Доказательство. Заметим,что $\tau = \sum_{d|n} 1$, мы можем записать τ для F и взять f, чтобы функция $f(n) = 1$ была постоянной для всех n. $\square$

Таким же образом, соотношение $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ дает
Следствие 2. *Если N положительное число, то*

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma(n) = \sum_{n=1}^{N} n \left[\frac{N}{n}\right].$$

Эти два последних следствия могут быть уточнены с помощью примера.

Пример 6-3

Рассмотрим случай $N = 6$. Результаты на странице 110 говорятнам, что

$$\sum_{n=1}^{6} \tau(n) = 14.$$

Из следствия 1,

$$\sum_{n=1}^{6} \left[\frac{6}{n}\right] = [6] + [3] + [2] + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{6}{5}\right] + [1]$$

$$= 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14,$$

как и должно быть. В данном случаи мы также имеем

$$\sum_{n=1}^{6} \sigma(n) = 33,$$

в то времякак простой расчет приводит к

$$\sum_{n=1}^{6} \left[\frac{6}{n}\right] = 1\,[6] + 2\,[3] + 3\,[2] + 4\left[\frac{3}{2}\right] + 5\left[\frac{6}{5}\right] + 6\,[1]$$

$$= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 33.$$

Задания 6.3

1. Учитывая целые числа a и $b > 0$, покажем, что существует целое число r $0 \leq r < b$, такое что $a = \left[\dfrac{a}{b}\right] b + r$.

2. Пусть x и y действительные числа. Докажите,ч то наибольшая целочисленная функция удовлетворяет следующим условиям:

   (a) $[x + n] = [x] + n$ для любого целого числа n.

   (b) $[x] + [-x] = 0$ или -1, в зависимости от того, является ли x целым числом или нет. [*Совет*: Пишите $x = [x] + \theta$, с $0 \leq \theta < 1$, так что $-x = -[x] - 1 + (1 - \theta)$.]

   (c) $[x] + [y] \leq [x + y]$ и ,когда x и y положительные, $[x][y] \leq [xy]$.

   (d) $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$ для любого положительного целого числа n.
   [*Совет*: Пусть $\frac{x}{n} = \left[\frac{x}{n}\right] + \theta$, где $0 \leq \theta < 1$, тогда $[x] = n\left[\frac{x}{n}\right] + [n\theta]$.]

   (e) $\left[\frac{nm}{k}\right] \geq n\left[\frac{m}{k}\right]$ для целых положительных чисел n, m, k.

   (f) $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$. [*Совет*: Пусть $x = [x] + \theta, 0 \leq \theta < 1$, и $y = [y] + \theta', 0 \leq \theta' < 1$. Рассмотрим случаи, в которых ни один или оба θ и θ' не превосходят $\frac{1}{2}$.]

3. Найдите наивысшую степень от деления 5 на 1000! и от деления 7 на 2000!.

4. Найти показатель степени наибольшей степени деления простого числа p на

   (a) произведение $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)$ первых n четных целых чисел;

   (b) произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)$ первых n нечетных целых чисел. [*Совет*: Обратите внимание, что $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.]

5. Показать, что 1000! заканчивается 249 нулями.

6. Если $n \geq 1$ и p просто число, даказать, что

   (a) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ это четное целое число. [*Совет*: Используйте индукцию на n.]

(b) Показатель высшей степени p, который делит $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ это

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right).$$

(c) В простой факторизации $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ показатель степени любого простого числа p такой, что $n<p<2n$ равен 1.

7. Пусть положительное целое число n записывается в виде степеней простого числа p так, что $n=a_kp^k+...+a_2p^2+a_1p+a_0$,где

   $0\le a_i<p$. Покажите, что показатель высшей степени p, появляющийся в простом множестве $n!$ это

$$\frac{n-(a_k+...+a_2+a_1+a_0)}{p-1}.$$

8. (a) Используя Задание 7, покажите, что показатель степени наибольшей степени деления p на $\left(p^k-1\right)!$ это $\frac{\left[p^k-(p-1)k-1\right]}{(p-1)}$.
   [*Совет*: Вспомните тождество $p^k-1=(p-1)\left(p^{k-1}+...+p^2+p+1\right)$.]

   (b) Определите наибольшую степень деления 3 на 80! и 7 на 2400!.
   [*Совет*: $2400=7^4-1$.]

9. Найдите целое число $n\ge 1$ такое, что наибольшая степень 5, делящаяся на $n!$ без остатка, это 100. [*Совет*: Поскольку сумма коэффициентов степеней 5, необходимых для выражения n в базе 5, равна не менее 1, начните с рассмотрения уравнения $\frac{(n-1)}{4}=100$.]

10. Учитывая положительное целое число N, покажите, что

    (a) $\sum\limits_{n=1}^{N}\mu(n)\left[\frac{N}{n}\right]=1$;

    (b) $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\right|\le 1$.

11. Проиллюстрируйте Задачу 10 в случае $N=6$.

12. Убедитесь, что формула

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda(n)\left[\frac{N}{n}\right]=\left[\sqrt{N}\right]$$

справедлива для любого положительного целого числа N. [*Совет*: Примените теорему 6-11 к мультипликотивной функции $F(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$, отметив, что существуют $[\sqrt{n}]$ идеальные квадраты, не превышающие n.]