Tropin Nikolay

tropinnikolay@gmail.com

18 March 2021

# 1 Количество деревьев

Посчитаем количество неукоренённых деревьев ($b_n$): начнём со случая $n = 3$ - всего три вершины, тогда существует единственное неукоренённое дерево $b_3 = 1$ (Рис. 1).

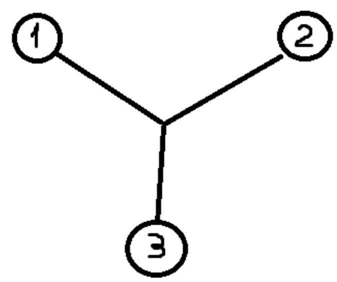

Рис. 1: $b_3 = 1$

Добавляя четвертый лист, можно заметить, что во всех трёх возможных случаях образуется новое внутреннее ребро (Рис. 2).

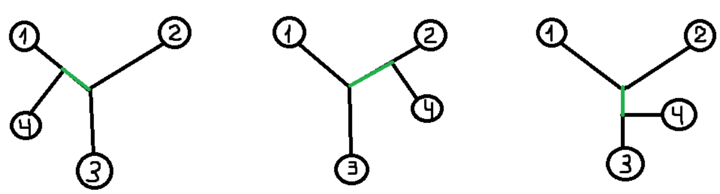

Рис. 2: Все возможные случаи добавления нового листа

Таким образом неукоренённое дерево состоит из $n$ внешних ребёр (очевидно, т.к. каждый лист должен иметь хотя бы одно инцидентное ребро)

и $n-3$ внутренних - это следует из начального условия. Т.е. общее число рёбер для неукорененного дерева с $n$ листями будет равно $n+n-3=2n-3$.
Теперь мы можем выписать реккурентное соотношение для $b_n$:

$$b_n = (2(n-1)-3) \cdot b_{n-1} = (2n-5) \cdot b_{n-1}$$

Его можно трактовать следующим образом: количество способов присоединить новый лист равно количеству рёбер в исходном дереве (т.е. полная аналогия со случаем $b_3$).
Таким образом решая реккурентое уравнение можно получить:

$$b_n = (2n-5)!!$$

Заметим, что для того, чтобы получить из неукоренённого дерева укоренённое - нужно выбрать какое-то ребро и создать на нём дополнительную вершину (корень). Очевидно, что способов выбрать одно ребро в неукоренённом дереве ровно столько же сколько и ребёр в нём, а это число мы посчитали ранее: $2n-3$.
Тогда количество укоренённых деревьев (*rooted trees*):

$$r_n = (2n-3) \cdot b_n = (2n-3)!!$$