TD 1 – Optimisation, rappels et généralités

▷ **Exercice 1.** Étudier le problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} Min & f(x) \\ x\in\mathbb{R}^n. & \end{array}\right.$$

pour les application suivantes :

1.1.

$$\begin{array}{rccl} f_1\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & 2\,(x_1+x_2+x_3-3)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2. \end{array}$$

1.2.

$$\begin{array}{rccl} f_1\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \longmapsto & 100\,(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2. \end{array}$$

▷ **Exercice 2.** Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $<\cdot,\cdot>$, et de la norme euclidienne associée. Soit $a\in\mathbb{R}^n$. On considère alors l'application

$$\begin{array}{rccl} f_a\colon & \Omega=\{x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|<1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_a(x)=-\ln(1-\|x\|^2)+<a,x>. \end{array}$$

2.1. Montrer que f_a est deux fois dérivable sur Ω.

2.2. Exprimer $\nabla f_a(x)$ et $\nabla^2 f_a(x)$ en tout point de Ω.

2.3. Montrer que f_a est strictement convexe sur Ω.

2.4. Discuter en fonction de a des solutions du problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} Min & f_a(x) \\ x\in\Omega & \end{array}\right. .$$

2.5. Même question en imposant $\|x\|<1/2$.

▷ **Exercice 3.** Démontrer le lemme

Lemme 1. *Soit q la forme quadratique $q(s)=g^\top s+\frac{1}{2}s^\top Hs$, H symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. *q atteint un minimum si et seulement si H est semi-définie positive et $g\in\operatorname{Im}H$ et dans ce cas tout point solution de $Hs=-g$ est un minimum global de q.*
2. *q a un unique minimum si et seulement si H est définie positive.*