Cette UE est divisée en deux parties :
- Graphes,
- Systèmes cyberphysiques.

La partie *Graphes* est composée de 5 CTDs, 5 TPs et vous serez évalués sur 1 Examen (2/3 de la note) et un projet (1/3 de la note).

Il est rappelé qu'un taux supérieur ou égal 30% d'absence dans un module n'autorise pas à passer le rattrapage.

CTD1 : Définitions et Concepts de base

1 Graphes non orientés

Définition : Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

et d'un ensemble fini d'arêtes

$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}.$$

Chaque arête e est définie par un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ appelés **extrémités** de e.

Vocabulaire
- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.)
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** ssi elles ont un sommet commun.

Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2. $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

3. $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, les boucles sont OK.

4. $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, C'est un multigraphe.

Définition
- $e = \{v_i, v_i\}$ est une **boucle** ;
- un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux noeuds est appelé **multigraphe** ;
- un graphe est dit **simple** si
  - il n'a pas de boucle,
  - il a au plus une arête entre deux sommets.

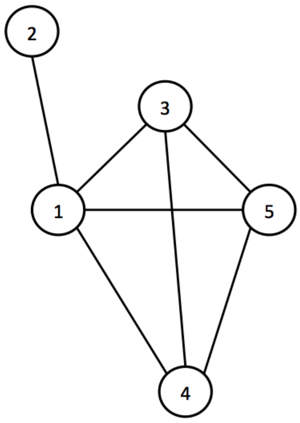
Dans le suite, nous considérons presque toujours des graphes simples (sinon, on le signale !).

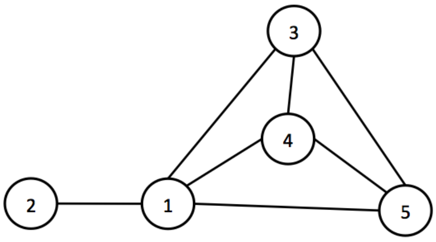
2 Représentation graphique

Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe, c'est à dire de dessiner un graphe dans le plan.

Exemple $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
Dessinez ce graphe de plusieurs façons différentes.

▷ **Solution**





Définition Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition Un graphe simple est dit **complet** si tout sommet est adjacent à tout autre.

▷ **Exercice 1** *Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple complet d'ordre n a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.*

▷ ***Solution***

A calculer en additionnant le nombre d'arêtes partant de chaque sommet, en les "épluchant" au fur et à mesure, i.e., de $n-2$ à 1.

Notation *Le graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.*

▷ **Exercice 2** *Dessiner K_5.*

Propriété : lemme des poignées de main *La somme des degrés de tous les sommets vaut le double du nombre d'arêtes.*

▷ ***Solution***

Chaque arête est comptée 2 fois.

Conséquence *Le nombre de sommets de degré impair est pair. à justifier.*

▷ **Exercice 3** *Montrer que s'il y a n personnes dans une salle avec $n > 1$, au moins 2 d'entre elles ont le même nombre de connaissances dans la salle.*

▷ ***Solution***

on utilise un argument combinatoire, en otant la (ou les) personne(s) qui n'ont pas d'amis.

Définition *Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré. Si ce degré est k, on dit que G est k-**régulier**.*

3 Graphes orientés

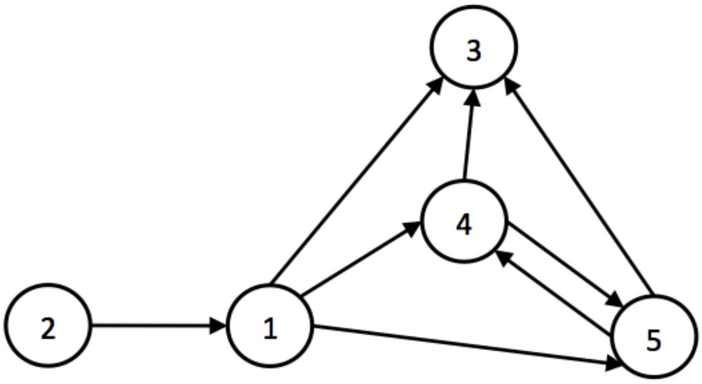
Définition *Un graphe $G = (V, E)$ est dit **orienté** si chaque arête est un paire de sommets (donc ordonnée), $e \in E, e = (i, j)$. On appelle les éléments de E des arcs.*

Vocabulaire

— *i est appelé l'**origine** de $e = (i, j)$;*
— *j est appelée l'**arrivée** de e.*
— *Pour un sommet v, le **degré sortant** $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;*
— *le **degré entrant** $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs d'origine v ;*
— *le **degré total** $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.*

Remarque *on a toujours $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#E$.*

Exemple



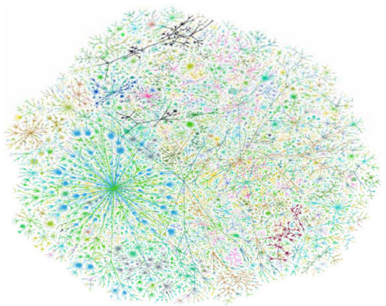
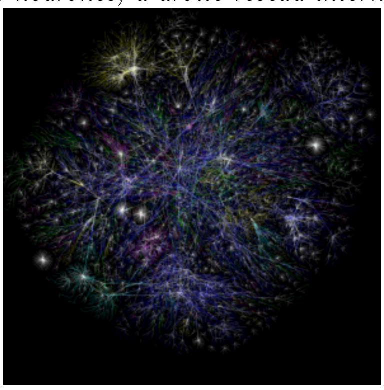
4 Utilisation de graphes dans la vie courante

▷ **Exercice 4** *Donner des exemples de problèmes que l'on peut modéliser par un graphe.*

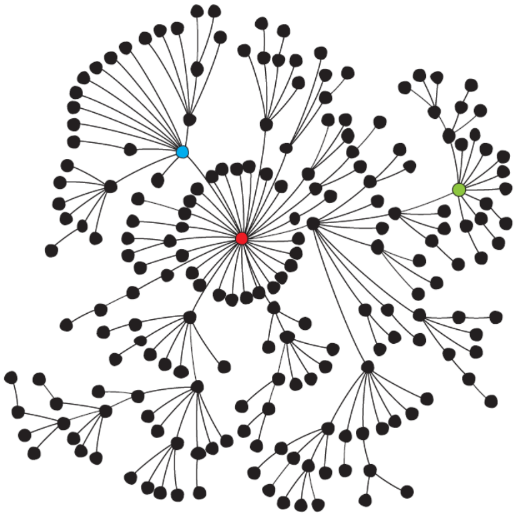
▷ ***Solution***

Exemples

— *Réseaux de diffusion d'un virus*
— *Exemples réseaux : À gauche réseaux de neurones, à droite réseau internet*

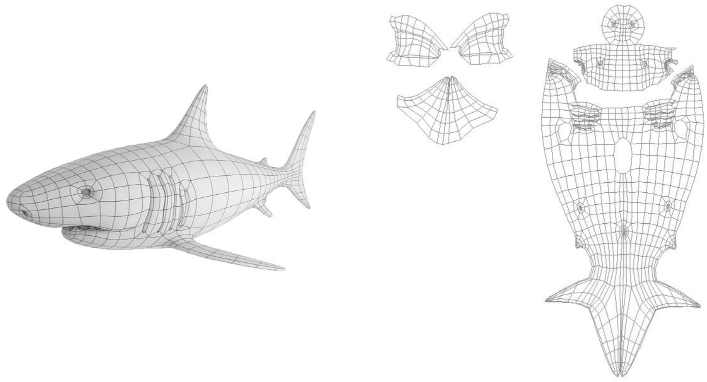



— *Réseaux petits mondes : on peut aller de n'importe quel point du réseau à un autre par un chemin assez court. Cela correspond à cette idée populaire qui dit que l'on peut trouver un lien entre 2 personnes prises au hasard dans un pays en moins de 6 connexions. Certains noeuds ont un statut particulier :*



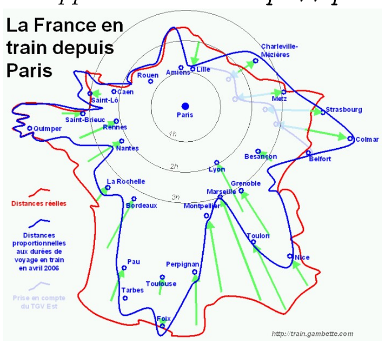
"hub"

- *maillage en 3D : les maillages 3D sont des graphes dont les sommets sont positionnés en 3D (plongement géométrique). Le graphe représente les relations de voisinage entre les sommets (image de droite), appelée la topologie. (image du maillage Shark de CGStudio).*

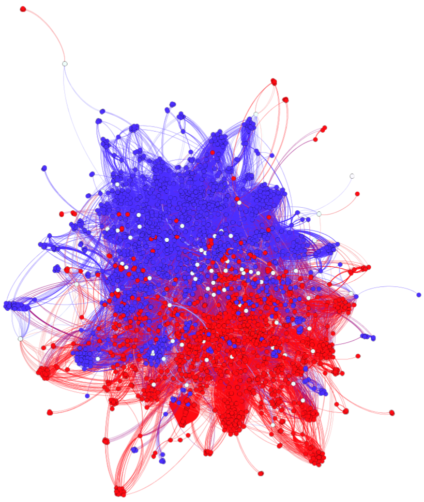


Mentionner aussi les applications des algorithmes sur les graphes :

- *Calculs de plus courts chemins (cartes de distance par rapport aux temps de transport, (image crée par Philippe Gambette* `http://philippe.gambette.free.fr/Train/` *)*



- *identification de clusters, c'est à dire, des groupes fortements connectés. Une exemple avec une coloration des Hashtag de Twitter utilisés majoritairement par des démocrates ou des républicains (images de Thimoty Renner).*



— *coloration : identification de données indépendantes, par exemple pour effectuer des calculs en parallèle.*

5 Sous graphes, graphes partiels, cliques

Définition *Un* ***sous-graphe*** *de $G = (V, E)$ engendré par un sous ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.*

Exemple *Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes de midi pyrénées est un sous graphe.*

Définition *Un* ***graphe partiel*** *de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est la graphe $G' = (V, E')$.*

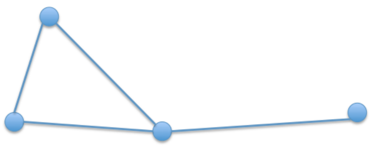
Exemple *Si G est le graphe des routes de France, donner un exemple de graphe partiel.*

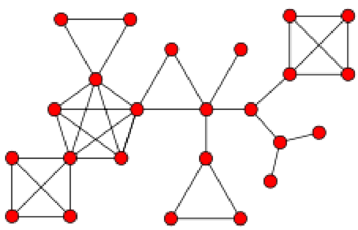
▷ ***Solution***

Celui représentant les autoroutes de France est un graphe partiel.

Définition *Une* ***clique*** *est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.*

Exemple *Ces graphes contiennent-ils des cliques ?*





(image de droite : source Wikipedia)

▷ **Exercice 5** *Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).*
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

▷ ***Solution***

Construisons un graphe dont les sommets représentent les six personnes ; deux sommets sont reliés par une arête noire lorsque les personnes se connaissent et rouge dans le cas contraire. Il s'agit de prouver que ce graphe contient une clique K_3 dont les arêtes sont de même couleur. Si l'on ne tient pas compte de la couleur des arêtes, on obtient le graphe complet K_6. De chaque sommet partent cinq arêtes, et au moins trois d'entre elles sont de même couleur (noire ou rouge). Considérons la clique K_4 composée des sommets 1, 2, 3 et 4. Supposons, par exemple, que les arêtes $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ et $\{1,4\}$ soient noires. Aucune des arêtes entre $\{2,3,4\}$ ne peut être noire, sinon, on obtient un K_3 noir, mais si elles sont toutes les trois rouges, on obtient un K_3 rouge.
Contre-exemple pour K_5 : on prend les arêtes 'ne se connaissent'/rouge sur la couronne.

6 Codage des graphes

Il existe de nombreuses façons de stocker un graphe. La complexité des algorithmes dépend de la représentation machine d'un graphe. On prendra soin pour les représentations proposées de regarder la complexité à la fois en place et en temps (lors d'accès) des représentations proposées.

On présente différentes méthodes de codage des graphes.

6.1 Codage matriciel

6.1.1 Matrice d'incidence sommet-arc

Définition *La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre n ayant m arcs est une matrice $A = (a_{iu})$, $i = 1 \dots n$, $u = 1 \dots m$ à coefficients entiers 0, +1, −1, telle que chaque colonne correspond à un arc de E et chaque ligne correspond à un sommet de V. Si $e_k = (v_i, v_j)$ alors la colonne k a tous ses termes nuls sauf $a_{ik} = +1$ et $a_{jk} = -1$.*

Exemple *Coder le graphe orienté donné en exemple.*

▷ **Exercice 6** *Trouver comment exprimer le degré entrant et sortant en un sommet.*

▷ ***Solution***

les degrés entrants (resp. sortants) sont le nombre de -1 (resp. $+1$) sur la ligne correspondant au sommet

.

6.1.2 Matrice d'incidence sommet-arête

C'est l'équivalent de la matrice sommet-arcs pour un graphe non orienté. Dans ce cas, on met +1 partout.

Exemple *Codage du graphe de l'exemple précédent.*

6.1.3 Matrice d'adjacence

Cela correspond en fait à une matrice d'incidence 'sommet-sommet'.

Définition *La matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté $G = (V, E)$ est une matrice A à coefficients booléens telle que $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$.*

Si le graphe est non orienté, pour chaque arête $\{i, j\}$, $a_{ij} = a_{ji} = 1$; la matrice A est donc symétrique.

▷ **Exercice 7** *Comparez la taille de stockage d'un graphe en utilisant ces différentes matrices. On considère les cas où la matrice est stockée entièrement, et le cas où seul les coefficients non nuls de la matrice sont stockés.)*

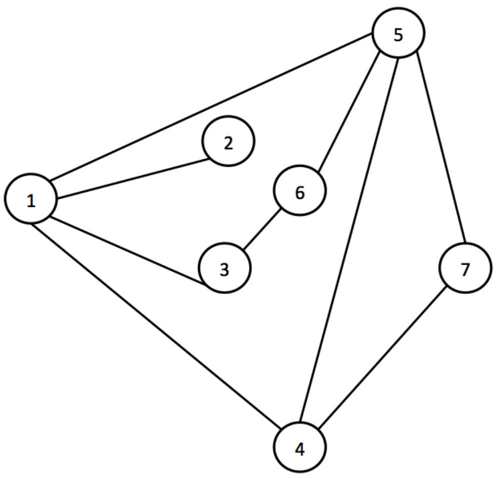
6.2 Codage vectoriel

6.2.1 À partir de la matrice d'adjacence

On utilise deux tableaux T_V de dimension $n+1$, et T_E de dimension m (cas orienté) ou $2m$ (cas non orienté). Les sommets voisins du sommet i sont stockés entre les indices $T_V(i)$ et $T_V(i+1)-1$ du tableau T_E.

Alternativement, le tableau T_V peut contenir des listes chainées d'indice des sommets voisins.

▷ **Exercice 8** *Donner pour le graphe suivant les vecteurs T_V et T_E :*



▷ ***Solution***

$T_V = (0, 4, 5, 7, 10, 13, 15, 17, 19)$, $T_E = (2, 3, 4, 5, 1, 1, 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 7, 3, 5, 4, 5)$.

▷ **Exercice 9** *Calculer le coût de stockage pour une représentation matricielle ou vectorielle. Calculer le temps nécessaire pour savoir si l'arête (i, j) est dans le graphe.*

▷ ***Solution***

accès à l'arête : $O(m)$ pour les matrices d'incidence, $0(1)$ pour la matrice d'adjacence, $O(min(n, m))$ pour le vectoriel, ou $O(\log(min(n, m)))$ si on trie les voisins, ou mieux $0(1 + \max_{i=1...n} \delta(i))$.

6.2.2 À partir de la matrice d'incidence

On peut représenter, à partir de deux tableaux T_1 *et* T_2 *de dimension* m*,* $T_1(i)$ *et* $T_2(i)$ *donnant les extrémités de la* i*-ème arête.*

7 Graphes pondérés

Définition *Un graphe est **pondéré** si à chaque arc, on associe un poids réel positif (ou coût).*

▷ **Exercice 10** *Adapter les représentations ci dessus pour prendre en compte des graphes pondérés (chaque arête a un poids positif).*

▷ ***Solution***

Réponse : pour les matrices d'incidence, ou peut multiplier une colonne par la valeur du poids de l'arête, pour les matrices d'adjacence, on peut faire apparaitre le poids dans la matrice. Pour la représentation vectorielle, on peut avoir un vecteur poids de taille m *associé à* T_E*.*

CTD2 : Connexité dans les graphes

8 Connexité dans les graphes

8.1 Graphes non orientés : Chaînes et cycles

Définition *Une **chaîne** de longueur $q \in \mathbb{N}$, $(e_1, \ldots, e_q)$, est une séquence de q arêtes successivement adjacentes. Il existe donc une suite de sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ telle que v_i soit extrémité de e_{i-1} et e_i.*

Vocabulaire

- *On dit que la chaîne joint les sommets v_1 et v_{q+1}.*
- *Une chaîne est dite **élémentaire** si les sommets $(v_1, \ldots, v_{q+1})$ sont distincts 2 à 2.*
- *Une chaîne est **fermée** si $v_1 = v_{q+1}$.*
- *Une chaîne est **simple** si les arêtes $(e_1, \ldots, e_q)$ sont distinctes 2 à 2,*
- *q est la **longueur** de la chaîne.*

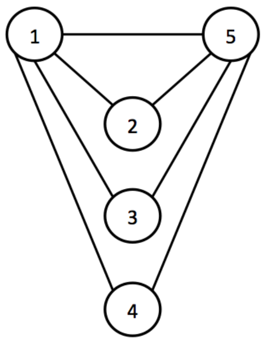
Définitions

- *Un **cycle** est une chaîne simple fermée.*
- *Un cycle est **élémentaire** si les sommets parcourus sont distincts 2 à 2 sauf le premier et le dernier.*
- *La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus petite chaîne entre eux.*
- *Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximal entre deux sommets du graphe. Elle vaut $+\infty$ si il existe des sommets non connectés (la définition de la connexité arrive après).*

Exemple/Exercice

Trouver sur ce graphe :

- *une chaîne fermée non élémentaire ;*
- *une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;*
- *un cycle élémentaire ;*
- *un cycle non élémentaire.*



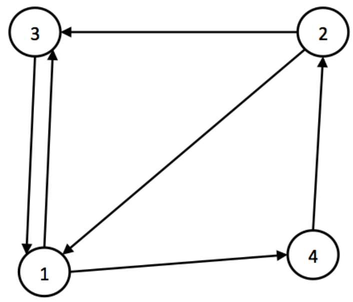
8.2 Graphes orientés : Chemins et circuits

On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.

Exemple/Exercice

Trouver sur ce graphe :

- *une chemin (non fermé) élémentaire ;*
- *une chemin (non fermé) non élémentaire ;*
- *un circuit élémentaire ;*
- *un circuit non élémentaire.*



8.3 Graphe connexe, arbre, arbre couvrant

Définitions

- *Un graphe non orienté est* ***connexe****, si entre tout couple de sommet, il existe une chaîne les joignant.*
- *Si un graphe n'est pas connexe, il est constitué de plusieurs sous-graphes connexes appelés* ***composantes connexes*** *de ce graphe.*
- *Un graphe orienté est* ***fortement connexe*** *si toute paire de sommets distincts (i, j) est reliée par au moins un chemin. On appelle* ***composante fortement connexe*** *tout sous-graphe maximal fortement connexe, c'est à dire, tout sommet de cette composante a un chemin le menant à tout autre sommet, et aucun autre sommet ne peut être ajouté en préservant cette propriété.*

Exemple

- *Dessiner un graphe à 3 composantes connexes.*
- $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\})$ *est-il connexe ?*
- *Les composantes connexes sont les classes d'équivalence de quelle relation ?*

Calcul des Composantes Fortement Connexes (Demoucron)

Hypothèses :

- *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté*
- *On cherche à calculer CFC_G, une partition de V*
- *On note les successeurs et prédécesseurs :*

$$\begin{aligned} Succ(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v, v') \in E\} \\ Pred(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v', v) \in E\} \end{aligned}$$

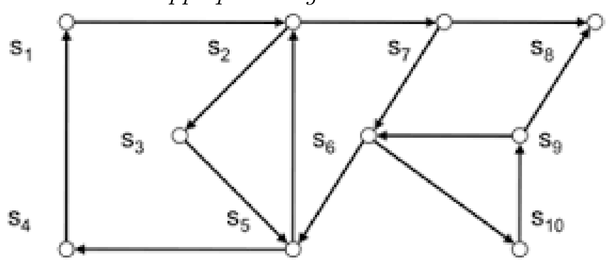
- *Ainsi que leur fermeture réflexive et transitive :*

$$\begin{aligned} Succ^*(S \subseteq V) &= S \cup Succ^*(Succ(S))) \\ Pred^*(S \subseteq V) &= S \cup Pred^*(Pred(S))) \end{aligned}$$

Algorithme :

1. $CFC_G \leftarrow \emptyset$
2. *Choisir* $v \in V$ *n'apparaissant pas dans* CFC_G
3. $CFC_v \leftarrow Succ^*(\{v\}) \cap Pred^*(\{v\})$
4. $CFC_G \leftarrow CFC_G \cup \{CFC_v\}$
5. *Recommencer en 2 tant que possible*

▷ **Exercice 11** *Appliquer l'algorithme de Demoucron au graphe suivant :*



▷ **Exercice 12** *Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).*

- *Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que j espionne i et i espionne j.*
- *Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?*
- *Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.*

▷ **Exercice 13** *Etant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui sont amis.*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

— *Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.*
— *Ce graphe est-il complet ? connexe ?*
— *Si l'adage "les amis de mes amis sont mes amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?*
Réponse : chaque composante connexe est une clique.

Arbres couvrants, Arbres

Définitions
— *Un* ***arbre*** *est un graphe connexe sans cycle ;*
— *une* ***forêt*** *est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.*

▷ **Exercice 14** *Montrer l'équivalence des propositions suivantes pour un graphe G connexe*

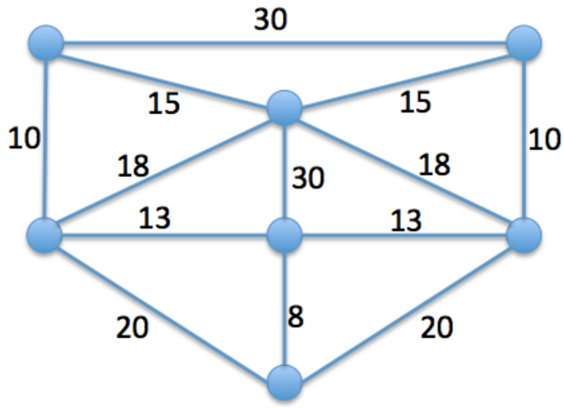
1. *$G = (V, E)$ est un arbre ;*
2. *G est sans cycle et a $n - 1$ arêtes ;*
3. *G est sans cycle et a un cycle dès qu'on ajoute une arête ;*
4. *G est connexe et non connexe dès qu'on enlève une arête ;*
5. *tout couple de sommet est relié par une chaîne unique.*

Définition *Un graphe partiel connexe qui est un arbre est appelé* ***graphe couvrant*** *ou* ***arbre couvrant*** *(spanning tree en anglais).*

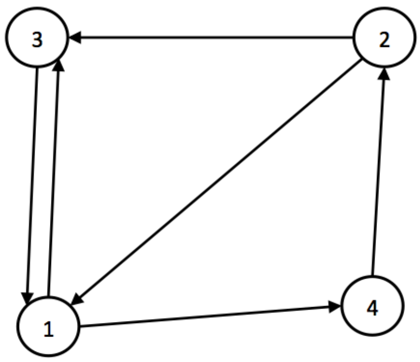
Calcul d'un arbre couvrant minimum : algorithme de Kruskal *Trier les arêtes par ordre croissant de poids : on choisit les arêtes dans cet ordre, et on garde la suivante tant qu'elle ne crée pas de cycle.*

Remarque *C'est un algorithme glouton optimal.*

Trouver un arbre couvrant minimum dans ce graphe pondéré.



Cycles, base de cycles, nombre cyclomatique *Soit G le graphe orienté suivant :*



On considère un cycle c_1 du graphe non orienté induit par G, en considérant les arcs comme des arêtes, passant par les sommets $(3, 2, 4, 1)$, c'est à dire, le cycle passant par les arêtes $((3, 2), (2, 4), (1, 4), (1, 3))$. On remarque que l'arc $(1, 4)$ est parcouru à l'envers. Si on 'range' les 6 arêtes de G dans l'ordre lexicographique, *on peut exprimer le cycle c_1 comme un vecteur sur E : $c_1 = (1, -1, 0, 1, 0, 1)$, appelé vecteur cycle. Ce vecteur est défini à un coefficient -1 près.*

De la même façon, on peut définir les autres vecteurs cycles du graphe :
$c_2 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$,
$c_3 = (0, -1, -1, 1, 0, 0)$,
$c_4 = (0, -1, 0, 1, -1, 1)$,
$c_5 = (0, 0, 1, 0, -1, 1)$,
$c_6 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$.

à faire Justifier que la somme de 2 cycles reste un cycle.

On voit que $c_2 + c_3 - c_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Les cycles sont donc linéairement dépendants.

Définition *On appelle une **base de cycles**, un ensemble de cycles linéairement indépendants et générateur. Le **nombre cyclomatique**, noté $\nu(G)$ est le nombre d'éléments dans une base de cycles.*

Théorème $\nu(G) = m - n + p$ *où* $m = \#E$, $n = \#V$ *et p est le nombre de composantes connexes.*

Exemple *Trouver plusieurs bases de cycle pour le graphe précédent.*

Calcul d'une base de cycles *A partir d'un arbre couvrant, chaque arête qui n'appartient pas à l'arbre couvrant crée un cycle ; l'ensemble des cycles créés par les arêtes manquantes crée une base de cycles.*

▷ **Démo 1** *Montrer que les cycles ainsi trouvés sont indépendants, et montrer qu'il y en a $\nu(G)$.*

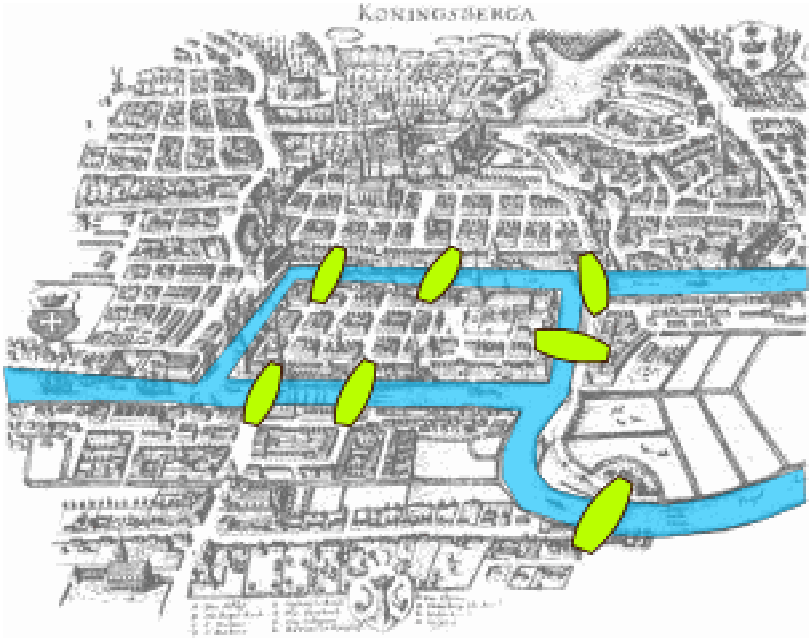
▷ **Démo 2** *En déduire la démo du Théorème précédent.*
Pour cela il reste à montrer que l'ensemble de cycles ainsi obtenu est générateur. Appelons les arêtes de l'arbre couvrant considéré, les arêtes couvrantes, et les autres, les arêtes non couvrantes. Chaque cycle de la famille (on veut montrer que c'est une base) contient exactement une arête non couvrante. Soit un cycle c aribitraire. Ce cycle contient au moins une arête non couvrante (sinon, ça ne peut pas être un cycle). On ordonne (arbitrairement) les arêtes non couvrantes de c. Pour chaque arête non couvrante de c, on ajoute ou retranche les cycles correspondants de la famille, pour ne plus passer par cette arête. On obtient un nouveau cycle (propriété ci dessus). On élimine ainsi, une à une les arêtes non courvantes de c. A la fin, il ne nous reste aucune arête non couvrante dans la somme des cycles ainsi obtenue, ce ne peut donc être que le cycle nul, puisqu'il ne contient que des arêtes couvrantes.

▷ **Exercice 15** *Application de l'algorithme de Kruskal (suite).*
Trouver une base de cycles dans le graphe de l'exercice précédent.

CTD3 : Graphes eulériens, graphes hamiltoniens

8.4 Graphes eulériens

En 1766, Euler résout le problème dit des 7 ponts de la ville de Königsberg : à savoir "est-il possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ ?"



Plan de la ville de Königsberg à l'époque d'Euler, et ses 7 ponts au dessus de la rivière Pregolia (source : Wikipedia).

Définition
- *Une chaîne est **eulérienne** si elle est simple et passe par toutes les arêtes de E.*
- *Un cycle est **eulérien** si c'est une chaîne eulérienne fermée.*
- *Un graphe est **eulérien** (ou **semi-eulérien**) si il admet un cycle eulérien (ou une chaîne eulérienne).*

Remarque *intuitivement eulérien signifie "sans lever le crayon ni passer deux fois par le même trait".*

Théorème *Un graphe non orienté connexe admet une chaîne eulérienne (resp. cycle eulérien) ssi le nombre de sommets de degré impair vaut 2 (resp. 0).*

▷ ***Solution***

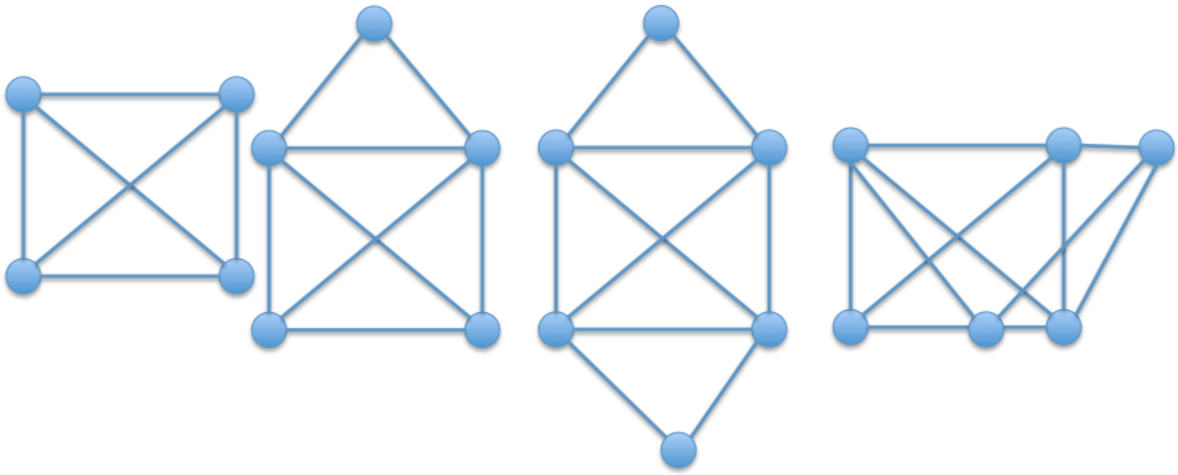
▷ **Démo 3** *(à faire en exo)*

$\Rightarrow$ *Soit G un graphe connexe tel qu'il existe une chaîne eulérienne d'extrémités D (sommet de départ) et A (sommet d'arrivée). On a $\delta(D) \geq 1$ sinon D ne serait pas connecté, et G non connexe. Si $\delta(D) = 1$ alors $\delta(D)$ est impair. Si $\delta(D) > 1$, alors les autres arêtes incidentes en D sont parcourues dans la chaîne eulérienne, et à chaque fois qu'on arrive en D, il faut en repartir (pour aller vers A) par une autre arête : $\delta(D)$ est toujours impair. De même, $\delta(A)$ est impair. Pour tout autre sommet X autre que A et D, pour les mêmes raisons, le degré de X est pair.*
Quand $A = D$, c'est un cyle eulérien, et ce sommet est de degré pair comme les autres puisque qu'on

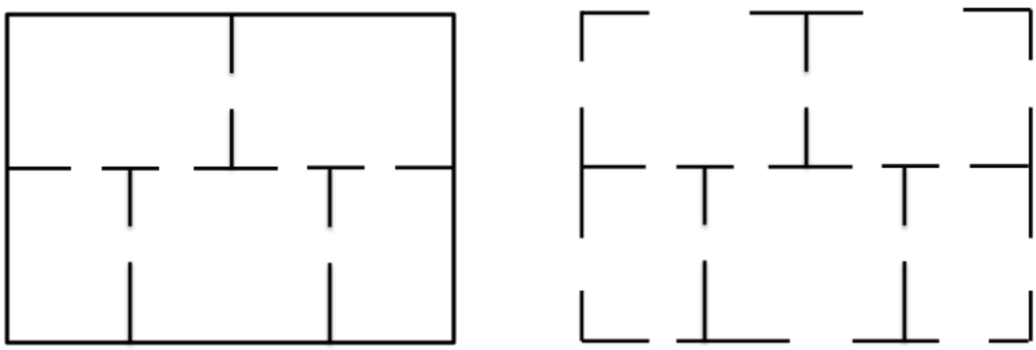
en part, et qu'on y revient. Donc le nombre de sommets de degré impair est 0 *dans un graphe eulérien, et* 2 *dans un graphe semi-eulérien.*

$\Leftarrow$ *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\#V = n$ et $\#E = m$, on montre la propriété par récurence sur le nombre d'arêtes (m). Si G est connexe, alors G a au minimum $n - 1$ arêtes (d'après les propriétés des arbres).*
Le cas de base est $m = n - 1$. Si il existe un sommet de degré > 2, alors la chaîne passe 2 fois par ce sommet, et donc contient un cycle. Ce n'est pas possible car $m = n - 1$ donc c'est un arbre. Donc tous les autres sommets sont de degré 2 *et forment donc une chaîne. Donc tous les sommets sont de degré* 1 *ou* 2 *(pas* 0 *sinon, non connexe). Il existe donc ou zero deux sommets de degré* 1 *(par hypothèse), les autres sont donc tous de degré* 2 *et la chaîne est définie en partant d'un sommet de degré* 1 *(ou d'un sommet arbitraire) et en parcourant les arêtes de façon déterministe, puisque chaque sommet a une arête entrante et une sortante.*
Par récurrence, on prend A de degré impair ; il reste un autre sommet C de degré impair. On enlève à A une arête incidente $\{A, B\}$; A devient de degré pair. Soit $B \neq C$ et donc B est de degré pair et il devient donc de degré impair, il reste donc B et C de degré impair et on applique l'hypothèse de récurrence sur le graphe partiel privé de l'arête $\{A, B\}$. On trouve donc une chaîne eulérienne entre B et C qu'on compléte entre A et B avec l'arête $\{A, B\}$. Même topo si aucun sommet de degré impair au départ...

$\triangleright$ **Exercice 16** *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever la crayon et sans passer deux fois sur le même trait.*



$\triangleright$ **Exercice 17** *Est-il possible de se promener dans ces maisons en passant une et une seule fois par chacune des ouvertures ?*



▷ *Solution*

De façon constructive, pour trouver une chaîne (ou un cycle eulérien) on donne d'abord une chaîne simple entre les sommets de départ et d'arrivée, on retire ensuite les arêtes déjà parcourues, puis on continue à parcourir puis retirer itérativement des cycles issus de sommets déjà visités.

Graphes orientés *On a la une condition similaire pour les circuits eulériens :* $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$*. Pour les chemins eulériens, un sommet peut avoir un degré entrant, un de plus que le degré sortant, et un sommet peut avoir un degré sortant un de plus que le degré entrant.*

8.5 Graphes hamiltoniens

8.5.1 Graphes non orientés

Définitions

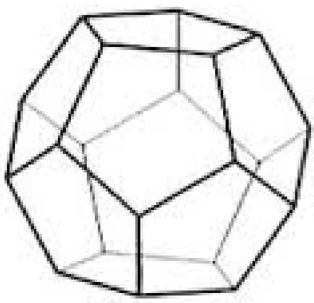
— *Une chaîne est* ***hamiltonienne*** *si elle passe par tous les sommets une fois et une seule.*
— *Un cycle est* ***hamiltonien*** *si c'est un cycle élémentaire comptant autant d'arêtes que de sommets dans* G*.*
— *Un graphe est* ***hamiltonien*** *(resp.* ***semi-hamiltonien****) si il est possible de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne).*

Contrairement aux graphes eulériens, il n'y a pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens.

Exemples▷ *Solution*

Faire quelques exemples.

▷ **Exercice 18** *Jeu de Hamilton (1859) : trouver une chaîne hamiltonienne dans un dodécaèdre.*



Quelques critères

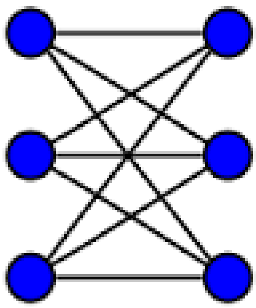
Propriétés

— *Si* $\exists v \in V$ *tel que* $\delta(v) = 1$ *et* $n > 1$ *alors le graphe n'est pas hamiltonien.*
— *Si* $\exists v \in V$ *tel que* $\delta(v) = 2$ *alors les deux arêtes incidentes à* v *appartiennent à tout cycle hamiltonien.*
— K_n *est hamiltonien.*

▷ **Démo 4** *en exo.*

Définition *Un graphe est biparti si il existe une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que, pout toute arête $e = \{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2\} \cap V_1$ et $\{v_1, v_2\} \cap V_2$ sont des singletons.*

Exemple *$K_{3,3}$: on note $K_{i,j}$ un graphe biparti complet, c'est à dire, tel que $\#V_1 = i$, $\#V_2 = j$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.*



Propriété *Si $G = (V, E)$ est biparti et si $|\#V_1 - \#V_2| > 1$ alors G n'est ni hamiltonien, ni semi hamiltonien.*

▷ **Démo 5** *en exo.*

▷ ***Solution***

Théorème de Ore *Si G est un graphe simple d'ordre $n \geq 3$, si pour tout couple de sommets v_1 et v_2 tels que $\{v_1, v_2\} \notin E$ et $\delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n$ alors G est hamiltonien.*

▷ ***Solution***

▷ **Démo 6** *On suppose que G graphe non hamiltonien d'ordre n vérifie la propriété (P). On rajoute autant d'arêtes possible sans que G ne devienne hamiltonien. Si on ne peut pas rajouter l'arête $\{v_1, v_n\}$ sans que G ne devienne hamiltonien, alors il existe une chaîne hamiltonienne $v_1 \dots v_n$. Grâce à (P) on montre qu'il existe forcément v_{i-1} et v_i dans la chaîne tels que $\{v_i, v_1\}$ et $\{v_{i-1}, v_n\}$ soient dans E. Du coup $v_1 \dots v_{i-1} v_n v_{n-1} \dots v_i v_1$ est un cycle hamiltonien.*

Corollaire *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, si tout v est de degré $\geq n/2$ alors G est hamiltonien.*

▷ ***Solution***

▷ **Démo 7** *Cette propriété implique celle du théorème de Ore.*

▷ **Exercice 19** *Soit une grille rectangulaire de taille $2p \times 2q$ composée de $4pq$ carrés identiques. Un pion ne peut se déplacer que d'une case sur une case adjacente (verticalement ou horizontalement, mais pas en diagonale). Ce pion peut-il parcourir toutes les cases une fois et une seule du coin en haut à gauche au coin en bas à droite ?*

▷ ***Solution***

▷ **Démo 8** *Réponse : non, car si on colore comme un échiquier, les coins opposés sont de même couleur...*

8.5.2 Graphes orientés : multiplication latine

Dans un graphe G orienté, on peut chercher des chemins et circuits hamiltonien. On dispose de la méthode (coûteuse) de la multiplication latine.

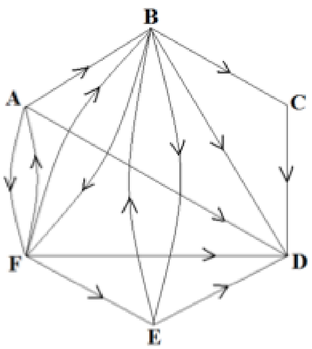
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G. Les puissances successives de M, M^1, M^2, M^3 ... M^i indiquent par leur coefficient (k, l) le nombre de chaîne de longueur i entre les sommets k et l.

Si on veut de plus obtenir la suite de ces sommets, on peut utiliser la multiplication latine. Elle consiste à indiquer dans une matrice L les arêtes dans les nœuds de la matrice d'adjacence et à les combiner en chemins lors de la multiplication.

Exemple *Dessiner le graphe correspondant à la matrice d'adjacence M suivante :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ ***Solution***



Réponse : ce graphe correspond au graphe suivant On écrit L puis on calcule L^2, L^3 en enlevant au fur et à mesure les chemins qui repasse plusieurs fois par le même sommet (non hamiltonien). Du coup, L^5 a seulement un coefficient non nul, c'est un chemin hamiltonien. Le dernier noeud de ce chemin est D duquel on arrive plus à repartir, donc pas de cycles.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & AD & 0 & AF \\ 0 & 0 & BC & BD & BE & BF \\ 0 & 0 & 0 & CD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EB & 0 & ED & 0 & 0 \\ FA & FB & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & AFB & ABC & \begin{array}{c} ABD \\ AFD \end{array} & \begin{array}{c} ABE \\ AFE \end{array} & ABF \\ BFA & 0 & 0 & \begin{array}{c} BCD \\ BED \\ BFD \end{array} & BFE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EBC & EBD & 0 & EBF \\ 0 & \begin{array}{c} FAB \\ FEB \end{array} & FBC & \begin{array}{c} FDA \\ FBD \\ FED \end{array} & FBE & 0 \end{pmatrix}$$

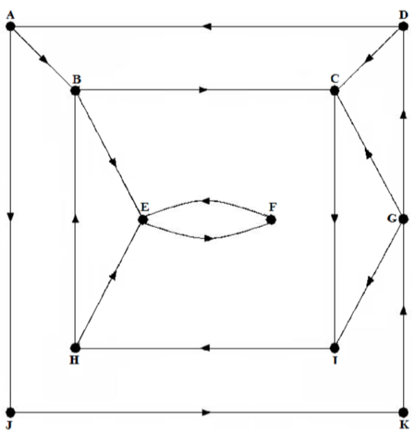
$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & AFEB & AFBC & \begin{smallmatrix} AFBD \\ ABCD \\ ABED \\ AFED \\ ABFD \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} AFBE \\ ABFE \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} BFAD \\ BFED \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EBFA & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} EBCD \\ EBFD \end{smallmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & \begin{smallmatrix} FABC \\ FEBC \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} FABD \\ FEBD \\ FBCD \\ FBED \end{smallmatrix} & FABE & 0 \end{pmatrix} \quad L^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & AFEBC & \begin{smallmatrix} AFEBD \\ AFBCD \\ AFBED \\ ABFED \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} FABCD \\ FEBCD \\ FABED \end{smallmatrix} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AFEBCD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

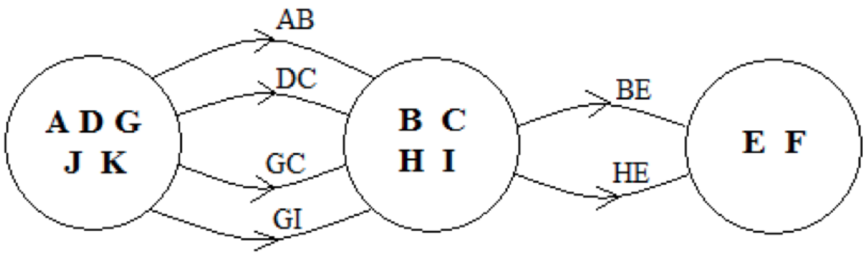
Utilisation des composantes fortement connexes pour simplifier le problème *La méthode de la mutiplication latine requiert de calculer la nème puissance d'une matrice L de taille $n \times n$. On peut simplifier le problème en partitionnant d'abord le graphe en composantes fortement connexes, et en étudiant les chemins hamiltoniens entre ces composantes fortement connexes.*

Sur chaque composante, on calcule les chemins/circuits (par multiplication latine), et on calcule aussi les chemins/circuits sur le graphe réduit, graphe dont chaque noeud est une composante fortement connexe, et chaque arête est labellée par (i, j) sa valeur dans le graphe initial.

Exemple



▷ ***Solution***



On peut noter que trouver un chemin hamiltonien dans un graphe est un problème NP-complet. Un problème NP-complet, est un problème pour lequel il n'existe pas de solution polynomiale connue. Les algorithmes utilisés sont de compléxité (en temps) exponentielle. Dans le cas de la multiplication latine, la multiplication de matrice classique est en $O(n^3)$ mais le nombre de coefficients dans la matrice n'est limité que par le nombre de sommets visités. Or le nombre de chemins de longueur n entre 2 sommets, un coefficient de M^n, est exponentiel (borné par $(n-1)!$).

CTD4 : Parcours de graphe

On considère dans cette partie des graphes pondérés, i.e. à chaque arête/arc est associé un coût positif. On suppose toujours que le graphe est simple (pas de boucle, pas d'arêtes/arcs multiples).

Dijkstra *L'algorithme de Dijsktra détermine pour un graphe connexe le plus court chemin d'un sommet choisi à n'importe quel autre sommet du graphe. Cet algorithme peut s'exécuter sur des graphes orientés ou non. Il construit donc un arbre couvrant du graphe, admettant le sommet d'origine comme racine. C'est un algorithme en temps polynomial.*

On suppose que le sommet de départ est le sommet 0. *On prend un vecteur* C *de taille* n *tel* $C(i)$ *contient la distance courante entre le sommet* 0 *et le sommet* i. *Un ensemble* S *contient les sommets déjà visités, un autre* R *contient les sommets restants.*

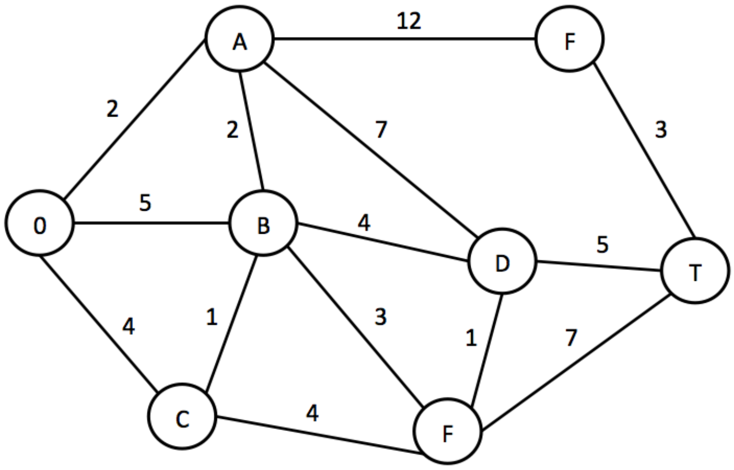
Initialisation
$R = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$
$C(0) = 0$
$C(i) = +\infty \; i \neq 0$
$i = 0$
Corps
tant que $R \neq \emptyset$ ***faire***
  Choisir v_i *tel que* $v_i = argmin_{v_j \in R} C(j)$
  {Mise à jour de C}
  pour *tous les sommets* v_j *voisins de* v_i ***faire***
    $C(j) = \min(C(j), C(i) + c_{ij})$
  fin pour
  Ajouter v_i *à* S
  Retirer v_i *à* R
fin tant que

Argument de terminaison : on visite les sommets un à un, donc $\#R$ *est strictement décroissant.*

C'est un algorithme de type glouton qui mène à une solution globale optimale.

Pour la complexité, on parcourt les sommets (passage de 1 sommet R à S et les arêtes sont toutes parcourues –les arcs 1 fois ; les arêtes 2 fois–). A chaque passage sur un sommet, on cherche le sommet de coût minimum dans R. Au pire, la recherche du minimum est linéaire, donc $O(m + n + n^2) = O(m + n^2)$.
On peut aussi faire mieux en gardant R trié, mais du coup, il faut pour chaque visite d'arête (au plus $\delta_{max} = max_{v \in V} \delta(v)$*), insérer dans la liste triée* $O((\delta_{max} + n) \log(n) = O(n \log(n))$.

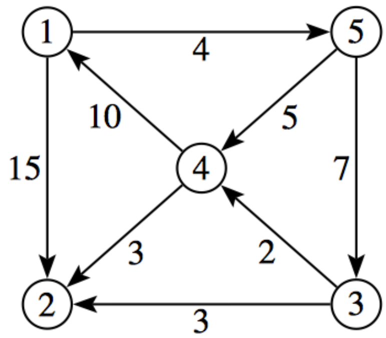
▷ **Exercice 20** *Trouver le plus court chemin de* 0 *à* T



▷ ***Solution***

Réponse : 13.

▷ **Exercice 21** *Trouver les plus courts chemins partant de* 1 *aux autres sommets du graphe*



▷ ***Solution***

Réponses : 2 : 12 ; 3 :11 ; 4 :9 ; 5 :4.

Remarque : *si les poids peuvent être négatifs, il faut utiliser l'algorithme de Bellman-Ford, capable d'identifier un cycle absorbant.*

CTD5 : Planarité et coloration de graphes

9 Planarité

9.1 Planarité, dessin, plongement

Définitions

- *On dit qu'un graphe est* ***planaire*** *si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. On rappelle que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.*
- *Une représentation planaire particulière d'un graphe est appelée une* ***carte****. Une carte divise le plan en plusieurs régions appelées* ***faces****.*

Remarques

- *Il s'agit en fait d'étudier les aspects topologiques d'un graphe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir si un graphe peut être représenté sur une surface S*
- *Exemple d'application : carte électronique*
- *Les notions utilisés ici sont à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ! Ce chapitre s'inspire très fortement de l'ouvrage Eléments de théorie des graphes, Bretto, Faisant, Hennecard.*

Définitions

- *Soient x et y deux points de T, on appelle* ***arc géométrique*** *de x à y toute application continue $\gamma : [0,1] \to T$ injective telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une courbe simple entre x et y est l'image d'un arc géométrique de x à y : $\gamma([0,1])$. On note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des courbes simples sur T.*
- *On appelle* ***dessin*** *F d'un graphe $G = (V,E)$ sur T une application $\sigma : V \bigsqcup E \to T \bigsqcup \mathcal{C}_T$ injective telle que :*
  1. *$\sigma|_V : V \to T$ soit injective ;*
  2. *$\sigma|_E : E \to \mathcal{C}_T$ soit injective ;*
  3. *si $\sigma(v_i) = x, \sigma(v_j) = y$ et $e = \{v_i, v_j\}$, alors $\sigma(e)$ est une courbe simple de x à y.*

Remarque *Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup (\bigcup_{e \in E} \sigma(e))$ est encore appelé dessin de G sur T.*

Définition *Un dessin d'un graphe G dans $T \subset \mathbf{R}^k$ est un* ***plongement*** *si et seulement si les courbes simples ne se coupent qu'aux sommets.*

Propriété *Tout graphe d'ordre fini admet un plongement dans $\mathbf{R}^3$*

▷ ***Solution***

On place les n sommets du graphe sur une droite de $\mathbf{R}^3$ et on prend m demi-plan différents qui contiennent cette droite. Pour chaque arête, on prend un demi-plan et on trace un arc dans ce demi-plan qui joint les 2 sommets adjacents de l'arête.

Exemple

- *Une chaîne élémentaire admet un plongement dans $\mathbf{R}$*
- *Un cycle élémentaire avec $n > 1$ admet un plongement dans $\mathbf{R}^2$ mais pas dans $\mathbf{R}$*

Définition *On dit qu'un graphe est **planaire** s'il admet un plongement dans* $\mathbf{R}^2$.

9.2 Exemples et exercices introductifs

▷ **Exercice 22** *Le dodécaèdre est-il un graphe planaire ?*

▷ ***Solution***

Oui, le dessiner

▷ **Exercice 23** *Tous les graphes sont-ils planaires ?*

▷ ***Solution***

Non, par exemple K_5

▷ **Exercice 24** $K_{3,3}$ *est-il planaire ?*

▷ ***Solution***

Non

9.3 Faces, Contours

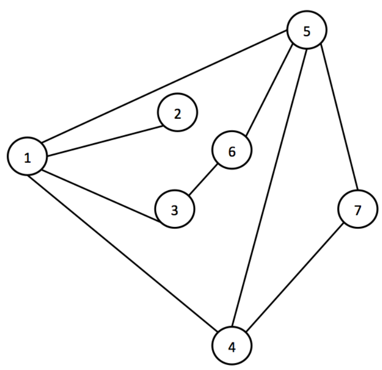
Soit $G = (V, E)$ *un graphe plongé dans* $\mathbf{R}^2$ *et* F *son dessin.* F *est un fermé, donc* $\mathbf{R}^2 \setminus F$ *est ouvert. On a alors*

Définition *On appelle **face** tout composante connexe (et ouverte) de* $\mathbf{R}^2 \setminus F$*. On note* Φ *l'ensemble de ces composantes connexes,*

$$\mathbf{R}^2 \setminus F = \cup_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Remarque *Il existe* R *tel que* $F \subset B_f(0, R)$*. Par suite il n'existe qu'une seule face non bornée. On appelle cette face la face infinie.*

Exemple *Donner les faces de ce graphe.*
Attention, ne pas oublier la face infinie.



Soit φ une face finie, alors sa frontière $\partial\varphi$ est la réunion de cycles élémentaires disjoints et d'arêtes pendantes ou reliant 2 cycles.

Définition *On appelle **contour** de la face φ bornée le cycle élémentaire c qui contient son intérieur $\partial\varphi \setminus c$.*

Théorème *L'ensemble des contours de toutes les faces d'un graphe planaire forme une base de cycles de ce graphe.*

10 Caractéristique d'Euler-Poincaré

Théorème d'Euler *Dans un graphe planaire d'ordre n, à m arêtes, possédant f faces à p composantes connexes, on a :*

$$f = m - n + 1 + p.$$

▷ **Exercice 25** *Validez la caractéristique d'Euler sur le graphe de l'exercice précédent.*

▷ **Démo 9** *Solution*

Par récurrence sur n. à démontrer si temps (2016)

▷ **Exercice 26** *Remarquez que $K_{3,3}$ n'est pas planaire en utilisant sa caractéristique d'Euler-Poincaré.*

11 Caractérisation des graphes planaires

Définitions

- *On appelle **subdivision** d'une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ le remplacement de cette arête par deux arêtes $e_1 = \{u, w\}$ et $e_2 = \{w, v\}$ où w est un nouveau sommet n'appartenant pas à V. On obtient alors un nouveau graphe $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{e_1, e_2\} \setminus \{e\})$.*
- *Deux graphes sont dits **subdivisés d'un même graphe** s'ils peuvent être obtenus par une suite finie (voire vide) de subdivisions à partir d'un même graphe*

Théorème de Kuratowsky (1930) *(caractérisation des graphes planaires) Un graphe est planaire ssi il ne contient aucun sous graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 (ou à une subdivision de ces graphes).*

Graphe dual

Définition *Soit G un graphe planaire. On appelle **graphe dual** de G le graphe G^* défini par*

1. *les sommets de G^* sont les faces de G : $V^* = \Phi$;*
2. *pour chaque arête de G on définit une arête e^* de G^* de la façon suivante : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces φ, ψ ; on pose alors $e^* = \{\varphi, \psi\}$ (c'est une boucle si $\varphi = \psi$).*

▷ **Exercice 27** *Vérifiez que le bi-dual d'un cube est un cube.*

De façon générale, le bi-dual d'un graphe est le graphe lui même.

12 Coloration

12.1 A définir, à connaitre

Définition *Un **stable** d'un graphe est un ensemble de sommets qui ne contient que des sommets 2 à 2 non adjacents.*

*Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G noté $\alpha(G)$.*

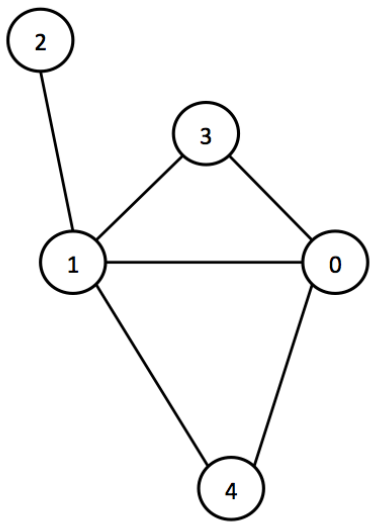
Définition *Une **coloration** d'un graphe consiste à affecter tous les sommets tels que 2 sommets adjacents n'aient pas la même couleur.*

Une coloration à k couleurs est donc une partition de V en k stables.

*Le **nombre chromatique** noté $\gamma(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une k-coloration.*

12.2 Exemples

Exemple *Donner les stables de ce graphe.*



▷ **Exercice 28** *Trouver le nombre de stabilité du graphe de l'exercice précédent.*

▷ **Exercice 29** *Quel est le nombre chromatique du graphe de l'exercice précédent. La $\gamma(G)$-coloration trouvée est-elle unique ?*

▷ ***Solution***

3 car on peut trouver facilement une 3 coloration, et on ne peut pas faire mieux car K_3 est sous-graphe. Pas d'unicité.

12.3 Propriétés

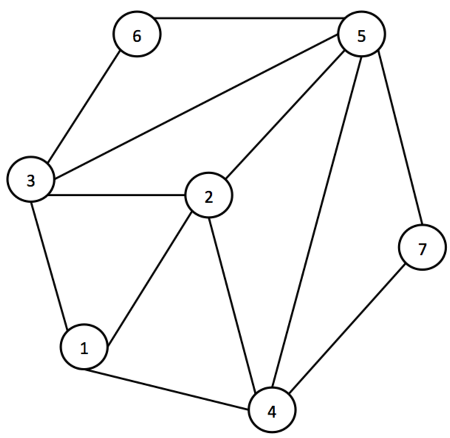
12.4 Encadrement du nombre chromatique

— $\gamma(G) \leq r + 1$ *où* $r = \max_{v \in V} \delta(v)$ *;*
— $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ *;*
— $\gamma(G) \geq$ *#sommets dans la plus grande clique.*

▷ **Démo 10** ***Solution***

(à faire) en exercice.

▷ **Exercice 30** *Minorez et majorez le nombre chromatique de ce graphe.*



▷ ***Solution***

c'est 3, mais si on ajoute l'arête $\{6, 7\}$, on passe à 4...ce qui est intéressant car il n'y a pas de clique à 4 sommets.

12.5 Exercices

▷ **Exercice 31** *Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :*

l'élève	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
a rencontré	*D,E*	*D,E,F,G*	*E,G*	*A,B,E*	*A,B,C,D,F,G*	*B,E,G*	*B,C,E,F*

De combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise *lorqu'il était dans la salle ?*

▷ ***Solution***

On construit le graphe des rencontres : les sommets représentent les élèves ; une arête $\{i, j\}$ signale que les élèves i et j se sont rencontrés. Il reste alors à proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs. Chaque couleur correspondra à une place assise. La coloration montre que la bibliothèque dispose d'au moins quatre places assises, car le graphe contient une clique à quatre sommets $B - E - F - G$. Ces quatre places assises sont suffisantes.

▷ **Exercice 32** *Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.*

▷ ***Solution***

on utilise le fait qu'un graphe biparti peut être colorié avec seulement 2 couleurs.

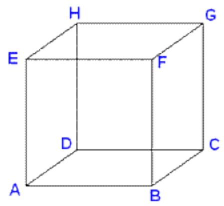
Algorithme de Welsh-Powell *C'est un algorithme de coloration glouton.*

On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On colorie le premier sommet non encore colorié avec une nouvelle couleur, et en suivant l'ordre de la liste, tous les sommets que l'on peut colorier avec cette même couleur. On recommence, jusqu'à que chaque sommet ait été colorié.

▷ **Exercice 33** *Montrez en utilisant un cube, que l'algorithme de Welsh-Powell ne mène pas à une solution optimale.*

▷ ***Solution***

Le graphe est régulier, l'ordre des sommets est donc arbitraire. Si on ordonne dans l'ordre alphabétique $ABCDEFGH$ alors l'algorithme de Welsh-Powell trouve 2 couleurs (le graphe est en fait biparti), si on ordonne $AGBHCFED$ alors l'algorithme de Welsh-Powell donne 4 couleurs !



▷ **Exercice 34** *Dans un tournoi de basket, chaque équipe recontre toutes les autres, et chaque rencontre dure une heure. Déterminer la durée minimale du tournoi avec 3, 4, 5 ou 6 équipes.*

▷ ***Solution***

Il s'agit de colorier avec le minimum de couleurs les arêtes des graphes complets à 3, 4, 5 et 6 sommets. Les sommets représenteront les équipes, les arêtes les matchs et les couleurs les heures des matchs. Pour colorier les arêtes d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des sommets. Il suffit pour cela de travailler non pas sur le graphe lui-même, mais sur le graphe adjoint, noté G' , et que l'on définit ainsi :

— *à chaque arête de $G = (V, E)$ correspond un sommet de $G' = (E, F)$;*

— *deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.*

On peut colorer les arêtes de K_3 et K_4 avec trois couleurs. Il faudra donc au minimum trois heures. On peut colorer les arêtes de K_5 et K_6 avec cinq couleurs. Il faudra donc au minimum cinq heures.

12.6 Coloration d'un graphe planaire

Théorème des 4 couleurs *On peut colorier les sommets d'un graphe planaire en utilisant au plus quatre couleurs, de telles sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.*

Ce théorème a été démontré en 1976... en utilisant un ordinateur. La conjecture datait de 1852 ! !

On peut par contre démontrer le théorème des 5 couleurs de façon plus simple.

▷ **Exercice 35** ***Théorème des 5 couleurs*** *Tout graphe planaire peut être colorié avec 5 couleurs.*

Pour démontrer ce théorème, on démontre les deux lemmes suivants :

lemme 1 : $3f \leq 2m$ *à partir d'un certain rang pour* m *(lequel ?)*
lemme 2 : *Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.*

▷ ***Solution***

▷ ***Solution***

lemme 1 : chaque face est entourée de au moins 3 arêtes, et chaque arête entoure 2 face voisines, d'où l'inégalité.
lemme 2 : Par l'absurde : si tous les sommets sont de degré ≥ 6 *:* $\sum_{v \in E} \delta(v) \geq 6n$*, or* $\sum_{v \in E} \delta(v) = 2m$*, d'où* $m \geq 3n$*, soit*

$$n \leq \frac{m}{3} \tag{1}$$

La formule d'Euler donne :

$$p + 1 = n - m + f,$$

or d'après le lemme 1 et l'inégalité 1 ci dessus on obtient $p + 1 \leq \frac{m}{3} - m\frac{2m}{3} = 0$ *contradiction !*
On se sert du lemme 2 pour faire une récurrence sur n *pour démontrer le théorème :*

- *pour* $n = 0$ *OK*
- *Supposons le théorème vrai pour* n*, et considérons un graphe à* $n + 1$ *sommets.*
  Il existe un sommet de degré au plus 5 *(lemme 2) : on applique l'hypothèse de récurrence sur le sous-graphe généré par les sommets restants.*
  Appelons v_i*,* $i = 1 \dots 5$*, les* 5 *voisins de* v *ordonnés en tournant autour de* v*.*
  - *Si* 2 *des* v_i *partagent une couleur, il y a une couleur restante pour* v*, dans ce cas, on l'utilise pour* v*, et la propriété est vérifiée ;*
  - *Sinon, tous les* v_i *sont tous de couleur différente :*
    - *si il n'existe aucun chemin bicolore entre* v_1 *et* v_3*, alors, on peut recolorier le sous-graphe partiel restreint aux couleurs* $\{c_1, c_3\}$ *connexe à* v_3 *(qui ne contient du coup pas* v_1*) en intervertissant les couleur* c_1 *et* c_3*.* v_3 *devient de la même couleur que* v_1*, et on colorie* v *avec* c_3*.*
    - *si il existe un chemin bicolore de* v_1 *à* v_3*, alors, par planarité, tout chemin entre* v_2 *et* v_4 *recoupe ce chemin en un sommet de couleur* c_1 *ou* c_3 *: il n'existe donc aucun chemin bicolore de* v_2 *à* v_4*, et on peut donc colorier* v_4 *de la même couleur que* v_2 *en utilisant le même argument qu'au point précedent.*

  On peut donc colorier le graphe d'ordre $n + 1$ *avec 5 couleurs ce qui termine la récurrence.*

▷ **Exercice 36** *Voici les deux dernières versions des cartes des régions de France. A-t-on gagné une ou plusieurs couleurs en passant de 22 à 13 régions ?*

▷ ***Solution***

Réponse : Non, autour (et voisines) de la région 'ile-de-france' on a 5 régions 2 à 2 adjacentes, ce qui oblige à prendre 4 couleurs sur les deux cartes.