Théorie des graphes

Chapitre 2 : Connexité

23 novembre 2020

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Définition 2.1.1 – Chaîne

Une **chaîne** de longueur $q \in \mathbb{N}$, $(e_1, \ldots, e_q)$, est une séquence de q arêtes successivement adjacentes. Il existe donc une suite de sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ telle que v_i soit extrémité de e_{i-1} et e_i.

Définition 2.1.2 – Vocabulaire

- On dit que la chaîne joint les sommets v_1 et v_{q+1}.
- Une chaîne est dite **élémentaire** si les sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ sont distincts 2 à 2.
- Une chaîne est **fermée** si $v_1 = v_{q+1}$.
- Une chaîne est **simple** si les arêtes $(e_1, \ldots, e_q)$ sont distinctes 2 à 2,
- q est la **longueur** de la chaîne.

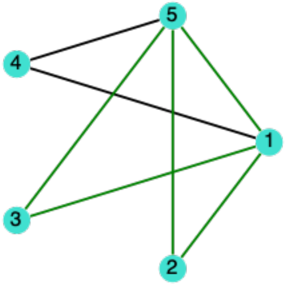
Définition 2.1.3 – Cycle

- Un **cycle** est une chaîne simple fermée.
- Un cycle est **élémentaire** si les sommets parcourus sont distincts 2 à 2 sauf le premier et le dernier.
- La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus petite chaîne entre eux.
- Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximal entre deux sommets du graphe. Elle vaut $+\infty$ si il existe des sommets non connectés (la définition de la connexité arrive après).

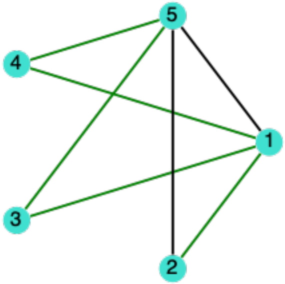
Exemple 2.1.1.

Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- $(1, 5, 2, 1, 3, 5, 1)$
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.



Exemple 2.1.1.



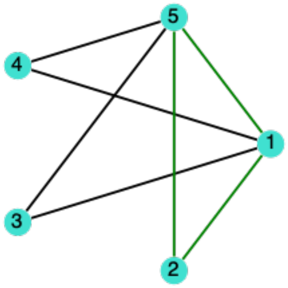
Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ; $(2, 1, 3, 5, 4, 1)$
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.

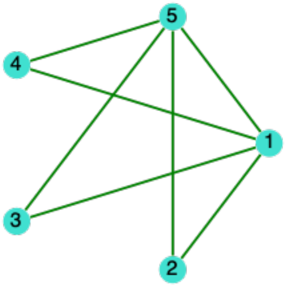
Exemple 2.1.1.

Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ; $(1, 2, 5, 1)$
- un cycle non élémentaire.



Exemple 2.1.1.



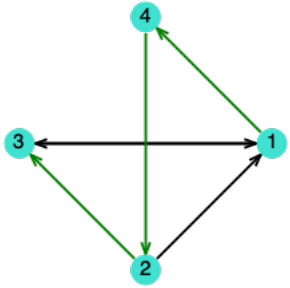
Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.
  $(1, 2, 5, 1, 3, 5, 4, 1)$

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

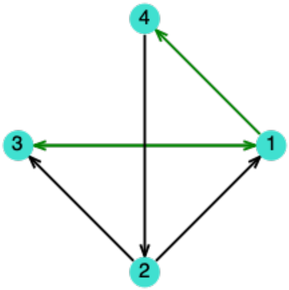
- une chemin (non fermé) élémentaire ; $(1, 4, 2, 3)$
- une chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.



On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

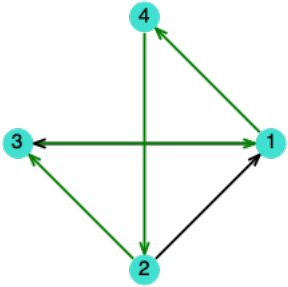
- une chemin (non fermé) élémentaire ;
- une chemin (non fermé) non élémentaire ; $(1, 3, 1, 4)$
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.



On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- une chemin (non fermé) élémentaire ;
- une chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ; $(1, 4, 2, 3, 1)$
- un circuit non élémentaire.

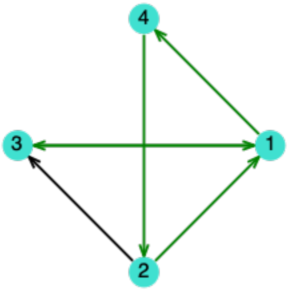


On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.
Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- une chemin (non fermé) élémentaire ;

- une chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.
  $(1, 3, 1, 4, 2, 1)$



Définition 2.2.1 – Graphe connexe, fortement connnexe

- Un graphe non orienté est **connexe**, si entre tout couple de sommet, il existe une chaîne les joignant.
- Un graphe orienté est **fortement connexe** si toute paire de sommets distincts (i, j) est reliée par au moins un chemin.

Définition 2.2.2 – Relation binaire

On appelle relation binaire sur un ensemble E, la donnée d'un sous-ensemble Γ de $E \times E$. On notera $x \; R \; y$, et on dira que l'élément x de E est en relation avec l'élément y de E, lorsque le couple (x, y) appartiendra à Γ.

Définition 2.2.3 – Relation d'équivalence

Soit R une relation binaire sur E. R est une relation d'équivalence sur E si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées.

1) Pour tout $x \in E$, $x \; R \; x$ (réfexivité) ;
2) pour tout $(x, y) \in E^2, x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$ (symétrie) ;
3) Pour tout $(x, y, z) \in E^3, (x \; R \; y \text{ et } y \; R \; z) \Rightarrow x \; R \; z$ (transitivité).

Définition 2.2.4 – Classe d'équivalence

Soir R une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble noté $[x]$ de tous les éléments de E qui sont en relation avec x :

$$[x] = \{y \in E, xRy\}.$$

Proposition 2.2.5

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales.

- Démontrer la proposition

Proposition 2.2.6

Soit R une relation d'équivalent sur un ensemble E, l'ensemble des classes d'équivalence est une partition de E.

Proposition 2.2.7

Soit G un graphe non orienté (respectivement orienté), la relation R définie sur l'ensemble des sommets par $v_i R v_j$ si et seulement si il existe une chaîne joignant v_i à v_j (respectivement un chemin allant de v_i à v_j et un chemin allant de v_j à v_i) est une relation d'équivalence.

- Démontrer la proposition. ■

Définition 2.2.8 – Composantes connexes, composantes fortement connexe

oit G un graphe non orienté (respectivement orienté). Les graphes partiels engendrés par les classes d'équivalences de la relation définie à la remarque ci-dessus s'appellent les composantes connexes (respectivement composantes fortement connexes) du graphe G.

Exercice 2.2.1.

- Dessiner un graphe à 3 composantes connexes.

- $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\})$ est-il connexe ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté

Définition 2.2.9 – Successeurs, prédécesseurs

On appelle successeurs et prédécesseurs d'une partie $S \subset V$ les ensembles :

$$\begin{aligned} Succ(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v, v') \in E\} \\ Pred(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v', v) \in E\}. \end{aligned}$$

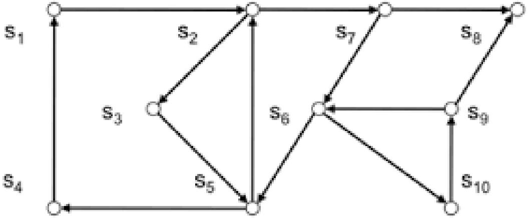
On définit aussi leur fermeture réflexive et transitive par :

$$\begin{aligned} Succ^*(S \subseteq V) &= S \cup Succ^*(Succ(S))) \\ Pred^*(S \subseteq V) &= S \cup Pred^*(Pred(S))). \end{aligned}$$

Algorithme

$CFC_G \leftarrow \emptyset$
tant que Il existe un sommet non dans la réunion des sous-ensembles de CFC_G **faire**
  Choisir $v \in V$ n'apparaissant pas la réunion des sous-ensembles de CFC_G
  $CFC_v \leftarrow Succ^*(\{v\}) \cap Pred^*(\{v\})$
  $CFC_G \leftarrow CFC_G \cup \{CFC_v\}$
fin tant que

Exercice 2.2.2. Appliquer l'algorithme de Demoucron au graphe suivant :



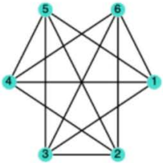
CFC(s1) = {s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s9, s10 }
CFC(s8) = {s8}
CFC(G) = CFC(s1) \/ CFC (s8)

Exercice 2.2.3. Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que j espionne i et i espionne j.

▷ **Solution**

On suppose que les espions 1 et 2, comme les espions 3 et 4 et les espions 5 et 6, sont du même pays.



- Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?

▷ **Solution**

Le graphe n'est pas complet car l'arête $\{1, 2\}$ n'existe pas. C'est un graphe connexe.

- Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

▷ **Solution**

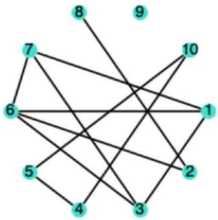
Le degré de chaque sommet est de 4. Le nombre d'arêtes est donc de $(4 \times 6)/2 = 12$.

Exercice 2.2.4. Etant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui sont amis.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.

▷ **Solution**



- Ce graphe est-il complet ? connexe ?

▷ **Solution**

Ce graphe n'est pas complet, ni connexe car le nœud 9 est isolé.

- Si l'adage "les amis de mes amis sont mes amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

▷ **Solution**

Chaque composante connexe est une clique.

Proposition 2.2.10

Soit G un graphe connexe alors il possède au moins $n-1$ arêtes.

- La proposition est trivial pour $n=1$ et $n=2$.

Supposons la vraie pour n et montrons là pour $n+1$. Soit donc $G=(V,E)$ un graphe d'ordre $n+1$, $V=\{v_0,\ldots,v_n\}$, et considérons le graphe $G'=(V',E')$ induit par $V'=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Posons $G'_1,\ldots,G'_k$ les composantes connexes de G' d'ordre respectivement $n_1,\ldots,n_k$. On a $n_1+\cdots n_k=n$ (on a enlevé v_0). Par hypothèse de récurrence G'_i possède au moins n_i-1 arêtes. De plus G est connexe, donc v_0 est connecté à toutes les composantes connexes G'_i. Par suite le graphe de départ G possède au moins $(n_1-1)+\cdots+(n_k-1)+k=n$ arêtes. ■

Proposition 2.2.11

Un graphe sans cycle contient au plus $(n-1)$ arêtes.

- Démontrer la proposition par récurrence

Solution

La proposition est vraie pour $n=1$ et $n=2$.
Supposons la vraie pour n et montrons là pour $n+1$. Soit donc $G=(V,E)$ une graphe sans cycle d'ordre $n+1$ et $e=\{v_0,v_1\}$ une arête (s'il n'en existe pas alors la propriété est vraie). On pose $G'=(V,F)$ le graphe partiel où $F=E\backslash\{e\}$. G' n'est pas connexs car sinon il existerait dans G' un chemin de v_1 à v_0, et donc un cycle dans G. G' possède donc au moins 2 composantes connexes non nulles $G'_1,\dots G'_k$, avec $G'_K=(V_k,F_k)$.
Comme $\#V_k\leq n$, on a $\#F_k\leq n_1-1$ Par suite
$\#E=\#F+1=\sum_{i=1}^{k}\#F_k+1=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)+1=n-k+1\leq n-1.$

Définition 2.2.12

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle ;
- une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

Proposition 2.2.13

Soit G un graphe connexe, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $G = (V, E)$ est un arbre (ie G n'a pas de cycle) ;
2) G est sans cycle et a $n - 1$ arêtes ;
3) G est sans cycle et a un cycle dès qu'on ajoute une arête ;
4) G est connexe et non connexe dès qu'on enlève une arête ;
5) tout couple de sommet est relié par une chaîne unique.

Exercice 2.2.5. Démontrer la proposition ci-dessus.

Solution

- (1) $\Rightarrow$ (2)
  Il suffit d'appliquer les propositions 18 et 19
- (2) $\Rightarrow$ (3)
  Si G est sans cycle et possède exactement $n-1$ arêtes, alors en ajoutant une arête, il possèdera un cycle (contraposée de la proposition 19).
- (3) $\Rightarrow$ (4)
  Soit G un graphe sans cycle et qui possède un cycle dès que l'on ajoute une arête. Montrons qu'il est connexe et qu'il n'est plus connexe dès qu'on lui enlève une arête. Soit v_i et v_j deux sommets différents. Si l'arête $\{v_i, v_j\}$ existe, alors il existe une chaîne de v_i à v_j. Si l'arête n'existe pas, en l'ajoutant on crée un cycle. Par suite il existe dans G une chaîne qui va de v_i à v_j. D'où la connexité de G. Maintenant G est sans cycle, donc G possède au plus $n-1$ arête. Mais G est connexe, donc G possède au moins $n-1$ arêtes. Ceci implique que G possède exactement $n-1$ arêtes. Maintenant, si on enlève une arête à G, il ne reste plus que $n-2$ arêtes et le graphe ne peut être connexe.

Solution

- $(4) \Rightarrow (5)$
  S'il existe un couple de sommet qui peut être connecté par 2 chaînes, alors en concaténant ces deux chaînes, on obtient un cycle et si on enlève une arête de ce cycle le graphe reste connexe.
- $(5) \Rightarrow (1)$
  Par hypothèse G est connexe. Si G possédait un cycle alors il existe 2 chaîne simples qui connectent 2 sommets de ce cycle.

Définition 2.2.14 – Arbre couvrant

Un graphe partiel connexe qui est un arbre est appelé **graphe couvrant** ou **arbre couvrant** (*spanning tree* en anglais).

Algorithme

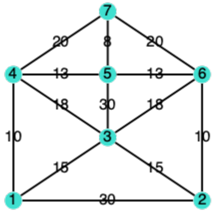
Trier les arêtes par ordre croissant de poids
On choisit les arêtes dans cet ordre, et on garde la suivante tant qu'elle ne crée pas de cycle.

Remarque 2.2.1. C'est un algorithme glouton optimal [a].

a. Un algorithme glouton est un algorithme dont le principe est de faire étape par étape un choix optimal.

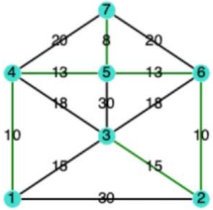
Exercice 2.2.6.

Trouver un arbre couvrant minimum dans ce graphe pondéré.



Solution

Les poids croissants sont :
$8, 10, 10, 13, 13, 15$ et les arêtes correspondantes définissent ici l'arbre couvrant.



Définition 2.3.1 – espace des arcs

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. on représente chaque arc e_i par le vecteur de la base canonique dans $\mathbb{R}^m$. L'espace des arcs est alors $\mathbb{R}^m$.

Soit maintenant c un cycle du graphe non orienté induit par le graphe orienté $G = (V, E)$ et fixons un sens de parcours de ce cycle. Nous pouvons alors comparer les orientations des arêtes de ce cycle à celles des arcs du graphe orienté de départ. On a alors la

Définition 2.3.2 – vecteur associé à un cycle

Soit c un cycle dans un graphe induit d'un graphe orienté. On associe à ce cycle le vecteur de l'espace des arcs $\mu_c = (c_1, \ldots, c_m)$

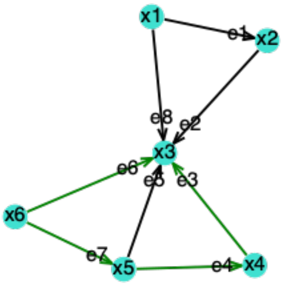
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté comme dans } G \\ -1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté dans le sens opposé à celui de } G \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. On considérera μ_c comme une application de E dans $\mathbb{R}$: $\mu_c(e_i) = c_i$.

Définition 2.3.3 – Espace des cycles

On appelle espace des cycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cycles. On notera $\mathcal{C}$ cet espace.

Exemple 2.3.1. Dans le graphe orienté suivant le cycle $c = (x_6, x_3, x_4, x_5, x_6)$ a pour vecteur associé $\mu_c = (0, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0)$



Définition 2.3.4 – Cocycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et (V_1, V_2) une partition des sommets, l'ensemble des arcs entre V_1 et V_2 est appelé un cocycle. On associe à un cocycle c^0 un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par $\mu_{c^0} = (c_1^0, \ldots, c_m^0) = (\mu_{c^0}(e_1), \ldots, \mu_{c^0}(e_m))$ défini par

$$c_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_1 \text{ vers } V_2 \\ -1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_2 \text{ vers } V_1 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

Définition 2.3.5 – Espace des cocycles

On appelle espace des cocycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cocycles. On notera $\mathcal{C}^0$ cet espace.

Définition 2.3.6 – Cycle fondamental

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe et A un arbre couvrant du graphe non orienté induit. Cet arbre contient $n - 1$ arêtes. Notons $C = \{e_i \in E, e_i \notin A\}$. Si $C = \emptyset$ alors G est un arbre, sinon, pour chaque arête e dans C ajouté à l'arbre A on crée exactement un cycle élémentaire noté c_e, Ce cycle est un cycle fondamental.

Remarque 2.3.2. On associe à un arbre couvrant $m - (n - 1)$ cycles fondamentaux.

Remarque 2.3.3. On définit de même les cocycles fondamentaux. Si à un arbre couvrant on retire une arête, on crée une partition de l'ensemble des sommets et donc on associe un cocycle dit fondamental. Associé à un arbre on peut associé $(n - 1)$ cocycles fondamentaux.

Théorème 2.3.7

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté connexe sans boucle et A un arbre couvrant du graphe non orienté induit. On a alors :

1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base de l'espace des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace : $\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - (n-1)$.
2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base de l'espace des cocycles, $\dim \mathcal{C}^0 = n - 1$.
3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

- ▪ Montrons que les cycles fondamentaux associé à un arbre sont linéairement indépendants.
  On fixe, quitte à réordonner les arcs, $R = \{e_n, \ldots, e_m\}$ l'ensemble des arêtes du graphe qui ne sont pas présentes dans l'arbre A. Soient $(c_i)_{i=n,\ldots,m}$ les cycles fondamentaux associés à A. Soit $\mu = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i \mu_{c_i} = 0$. Alors, pour tout $j \in \{n, \ldots, m\}, \mu(e_j) = \pm\lambda_j = 0$, car e_j n'apparait que dans le cycle fondamental c_j. On en déduit que les vecteurs μ_{c_i} sont linéairement indépendants. Par suite $\dim \mathcal{C} \geq m - (n-1)$

- De la même manière on montre que les $(n-1)$ vecteurs $\mu_{c_j^0}$ associés aux cocycles fondamentaux sont aussi linéairement indépendants et donc que $\dim \mathcal{C}^0 \geq (n-1)$.
- Montrons maintenant que les sous espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^0$ sont orthogonaux.
  Soient c un cycle et c^0 un cocycle défini par la partition (V_1, V_2) et considérons les 2 vecteurs associés
  $$\mu_c = (\mu_c(e_1) \ldots, \mu_c(e_m)),$$
  $$\mu_{c^0} = (\mu_{c^0}(e_1) \ldots, \mu_{c^0}(e_m)),$$
  alors $< \mu_c, \mu_{c^0} >= \sum_{i=1}^m \mu_c(e_i)\mu_{c^0}(e_i)$. Si $\mu_c(e_i)\mu_{c^0}(e_i) \neq 0$, alors l'arête e_i est dans c et dans c^0 et ce nombre vaut 1 ou -1 suivant que l'arête va de V_1 vers V_2 ou de V_2 vers V_1. On peut en effet considérer une orientation du cycle c tel que pour toutes les arêtes e communes avec le cocycle c^0 on ait $\mu_c(e) = 1$. Mais le nombre d'arcs dans $c \cap c^0$ est pair car chaque fois que l'on va de V_1 vers V_2 il faut un arc qui passe de V_2 à V_1 car c est un cycle. Par suite $< \mu_c, \mu_{c^0} >$ est simplement le nombre d'arcs dans c passant de V_1 à V_2 moins le nombre d'arcs passant de V_2 à V_1, ce qui est égal à 0.
- Montrons enfin 1) et 2).
  Les deux sous espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^0$ sont donc supplémentaires, par suite $m \geq \dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^0 \geq m-(n-1)+(n-1) = m$. On en déduit alors que $\dim \mathcal{C} = m-(n-1)$ et que $\dim \mathcal{C}^0 = n-1$ et donc les assertions 1) et 2).

Corollaire 2.3.8

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans boucle ayant k composantes connexes, alors
$$\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - n + k \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{C}^0 = n - k.$$

On peut développé une théorie analogue pour les graphes non orientés : in suffit de supprimer les signes. Mais comme les coefficients -1 et 1 ne se compensent plus, on remplace de corps $\mathbb{R}$ par le corps à 2 éléments : $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On définit alors

- Ssur l'ensemble $\{0, 1\}$ l'addition modulo 2

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

- L'espace vectoriel des arêtes $\prod_{i=1}^{m}\{0, 1\}$ muni des opérations

  somme modulo 2

  multiplication par un scalaire dans le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- le vecteur associé à un cycle c par

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$

- le vecteur associé à un cocycle c^0 par

$$c_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

Théorème 2.3.9

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans boucle et A un arbre couvrant. On a alors :

1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base du $\mathbb{F}_2$ espace vectoriel des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace : $\nu(G) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C} = m - (n-1)$.
2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre A est une base du $\mathbb{F}_2$ espace vectoriel des cocycles, $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^0 = n - 1$.
3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

Exercice 2.3.2. Application de l'algorithme de Kruskal (suite).
Trouver une base de cycles dans le graphe de l'exercice 2.2.6.