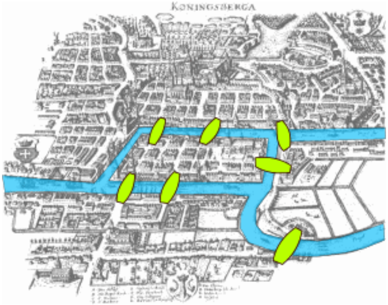
Théorie des graphes

Chapitre 3 : Graphes eulériens et hamiltoniens

5 janvier 2021

INP TOULOUSE ENSEEIHT

En 1766, Euler résout le problème dit des 7 ponts de la ville de Königsberg : à savoir "est-il possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ ?"



Plan de la ville de Königsberg à l'époque d'Euler, et ses 7 ponts au dessus de la rivière Pregolia (source : *Wikipedia*).

Exercice 3.1.1. Modéliser le problème ci dessus sous forme de graphe.

Solution

Prendre un sommet par quartier mais ce n'est plus un graphe simple, ou prendre un sommet par quartier ET par pont.

Définition 3.1.1 – Graphe eulérien

- Une chaîne est **eulérienne** si elle est simple et passe par toutes les arêtes de E.
- Un cycle est **eulérien** si c'est une chaîne eulérienne fermée.
- Un graphe est **eulérien** (ou **semi-eulérien**) si il admet un cycle eulérien (ou une chaîne eulérienne).

Remarque 3.1.1. intuitivement eulérien signifie "sans lever le crayon ni passer deux fois par le même trait".

Théorème 3.1.2

Un graphe non orienté connexe admet une chaîne eulérienne (resp. cycle eulérien) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 2 (resp. 0).

> **Solution**

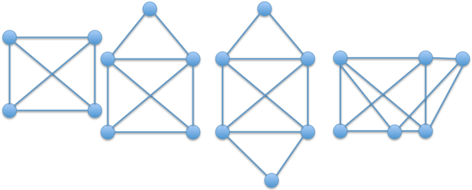
- ▪ Soit G un graphe connexe tel qu'il existe une chaîne eulérienne d'extrémités D (sommet de départ) et A (sommet d'arrivée). On a $\delta(D) \geq 1$ sinon D ne serait pas connecté, et G non connexe. Si $\delta(D) = 1$ alors $\delta(D)$ est impair. Si $\delta(D) > 1$, alors les autres arêtes incidentes en D sont parcourues dans la chaîne eulérienne, et à chaque fois qu'on arrive en D, il faut en repartir (pour aller vers A) par une autre arête : $\delta(D)$ est toujours impair. De même, $\delta(A)$ est impair. Pour tout autre sommet X autre que A et D, pour les mêmes raisons, le degré de X est pair.
  Quand $A = D$, c'est un cyle eulérien, et ce sommet est de degré pair comme les autres puisque qu'on en part, et qu'on y revient. Donc le nombre de sommets de degré impair est 0 dans un graphe eulérien, et 2 dans un graphe semi-eulérien.

> **Solution**

- Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $\#V = n$ et $\#E = m$, on montre la propriété par récurrence sur le nombre d'arêtes (m). Si G est connexe, alors G a au minimum $n - 1$ arêtes (d'après les propriétés des arbres).
  Le cas de base est $m = n - 1$. Si il existe un sommet de degré > 2, alors la chaîne passe 2 fois par ce sommet, et donc contient un cycle. Ce n'est pas possible car $m = n - 1$ donc c'est un arbre. Donc tous les autres sommets sont de degré 2 et forment donc une chaîne. Donc tous les sommets sont de degré 1 ou 2 (pas 0 sinon, non connexe). Il existe donc zéro ou deux sommets de degré 1 (par hypothèse), les autres sont donc tous de degré 2 et la chaîne est définie en partant d'un sommet de degré 1 (ou d'un sommet arbitraire) et en parcourant les arêtes de façon déterministe, puisque chaque sommet a une arête entrante et une sortante.
  Par récurrence, on prend A de degré impair ; il reste un autre sommet C de degré impair. On enlève à A une arête incidente $\{A, B\}$; A devient de degré pair. Soit $B \neq C$ et donc B est de degré pair et il devient donc de degré impair, il reste donc B et C de degré impair et on applique l'hypothèse de récurrence sur le graphe partiel privé de l'arête $\{A, B\}$. On trouve donc une chaîne eulérienne entre B et C qu'on compléte entre A et B avec l'arête $\{A, B\}$. Même topo si aucun sommet de degré impair au départ...

$\blacksquare$

Exercice 3.1.2. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever la crayon et sans passer deux fois sur le même trait.

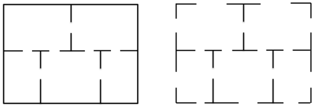


Solution

De gauche à droite on a

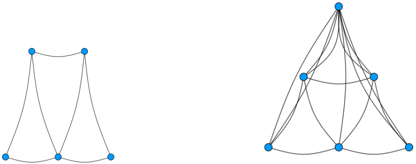
- $\delta v = 3$ pour les 4 sommets. Le graphe n'est ni eulérien, ni semi-eulerien.
- 2 sommets ont un degré 3 et les autres ont un degré de 2 ou 4. Le graphe est donc semi-hamiltonien.
- Tous les degrés sont paires, donc le graphe est eulérien.
- 2 sommets ont un degré 3 et les autres un degré 4. Par suite le graphe est semi-eulérien.

Exercice 3.1.3. Est-il possible de se promener dans ces maisons en passant une et une seule fois par chacune des ouvertures ?



Solution

On obtient les graphes suivants



- Dans le premier graphe on a les dégrés des 5 sommets qui sont : 2,2,3,3,et 4. Le graphe est donc semi-eulérien
- Dans le deuxième graphe les degrés des 6 sommets sont : 4,4,5,5,5 et 9. Le graphe n'est ni eulérien ni semi-eulérien.

Pour trouver une chaîne (ou un cycle eulérien) on donne d'abord une chaîne simple entre les sommets de départ et d'arrivée, on retire ensuite les arêtes déjà parcourues, puis on continue à parcourir puis retirer itérativement des cycles issus de sommets déjà visités.

On a la une condition similaire pour les circuits et chemins eulériens :

Théorème 3.1.3

Un graphe orienté connexe admet

- un circuit eulérienne si et seulement si $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$
- un chemin eulérien si et seulement si $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$, sauf pour 2 sommets, un de ces sommets de degré impair a un degré sortant de plus que de degré entrant et l'autre sommet de degré impair a un degré sortant de moint que de degré entrant.

Définition 3.2.1

- Une chaîne est **hamiltonienne** si elle passe par tous les sommets une fois et une seule.
- Un cycle est **hamiltonien** si c'est un cycle élémentaire comptant autant d'arêtes que de sommets dans G.
- Un graphe est **hamiltonien** (resp. **semi-hamiltonien**) s'il est possible de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne).

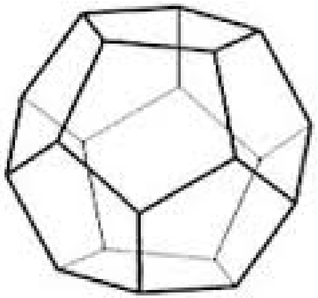
Contrairement aux graphes eulériens, il n'y a pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens.

Exemple 3.2.1.

▷ **Solution**

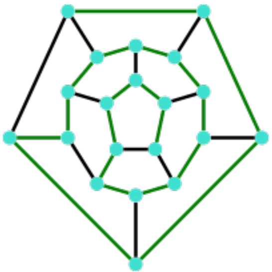
Parcours du cavalier sur un échiquier

Exercice 3.2.2. Jeu de Hamilton (1859) : trouver une chaîne hamiltonienne dans un dodécaèdre.



▷ **Solution**

On peut représenter ce graphe dans le plan et parcourir les nœuds de l'extérieur vers l'intérieur



Proposition 3.2.2

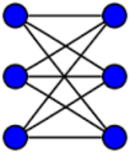
- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 1$ et $n > 1$ alors le graphe n'est pas hamiltonien.
- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 2$ alors les deux arêtes incidentes à v appartiennent à tout cycle hamiltonien.
- K_n est hamiltonien.

► Évident ∎

Définition 3.3.1 – Graphe biparti

Un graphe est biparti si il existe une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que, pout toute arête $e = \{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2\} \cap V_1$ et $\{v_1, v_2\} \cap V_2$ sont des singletons.

Exemple 3.3.1. $K_{3,3}$: on note $K_{i,j}$ un graphe biparti complet, c'est à dire, tel que $\#V_1 = i$, $\#V_2 = j$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.



Proposition 3.4.1

Si $G = (V, E)$ est biparti et si $|\#V_1 - \#V_2| > 1$ alors G n'est ni hamiltonien, ni semi-hamiltonien.

> **Solution**

- Supposons que parte de $v_0 \in V_1$ alors $v_2 \in V_2, \ldots$ par suite
  - $|\#V_1 - \#V_2| \leq 1$ si on a un cycle ou une chaîne hamiltonienne.

$\blacksquare$

Théorème 3.4.2 – Théorème de Ore

Soit G est un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si G vérifie la propriété

$$\forall (v_1, v_2) \in V^2, \{v_1, v_2\} \notin E, \delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n, \tag{1}$$

alors G est hamiltonien.

► Par contradiction. Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ vérifiant (1) et non-hamiltonien. On considère $G_m = \langle V, E' \rangle$ un élément maximal [a] de l'ensemble suivant, obtenu en ajoutant des arêtes à G :

$$\{G' \mid G \text{ est un graphe partiel de } G',\ G' \text{ non-hamiltonien},\ G' \text{ vérifie } (1)\}$$

Cet ensemble est non-vide et ses éléments sont bornés par K_n, donc G_m existe.
G_m est maximal
$\Rightarrow$ toute arête ajoutée à G_m produit un graphe hamiltonien
$\Rightarrow$ G_m est semi-hamiltonien
$\Rightarrow$ il existe un chemin : $v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} - v_n$ tel que $\{v_1, v_n\} \notin E \subseteq E'$
$\Rightarrow$ $\delta(v_1) + \delta(v_n) \geq n$ par (1).

---

a. maximal et non maximum

Comme par ailleurs, on a :

$$\delta(v_1) = |\{i \in [1, n-1] \mid \{v_1, v_{i+1}\} \in E'\}| = |A|$$
$$\delta(v_n) = |\{i \in [1, n-1] \mid \{v_i, v_n\} \in E'\}| = |B|$$

$\Rightarrow \delta(v_1) + \delta(v_n) = |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| \geq n$
$\Rightarrow |A \cap B| \geq 1$ car $|A \cup B| \subseteq [1, n-1] \leq n-1$.
$\Rightarrow$ il existe $i \in [1, n-1]$: $\{v_1, v_{i+1}\} \in E'$, $\{v_i, v_n\} \in E'$
$\Rightarrow$ il existe un cycle hamiltonien dans G' :

$$v_1 - v_2 - \ldots - v_i - v_n - v_{n-1} - \ldots - v_{i+1} - v_1$$

$\Rightarrow$ contradiction avec G' non-hamiltonien ■

Corollaire 3.4.3

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, si tout v est de degré $\geq n/2$ alors G est hamiltonien.

- Cette propriété implique celle du théorème de Ore. ■

Exercice 3.4.1. Soit une grille rectangulaire de taille $2p \times 2q$ composée de $4pq$ carrés identiques. Un pion ne peut se déplacer que d'une case sur une case adjacente (verticalement ou horizontalement, mais pas en diagonale). Ce pion peut-il parcourir toutes les cases une fois et une seule du coin en haut à gauche au coin en bas à droite ?

Solution

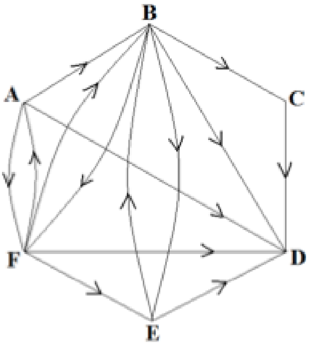
Réponse : non, car si on colore comme un échiquier, les coins opposés sont de même couleur...

Dans un graphe G orienté, on peut chercher des chemins et circuits hamiltonien. On dispose de la méthode (coûteuse) de la multiplication latine.
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G. Les puissances successives de M, M^1, M^2, M^3 ... M^i indiquent par leur coefficient (k, l) le nombre de chaîne de longueur i entre les sommets k et l.
Si on veut de plus obtenir la suite de ces sommets, on peut utiliser la multiplication latine. Elle consiste à indiquer dans une matrice L les arêtes dans les nœuds de la matrice d'adjacence et à les combiner en chemins lors de la multiplication.

Exemple 3.4.2. Dessiner le graphe correspondant à la matrice d'adjacence M suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ **Solution**



On écrit L puis on calcule L^2, L^3 en enlevant au fur et à mesure les chemins qui repasse plusieurs fois par le même sommet (non hamiltonien).

$$L = \begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & AD & 0 & AF \\ 0 & 0 & BC & BD & BE & BF \\ 0 & 0 & 0 & CD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EB & 0 & ED & 0 & 0 \\ FA & FB & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & AFB & ABC & \begin{matrix} ABD \\ AFD \end{matrix} & \begin{matrix} ABE \\ AFE \end{matrix} & ABF \\ BFA & 0 & 0 & \begin{matrix} BCD \\ BED \\ BFD \end{matrix} & BFE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EBC & EBD & 0 & EBF \\ 0 & \begin{matrix} FAB \\ FEB \end{matrix} & FBC & \begin{matrix} FDA \\ FBD \\ FED \end{matrix} & FBE & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

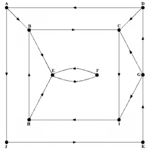
$$L^3 = \begin{pmatrix}
0 & AFEB & AFBC & \begin{array}{c} AFBD \\ ABCD \\ ABED \\ AFED \\ ABFD \end{array} & \begin{array}{c} AFBE \\ ABFE \end{array} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} BFAD \\ BFED \end{array} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
EBFA & 0 & 0 & \begin{array}{c} EBCD \\ EBFD \end{array} & 0 & \\
0 & 0 & \begin{array}{c} FABC \\ FEBC \end{array} & \begin{array}{c} FABD \\ FEBD \\ FBCD \\ FBED \end{array} & FABE & 0
\end{pmatrix}
\quad
L^4 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & AFEBC & \begin{array}{c} AFEBD \\ AFBCD \\ AFBED \\ ABFED \end{array} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} FABCD \\ FEBCD \\ FABED \end{array} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

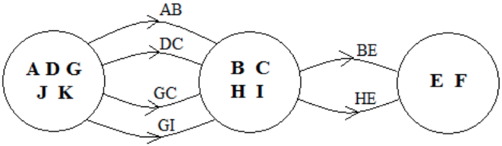
$$L^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AFEBCD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Du coup, L^5 a seulement un coefficient non nul, c'est un chemin hamiltonien. Le dernier nœud de ce chemin est D duquel on arrive plus à repartir, donc un chemin hamiltonien mais pas de cycles.

Utilisation des composantes fortement connexes pour simplifier le problème

La méthode de la mutiplication latine requiert de calculer la $n$ème puissance d'une matrice L de taille $n \times n$. On peut simplifier le problème en partitionnant d'abord le graphe en composantes fortement connexes, et en étudiant les chemins hamiltoniens entre ces composantes fortement connexes.
Sur chaque composante, on calcule les chemins/circuits (par multiplication latine), et on calcule aussi les chemins/circuits sur le graphe réduit, graphe dont chaque noeud est une composante fortement connexe, et chaque arête est labellée par (i, j) sa valeur dans le graphe initial.





On peut noter que trouver un chemin hamiltonien dans un graphe est un problème *NP*-complet. Un problème *NP*-complet, est un problème pour lequel il n'existe pas de solution polynomiale connue. Les algorithmes utilisés sont de complexité (en temps) exponentielle. Dans le cas de la multiplication latine, la multiplication de matrice classique est en $O(n^3)$ mais le nombre de coefficients dans la matrice n'est limité que par le nombre de sommets visités. Or le nombre de chemins de longueur n entre 2 sommets, un coefficient de M^n, est exponentiel (borné par $(n-1)!$).