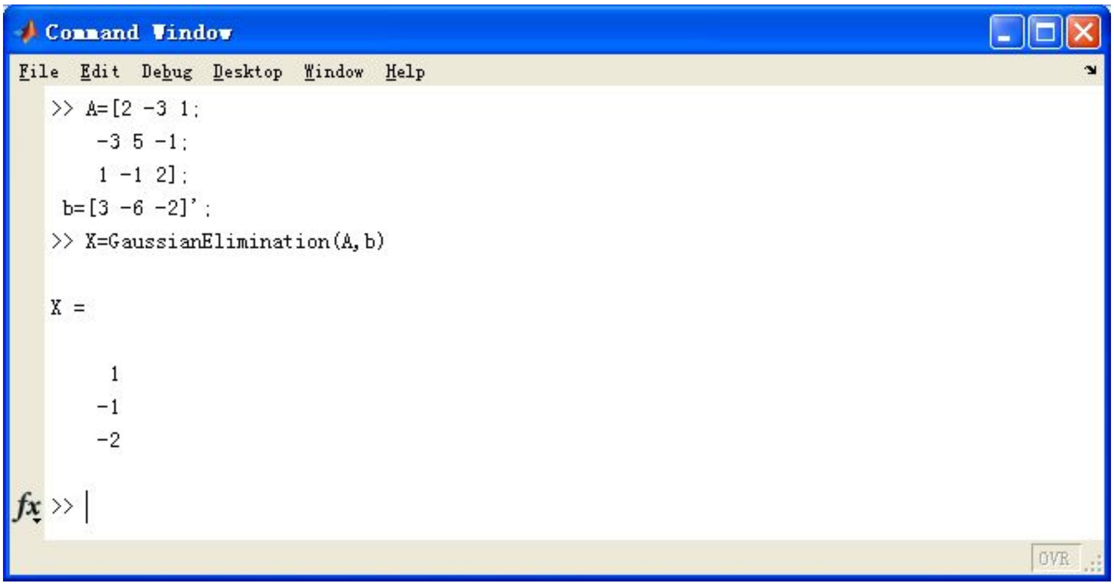
①如求解方程组 Ax=b，$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20 \\ -2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -7 \\ 6x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_4 = 6 \end{cases}$，其中 A 为上三角阵，通过回代法

运行结果如下

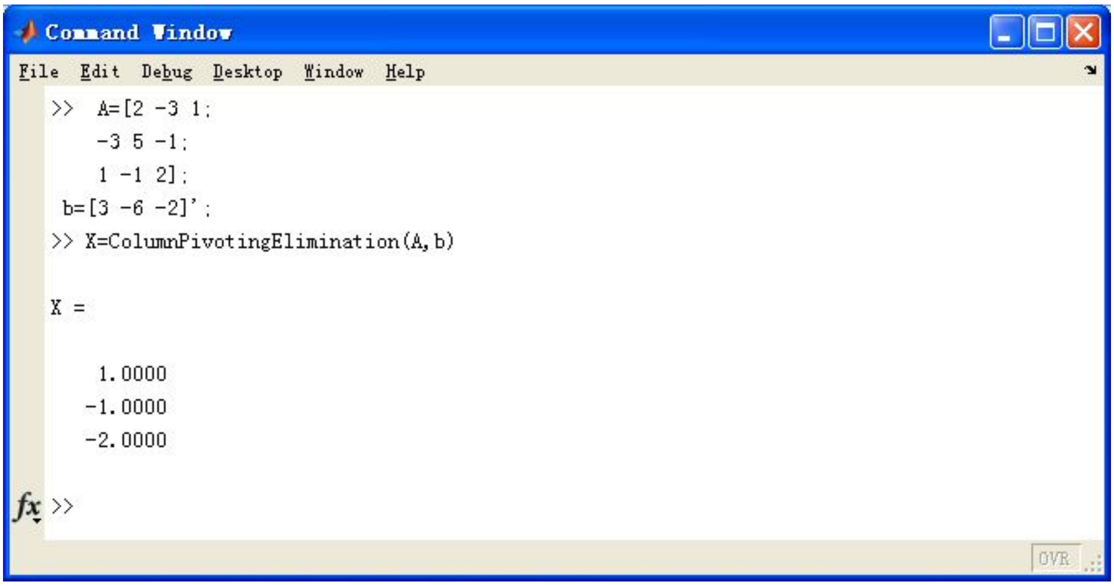



所以解为 x=(3, 4, -1, 2)’

②利用 Gauss 消元法求解课后习题 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$




③利用列主元消元法求解$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=3 \\ -3x_1+5x_2-x_3=-6 \\ x_1-x_2+2x_3=-2 \end{cases}$




**2 关键代码及其解释**

**①上三角形方程组的求解：**

```
%求 b 的维数
n=length(b);
%初始化 X
X=zeros(n,1);
```

```
X(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    X(i)=(b(i)-A(i,i+1:n)*X(i+1:n))/A(i,i);
end
```

## ②高斯消元法：

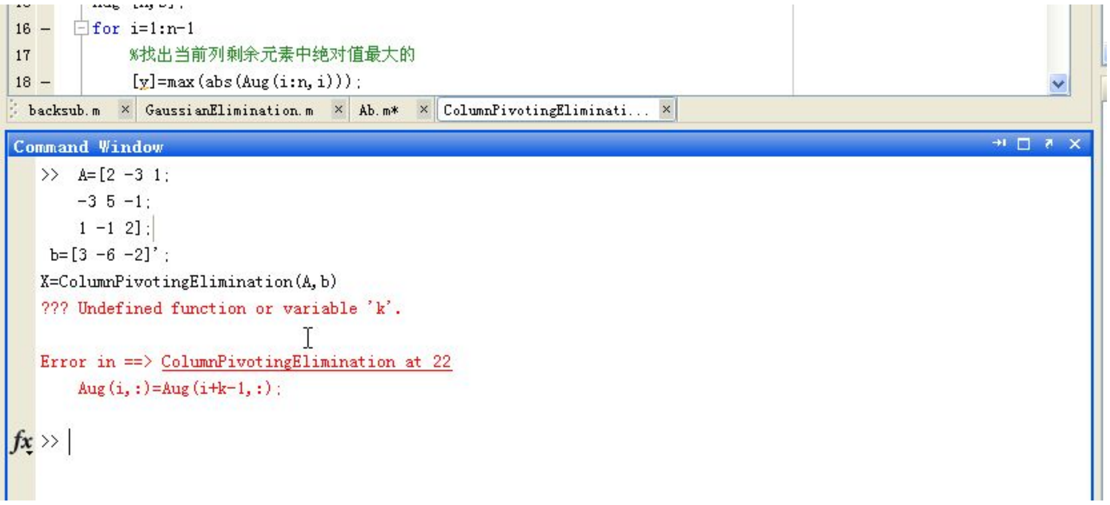
```
%(A|b)的增光矩阵
Aug=[A,b];
for i=1:n-1
    %Aug(i,i)(i)=0,高斯消元法无法继续进行  结束程序
    if (Aug(i,i)==0)
        fprintf('A(%d,%d)(%d)=0, Gaussian Elimination failed.\n',i,i,i);
        break;
    end

    %第 i 列消元
    for j=i+1:n
        m=Aug(j,i)/Aug(i,i);
        Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-m*Aug(i,i:n+1);
    end
end
%消元结束后，利用上三角形方程的回代过程求解；
X=backsub(Aug(1:n,1:n),Aug(1:n,n+1));
```

## ③列主元消元法：

```
for i=1:n-1
    %找出当前列剩余元素中绝对值最大的
    [y,k]=max(abs(Aug(i:n,i)));

    %行交换
    T=Aug(i,:);
    Aug(i,:)=Aug(i+k-1,:);
    Aug(i+k-1,:)=T;

    %当未能保证 A 为非奇异时，有可能出现通过交换后 Aug(i,i)依然是 0 的情况，此时无法进行，列主元消去法失败
    if Aug(i,i)==0
        fprintf('A(%d,%d)(%d)=0, Column Pivoting Elimination failed.\n',i,i,i);
        break;
    end
```

```
    %第 i 列消元
    for j=i+1:n
        Aug(j,i)=Aug(j,i)/Aug(i,i);
        Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-Aug(j,i)*Aug(i,i:n+1);
    end

end
%消元结束后，利用上三角形方程的回代过程求解；
X=backsub(triu(Aug(1:n,1:n)),Aug(1:n,n+1));
```

### 3 调试过程




①对 max 函数使用出错

## 六、实验总结

### 1. 遇到的问题及解决过程

①试图访问 x(0)，通过修改下标解决；

②不知道当程序满足某条件时用何语句结束整个程序；查询得到 error() 由此作用；

③对 max 函数使用出错，不同的参数个数对于用一个名称的函数会出现不同的结果

### 2. 产生的错误及原因分析

①MATLAB 中下标必须从 1 开始，不允许下标为 0；

②现在不提倡使用 goto 语句，需要修改算法删去 goto 语句；

③max 求一个数组的最大元素函数，用法：

**C = max(A)**

返回一个数组各不同维中的最大元素。

如果 A 是一个向量，max(A)返回 A 中的最大元素。

如果 A 是一个矩阵，max(A)将 A 的每一列作为一个向量，返回一行向量

包含了每一列的最大元素。

如果 A 是多为数组，max(A) treats the values along the first non-singleton dimension as vectors, returning the maximum value of each vector.

**C = max(A,B)**

返回一个和 A 和 B 同大小的数组，其中的元素是从 A 或 B 中取出的最大元素。

**C = max(A,[],dim)**

返回 A 中有 dim 指定的维数范围中的最大值。

**[C,I] = max(...)**

找到 A 中那些最大值的索引位置，将他们放在向量 I 中返回。如果这里有多个相同最大值时，返回的将是第一个的索引

**3．体会和收获。**

高斯消元法的算法复杂度是 O（n3）；这就是说，如果系数矩阵的是 n × n，那么高斯消元法所需要的计算量大约与 n3 成比例。

高斯消元法可用在任何域中。

高斯消元法对于一些矩阵来说是稳定的。对于普遍的矩阵来说，高斯消元法在应用上通常也是稳定的，不过亦有例外。

## 七、程序源代码：

### 回代法
**Backsub.m**

```
function X=backsub(A,b)
%Input  -A n*n 上三角矩阵
%       -b n*1 矩阵
%Output -X AX=b 的解

%求 b 的维数
n=length(b);
%初始化 X
X=zeros(n,1);

X(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
   X(i)=(b(i)-A(i,i+1:n)*X(i+1:n))/A(i,i);
end
```

### 高斯消元法
**GaussianElimination.m**

```
function X=GaussianElimination(A,b)
```

```
%Input  -A  n*n 矩阵
%       -b  n*1 矩阵
%Output -X  AX=b 的解

%求 b 的维数
n=length(b);
%初始化 X
X=zeros(n,1);

%(A|b)的增光矩阵
Aug=[A,b];
for i=1:n-1
    %Aug(i,i)(i)=0,高斯消元法无法继续进行 结束程序
   if (Aug(i,i)==0)
       fprintf('A(%d,%d)(%d)=0, Gaussian Elimination failed.\n',i,i,i);
       break;
   end

   %第 i 列消元
   for j=i+1:n
      m=Aug(j,i)/Aug(i,i);
      Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-m*Aug(i,i:n+1);
   end
end
%消元结束后，利用上三角形方程的回代过程求解；
X=backsub(Aug(1:n,1:n),Aug(1:n,n+1));
```

## 列主元消元法
## ColumnPivotingElimination.m

```
function X=ColumnPivotingElimination(A,b)
%Input  -A  n*n 矩阵
%       -b  n*1 矩阵
%Output -X  AX=b 的解

%求 b 的维数
n=length(b);
%初始化 X
X=zeros(n,1);

%做交换使用
T=zeros(1,n+1);
```

```matlab
%(A|b)的增光矩阵
Aug=[A,b];
for i=1:n-1
    %找出当前列剩余元素中绝对值最大的
    [y,k]=max(abs(Aug(i:n,i)));

    %行交换
    T=Aug(i,:);
    Aug(i,:)=Aug(i+k-1,:);
    Aug(i+k-1,:)=T;

    %当未能保证 A 为非奇异时，有可能出现通过交换后 Aug(i,i)依然是 0 的情况，此时无法进行，列主元消去法失败
    if Aug(i,i)==0
        fprintf('A(%d,%d)(%d)=0, Column Pivoting Elimination failed.\n',i,i,i);
       break;
   end

   %第 i 列消元
   for j=i+1:n
       Aug(j,i)=Aug(j,i)/Aug(i,i);
       Aug(j,i:n+1)=Aug(j,i:n+1)-Aug(j,i)*Aug(i,i:n+1);
   end

end
%消元结束后，利用上三角形方程的回代过程求解;
X=backsub(triu(Aug(1:n,1:n)),Aug(1:n,n+1));
```

## 八、教师评语