Cours Approximation Géométrique

Géraldine Morin, Sandrine Mouysset

17 mars 2020

Ce cours s'organise en CTD, TPs et projet (voir Section pour plus de détail), avant chaque CTD, un exercice est à préparer (en rose dans le texte), et pour chaque partie, les motivations sont données, et les compétences à acquérir (en bleu) doivent permettre à un étudiant d'évaluer si il maitrise les notions nécessaires.

Intérêt et motivation du cours

0.1 Activité préalable

La forme Avant chaque séance, je vous fais passer une petite question avant le CTD. Il faut prendre environ 15mn avant le CTD pour réfléchir à la question posée tout seul ou à plusieurs personnes, mais chaun vient avec une trace écrite de ses réflexions.

La question On vous demande de développer (dans l'entreprise de rêve qui vient de vous embaucher) un petit logiciel qui permettrait à des artistes de créer des objets 3D, et de le modifier de façon interactive. Quelle représentation géométrique utiliseriez vous pour modéliser ces objets ? Quelle structure de données et méthodes utiliseriez vous pour implémenter le modèle choisi ?

0.2 Comment modéliser des objets 3D ? Des courbes ? Des surfaces ?

Bilan/brain storming/mise en commun....

— forme implicite $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2-R^2=1 \end{array}\right.$
  2 équations dont l'intersection donne une équation courbe.

— Courbes paramétriques $\left\{\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{array}\right.$

— Maillage issu d'une discrétisation d'EDP

— Surfaces paramétriques $\left\{\begin{array}{l} x=x(s,t) \\ y=y(s,t) \end{array}\right.$ courbes paramétrées à 2 indices.

Plusieurs difficultés peuvent apparaître :

— Si un point $M \in$ surface ?
  Avec forme implicite, OK.
  Courbe paramétrique, pas OK.

— Génération de points d'une surface
  Forme implicite, pas OK
  Maillage ou courbes paramétriques, OK

0.3 Motivation

Les contextes dans lesquels sont utilisés ces modèles sont :

— Les logiciels de CAO (vidéo modélisationCAO) ;
— Les logiciels d'animation (vidéo Tony deRose).

0.4 Organisation et travail demandé

La classe va se dérouler 'en classe' avec :
- CTD 1 : Activité introductive ; Espaces de points.
- CTD 2 : Paramétrisation ; Interpolation, Lagrange + temps.
- CTD 3 : Neville + Quaterions ; Surfaces en produit tensoriel.
- CTD 4 : Bézier ; floraisons.
- *vacances*
- CTD 5 : Bézier - subdivsion ; surfaces.
- CTD 6 : Splines ; surfaces de subdivision.
- CTD 7 : Géométrie différentielles des surfaces ; paramétrisation de surfaces.
- 7 TPs en Unity (ou Matlab)
- Evaluation : 1 note Projet, 1 note Examen (comptent chacune 50% de la matière)

Votre travail :

- Quantité : 20-25h de travail en dehors des séances (processus de Bologne) ;
- comprendre et si besoin retravailler les CTDs (vieu examen en ligne)
- terminer les TPs si nécessaire en dehors des séances
- Faire un projet :
  - Passer au cas des surfaces ;
  - Appliquer les concepts vu en classe, en explorant un nouveau modèle (avantages de ce modèle, applications visées, limitations) ;
  - Implémentation de ce modèle géométrique ;
  - Illustration sur des exemples bien choisis
  - création d'une vidéo d'illustration de votre travail.

0.5 Compétences et savoir faire

A la fin de cet enseignement, un(e) étudiant(e) doit
- connaitre les modèles utilisés pour la modélisation paramétrique des courbes et surfaces ;
- connaitre les avantages des modèles paramétriques en modélisation 3D ;
- savoir choisir un modèle paramétrique particulier pour une application visée ;
- savoir implémenter un modèle de surface paramétrique particulier.

Auto-évaluation : Vous retrouvez en début de chaque séance, en bleu, la liste de toutes les compétences à acquérir durant ce cours (ces compétences sont données sous moodle pour que vous puissiez auto-évaluer vos acquis).

Suite à ce cours, vous devez répondre "oui" à ces questions :
- je sais définir un espace affine ;
- je connais les éléments d'un espace affine, et je sais quelles opérations s'appliquent sur ces éléments ;
- j'interprète géométriquement les opérations sur l'espace affine ;
- je sais définir une base de l'espace affine, et je sais ausssi définir un repère de cet espace ;
- je sais comparer les espaces vectoriels et les espaces affines ;

— je connais les limitations de la modélisation affine, et je sais que pour certaines transformations, il faut se tourner vers des espaces plus généraux : les espaces projectifs.

— Trouver les coordonnées barycentriques d'un point d'un espace affine dans une base affine de cet espace ;
— Etant données des coordonnées barycentriques d'un point sur une famille affine, dessiner le point dans l'espace affine ;
— caractériser une transformation affine, algebriquement et géométriquement.

— Etant donnés des points (x_i, y_i) $i = 0 \dots n$ je sais définir une courbe $y = f(x)$ polynomiale de degré n qui passe par ces points.
— je sais que cette courbe est unique, et je l'exprime comme une combinaison linéaire des polynomes de Lagrange ;
— Je sais définir les polynômes de Lagrange relatifs à une famille de points, et montrer qu'il forment une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— je sais définir une courbe paramétrique polynomiale de degré n passant pas des points (x_i, y_i) $i = 0 \dots n$;
— Je sais que la courbe ainsi définie dépend des temps de passage choisi t_i pour chaque point à interpoler ;
— Je sais construire le polynome interpolant, itérativement à partir de l'algorithme de Neville.

— je sais définir une surface paramétrique polynomiale de bi-degré n passant pas des points $(x_{i,j}, y_{i,j})$ $i, j = 0 \dots n$ explicitement ;
— Je sais que la surface ainsi définie dépend de temps d'interpolation (je dois savoir combien, et comment les définir et les utiliser pour définir les fonctions de base) ;
— Je sais aussi construire cette surface interpolante itérativement en utilisant l'algorithme de Neville.

— je sais construire une courbe de Bézier ;
— je connais la base polynnomiale correspondant aux courbes de Bézier ;
— je connais et sais démontrer 5 propriétés d'une courbe de Bézier ;
— je sais produire des approximation linéaires par morceaux des courbes de Bézier, et évaluer la qualité de l'approximation linéaire par morceaux proposée ;
— je sais appliquer l'algorithme de De Casteljau pour évaluer un point d'une courbe de Bézier ;
— Je sais subdiviser une courbe de Bézier ;
— je sais calculer la floraison d'un polynôme ;
— Je connais les 3 propriétés caractérisant les floraisons ;
— A l'aide des floraisons, je sais expliquer l'algorithme de De Casteljau, pour l'évaluation et pour la suubdivision.
— je sais détecter qu'une courbe de Bézier a une mauvaise paramétrisation.

CTD 1

Espaces de points

Motivations

Avant d'étudier les courbes, nous devons regarder en détail leurs fondements : les points. Une courbe, ou une surface, est définie par un ensemble de points. Ces points seront paramétrés par un paramètre dans le cas des courbes ou deux paramètres dans le cas des surfaces.

Nous avons besoin de connaitre la structure algébrique qui correspond aux ensembles de points. Que donne une structure algébrique ?

— Elle permet de définir/spécifier les éléments de l'ensemble,

— elle définit les opérations qui permettent de manipuler ces éléments.

Compétences

Après avoir vu les espaces de points, vous devez répondre "oui" à ces questions :

— je sais définir un espace affine et je connais les éléments d'un espace affine, et je sais quelles opérations s'appliquent sur ces éléments ;

— je sais définir une base de l'espace affine, et je sais ausssi définir un repère de cet espace ;

— je sais comparer les espaces vectoriels et les espaces affines ;

— je connais les limitations de la modélisation affine, et je sais que pour certaines transformations, il faut se tourner vers des espaces plus généraux : les espaces projectifs.

— Trouver les coordonnées barycentriques d'un point d'un espace affine dans une base affine de cet espace ;

— Etant données des coordonnées barycentriques d'un point sur une famille affine, dessiner le point dans l'espace affine ;

— Caractériser une transformation affine, algébriquement et géométriquement.

Activité préalable

La forme Avant chaque séance, je vous fais passer une petite question avant le CTD. Il faut prendre environ 15mn avant le CTD pour réfléchir à la question posée tout seul ou à plusieurs personnes, mais chacun vient avec une trace écrite de ses réflexions.

La question On peut représenter un point A où un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de la même façon par leur coordonnées dans un repère (orthonormé) d'origine 0, et donc considérer ces coordonnées comme un vecteur d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

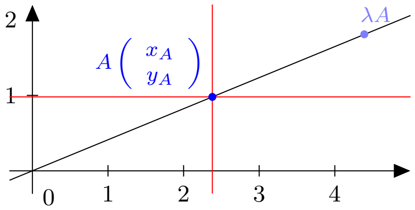
1. Quel est l'effet d'une translation sur le point A ? sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$?
2. Quel est l'effet d'une multiplication par un scalaire λ sur le point A ? sur le vecteur $\overrightarrow{OA}$?

Quelle structure algébrique pour les espaces de points ? Pourquoi les espaces vectoriels ne suffisent pas ? Pourquoi est-il important de distinguer les points des vecteurs ? Si on prend un repère, les coordonnées sont définies dans ce repère. Et on pourrait se dire que le point A ou le vecteur $\overrightarrow{OA}$ ont les mêmes coordonnées. Donc nous pourrions considérer que travailler sur A ou $\overrightarrow{OA}$ est équivalent. Et pourtant, $\overrightarrow{OA}$ et A sont différents.

Voici deux raisons pour lesquelles il faut distinguer les points des vecteurs. Ces raisons sont basées sur la définition même des espaces vectoriels :

Définition : E est appelé espace vectoriel si : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in E, x + y \in E$.

Tout d'abord, considérons une **translation**. L'effet de la translation est de bouger un point par un vecteur translation. Mais une translation sur un vecteur $\overrightarrow{OA}$ n'a pas d'effet car un vecteur est la classe d'équivalence de bipoints équipotents.
Un autre exemple, la **multiplication d'un vecteur par un scalaire** λ, noté λA, a un sens : c'est un vecteur de même direction et d'orientation que OA et une norme $\lambda \|\overrightarrow{OA}\|$. Mais multiplier un point par un scalaire n'a pas de sens. Supposons que nous prenons le point λA le point A' tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Cette définition n'est pas correcte parce qu'elle dépend de l'origine O de la frame. Pour une origine différente O', le résultat serait différent. Donc, les points doivent être différents des vecteurs.



$$\left.\begin{array}{r}\lambda A \\ A + B\end{array}\right\} \text{ pas de sens car } \lambda A \text{ dépend de l'origine.}$$

1 Espace affine

1.1 Combinaisons affines et espaces affines

Les points appartiennent à un espace affine. Quand on étudie l'algèbre linéaire (l'espace des vecteurs), les espaces affines sont souvent caractérisés par un point et un vecteur de l'espace. Pour un point donné P dans un espace affine $\mathcal{A}$, tous les autres points de $\mathcal{A}$ s'écrivent de la manière suivante : $P + v$ où v est un vecteur de l'espace vectoriel V associé à $\mathcal{A}$. Notons que nous considérons dans ce cours que des espaces de dimensions finies.

Ici, nous définirons plutôt un espace affine, indépendamment de l'espace vectoriel associé. Comme un espace vectoriel est constitué de vecteurs stables par combinaison linéaire, un espace affine est un espace constitué de points stables par combinaison affine.

Définition : Une **combinaison affine** est une combinaison linéaire particulière telle que la somme des coefficients est égale à 1. Si A_i, $i = 0, ..., m$ est un ensemble de points dans un espace affine $\mathcal{A}$, alors

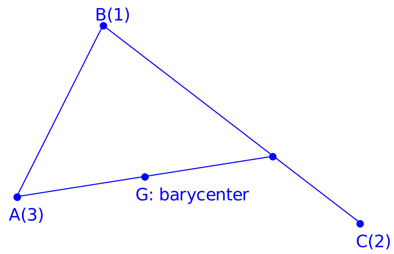
$$B = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i A_i \text{ où } \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1 \tag{1}$$

est aussi un point de l'espace affine $\mathcal{A}$.

Les combinaisons affines sont très liées à la notion de **barycentre**. Le point B défini par l'équation (1) est le barycentre des points A_i respectivement donnés par le poids α_i. Ainsi, un espace affine peut être défini tel que, un barycentre de points dans cet espace appartient aussi à l'espace. Cette interprétation fournit une interprétation géométrique intuitive des combinaisons affines au moins pour des coefficients positifs.

Dans cette définition, le lien avec l'espace vectoriel associé peut être fait. Comme mentionné précédemment, l'espace vectoriel est l'espace de classes d'équivalence des points équipotents, c'est-à-dire les points séparés par le même vecteur (leur différence définit un même vecteur).

Exemple Un exemple classique d'un espace affine est l'espace euclidien de points 2D : tout barycentre de deux points du plan est un point du plan.



1.2 Arithmétique du point

Nous venons de définir les combinaisons affines et d'apprendre qu'une combinaison affine de points est un point. Nous pouvons définir un point dans un espace affine en utilisant le lien entre les points et les vecteurs. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par la différence $B-A$. Donc on peut soustraire deux points et obtenir un vecteur. Plus généralement :

Propriété Toute combinaison linéaire de points telle que la somme des coefficients est nulle est un vecteur.

Considérons l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i \text{ où } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1 & (2) \\ &= (\sum_{i=0}^{n} \alpha_i) A_0 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (A_i - A_0) & (3) \\ &= A_0 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}. & (4) \end{aligned}$$

Donc pour trouver le point B, il faut commencer par A_0 et ajouter un à un les vecteurs $\alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}$.

Pour résumer Les combinaisons linéaires de points sont **valides** seulement si la somme des coefficients est égale à **1** (qui est une combinaison affine) ou si la somme des coefficients est **0**. Si la somme est 1, la combinaison est un **point**, si la somme est nulle, la combinaison est un **vecteur**.

1.3 Bases affines

Définition : Une **base** est un ensemble d'éléments tel que tout autre élément de l'espace peut être exprimé dans cette base. Cette expression doit être unique.

Exemple Dans le contexte des espaces vectoriels de dimension finie, une **base vectorielle** est un ensemble de vecteurs tel que tout élément de l'espace peut être défini par une combinaison linéaire de vecteurs dans cette base. Les coefficients de la combinaison linéaire sont appelés coordonnées et doivent être définis de manière unique.
Dans le cas des espaces vectoriels, nous avons la propriété que toutes les bases d'un espace ont le même nombre d'éléments ; ce nombre est appelé la dimension de l'espace.

Base affine de points De manière similaire, une **base d'un espace affine de dimension finie** est un ensemble de points, tel que tout point dans l'espace affine peut être définie comme une combinaison affine des points dans cette base. Les coefficients dans une combinaison affine sont les coordonnées de ce point et sont uniques. Intuitivement, ce point est le barycentre des points de la base avec des poids égaux aux coordonnées correspondantes.
Notons que cette propriété intuitive n'est pas une caractérisation dès lors que les poids peuvent être multipliés par une même constante sans changer le barycentre. L'unicité vient du fait qu'une combinaison affine force que la somme des poids égale à 1. Ces poids sont appelés les **coordonnées barycentriques** des points.

Repère

Conformément à la définition d'un espace affine $\mathcal{A}$ associé à l'espace vectoriel V :

$$\mathcal{A} = \{P' = P + v | P \text{ est un point donné, } v \in V\}.$$

Un repère de l'espace affine est plus naturellement défini par un point P appelé origine et une base de vecteurs de V. Le lien avec la définition précédente d'une base est que pour une base affine de points $(A_i)_{0\leq i\leq m}$ de $\mathcal{A}$, la base correspondante avec un point et n vecteurs est le point A_0 et les vecteurs $(\overrightarrow{0A_i})_{1\leq i\leq n}$. C'est équivalent de dire que $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base affine de $\mathcal{A}$ ou de dire que $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1\leq i\leq n}$ est une base vectorielle de V. A partir de cette équivalence, on peut déduire que le nombre de points dans toute base affine est $n+1$ où n est la dimension de l'espace vectoriel associé. Pour un point arbitraire B et avec l'équation (4), on obtient :

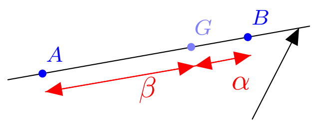
$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i \text{ avec } \sum \alpha_i = 1 \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées affines de B dans la base affine $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ sont $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ et les coordonnées cartésiennes de B dans la base cartésienne $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ sont $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dans ce qui suit, un vector $\overrightarrow{AB}$ sera noté AB.

Calculer des coordonnées barycentriques

Exemple Considérons deux points distincts A et B et un point G de la droite (AB). Les deux points (A, B) forment une base de cette droite. On veut déterminer les coordonnées barycentriques (α, β) de G à partir de A et B telles que :

$$G = \alpha A + \beta B \text{ where } \alpha + \beta = 1.$$



droite où se trouvent les barycentres

En fait, on peut vérifier avec l'arithmétique du point que les coordonnées sont définies par :

$$\begin{aligned} \overline{GB} &= \alpha\overline{AB} \\ \overline{AG} &= \beta\overline{AB} \end{aligned}$$

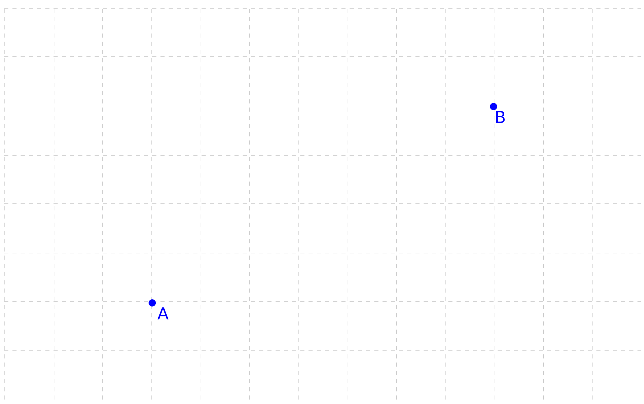
où $\overline{AB}$ est la mesure algébrique de AB. Attention au fait que ces 2 relations ne sont pas si naturelles : si on considère que la longueur de AB est 1, α est la distance signée de G à B et β est la distance signée de A à G. Il est important de penser en terme de barycentre, que le poids d'un point augmente à mesure que le barycentre se rapproche de ce point.

Si $|AB| = 1$, $\alpha = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}}, \beta = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}, G = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha + \beta = 1$.

Exercice

Soient 2 points arbitraires distincts A et B definis dans une base affine Sur la figure, tracer les points :

— $M1$ de coordonnées affines $(1/2, 1/2)$,
— $M2$ de coordonnées affines $(1/4, 3/4)$,
— $M3$ de coordonnées affines $(-1, 1)$.



Maintenant, tracer 2 points arbitraires sur la ligne (AB), un entre A et B, un à l'extérieur du segment $[AB]$. Trouver les coordonnées barycentriques de ces points dans la base A, B.

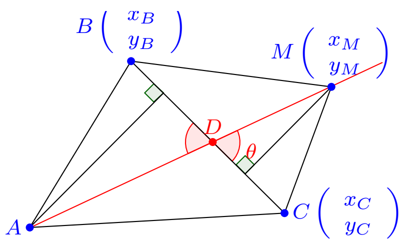
Exemple avec 3 points Dans le cas de 3 points A, B et C, comme base affine du plan, un point M a pour coordonnées α, β et γ où :

— α est l'aire du triangle BCM sur l'aire du triangle ABC,

— β est l'aire du triangle CAM sur l'aire du triangle ABC,

— γ est l'aire du triangle ABM sur l'aire du triangle ABC,

Trouver (α, β, γ).



Résolution algébrique $\left\{\begin{array}{l} M = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{array}\right.$ $\rightarrow$ 3 équations à 3 inconnues.

Résolution géométrique Que valent D et M ?

$$D = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}B + \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}C$$

$$M = -\frac{\overline{DM}}{\overline{AD}}A + \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}D = \overbrace{-\frac{\overline{DM}}{\overline{AD}}}^{\alpha}A + \overbrace{\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}}^{\beta}B + \overbrace{\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}}^{\gamma}C$$

On peut exprimer la fraction $\frac{DM}{AD}$ en fonction l'aire du triangle BMC

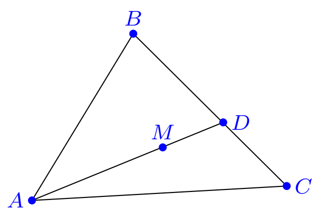
$$\frac{BMC}{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}\sin(\theta)}{2}\frac{2}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}}$$

donc :

$$\alpha = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{BMC}{ABC}$$

$$\gamma = \frac{ABM}{ABC}$$

$$\beta = \frac{AMC}{ABC}$$



Application numérique :

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$$

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\underbrace{(\frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C)}_{D}$$

1.4 Transformations affines

Comme les transformations linéaires sont des homomorphismes associés aux espaces vectoriels, les transformations affines sont des homomorphismes associés aux espaces affines.

Définitions :

- Une transformation est **linéaire** si l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire de l'image de ces vecteurs.
- Une transformation est **affine** si l'image d'une combinaison affine de points est la combinaison affine de l'image de ces points.

Intuitivement, cela signifie qu'une transformation affine conserve les barycentres :

$$f\left(\sum \alpha_i A_i\right) = \sum \alpha_i f(A_i) \text{ avec } \sum \alpha_i = 1. \tag{5}$$

Mais en fait, vous savez qu'une transormation affine s'écrit sous la forme :

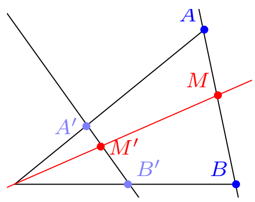
$$f(t) = at + b. \tag{6}$$

Les transformations données par l'équation (6) pour a et b arbitraires sont toutes des transformations affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On peut facilement vérifier la propriété caractéristique (5) pour ces fonctions.

Maintenant, considérons un espace affine de points dans le plan euclidien. Vous connaissez de nombreuses transformations dans cet espace :

- translations
- rotations,
- projection : orthogonale ou parallèle avec une direction arbitraire
- projection avec un centre de projection
- homotheties...

Sont-elles toutes affines ? Pour vérifier, nous avons besoin d'être sûr que les barycentres sont conservés. En fait, ce sont toutes transformations affines excepté la projection avec un centre de projection. On peut dessiner un exemple qui montre que les barycentres ne sont pas préservés. (Exemple : les selfies)



Pour définir une transformation linéaire, il est suffisant de connaître l'image d'une base. Les images de n vecteur définissent la transformation linéaire. C'est aussi le cas de transformation affine, c'est suffisant de connaître les images de $n+1$ point d'une base affine.

Une transformation affine est-elle linéaire ?

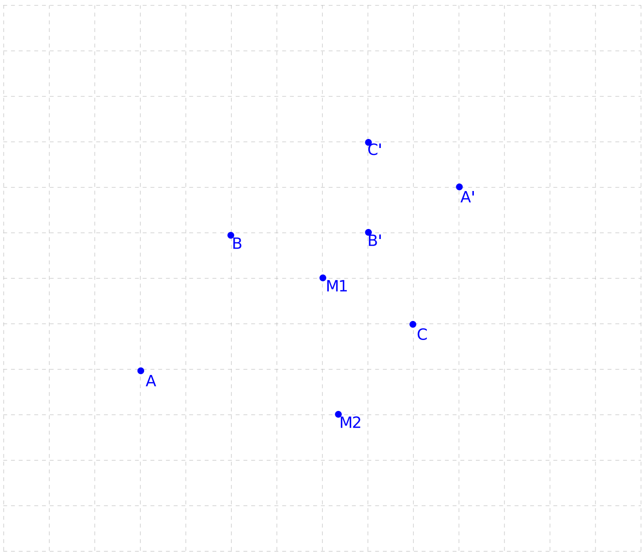
- Translation : affine mais non linéaire
  $t(M) = M + \delta$
  $t(\alpha M) = \alpha t(M)$
  $t(\alpha M) = \alpha M + \delta \neq \alpha M + \alpha\delta = \alpha t(M)$
- Rotation, scaling : affine et linéaire

En fait : Linéaire $\in$ Affine $\in$ Projection.

affine	linéaire
points espace affine combinaisons affines transformation affine	vecteurs espace vectoriel combinaisons linéaires transformation linéaire

Exercice

Les trois points A, B et C définissent une base affine du plan, s'ils ne sont pas alignés. Une transformation affine planaire T est caractérisée par 3 points A', B' et C' étant les images respectives de A, B et C. Dessiner les images M_1' et M_2' des points M_1 et M_2 dans le plan par la transformation T.



1.5 Espace de Grassmann ou coordonnées homogènes

Dans l'espace de Grassman, les points du plan sont décrits par 3 composantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{coordonnée homogène}} \quad \begin{pmatrix} \lambda x_A \\ \lambda y_A \\ \lambda \end{pmatrix},$$

la troisième composante étant le poids. Cette notation permet de considérer des points à l'infini ou des vecteurs.

Représentation matricielle : on peut modéliser matriciellement les transformations par une matrice 3x4 : 3x3 pour la représentation linéaire, et le vecteur 1x3 de translation dans la dernière colonne.

Dans une matrice 4x4, la dernière ligne peut être utiliser en géométrie projective pour exprimer une transformation perspective (encore plus générale, comme une photo).

Paramétrisation

Motivations

Maintenant que vous savez définir des points dans un espace affine, nous allons définir une courbe comme un ensemble de points. Ces courbes paramétrées peuvent être vues comme des fonctions à 1 paramètre, à valeurs dans un espace affine. Mais est-ce vraiment légitime d'associer une courbe à une telle fonction, appelée sa paramétrisation ?

Comme vous avez de grandes compétences en analyse fonctionelle nous souhaitons faire le lien entre une courbe et une fonction la paramétrant. Nous allons voir dans quelles conditions cet amalgame (que nous ferons par la suite) est raisonnable.

Compétences

Après avoir suivi ce bout de cours sur les paramétrisations, vous devez répondre "oui" à ces questions :

- je sais définir une courbe paramétrique ;
- je sais montrer qu'une paramétrisation est régulière, ou non ;
- je connais la paramétrisation idéale.

Je dois aussi savoir :

- trouver plusieurs paramétrisation d'une même courbe ;
- déterminer si une paramétrisation est bonne, ou non.

Activité préalable

La forme Avant chaque séance, je vous fais passer une petite question avant le CTD. Il faut prendre environ 15mn avant le CTD pour réfléchir à la question posée tout seul ou à plusieurs personnes, mais chaun vient avec une trace écrite de ses réflexions.

La question Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \text{plan affine} \\ t & \mapsto & (t^2,-t^4) \text{ si } t \leq 0 \\ & & (t^2,t^2) \text{ sinon} \end{array}$$

Montrer que f est C^1 (continue et de dérivée continue) partout (en particulier en 0).

Dessinez la courbe représentative de cette fonction paramétrique. Que remarquez vous quant à sa continuité ?

2 Représentations paramétriques – généralités

2.1 Définitions

Dans la suite, nous appellerons **courbe paramétrique** la représentation géométrique d'une fonction, définie sur un intervalle réel I, dont les valeurs appartiennent à un espace affine de dimension 2 ou 3.
Une **surface paramétrique** sera définie de manière similaire mais sur un intervalle de $\mathbb{R}^2$.

Les courbes et les surfaces peuvent être aussi définies de manière implicite comme étant les courbes/surfaces de niveaux d'une fonction potentiel de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 Differentes représentations

Il existe différentes façons de définir une courbe. La plus commune consiste à définir une courbe soit implicitement ou explicitement.

Autre exemple introductif : la droite.

Prenons l'exemple d'une droite, et pensons aux différentes façons de la définir. Une droite est définie avec deux points A et B. Une façon de définir la droite (AB) est :

$$(AB) = \{M|\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}\} = \{M|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0\}$$

où $\overrightarrow{n} = (-(y_B - y_A), x_B - x_A)$ est un vecteur normal à la droite. Ce qui s'appelle une équation **implicite** de la droite : un point appartient à la droite si ses coordonnées vérifient l'équation. Une autre façon de définir la droite est de considérer une équation paramétrique. La droite (AB) est définie par :

$$(AB) = \{M|M = A + t\overrightarrow{AB}\}$$

A chaque paramètre t dans $\mathbb{R}$ correspond un point de la droite ; c'est une représentation **paramétrique** de la droite (AB).

Les représentations implicite et paramétrique sont différentes et conviennent pour différentes opérations : par exemple, la représentation paramétrique est bien adaptée pour définir des points sur une surface. Ce n'est pas le cas pour la représentation implicite : trouver un point sur la courbe/surface n'est pas facile, mais étant donné un point, verifier si ce point appartient à la courbe/surface est très facile. Ainsi, les modèles implicites sont pour la détection de collision. Dans un monde idéal, on aimerait avoir les deux représentations du même objet, mais ce n'est pas facile de passer de la représentation implicite à la paramétrique et réciproquement.

Il faut savoir qu'actuellement, 90 % des modèles CAO utilisent les courbes paramétriques et elles sont utilisées dans 50 à 60 % des jeux vidéo. Dans la suite, nous nous intéresserons principalement à la représentation paramétrique. Commençons par les courbes.

3 Courbes paramétriques

On utilise le terme de **courbe** pour une fonction paramétrisant une courbe, ce qui est incorrect car une courbe peut être paramétrisée pas différentes fonctions. Par exemple :

$$(AB) = \{M|M = A + t\vec{AB}\} = \{M|M = A + t^3\vec{AB}\} = \{M|M = A + tsin(t)\vec{AB}\}$$

décrivent la même droite. Par contre, la paramétrisation changement la façon de décrire cette droite.

Dans la suite, on appellera **courbe paramétrique** la fonction paramétrique correspondant à la courbe même si c'est abusif. La courbe est interprétée comme une trace d'un parcours.

Définition : Les **courbes paramétriques** sont définies par une fonction réelle à valeur dans un espace affine $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

telle que $f(t)$ est un point. Si on choisit un repère, avec un point (l'origine) et des vecteurs, alors on peut expimer ces points par ses coordonnées cartésiennes. Parler de repères orthonormaux suppose que l'espace vectoriel a un produit scalaire. C'est le cas, en particulier, pour le plan euclidien. Alors, chaque coordonnée est une fonction de paramètre t et un point 2D s'écrit :

$f(t) = (x(t), y(t))$.

On a observé qu'une courbe peut avoir différentes paramétrisation. Si on image que la paramétrisation est une trajectoire, comme le chemin d'une mouche par exemple alors représenter la même courbe signifie que la trajectoire est la même mais la vitesse (dérivée première) à laquelle l'insecte vole peut être différente et dans ce cas, la paramétrisation est différente.

La paramétrisation est-elle importante ? Oui, une propriété à satisfaire est d'avoir une paramétrisation régulière.

Définition :
Une paramétrisation F d'une courbe est dite **régulière** si, pour tout t, $F(t) \neq 0$.

$\Rightarrow$ La paramétrisation non régulière c'est mal ! ! :)

Exercice
Regardons l'exemple suivant. Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \text{plan affine} \\ t & \mapsto & (t^2, -t^4) \text{ si } t \leq 0 \\ & & (t^2, t^2) \text{ sinon} \end{array}$$

Dessiner la courbe correspondante et montrer que cette fonction est C^1 partout mais la paramétrisation est non régulière.

Ce que nous remarquons c'est que la paramétrisation peut être C^1 partout mais la courbe peut ne pas avoir une tangente continue. En d'autres termes, la continuité de la fonction n'assure pas la continuité de la courbe. La représentation paramétrique n'assure pas la propriété géométrique. Parce que la représentation paramétrique n'est pas régulière. Avec une paramétrisation non régulière, on ne peut pas avoir le problème inverse c'est-à-dire une courbe lisse et une paramétrisation non C^1.

Exercice : Trouver un exemple de courbe avec une tangente continue mais qui n'a pas une paramétrisation C^1.

Avoir une paramétrisation régulière assire que la continuité de la fonction corresponde à la continuité de la courbe. Ainsi, il est possible d'étudier la continuité de la courbe en regardant la continuité de la paramétrisation.

Plus généralement, les propriétés d'une courbe indépendante de la paramétrisation sont appelées **propriétés géométriques**. La **continuité géométrique de la tangente à une courbe** est appelée G^1. Etre G^1 est équivalent à avoir un paramétrisation uniforme c'est-à-dire C^1.

3.1 Paramétrisation longueur d'arc et tangente

C'est la paramétrisation idéale : la paramétrisation uniforme. Elle correspond à une vitesse constante (ou dérivée première constante), plus précisément, un vitesse vecteur égal à 1. Cette paramétrisation est appelée **parametrisation en abscisse curviligne**.

Cette paramétrisation est un bon outil théorique s'il permet d'exprimer facilement ces quantités. En pratique, la paramétrisation longueur d'arc est difficile à obtenir.

La **tangente d'une courbe** est donnée par la dérivée $f'(t)$. La dérivée $f'(t)$ est la limite de $\frac{f(t+\epsilon)-f(t)}{\epsilon}$ quand ϵ tends vers 0. Une différence de point est un vecteur, donc la tangente est un vecteur.

Définition : La **longueur d'une courbe** entre deux points $f(t_0)$ et $f(t)$ sur la courbe est donnée par :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \, \mathrm{d}u.$$

Si la paramétrisation est régulière, $\|f'(u)\| = ds/dt$ est non nulle donc on peut faire un changement de variables entre t et s. Si on paramétrise la courbe par s à la place de t (changement de variable), on peut paramétriser la longueur d'arc, noté $f(s)$. Le vecteur $\frac{df}{ds}$ est le vecteur tangent unitaire (car $d(s^{-1})/du(= dt/ds) = 1/\|f'(u)\|$).

3.2 Plan osculateur et courbure

Nous considérons maintenant la dérivée seconde de la courbe, notée $f''(t)$. Elle mesure la variation de la courbe par rapport à la direction tangentielle.

Considérons $f(s)$, la paramétrisation longueur d'arc. Comme $\|df/ds\| = (df/ds).(df/ds) = 1$, alors $(df/ds).(d^2f/ds^2) = 0$ (par dérivation).

Définition : on appelle **courbure** $\kappa(t) = \|d^2f/ds^2\|$. Avec une paramétrisation arbitraire,

$$\kappa(t) = \frac{\|f'(t) \times f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}.$$

Le **rayon de la courbure** est donnée par $R = \frac{1}{\kappa}$.
La dérivée première et seconde définissent un plan, appelé **plan osculateur**. Ce plan approche le mieux la courbe.

3.3 Torsion

Définition : la variation de la courbe sur le plan osculateur est mesurée par la **torsion** :

$$\tau(t) = \frac{det(f(t), f'(t), f''(t)))}{\|f'(t) \times f''(t)\|}.$$

De termes de paramètre s, la torsion peut exprimée plus facilement par :

$$\tau(s) = \frac{det(f(s), df/ds(s), d^2f/ds^2)}{\kappa(s)^2}.$$

La courbure κ et la torsion τ sont indépendants de la paramétrisation.

On veut être capable de décrire des courbes lisses intuitivement. La première façon est de donner quelques points et définir une courbe passant par ces points c'est-à-dire interpoler les points. La deuxième façon est de donner une idée de la forme de la courbe en donnant un polygone de controle c'est-à-dire une courbe linéaire par morceaux décrivant la forme que l'on souhaite générer. On parle alors respectivement d'interpolation et d'approximation.