Exercice 2

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang plein $(rg(A) = n)$

(1) Montrer qu'il existe $H_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que $H_1 A e_1 = \alpha_1 e_1$

soit $\sigma_1 = \text{signe}(A_{11}) \| \underbrace{Ae_1}_{1^{ère} \text{ colonne de } A} \|$

et $u_1 = Ae_1 + \sigma e_1$

et $H_1 = I - 2\dfrac{u_1 u_1^T}{u_1^T u_1}$ matrice de Householder orthogonale

d'après la proposition 3

$$H_1 \underbrace{Ae_1}_{x_1} = -\sigma_1 e_1 = \alpha_1 e_1$$

$A = A_0 \qquad H_1 A_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \times \text{---} \times \\ 0 & \\ | & \boxed{A_1} \\ 0 & \end{bmatrix}$

(2) Déduire qu'il existe une séquence de matrices orthogonales

$H_i \quad 1 \leq i \leq n-1$ tels que $H_{n-1} \dots H_1 A = R$

avec $R \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire

Q? après étape 1 $\quad H_1 A_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \times \text{—} \times \\ 0 & \\ | & \boxed{A_1} \\ 0 & \end{bmatrix}$

est-ce que l'on peut itérer avec A_1, etc...

(on pressent que si on peut le faire $n-1$ fois
la matrice $H_{n-1} \dots H_1 A$ sera triangulaire supérieure)

on a besoin

A_1 rang plein pour continuer

$$\det(H_1 A_0) = \det(H_1)\det(A) \neq 0$$

$$\det(H_1 A_0) = \alpha_1 \det(A_1)$$

et comme $\alpha_1 \neq 0 \qquad \det(A_1) \neq 0$

donc on peut trouver

σ_2, u_2 et H'_2 tq $\quad H'_2 A_1 e'_1 = -\sigma_2 e'_1 = \alpha_2 e_1$

avec e'_1 1^{er} vecteur base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$

$$H'_2 A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \times \text{—} \times \\ 0 & \\ | & \boxed{A_2} \\ 0 & \end{bmatrix} \; n-1$$

$n-1 \rightarrow n$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H'_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

orthogonale / symétrique comme H'_2 l'est

$$H_2 H_1 A = H_2 H_1 A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{H'_2} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A_1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \alpha_2 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{A_2} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} n-2$$

$n-1$ fois $\longrightarrow$ $\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 H_1}_{Q^T} A = R \quad \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$

produit de matrices orthogonales $\Rightarrow$ orthogonale

$$A = QR$$