

## TD 2 – Contraintes : égalités, inégalités

▶ Exercice 1. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} ((x_1 - 1)^2 + x_2^2) \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{cases}$$

paramétré par  $\beta$  dans  $\mathbb{R}.$ 

- 1.1. Représenter graphiquement la contrainte et les lignes de niveau associées au critère.
- 1.2. Déterminer la nature (minimum/maximum, local/global) des points critiques suivant la valeur de  $\beta$ .

**•** 

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

- 2.1. Montrer qu'on a existence et unicité.
- 2.2. Caractériser la solution.
- **2.3.** Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que Az = b si et seulement si  $(x_1, x_2, x_3)$  est solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires à préciser.

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} ||x - a||^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

avec a fixé dans  $\mathbb{R}^n$ .

**3.1.** Montrer qu'on a existence et unicité.

- 3.2. Caractériser la solution.

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- **4.1.** Le point x = (1, 1, -1) est-il solution locale? Globale?
- 4.2. Donner l'ensemble des solutions locales, puis l'ensemble des solutions globales.
- ▶ Exercice 5. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} ||x - a||^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

avec 
$$a = (1, ..., 1)$$
.

- 5.1. Montrer qu'on a existence et unicité.
- **5.2.** Caractériser la solution.
- ▶ Exercice 6. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i / (1 + x_i) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \langle b, x \rangle = 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

- 6.1. Montrer qu'on a existence et unicité et que la solution est caractérisée par la CN1.
- **6.2.** Quel est le nombre maximal de contraintes actives à la solution?
- **6.3.** On prend  $a=b=(1,\ldots,1)$ . Déterminer l'ensemble des contraintes actives et calculer la solution.