Calcul Scientifique

Recherche de couples propres

2019–2020

Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

Définition

$\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A : $\exists x\mathbb{C}^n,\ x \neq 0,\ A \cdot x = \lambda x$
x est appelé vecteur propre associé à λ.

Pourquoi chercher des valeurs propres (et des vecteurs propres) ?

- Résultats ayant une signification physique : mode de vibration d'une structure, traitement du signal, ...
- Eléments de réponse pour vérifier une propriété numérique : conditionnement d'une matrice, convergence de méthodes itératives, ...

Plusieurs types de problèmes

Pourquoi chercher des valeurs propres (et des vecteurs propres) ?

- Rechercher toutes les valeurs propres
  Exemple : les valeurs propres ont une signification physique
- Vérifier que les valeurs propres obéissent à une certaine propriété (le calcul exact n'est pas requis)
  Exemple : toutes les valeurs propres en module sont inférieures à 1
- Calculer la (les) plus grande(s) des valeurs propres en module et/ou la (les) plus petite(s), ainsi qu'une vecteur propre associé
  Exemple : calcul du nombre de conditionnement, algorithmes de classement de pages Web.

Plan

1. Localisation des valeurs propres
2. Algorithme de la puissance itérée / Cas d'une matrice symétrique $\Longrightarrow$ les valeurs propres sont obtenues successivement dans l'ordre décroissant de la valeur de leur module.
3. Algorithme de Jacobi / Cas d'une matrice symétrique $\Longrightarrow$ toutes les valeurs propres sont obtenues simultanément.

Localisation des valeurs propres

Théorème d'Hadamard-Gerchgörin

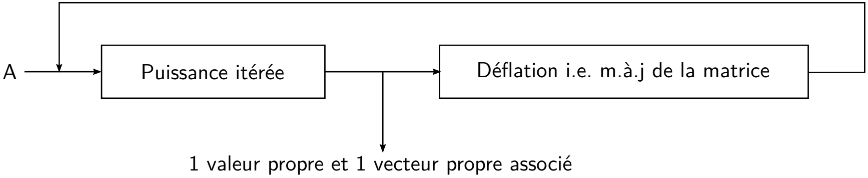
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres de A ont des images dans le plan complexe qui appartiennent à $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ avec : $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$

Remarque : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si toutes les valeurs propres sont réelles, alors D_i et $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$

Corollaire au théorème d'Hadamard-Gerchgörin

$$\rho(A) \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \rho(A) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Algorithme de la puissance itérée



Principe

Hypothèse : toutes les valeurs propres sont réelles, non nulles et distinctes en module. Soient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ les valeurs propres de A

- 1ère application de l'algorithme $\Longrightarrow$ λ_1 et un vecteur propre associé
- Opération de déflation : modification de la matrice
- 2ème application de l'algorithme $\Longrightarrow$ λ_2 et un vecteur propre associé
- En n passages, toutes les valeurs propres et une base de vecteurs propres associés

Autres conditions d'application

- Si une valeur propre est complexe, l'algorithme échoue
- Si un sous-espace propre est de dimension supérieure à 1, obtention plusieurs fois de la même valeur propre, les vecteurs propres forment une base du sous-espace propre
- Procédé itératif convergent (suite de vecteurs) avec mise en œuvre d'un test d'arrêt et convergence pas toujours assurée quelque soit le vecteur de départ

Algorithme

Algorithm 1 Méthode de la puissance itérée (Power method)

Input : Matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Output : (λ_1, v_1) couple propre associé à la plus grande (en module) valeur propre.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $p = 0$

$\beta_p = {x_p}^T \cdot A \cdot x_p$

repeat

$\quad y_{p+1} = A \cdot x_p$

$\quad x_{p+1} = y_{p+1} / \|y_{p+1}\|$

$\quad \beta_{p+1} = {x_{p+1}}^T \cdot A \cdot x_{p+1}$

$\quad p = p + 1$

until $|\beta_{p+1} - \beta_p| \,/\, |\beta_p| < \varepsilon$

$\lambda_1 = \beta_{p+1}$ et $v_1 = x_{p+1}$

Convergence de la suite : $X_{p+1} = A \cdot X_p / \|A \cdot X_p\|$

Elements de preuve

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{\|A \cdot X_0\|} A \cdot \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i V_i \right) ;\ \alpha_1 = \dfrac{1}{\|A \cdot X_0\|};\ X_1 = \alpha_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i V_i \\ X_p = \alpha_p \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^p V_i;\ X_p = \alpha_p \lambda_1^p \left(c_1 V_1 + c_2 \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p V_2 + \ldots + c_n \left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p V_n \right) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{p \to +\infty} \|X_{2p}\| = \lim_{p \to +\infty} \alpha_{2p} \lambda_1^{2p} \|c_1 V_1\| = 1 \\ \lim_{p \to +\infty} \alpha_{2p} \lambda_1^{2p} = \frac{1}{\|c_1 V_1\|} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \lim_{p \to +\infty} X_{2p} = \frac{c_1 V_1}{\|c_1 V_1\|} = W_1$$

où W_1 est un vecteur propre normé associé à λ_1

Méthode applicable si $c_1 \neq 0$ (faible taux d'échec avec choix arbitraire de X_0)

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{p \to +\infty} X_{2p+1} & = W_1 \text{ ou } - W_1 \text{ suivant le signe de } \lambda_1 \\ \displaystyle\lim_{p \to +\infty} \beta_p & = {W_1}^T . A . W_1 = \lambda_1 \end{cases}$$

Opération de déflation (Cas d'une matrice symétrique)

Principes

Soit $B = A - \lambda_1 W_1 \cdot {W_1}^T$

- Rang de $B = n - 1 \qquad (B \cdot W_1 = 0)$
- B est symétrique
- B possède les mêmes valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que A et les mêmes vecteurs propres associés

L'application de l'algorithme de la puissance itérée à B produit λ_2 et W_2

$$C = B - \lambda_2 W_2 \cdot {W_2}^T \longrightarrow \lambda_3, W_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \lambda_n, W_n$$

Exercice

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre de A et u vecteur propre associé. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ non valeur propre de A. Montrer que $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}$ est valeur propre de $(A - \alpha I)^{-1}$ et que, pour cette matrice, u est vecteur propre associé à μ.

2. Soit A symétrique et inversible. Soient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ les valeurs propres de A. On note $\| \cdot \|$ la norme vectorielle euclidienne.

   Quelles valeurs l'algorithme suivant permet-il d'obtenir ?

   i $= 0$, $x_i = \ldots$

   Boucler

   > Résolution du système $A \cdot y_{i+1} = x_i$
   > $x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|}$
   > $\beta_{i+1} = {x_{i+1}}^T \cdot A \cdot x_{i+1}$
   > $i = i + 1$

   Jusqu'à convergence

Exercice

3. Quelles valeurs l'algorithme suivant permet-il d'obtenir ?

   i = 0, $x_i = \dots$

   Boucler

   > Résolution du système $(A - \alpha I) \cdot y_{i+1} = x_i$
   > $x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|}$
   > $\beta_{i+1} = {x_{i+1}}^T \cdot A \cdot x_{i+1}$
   > $i = i + 1$

   Jusqu'à convergence

Principes

Procédé itératif : $\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = \Theta_k^{-1} \cdot A_k \cdot \Theta_k \end{cases}$

...jusqu'à la convergence : $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Choix de Θ_k ? Une matrice orthogonale ($\Theta_k^{-1} = {\Theta_k}^T$) car pour tout k :

- A_k est symétrique
- A_k possède les mêmes valeurs propres que A (vecteurs propres différents)

Pour obtenir les valeurs propres de A, il suffit donc que A_k converge vers une matrice diagonale.

Soient $A_k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]$ et $S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^{(k)}\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \left(a_{ii}^{(k)}\right)^2 \geqslant 0$

$\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = D \iff \lim\limits_{k \to +\infty} S_k = 0$

Algorithme de Jacobi pour une matrice symétrique

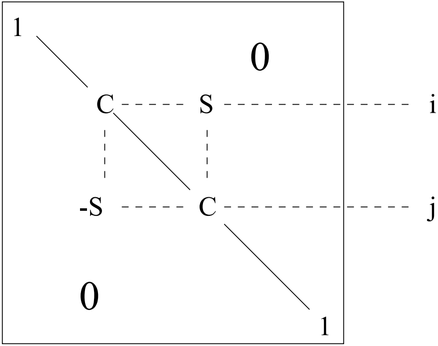
Rotation de Givens

Θ_k choisie comme une matrice de rotation, i.e. définie à partir de 3 paramètres :

$$[i, j, \alpha] = [\text{numéro de ligne, numéro de colonne, angle de la rotation}]$$

Soient $C = \cos(\alpha)$ et $S = \sin(\alpha)$

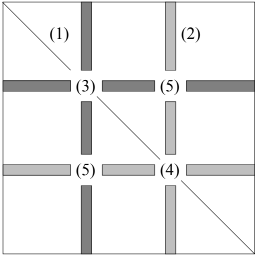
$\Theta_k =$



Algorithme de Jacobi pour une matrice symétrique

Impact d'une itération

$A_{k+1} = {\Theta_k}^{-1} \cdot A_k \cdot \Theta_k$; quels sont les modifications entre k et $k+1$?



$$(1) \qquad a_{ip}^{(k+1)} = a_{pi}^{(k+1)} = C \cdot a_{ip}^{(k)} - S \cdot a_{jp}^{(k)} \quad \forall p = 1, \ldots, n \qquad p \neq i, j$$

$$(2) \qquad a_{jp}^{(k+1)} = a_{pj}^{(k+1)} = S \cdot a_{ip}^{(k)} + C \cdot a_{jp}^{(k)} \; \forall p = 1, \ldots, n \qquad p \neq i, j$$

$$(3) \qquad a_{ii}^{(k+1)} = C^2 \cdot a_{ii}^{(k)} - 2 \cdot C \cdot S \cdot a_{ij}^{(k)} + S^2 \cdot a_{jj}^{(k)}$$

$$(4) \qquad a_{jj}^{(k+1)} = S^2 \cdot a_{ii}^{(k)} + 2 \cdot C \cdot S \cdot a_{ij}^{(k)} + C^2 \cdot a_{jj}^{(k)}$$

$$(5) \qquad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} = \left(C^2 - S^2\right) \cdot a_{ij}^{(k)} + C \cdot S \cdot \left(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}\right)$$

Algorithme de Jacobi pour une matrice symétrique

Choix des paramètres de la rotation

Des transformations précédentes :

$$S_{k+1} - S_k = 2\left(a_{ij}^{(k+1)}\right)^2 - 2\left(a_{ij}^{(k)}\right)^2$$

Pour la convergence, les paramètres sont fixés t.q. $S_{k+1} - S_k$ soit le plus négatif possible :

- On maximise $a_{ij}^{(k)} \implies$ valeur de i et j

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \max_{l,m=1,\dots,n,l\neq m} \left|a_{lm}^{(k)}\right|$$

- On annule $a_{ij}^{(k+1)} \implies$ valeur de α

$$a_{ij}^{(k+1)} = \left(C^2 - S^2\right) \cdot a_{ij}^{(k)} + C \cdot S \cdot \left(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}\right) = 0$$

  - Si $a_{jj}^{(k)} = a_{ii}^{(k)}$ $\qquad \alpha = signe(a_{ij}^{(k)})\frac{\pi}{4}$
  - Si $a_{jj}^{(k)} \neq a_{ii}^{(k)}$ $\qquad tg(2\alpha) = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}}$ avec $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$