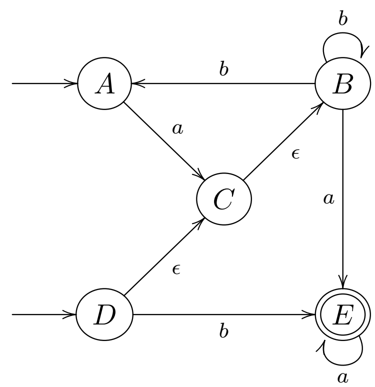
Automates et Théorie des Langages – Session 1 – 12/12/2018 – 1h30

Seul document autorisé : formulaire inclu dans le sujet

Calculatrice, Téléphone Portable, Ordinateur Interdits

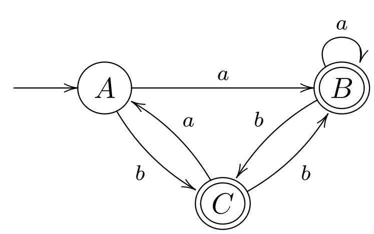
Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Si vous trouvez dans le sujet un élément qui vous semble erroné, signalez le sur votre copie, indiquez les hypothèses que vous faites, et poursuivez la composition.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.

Exercice 1 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \{A, D\}, \{E\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



1. $\mathcal{E}$ est-il déterministe ? Justifier votre réponse. S'il ne l'est pas, le déterminiser.
2. Donner la table de transition de l'automate déterministe.

Exercice 2 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, \{A\}, \{B, C\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



1. Construire le système d'équations sur les expressions régulières associé à l'automate $\mathcal{E}$;
2. Résoudre ce système et donner une expression régulière décrivant le langage accepté par l'automate $\mathcal{E}$.

Exercice 3 Calculer par la méthode des dérivées un automate acceptant le même langage que l'expression régulière $a\Big(b^\star \mid (a \mid b)a^\star\Big)$.

Exercice 4 Soit la grammaire décrivant les identificateurs en XML $G = (A, V, N, P)$ composée des non-terminaux $V = \{N, I\}$, de l'axiome N, des terminaux $A = \{\texttt{dp}, \texttt{ch}\}$ (`ch` représente un chiffre quelconque et `dp` le caractère :) et de l'ensemble P de règles de production suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1. & N \to I\ \texttt{dp}\ N \\
2. & N \to I \\
3. & I \to \texttt{ch}\ I \\
4. & I \to \texttt{ch}
\end{array}
$$

1. Transformer G en une grammaire régulière droite décrivant le même langage en utilisant des transformations de grammaire préservant le langage reconnu (substitution, factorisation et élimination récursivité gauche) ;

2. Construire l'automate déterministe fini équivalent à la grammaire obtenue.

Exercice 5 Soit la grammaire décrivant une partie des expressions JAVA $G_0 = (A, V, E, P)$ composée des non-terminaux $V = \{O\ E\}$, de l'axiome E, des terminaux $A = \{\texttt{num}, \texttt{id}, (,)\}$ et de l'ensemble P de règles de production suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
1. & E \to \texttt{num} \\
2. & E \to \texttt{id} \\
3. & E \to O\ (\ E\ ) \\
4. & O \to E \\
5. & O \to \Lambda
\end{array}
$$

1. Question de cours :
   Quels sont les principes de l'analyse descendante récursive. La réponse donnée doit être synthétique en 10 lignes maximum.

2. Grammaire LL(1) :

   (a) Construire G_1 la grammaire augmentée de G_0 ;

   (b) Est ce que la grammaire G_1 est récursive à gauche ? Si oui, éliminer la récursivité à gauche et construire la grammaire G_2. Si G_1 n'est pas récursive à gauche, alors G_2 est par la suite égale à G_1.

   (c) Calculer les ensembles des premiers et des suivants pour les non-terminaux de G_2 ;

   (d) Calculer les symboles directeurs associés aux différentes règles de production de G_2 ;

   (e) G_2 est-elle LL(1) ? Pourquoi ? Si G_2 n'est pas LL(1), transformer G_2 en G_3 pour la rendre LL(1) et calculer les symboles directeurs de G_3.

Equivalence entre expressions régulières : L'opérateur de concatenation/juxtaposition . est implicite pour ne pas surcharger l'écriture des expressions : $e_1.e_2$ est notée $e_1\, e_2$.

$$
\begin{array}{ll}
\emptyset\, e = e\, \emptyset = \emptyset & \Lambda\, e = e\, \Lambda = e \\
e \mid \emptyset = \emptyset \mid e = e & e \mid e = e \\
e_1\,(e_2\, e_3) = (e_1\, e_2)\, e_3 & e_1 \mid (e_2 \mid e_3) = (e_1 \mid e_2) \mid e_3 \\
e_1\,(e_2 \mid e_3) = (e_1\, e_2) \mid (e_1\, e_3) & (e_1 \mid e_2)\, e_3 = (e_1\, e_2) \mid (e_1\, e_3) \\
e_1 \mid e_2 = e_2 \mid e_1 & \emptyset^\star = \Lambda^\star = \Lambda \\
e^\star = \Lambda \mid e^+ & e^+ = e\, e^\star = e^\star\, e \\
e^\star\, e^\star = e^\star & e^{\star\star} = e^\star \\
e = e^\star \Leftrightarrow e = e\, e & e\, e^\star = e^\star \Leftrightarrow \Lambda \in L(e) \\
(e_1^\star\, e_2^\star)^\star = (e_1 \mid e_2)^\star = (e_1^\star \mid e_2^\star)^\star & \\
(e_1^\star\, e_2)^\star\,(e_1^\star) = (e_1 \mid e_2)^\star = e_1^\star\,(e_2\,(e_1^\star))^\star &
\end{array}
$$

ϵ-fermeture : L'ϵ-fermeture d'un ensemble d'états E est la fermeture réflexive et transitive de la relation de transition sur ϵ. Il s'agit de l'union de E et de tous les états accessibles depuis les états de E en suivant un nombre quelconque de transitions sur ϵ.

Théorème de Arden : Soient x une variable, e_1 et e_2 des expressions régulières, l'équation $x = e_1\, x \mid e_2$ admet au moins une solution : $x = e_1^\star\, e_2$

Dérivation des expressions régulières :

$$
\begin{array}{ll}
D_a(a) = \Lambda & D_a(b) = \emptyset \\
D_a(\emptyset) = \emptyset & D_a(\Lambda) = \emptyset \\
D_a(e^\star) = D_a(e)\, e^\star & D_a(e_1 \mid e_2) = D_a(e_1) \mid D_a(e_2) \\
D_a(e_1\, e_2) = D_a(e_1)\, e_2 \mid \delta(e_1)\, D_a(e_2) & \\
\delta(\emptyset) = \emptyset & \delta(\Lambda) = \Lambda \\
\delta(a) = \emptyset \text{ si } a \in A & \delta(e^\star) = \Lambda \\
\delta(e_1\ e_2) = \delta(e_1)\ \delta(e_2) & \delta(e_1 \mid e_2) = \delta(e_1) \mid \delta(e_2)
\end{array}
$$

Soit la grammaire non contextuelle $G = (A, V, S, P)$:

Calcul des Premiers :

$$
\begin{array}{l}
\text{Premiers}(\Lambda) = \{\Lambda\} \\
\text{Premiers}(a\ \alpha) = \{a\} \text{ avec } a \in A \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X) = \displaystyle\bigcup_{X \to \gamma \in P} \text{Premiers}(\gamma) \text{ avec } X \in V \text{ et } \gamma \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X\ \alpha) = \text{Premiers}(X) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{ Premiers}(\alpha)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(X)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
\end{array}
$$

Calcul des Suivants :

$$
\text{Suivants}(X) = \bigcup_{Y \to \alpha\, X\, \beta \in P} \text{Premiers}(\beta) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(Y)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\beta)} \underbrace{\cup\{\$\}}_{\text{si } X = S} \text{ avec } X, Y \in V \text{ et } \alpha, \beta \in (A \cup V)^\star
$$

Calcul des Symboles Directeurs :

$$
\text{Directeurs}(X \to \alpha) = \text{Premiers}(\alpha) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(X)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\alpha)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
$$