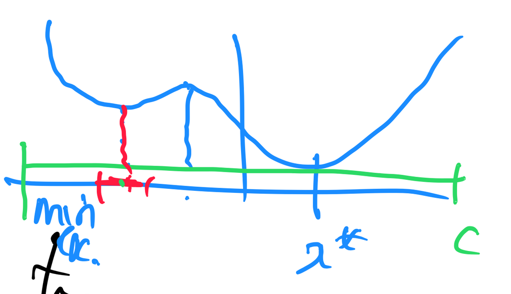
$\min\limits_{x \in C} f(x)$



existe-t-il au moins un x^* tq

$\boxed{\forall x \in C,\ f(x^*) \leq f(x)}$

x^* est un min global

C est borné ?

oui → si C compact $\neq \emptyset$ et si f est continue alors il existe un min.

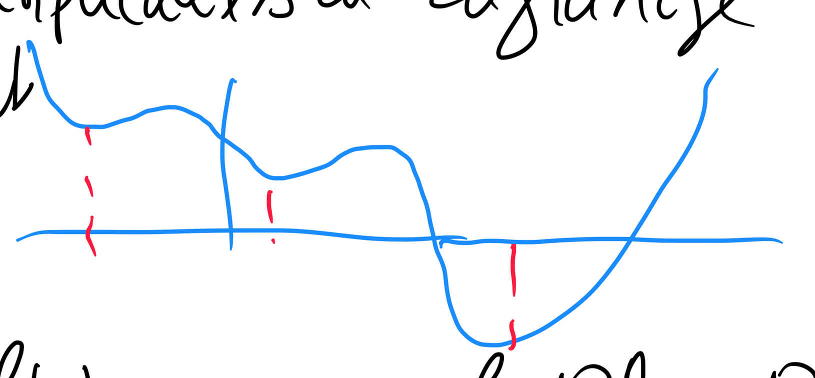
en dim finie (sur $\mathbb{R}^n$ par ex.) compact $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{fermé}\\ \text{borné}\end{cases}$

f coercive sur C $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in C}} f(x) = +\infty$

non → Si C fermé non vide, si f continue, si f coercive alors il existe un min.

Théorie des multiplicateurs de Lagrange

relations que vérifient les minima locaux



cas 1 : $\min\limits_{x \in C = \{x,\ h(x) = 0\}} f(x) \leftarrow (P)$ $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ → m contraintes

$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix}$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i,\ h_i(x) = 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Si f et h sont C^1 sur $\mathbb{R}^n$, et si x^* ($\in C$) est un min local de (P) et si $HQC(x^*)$ est vraie alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tq

KKT / KTL
$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^n) \\ h(x^*) = 0 \quad \text{(déjà présent dans l'hyp } x^* \in C) \end{cases}$$

On vérifie l'une ou l'autre de ces 2 cond pour $HQC(x^*)$
1. h est affine ; $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $h(x) = Ax + b$
2. $(\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*))$ est une famille libre

---

exemple : soit le SL $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, avec $b \in \operatorname{Im} A$ donc le SL est compatible et $\operatorname{rg}(A) = m$ $(n \geq m)$ $\quad [\ A\ ]_{m \times n}$

$$\min_{Ax = b} \frac{1}{2}\|x\|_2^2$$

1. $f : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum x_i^2$ $\quad C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$
   $h : x \mapsto Ax - b$ $\quad C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
2. $Ax - b$ est affine
3. D'après le th, tt min local x^* vérifie les cond KKT (car tt pt les contraintes, celles-ci sont qualifiées car h est affine) $\quad A = \begin{bmatrix} - a_1^T - \\ - a_m^T - \end{bmatrix}$
   $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tq
   $$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

$f : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}x^T x$ $\quad \nabla f(x) = x$

[$f = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b$ Asym $\nabla f(x) = Ax - b$]

$h : x \mapsto Ax - b = \begin{bmatrix} a_1^T x - b_1 \\ a_m^T x - b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix}$

$\nabla h_i(x) = \nabla_x (a_i^T x - b_i) = a_i$

d'après KKT $\exists \lambda^*$
$$\begin{cases} x^* + \sum \lambda_i^* a_i = 0 \\ A x^* = b \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x^* + A^T \lambda^* = 0 \\ A x^* = b \end{cases}$$

Si $\operatorname{rg}(A) = m$ alors AA^T est (carrée) inversible ($\in \mathbb{R}^{m \times m}$ de rang m)

Donc $\underbrace{Ax^*}_{b} + AA^T\lambda^* = 0 \Rightarrow \lambda^* = -(AA^T)^{-1}b$

et donc $\boxed{x^* = -A^T\lambda^* = A^T(AA^T)^{-1}b}$

Retour sur (P) $\quad \min\limits_{Ax = b} \frac{1}{2}\|x\|_2^2$

C est fermé (image réciproque d'un singleton fermé par h continue) $\quad C = $ sol particulière $+ \operatorname{Ker} A$

f coercive $\lim\limits_{\|x\|_2 \to \infty} \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = +\infty$.

Le pb admet au moins 1 solution. Le seul candidat est $x^* = \underbrace{A^T(AA^T)^{-1}}_{\text{pseudo-inverse de } A} b$

si A carrée inversible $A^T(AA^T)^{-1} = A^{-1}$

Si S symétrique de vp $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $\quad \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

alors $\min\limits_{\underbrace{\|x\|_2^2 = 1}_{h(x)}} \underbrace{\frac{1}{2}x^T S x}_{f(x)} = \lambda_1$

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T S x + \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{(x^T x - 1)}_{\in \mathbb{R}}$$

→ Soit on utilise KKT

→ S symétrique de $\mathbb{R}^n$ ⇒ diagonalisable dans b.o.n.

$S = Q D Q^T$ $\quad \begin{cases} D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ QQ^T = Q^T Q = I \end{cases}$

$$\min_{\|x\|_2^2 = 1} \frac{1}{2}x^T S x \equiv \min_{\|x\|_2^2 = 1} \frac{1}{2} x^T Q D Q^T x$$

$y = \underbrace{Q^T}_{\text{inversible}} x$

$x = Qy$

$\|x\|_2^2 = x^T x = y^T \underbrace{Q^T Q}_{I} y = \|y\|_2^2$

$$\min_{\|y\|_2^2 = 1} \frac{1}{2}\underbrace{y^T D y}_{\varphi(y)} \qquad \lambda_i \geq \lambda_1$$

$$\varphi(y) = \sum \lambda_i \underbrace{y_i^2}_{\geq 0} \geq \lambda_1 \sum y_i^2 = \lambda_1 \text{ sur } C$$

$\forall y \in C$ $\quad \varphi(y) \geq \frac{\lambda_1}{2}$

obtenu si $y^* = e_1$

donc $x^* = Qe_1$ ⇒ x^* est v.p associé à λ_1