TD 4 – CN et CNS, cas avec contraintes

▷ **Exercice 1.** Soient g un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et c et δ deux constantes strictement positives. On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(s) = g^\top s + c\\ ||s||^2 \leq \delta.\end{array}\right.$$

1.1. Représenter l'ensemble des contraintes et donner graphiquement la solution.

1.2. Résoudre le problème (P).

▷ **Exercice 2.** Soit $g \neq 0$ et H une matrice symétrique. On considère le problème

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min q(s) = \frac{1}{2}s^\top Hs + g^\top s + c\\ s = -\alpha g, \quad \alpha \geq 0\\ ||s||^2 \leq \delta.\end{array}\right.$$

2.1. Écrire $f(\alpha) = q(s)$ et le problème d'optimisation que doit vérifier α^* pour que $s^* = -\alpha^* g$ soit solution du problème (P).

2.2. Résoudre (P). On considèrera les deux cas $g^\top Hg \leq 0$ et $g^\top Hg > 0$.

▷ **Exercice 3.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème

Théorème 1. *s^* est solution du problème*

$$(P^{rc})\left\{\begin{array}{l}\min q(s) = f + g^\top s + \frac{1}{2}s^\top Hs\\ ||s||^2 \leq \delta,\end{array}\right.$$

si et seulement si $||s^*||^2 \leq \delta$ et il existe $\mu^* \geq 0$ tel que

1. *$(H + 2\mu^* I)s^* = -g$;*
2. *$\mu^*(||s^*||^2 - \delta) = 0$;*
3. *$H + 2\mu^* I$ est semi-définie positive.*

3.1. Démontrer le lemme

Lemme 1. *Soit q la forme quadratique $q(s) = g^\top s + \frac{1}{2}s^\top Hs$, H symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. *q atteint un minimum si et seulement si H est semi-définie positive et $g \in \operatorname{Im} H$ et dans ce cas tout point solution de $Hs = -g$ est un minimum global de q.*
2. *q a un unique minimum si et seulement si H est définie positive.*

3.2. Démontrer le théorème.

▷ **Exercice 4.** On considère le problème d'optimisation

$$(P^{(k)}) \left\{ \begin{array}{l} \min f(s) = \frac{1}{2}||r(\beta^{(k)}) + J(\beta^{(k)})s||^2 \\ ||s||^2 \leq \delta^{(k)} \\ s \in \mathbb{R}^p, \end{array} \right.$$

où $J(\beta^{(k)})$ est une matrice (n, p) de rang p.

Démontrez que la solution de $(P^{(k)})$ s'écrit

$$s^{(k+1)} = -(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}) + \mu^{(k+1)} I)^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})$$

avec

$$\mu^{(k+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } ||s^{GN}||^2 = ||(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}))^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})||^2 \leq \delta^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} > 0 & \text{unique tel que } ||s(\mu^{(k+1)})||^2 = \delta^{(k)}. \end{array} \right.$$