Théorie des graphes

Chapitre 5 : Planarité et coloration de graphes

5 janvier 2021

INP TOULOUSE ENSEEIHT n7

Définition 5.1.1 – Graphe planaire

- On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. On rappelle que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Une représentation planaire particulière d'un graphe est appelée une **carte**. Une carte divise le plan en plusieurs régions appelées **faces**.

Remarque 5.1.1.

- Il s'agit en fait d'étudier les aspects topologiques d'un graphe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir si un graphe peut être représenté sur une surface S
- Exemple d'application : carte électronique
- Les notions utilisés ici sont à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ! Ce chapitre s'inspire très fortement de l'ouvrage *Eléments de théorie des graphes, Bretto, Faisant, Hennecard*.

Définition 5.1.2

- Soient x et y deux points de T, on appelle **arc géométrique** de x à y toute application continue $\gamma : [0,1] \to T$ injective telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une courbe simple entre x et y est l'image d'un arc géométrique de x à y : $\gamma([0,1])$. On note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des courbes simples sur T.
- On appelle **dessin** F d'un graphe $G = (V, E)$ sur T une application σ : $V \bigsqcup E \to T \bigsqcup \mathcal{C}_T$ injective telle que :
  1) $\sigma|_V : V \to T$ soit injective ;
  2) $\sigma|_E : E \to \mathcal{C}_T$ soit injective ;
  3) si $\sigma(v_i) = x, \sigma(v_j) = y$ et $e = \{v_i, v_j\}$, alors $\sigma(e)$ est une courbe simple de x à y.

[a]

a. $\bigsqcup$ est l'opérateur de réunion disjointe

Remarque 5.1.2. Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup (\bigcup_{e \in E} \sigma(e))$ est encore appelé dessin de G sur T.

Définition 5.1.3 – Plongement

Un dessin d'un graphe G dans $T \subset \mathbb{R}^k$ est un **plongement** si et seulement si les courbes simples ne se coupent qu'aux sommets.

Proposition 5.1.4

Tout graphe (d'ordre fini) admet un plongement dans R^3

> **Solution**

► On place les n sommets du graphe sur une droite de $\mathbb{R}^3$ et on prend m demi-plan différents qui contiennent cette droite. Pour chaque arête, on prend un demi-plan et on trace un arc dans ce demi-plan qui joint les 2 sommets adjacents de l'arête. ■

Exemple 5.1.1.

- Une chaîne élémentaire admet un plongement dans $\mathbb{R}$
- Un cycle élémentaire avec $n > 1$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^2$ mais pas dans $\mathbb{R}$

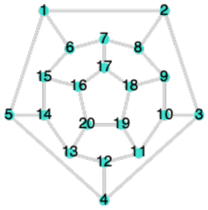
Définition 5.1.5 – Graphe planaire

On dit qu'un graphe est **planaire** s'il admet un plongement dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.1.2. Le dodécaèdre est-il un graphe planaire ?

> **Solution**

Oui, le dessiner



Exercice 5.1.3. Tous les graphes sont-ils planaires ?

> **Solution**

Non, par exemple K_5

Exercice 5.1.4. $K_{3,3}$ est-il planaire ?

> **Solution**

Non

Soit $G = (V, E)$ un graphe plongé dans $\mathbb{R}^2$ et F son dessin. F est un fermé, donc $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert. On a alors :

Définition 5.1.6 – Face

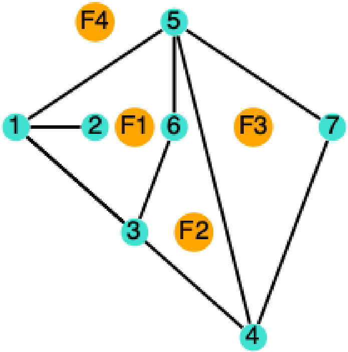
On appelle **face** tout composante connexe (et ouverte) de $\mathbb{R}^2 \setminus F$. On note Φ l'ensemble de ces composantes connexes,

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \cup_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Remarque 5.1.3. Il existe R tel que $F \subset B_f(0, R)$. Par suite il n'existe qu'une seule face non bornée. On appelle cette face la face infinie.

Exemple 5.1.5. Donner les faces de ce graphe.
Attention, ne pas oublier la face infinie.

> **Solution**



Soit φ une face finie, alors sa frontière $\partial\varphi$ est la réunion de cycles élémentaires disjoints et d'arêtes pendantes ou reliant 2 cycles.

Définition 5.1.7 – Contours

On appelle **contour** de la face φ bornée le cycle élémentaire c qui contient son intérieur $\partial\varphi \setminus c$.

Théorème 5.1.8

L'ensemble des contours de toutes les faces d'un graphe planaire forme une base de cycles de ce graphe.

Théorème 5.2.1 – Théorème d'Euler

Dans un graphe planaire d'ordre n, à m arêtes, possédant f faces à p composantes connexes, on a :

$$f = m - n + 1 + p.$$

Exercice 5.2.1. Validez la caractéristique d'Euler-Poincaré sur le graphe de l'exercice précédent.

▷ **Solution**

$f = 4, m = 9, n = 7$ et $p = 1$, ce qui donne $4 = 9 - 7 + 1 + 1$

►

▷ **Solution**

Par récurrence sur n ou m. *à démontrer si temps (2016)*

■

Exercice 5.2.2. Remarquez que $K_{3,3}$ n'est pas planaire en utilisant sa caractéristique d'Euler-Poincaré.

> **Solution**

- Si $K_{3,3}$ était planaire on aurait $n - m + f = 2$, par suite le graphe aurait $f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5$ faces.
- Montrons par l'absurde que chaque face a au moins 4 arêtes dans un contour. Supposons donc qu'une face ait un contour constitué de 3 arêtes, c'est donc un triangle constitué de 3 sommets et de trois arêtes. 2 de ces sommets sont dans V_1 ou V_2 ce qui est impossible (graphe biparti).
- Construisons maintenant le graphe suivant :
  - $V' =$ les faces de G ;
  - On a un arc entre 2 faces si et seulement si elles sont adjacentes.

  On a alors
  - $\#V' = f$,
  - $\#E' = 2m = m'$.

  Mais le nombre d'arêtes est $\geq 4f$, ce qui donne

$$2 \times 9 \geq 4 \times 5!$$

Définition 5.3.1

- On appelle **substitution** d'un sommet v par un sommet u dans une arête $e = \{e_1, e_2\}$, notée $Subst_v^u(e)$, l'arête $\{e'_1, e'_2\}$ telle que $e'_i = u$ si $e_i = v$, $e'_i = e_i$ sinon
- On appelle **contraction** d'une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ la disparition de cette arête et l'identification des deux sommets u et v. On obtient alors un nouveau graphe $G' = (V \setminus \{v\}, Subst_v^u(E) \setminus \{u, u\})$.
- On appelle **contracté** d'un graphe G tout graphe obtenu par une suite finie (voire vide) de contractions à partir de G

On remarque que le graphe reste simple (car on considère l'ensemble des arêtes comme un ensemble qui ne contient pas de doublons).

Théorème 5.3.2 – Théorème de Kuratowsky (1930)

(caractérisation des graphes planaires) Un graphe G est planaire ssi il ne contient aucun sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 dans aucun contracté de G.

Définition 5.3.3 – graphe dual

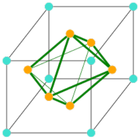
Soit G un graphe planaire. On appelle **graphe dual** de G le graphe G^* défini par

1) les sommets de G^* sont les faces de G : $V^* = \Phi$;
2) pour chaque arête de G on définit une arête e^* de G^* de la façon suivante : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces φ, ψ ; on pose alors $e^* = \{\varphi, \psi\}$ (c'est une boucle si $\varphi = \psi$).

Exercice 5.3.1. Vérifiez que le bi-dual d'un cube est un cube.

> **Solution**

Le cube et son graphe dual



De façon générale, le bi-dual d'un graphe est le graphe lui-même.

Définition 5.4.1 – Stable

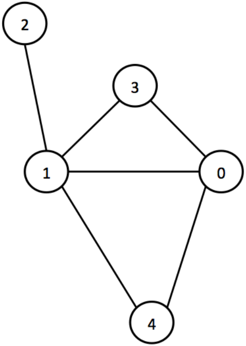
Un **stable** d'un graphe est un ensemble de sommets qui ne contient que des sommets 2 à 2 non adjacents.
Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G noté $\alpha(G)$.

Définition 5.4.2 – Coloration

Une **coloration** d'un graphe consiste à affecter tous les sommets tels que 2 sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Une coloration à k couleurs est donc une partition de V en k stables.
Le **nombre chromatique** noté $\gamma(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une k-coloration.

Exercice 5.4.1. Donner les stables de ce graphe et son nombre de stabilité.



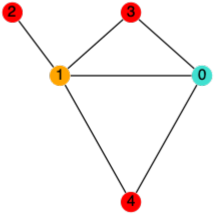
> **Solution**

$S = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 2\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4\}\}$.
$\alpha(G) = 3$.

Exercice 5.4.2. Quel est le nombre chromatique du graphe de l'exercice précédent. La $\gamma(G)$-coloration trouvée est-elle unique ?

> **Solution**

3 car on peut trouver facilement une 3 coloration, et on ne peut pas faire mieux car K_3 est un sous-graphe. Pas d'unicité.



Proposition 5.4.3

1) $\gamma(G) \leq r+1$ où $r = \max_{v \in V} \delta(v)$;
2) $\gamma(G) \leq n+1-\alpha(G)$;
3) $\gamma(G) \geq \#$*sommets* dans la plus grande clique.

Solution

- 1) Il suffit d'appliquer l'algorithme suivant

  Initialisation
  On colorie v_0
  pour Tous les sommets $v_i \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ **faire**
  On colorie le sommet v_i de façon à ce que ses voisins déjà colorié aient des couleurs différentes à la sienne
  fin pour

  2) On colore tous les sommets d'un stable de cardinal $\alpha(G)$. Il reste ensuite à colorier les $n-\alpha(G)$ sommets restant auxquels on affecte des couleurs différentes

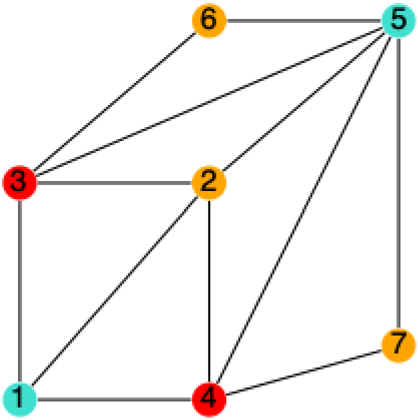
  3) Évident

■

Exercice 5.4.3. Minorez et majorez le nombre chromatique de ce graphe.

> **Solution**

c'est 3, mais si on ajoute l'arête $\{6, 7\}$, on passe à 4...ce qui est intéressant car il n'y a pas de clique à 4 sommets.



Exercice 5.4.4. Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise lorsqu'il était dans la salle ?

Solution

On construit le graphe des rencontres : les sommets représentent les élèves ; une arête $\{i, j\}$ signale que les élèves i et j se sont rencontrés. Il reste alors à proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs. Chaque couleur correspondra à une place assise. La coloration montre que la bibliothèque dispose d'au moins quatre places assises, car le graphe contient une clique à quatre sommets $B - E - F - G$. Ces quatre places assises sont suffisantes.

Exercice 5.4.5. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

> **Solution**

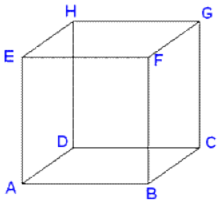
- $\Rightarrow$ Un graphe biparti peut être colorié de 2 couleurs ce qui est impossible pour un cycle de longueur impair.
- $\Leftarrow$ On peut supposer que le graphe est connexe (sinon on travaille sur chaque composante connexe. On construit alors un arbre convrant. On peut alors colorier les sommets avec 2 couleurs (on alterne les 2 couleurs par niveau). Si on ajoute maintenant une arête, on crée un cycle qui est de longueur pair, par suite les deux sommets adjacents à cette arête sont de couleurs différentes.

C'est un algorithme de coloration glouton.
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On colorie le premier sommet non encore colorié avec une nouvelle couleur, et en suivant l'ordre de la liste, tous les sommets que l'on peut colorier avec cette même couleur. On recommence, jusqu'à que chaque sommet ait été colorié.

Exercice 5.4.6. Montrez en utilisant un cube, que l'algorithme de Welsh-Powell ne mène pas à une solution optimale.

> **Solution**

Le graphe est régulier, l'ordre des sommets est donc arbitraire. Si on ordonne dans l'ordre alphabétique *ABCDEFGH* alors l'algorithme de Welsh-Powell trouve 2 couleurs (le graphe est en fait biparti), si on ordonne *AGBHCFED* alors l'algorithme de Welsh-Powell donne 4 couleurs !



Exercice 5.4.7. Dans un tournoi de basket, chaque équipe rencontre toutes les autres, et chaque rencontre dure une heure. Déterminer la durée minimale du tournoi avec 3, 4, 5 ou 6 équipes.

> **Solution**

Il s'agit de colorier avec le minimum de couleurs les arêtes des graphes complets à 3, 4, 5 et 6 sommets. Les sommets représenteront les équipes, les arêtes les matchs et les couleurs les heures des matchs. Ceci est équivalent à colorier les sommets du graphe adjoint $G' = (V', E')$ où

- $v' =$ les arêtes du graphes G ;
- 2 sommets du graphe G' sont reliées par une arête si et seulement si les 2 arêtes du graphe G sont adjacentes.

Théorème 5.4.4 – Théorème des 4 couleurs

On peut colorier les sommets d'un graphe planaire en utilisant au plus quatre couleurs, de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Ce théorème a été démontré en 1976... en utilisant un ordinateur. La conjecture datait de 1852 ! !
On peut par contre démontrer le théorème des 5 couleurs de façon plus simple.
Exercice 5.4.8. **Théorème des 5 couleurs** Tout graphe planaire peut être colorié avec 5 couleurs.
Pour démontrer ce théorème, on démontre les deux lemmes suivants :
Lemme 5.4.1. *$3f \leq 2m$ à partir d'un certain rang pour m (lequel ?)*

> **Solution**

► Pour $f = 1$ la formule est fausse si $m = 0$ ou 1.
Pour $f > 1$,chaque face est entourée par au moins 3 arêtes, et chaque arête d'un contour est commune à 2 faces voisines. Par suite $3f \leq 2\times$ le nombre d'arêtes dans les contours$\leq 2m$. ■

***Lemme 5.4.2**. Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.*

> **Solution**

▶ Par l'absurde : si tous les sommets sont de degré ≥ 6 : $\sum_{v \in E} \delta(v) \geq 6n$, or $\sum_{v \in E} \delta(v) = 2m$, d'où $m \geq 3n$, soit

$$n \leq \frac{m}{3} \tag{1}$$

La formule d'Euler donne :

$$p + 1 = n - m + f,$$

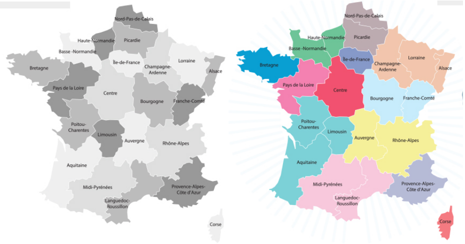
or d'après le lemme 1 et l'inégalité 1 ci dessus on obtient $p + 1 \leq \dfrac{m}{3} - m + \dfrac{2m}{3} = 0$ contradiction !

■

- On se sert du lemme 2 pour faire une récurrence sur n pour démontrer le théorème :
  - pour $n = 0$ OK
  - Supposons le théorème vrai pour n, et considérons un graphe à $n + 1$ sommets. Il existe un sommet de degré au plus 5 (lemme 2) : on applique l'hypothèse de récurrence sur le sous-graphe généré par les sommets restants.
    Appelons v_i, $i = 1 \ldots 5$, les 5 voisins de v ordonnés en tournant autour de v.
    - Si 2 des v_i partagent une couleur, il y a une couleur restante pour v, dans ce cas, on l'utilise pour v, et la propriété est vérifiée ;
    - Sinon, tous les v_i sont tous de couleur différente :
      - si il n'existe aucun chemin bicolore entre v_1 et v_3, alors, on peut recolorier le sous-graphe partiel restreint aux couleurs $\{c_1, c_3\}$ connexe à v_3 (qui ne contient du coup pas v_1) en intervertissant les couleurs c_1 et c_3. v_3 devient de la même couleur que v_1, et on colorie v avec c_3.
      - si il existe un chemin bicolore de v_1 à v_3, alors, par planarité, tout chemin entre v_2 et v_4 recoupe ce chemin en un sommet de couleur c_1 ou c_3 : il n'existe donc aucun chemin bicolore de v_2 à v_4, et on peut donc colorier v_4 de la même couleur que v_2 en utilisant le même argument qu'au point précedent.

  On peut donc colorier le graphe d'ordre $n + 1$ avec 5 couleurs ce qui termine la récurrence.

Exercice 5.4.9. Voici les deux dernières versions des cartes des régions de France. A-t-on gagné une ou plusieurs couleurs en passant de 22 à 13 régions ?



Solution

Réponse : Non, autour (et voisines) de la région 'ile-de-france' on a 5 régions 2 à 2 adjacentes, ce qui oblige à prendre 4 couleurs sur les deux cartes.