Exercice 1 Orthogonal Projection

transpa 6

$Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $m > n$ tq $Q^TQ = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

X sous-espace de dimension n généré par les colonnes orthogonales de Q (orthonormales)

Montrer que $P_X = QQ^T \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est une projection orthogonale sur X

préambule

① $rg(Q) = n$

$$rg(Q^TQ) = rg(I_n) = n \leq \min(rg(Q^T), rg(Q))$$

(résultat connu)

$$n \leq rg(Q) \quad \text{car} \quad rg(Q) = rg(Q^T)$$

et comme $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$

$rg(Q) \leq n$

$$rg(Q) = n$$

et X est de dimension n

② les colonnes de Q sont orthonormales

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix} [c_1 \, c_2 \, .. \, c_n] = \begin{pmatrix} c_1^Tc_1 & & c_i^Tc_j \\ & \ddots & \\ c_j^Tc_i & & c_n^Tc_n \end{pmatrix} = I_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^Tc_j =$$

donc $c_i^Tc_i = 1$ et $c_j^Tc_i = 0$ $i \neq j$

les colonnes de Q sont orthonormales et forment une base de X

$P_X = Q Q^T$ orthogonal projection onto X

$$P_X P_X = Q Q^T Q Q^T = Q I_n Q^T = Q Q^T = P_X$$

$\Rightarrow P_X$ est une projection

$$P_X^T = (Q Q^T)^T = Q^T Q = P_X$$

$\Rightarrow P_X$ est une projection orthogonale de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathrm{Im}(P_X)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(P_X)$

- $X = \mathrm{Im}(P_X)$?

$y \in X \quad y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$

$$P_X y = Q Q^T y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{Q Q^T}_{\sum_{j=1}^{n} c_j c_j^T} c_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{c_j^T c_i}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

$$= y$$

$y \in \mathrm{Im}(P_X) \quad X \subset \mathrm{Im}(P_X) \quad \mathrm{rg}(P_X) \geq n$

$$\mathrm{rg}(P_X) \leq \min(\mathrm{rg}(Q^T), \mathrm{rg}(Q))$$
$$\leq \mathrm{rg}(Q) = n$$

$\mathrm{rg}(P_X) = n$ et $X = \mathrm{Im}(P_X)$

- projection orthogonale (déjà démontrée par $P_X^T = P_X$)

$z \in \mathbb{R}^m$

$z = z_X + z_T$ avec $z_X \in X$

$= P_X z$

$$z_T = z - P_X z$$
$$= (I - P_X) z$$

$z_T \perp X$? $\Leftarrow$ P_X projection orthogonale sur X

$Q^T z_T = 0$?

$$Q^T z_T = (Q^T - \underbrace{Q^T Q}_{I} Q^T) z$$
$$Q^T z_T = 0$$

<u>cqfd</u>