Interpolation & Approximation polynômiales

Philippe BERGER

15 Novembre 2005

Table des matières

Chapitre 1

Interpolation polynômiale

1.1 Position du problème

formulation 1 : Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $(n+1)$ abscisses dans I : $x_i \;\; i=0,\dots,n$
Comment déterminer un polynôme réel passant exactement par tous les points

$$(x_i, f(x_i)) \quad i=0,\dots,n \;\; ?$$

OU

formulation 2 : Soient $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$: $(x_i, y_i) \quad i=0,\dots,n$
Comment déterminer un polynôme réel passant exactement par tous ces points ?

1.2 Interpolation de Lagrange

1.2.1 Théorème de Lagrange

Il existe un polynôme et un seul P_n, de degré inférieur ou égal à n ($\in \mathcal{P}_n$) tel que :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0,\dots,n$$

démonstration : Soit $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
Les coefficients $a_i \;\; i=0,\dots,n$ sont donc solutions du système linéaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues : $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i) \quad i=0,\dots,n$
Le déterminant D de ce système s'écrit :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

D, déterminant de VanderMonde, est non nul car tous les x_i sont distincts. Le système est donc de *rang* $(n+1)$ et admet une solution unique P_n.

1.2.2 Expression du polynôme de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

avec $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

en effet : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$

- L_i est un polynôme de degré n
- $L_i(x_j) = \delta_{ij} \ \ j = 0, \ldots, n$
  δ représentant ici le symbole de Krönecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

d'où :

- P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n
- $j = 0, \ldots, n \qquad P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_j) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ij} f(x_i) \ = f(x_j)$

P_n peut également s'écrire sous forme matricielle :

$$P_n(x) = [\ 1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^n]\ ].L.^t[\ f(x_0) \quad f(x_1) \quad \ldots \quad f(x_n)\ ]$$

L : matrice $(n+1) \times (n+1)$ dont les termes de la $(i+1)^{ème}$ colonne sont les coefficients du développement de $L_i(x)$ suivant les puissances croissantes de x. C'est la matrice de Lagrange associée aux abscisses $x_i \ \ i = 0, \ldots, n$.

L est indépendante de f et, en particulier, pour $x_i = i \quad i = 0, \ldots, n$, L est appelée matrice de Lagrange régulière d'*ordre* $(n+1)$.

Exercice 1

On considère la matrice de Lagrange régulière $L = [l_{ij}]$ d'ordre n.

1) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_{ij} = 1 \ \ si \ \ j = 2, \ \ = 0 \ \ si \ \ j \neq 2$

2) Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} l_{ij} = 1 \ \ si\ i = 1, \ \ = 0 \ \ si \ \ i \neq 1$

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soient $(n+1)$ abscisses distinctes de $[a,b]$: $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

On note $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Démontrer les relations de Cauchy :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^{n} L_i(x)(x_i - x)^j = 1 \qquad si\ j = 0$$

$$= 0 \qquad si\ j = 1, \ldots, n$$

1.2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

f étant supposée $(n+1)$ fois dérivable sur le plus petit intervalle J contenant les abscisses $x_i \;\; i = 0, \ldots, n$ et x :

$$f(x) - P_n(x) = L(x)\frac{f^{(n+1)}(\beta(x))}{(n+1)!}$$

où $L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ et $\beta(x) \in J$

démonstration : Soit la fonction F de la variable t définie par :

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{(f(x) - P_n(x))L(t)}{L(x)}$$

F admet au moins dans J les $(n+2)$ zéros distincts $x_i \;\; i = 0, \ldots, n$ et x.

Application du théorème de Rolle : $F\,'$ admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans J, $F\,''$ admet n zéros distincts ... $F^{(n+1)}$ admet au moins un zéro dans J.

Soit $\beta(x)$ ce zéro (qui dépend de x) :

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(f(x) - P_n(x))(n+1)!}{L(x)}$$

$$F^{(n+1)}(\beta(x)) = 0 \Rightarrow \text{ d'où le résultat}$$

1.2.4 Choix optimal des abscisses d'interpolation

Polynômes de Tchebycheff

Le polynôme de Tchebycheff de degré n s'écrit : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
Il s'agit d'un polynôme de degré n

démonstration (par récurrence) :

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

Supposons que $T_{n-1}(x)$ et $T_n(x)$ soient respectivement des polynômes de degrés $(n-1)$ et n :

$$\cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) \;=\; 2x\cos(n \arccos x)$$

d'où $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ donc $T_{n+1}(x)$ est bien un polynôme de degré $(n+1)$.

Propriétés des polynômes de Tchebycheff :

- La même récurrence montre que le coefficient de x^n dans $T_n(x)$ est 2^{n-1}.
- Les zéros de $T_n(x)$ sont les abscisses : $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k = 0, \ldots, n-1$
- Les minima et maxima de $T_n(x)$ sont obtenus aux abscisses $x_p = \cos\dfrac{p\pi}{n} \quad p = 0, \ldots, n$ et valent $(-1)^p$.

Théorème : Soit Q_n l'ensemble des polynômes de degré n à coefficient principal réduit (coef. multiplicatif de $x^n = 1$) alors :

$$\forall p \in Q_n \qquad \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

t_n désignant le polynôme déduit de T_n en réduisant le coefficient principal.

démonstration :

i) $t_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ et les extrema de $T_n(x)$ valent $(-1)^k \Rightarrow$
$\max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

ii) Supposons $\exists p \in Q_n$ t.q. $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \max_{x\in[-1,1]} |t_n(x)|$ alors le polynôme $D = t_n - p$ est de degré $n-1$ et possède aux $(n+1)$ abscisses u_k (extrema de $T_n(x)$) le même signe que t_n.

Plus exactement : $D(u_k) > 0$ pour k pair, < 0 pour k impair
donc D est nul en n abscisses distinctes (séparant les $(n+1)$ abscisses u_k) $\Rightarrow$ $D = 0$ et $p = t_n$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse.

Choix optimal des abscisses sur $I = [-1, 1]$

Pour une fonction f donnée, le seul terme de l'erreur (en valeur absolue) qui peut être raisonnablement minimisé, par un choix convenable des abscisses d'interpolation, est $|L(x)|$.

Or $L \in Q_{n+1}$ donc, si l'on veut minimiser $\max_{x\in[-1,1]} |L(x)|$, il faut choisir
$x_i \;\; i = 0, \ldots, n$ comme les zéros de T_{n+1} : $x_i = \cos \dfrac{(2i+1)\pi}{2n+2}$

Choix optimal des abscisses sur $I = [a, b]$

Soit $x_i = \cos \dfrac{(2i+1)\pi}{2n+2} \qquad i = 0, \ldots, n$
Les abscisses optimales $z_i \;\; i = 0, \ldots, n$ sur $[a, b]$ sont obtenues en effectuant les changements de variables : $z_i = h(x_i) \;\; i = 0, \ldots, n$ avec

$$h \;:\; [-1, 1] \longrightarrow [a, b] \qquad\qquad x \longrightarrow h(x) = \frac{x(b-a) + (b+a)}{2}$$

1.3 Interpolation d'Hermite

1.3.1 Théorème d'Hermite

Il existe un polynôme et un seul H_{2n+1}, de degré inférieur ou égal à $2n+1$ tel que :

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$
$$H'_{2n+1}(x_i) = f\,'(x_i)$$

les $x_i \;\; i = 0, \ldots, n$ désignant des abscisses distinctes de I.

démonstration :

Cherchons H_{2n+1} sous la forme : $H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} U_j(x)f(x_j) + \sum_{j=0}^{n} V_j(x)f\,'(x_j)$
avec $U_j(x)$ et $V_j(x)$ appartenant à $\mathcal{P}_{2n+1}$ qui vérifient les conditions :
$i, j = 0, \ldots, n$

$$(1)\ \ U_j(x_i) = \delta_{ij} \qquad (3)\ \ V_j(x_i) = 0$$

$$(2)\ \ U_j{}'(x_i) = 0 \qquad (4)\ \ V_j{}'(x_i) = \delta_{ij}$$

– Posons $U_j(x) = L_j^2(x)(a_jx + b_j)$

$$(1)\ \Rightarrow\ a_jx_j + b_j = 1 \qquad (2)\ \Rightarrow\ 2L_j'(x_j)(a_jx_j + b_j) + a_j = 0$$

$$a_j = -2L_j'(x_j) \qquad b_j = 1 + 2x_jL_j'(x_j)$$

– Posons $V_j(x) = L_j^2(x)(c_jx + d_j)$

$$(3)\ \Rightarrow\ c_jx_j + d_j = 0 \qquad (4)\ \Rightarrow\ 2L_j'(x_j)(c_jx_j + d_j) + c_j = 1$$

$$c_j\ =\ 1 \qquad d_j\ =\ -x_j$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n}\ L_j^2(x)[1 - 2(x - x_j)L_j'(x_j)]f(x_j) + \sum_{j=0}^{n}\ L_j^2(x)(x - x_j)f'(x_j)$$

Il reste à montrer l'unicité : soient P et Q deux polynômes de degré inférieur ou égal à $(2n+1)$ vérifiant les relations d'Hermite. Soit $D = P - Q$.

D admet $(n+1)$ racines doubles $x_i\ \ i = 0, \ldots, n$ car
$D(x_i) = D'(x_i) = 0 \quad i = 0, \ldots, n$. D étant de degré $\leq (2n+1)$, D est le polynôme nul.

1.3.2 Expression de l'erreur d'interpolation

f étant supposée $(2n+2)$ fois dérivable sur le plus petit intervalle J contenant $x_i\ \ i = 0, \ldots, n$ et x :

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{L(x)^2 f(\beta(x))^{(2n+2)}}{(2n+2)!}$$

où $\beta(x) \in J$

démonstration : Soit $F(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \dfrac{(f(x) - H_{2n+1}(x))L(t)^2}{L(x)^2}$
F admet, dans J, au moins $(n+2)$ zéros : $x_i\ \ i = 0, \ldots, n$ et x.
$F\,'$ admet, dans J, au moins $(n+1)$ zéros séparant les précédents (théorème de Rolle) ainsi que $x_i\ \ i = 0, \ldots, n$ donc, au total, au moins $(2n+2)$ zéros distincts.
...
$F^{(2n+2)}$ admet au moins un zéro $\beta(x) \in J$ d'où l'expression.

1.4 Interpolation d'Hermite généralisée

Recherche d'un polynôme H, de degré $\leq (n+1)$ relativement à $(p+1)$ abscisses d'interpolation $x_i \;\; i = 0, \ldots, p$. $(n+2)$ renseignements doivent être disponibles : à l'abscisse x_i, toutes les dérivées de H sont connues jusqu'à l'ordre m_i et $n+2 \;=\; \sum_{i=0}^{p} (m_i+1)$

Exemple : Trouver le polynôme H, de degré ≤ 7 t.q.

$$H(0) = 1 \quad H(1) = 2 \quad H(2) = 129$$

$$H\,'(0) = 0 \quad H\,'(1) = 7 \quad H\,'(2) = 448$$

$$H\,''(0) = 0 \quad H\,''(2) = 1344$$

$n = 6,\; p = 2,\; m_0 = 2,\; m_1 = 1,\; m_2 = 2$

Ce polynôme est unique : soient P et Q, deux polynômes de degré inférieur ou égal à $(n+1)$ vérifiant les $(n+2)$ conditions. Soit $D = P - Q$.
D est de degré $\leq \; (n+1)$. D possède $(p+1)$ racines x_i d'ordre de multiplicité (m_i+1). C'est donc le polynôme nul.

Soit la division euclidienne de H par $\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$: $H(x) = S(x) \prod_{i=0}^{p}(x-x_i) + R(x)$
Sur l'exemple : $H(x) = x(x-1)(x-2)S(x) + R(x)$, R de degré ≤ 2, S de degré ≤ 4.

Connaissant les valeurs $(x_i, H(x_i)) \;\; i = 0, \ldots, p$, calcul du polynôme R par résolution d'un problème de Lagrange en $x_i \;\; i = 0, \ldots, p$.

Sur l'exemple :

$$H(0) = R(0) = 1 \qquad H(1) = R(1) = 2 \qquad H(2) = R(2) = 129$$

$$\Rightarrow \; R(x) = 63x^2 - 62x + 1$$

Les $(n+2) - (p+1)$ autres renseignements se traduisent pour le polynôme S par :

- soit un problème de Lagrange
- soit un problème d'Hermite
- soit un nouveau problème d'Hermite généralisé : recommencer alors la même procédure.

Sur l'exemple :

$$H\,'(x) = x(x-1)(x-2)S\,'(x) + (3x^2 - 6x + 2)S(x) + 126x - 62$$

$$H\,''(x) = x(x-1)(x-2)S\,''(x) + 2(3x^2 - 6x + 2)S\,'(x) + 6(x-1)S(x) + 126$$

$$H\,'(0) = 0 \;\Rightarrow\; S(0) = 31$$

$$H\,'(1) = 7 \;\Rightarrow\; S(1) = 57$$

$$H\,'(2) = 448 \;\Rightarrow\; S(2) = 129$$

$$H\,''(0) = 0 \;\Rightarrow\; S\,'(0) = 15$$

$$H\,''(2) = 1344 \;\Rightarrow\; S\,'(2) = 111$$

C'est un nouveau problème d'Hermite généralisé.

Division euclidienne de S par $x(x-1)(x-2)$: $S(x) = x(x-1)(x-2)U(x) + V(x)$
U de degré ≤ 1, V de degré ≤ 2

$$S(0) = V(0) = 31 \qquad S(1) = V(1) = 57 \qquad S(2) = V(2) = 129$$

Problème de Lagrange : $V(x) \;=\; 23x^2 + 3x + 31$

$$S\,'(x) = (3x^2 - 6x + 2)U(x) + x(x-1)(x-2)U'(x) + 46x + 3$$

$$S\,'(0) = 15 \;\Rightarrow\; U(0) = 6$$

$$S\,'(2) = 11 \;\Rightarrow\; U(2) = 8$$

Problème de Lagrange : $U(x) = x + 6$

Résultat final :

$$H(x) = x^2(x-1)^2(x-2)^2(x+6) + x(x-1)(x-2)(23x^2+3x+32) + 63x^2 - 62x + 1$$

Exercice 3

a) Un raccordement entre 2 voies ferrées parallèles, d'équations $y = 0$ et $y = 2$, est un polynôme joignant les gares de coordonnées $(0,0)$ et $(4,2)$ et tangent aux voies en ces gares. Déterminer ce polynôme.

b) Pour améliorer encore les raccordements, on impose de plus, sur ce polynôme, des conditions de dérivées secondes nulles en $(0,0)$ et $(4,2)$. Déterminer le polynôme qui répond à ces spécifications.

Exercice 4

On considère le problème d'Hermite généralisé traité en cours qui consiste à rechercher un polynôme $H \in P_7$. A partir des raisonnements conduisant à une expression de l'erreur pour les interpolations de Lagrange et d'Hermite, déterminer, en la démontrant, une expression de $f(x) - H(x)$.

1.5 Interpolation de Lagrange : Expression à partir des différences divisées

$\{x_k\}$, k entier, une suite quelconque d'abscisses
$S_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ $\quad f_k = f(x_k)$ $\quad P_k$ polynôme de Lagrange sur S_k

1.5.1 Différences divisées

différence divisée première entre deux abscisses x_i et x_j : $(x_i, x_j) = \dfrac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$

différence divisée seconde : $(x_i, x_j, x_k) = \dfrac{(x_k, x_j) - (x_i, x_j)}{x_k - x_i}$

différence divisée d'ordre n :

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Propriétés des différences divisées : (démonstration par récurrence)

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Les différences divisées sont invariantes par toute permutation des arguments (corollaire) :

$i_0,\ i_1, \ldots, i_n$ et $j_0,\ j_1, \ldots, j_n$ désignant 2 permutations distinctes de $\{0, 1, \ldots, n\}$:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n-1}}) - (x_{j_0}, \ldots, x_{j_{n-1}})}{x_{j_n} - x_{i_n}}$$

1.5.2 Construction de la suite de polynômes P_n en utilisant les différences divisées : formule de Newton

On peut construire P_n, à partir de P_{n-1}, par la récurrence :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

démonstration : $\quad P_n(x) = P_{n-1}(x) + (P_n(x) - P_{n-1}(x))$

or $j = 0, \ldots, n-1 \qquad P_n(x_j) - P_{n-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0$

$$\Rightarrow\ P_n(x) - P_{n-1}(x) = A \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

$A \in \mathbb{R}$ est une constante (car $P_n - P_{n-1} \in \mathcal{P}_n$), déterminée par l'évaluation de l'équation en x_n :

$$A = \frac{f_n - P_{n-1}(x_n)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)} = \frac{f_n}{\prod\limits_{j=0, j\neq n}^{n} (x_n - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_i - x_j}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_n}{\prod\limits_{j=0, j\neq n}^{n} (x_n - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_j}}{x_n - x_i} \\ &= \frac{f_n}{\prod\limits_{j=0, j\neq n}^{n} (x_n - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} f_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

$$A = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

d'où : $P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$

comme $P_0 = f_0$, on en déduit une nouvelle expression, à partir des différences divisées, du polynôme d'interpolation de Lagrange dite formule de Newton :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f_0 + (x_0, x_1)(x - x_0) + (x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\quad +(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

1.5.3 Expression de l'erreur à l'aide des différences divisées

Propriété des différences divisées :

$$(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x)}{\prod\limits_{j=0}^{n} (x - x_j)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{(x - x_i) \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x, x_0, x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) + \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= (x, x_0, x_1, \ldots, x_n) L(x) + P_n(x) \end{aligned}$$

d'où l'expression de l'erreur : $f(x) - P_n(x) = (x, x_0, x_1, \ldots, x_n)L(x)$

On obtient donc également une relation entre dérivées et différences divisées :

$$(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(\beta(x))^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad avec \ \ \beta(x) \in J$$

1.5.4 Généralisation pouvant conduire à une heuristique de calcul

Notations : $S_k = \{x_{m_k}, x_{m_k} + 1, \ldots, x_{m_k} + k\}$, P_k le polynôme de Lagrange sur S_k.

La suite $\{m_k\}$ étant une suite non croissante d'entiers telle que $m_{k+1} = m_k$ ou $m_{k+1} = m_k - 1$ i.e. pour passer de S_k à S_{k+1}, on ajoute une nouvelle abscisse vers la gauche ou vers la droite de l'ensemble des abscisses ordonnées de S_k.

Exemple :

$$m_0 = 0 \qquad S_0 = \{x_0\}$$
$$m_1 = m_0 = 0 \qquad S_1 = \{x_0, x_1\}$$
$$m_2 = m_1 = 0 \qquad S_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$
$$m_3 = m_2 - 1 = -1 \qquad S_3 = \{x_{-1}, x_0, x_1, x_2\}$$

S_k est formé de $(k+1)$ abscisses consécutives et, plus précisément :

$$S_{k+1} = S_k \cup \{x_{m_k+k+1}\} \quad si \ m_{k+1} = m_k$$

$$S_{k+1} = S_k \cup \{x_{m_k - 1}\} \quad si\ m_{k+1} = m_k - 1$$

La formule de Newton précédente peut alors se réécrire, avec cette nouvelle notation :

$$P_n(x) = f_{m_0} + (x_{m_1}, x_{m_1+1})(x - x_{m_0}) + (x_{m_2}, x_{m_2+1}, x_{m_2+2})(x - x_{m_1})(x - x_{m_1+1}) + \ldots$$

$$+ (x_{m_n}, \ldots, x_{m_n+n})(x - x_{m_{n-1}}) \ldots (x - x_{m_{n-1}+n-1})$$

Chapitre 2

Approximation polynômiale

2.1 Meilleure approximation dans un espace vectoriel

2.1.1 Meilleure approximation dans un espace vectoriel normé

Théorème 1

E espace vectoriel normé (e.v.n.) de norme $\|.\|$.
G, sous-espace vectoriel de E, de dimension finie,

$y \in E$ donné, y n'appartenant pas à G (sinon le problème n'a pas lieu d'être)

$$\text{alors } \exists g^\star \in G \text{ t.q. } \|y - g^\star\| = \min_{g \in G} \|y - g\|$$

$g^\star$ est appelé meilleur approximant (m.a.) de y dans G pour la norme $\|.\|$.

Théorème 2

L'ensemble A des meilleurs approximants de y dans G est convexe i.e.

$$\forall (g_1^\star, g_2^\star) \in A^2, \ \ \forall \alpha \in [0,1], \ \ \alpha g_1^\star + (1-\alpha) g_2^\star \in A$$

démonstration :

$$\|y - (\alpha g_1^\star + (1-\alpha) g_2^\star)\| \geq \min_{g \in G} \|y - g\| = r \ \text{ car } \alpha g_1^\star + (1-\alpha) g_2^\star \in G$$

$$\begin{aligned} \|y - (\alpha g_1^\star + (1-\alpha) g_2^\star)\| &= \|\alpha(y - g_1^\star) + (1-\alpha)(y - g_2^\star)\| \\ &\leq \alpha\|y - g_1^\star\| + (1-\alpha)\|y - g_2^\star\| = \alpha r + (1-\alpha) r = r \end{aligned}$$

Théorème 3

Si la norme est stricte (si $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ alors u et v sont colinéaires) alors $g^\star$ est unique.

démonstration :
Si $g_1^\star$ et $g_2^\star$ sont deux m.a. de y dans G, application du Théorème 2 avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$:
$\dfrac{g_1^\star + g_2^\star}{2}$ est aussi m.a. donc $\|y - \dfrac{g_1^\star + g_2^\star}{2}\| = r = \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2}$
or $\|\dfrac{y - g_1^\star}{2}\| = \|\dfrac{y - g_2^\star}{2}\| = \dfrac{r}{2}$ (car $g_1^\star$ et $g_2^\star$ m.a.) donc

$$\|y - \frac{g_1^\star + g_2^\star}{2}\| = \|\frac{y - g_1^\star}{2} + \frac{y - g_2^\star}{2}\| = \|\frac{y - g_1^\star}{2}\| + \|\frac{y - g_2^\star}{2}\|$$

La norme étant stricte, $(y - g_1^\star)$ et $(y - g_2^\star)$ sont donc colinéaires. y n'appartenant pas à G, ces deux vecteurs sont non nuls $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $y - g_1^\star = \lambda(y - g_2^\star)$

En prenant la norme des deux membres : $r = |\lambda| r \Rightarrow \lambda = \pm 1$
Si $\lambda = -1$ alors $y = \dfrac{g_1^\star + g_2^\star}{2}$ ce qui est impossible car y n'appartient pas à G
d'où $\lambda = 1$ et $g_1^\star = g_2^\star$

2.1.2 Meilleure approximation dans un espace préhilbertien

Théorème 4

E espace vectoriel préhilbertien, muni d'un produit scalaire $(.|.)$, normé par $\|.\|$ associée au produit scalaire ($\|u\| = (u|u)^{\frac{1}{2}}$).
G, sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.

$y \in E$ donné, y n'appartient pas à G.

alors $\exists ! g^\star \in G$ *t.q.* $\|y - g^\star\| = \min\limits_{g \in G} \|y - g\|$

démonstration : L'existence de $g^\star$ est assurée par le Théorème 1.
L'unicité résulte du fait que la norme associée au produit scalaire est stricte.
En effet :

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \quad \Leftrightarrow \quad (u+v|u+v) = (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u|v) = \|u\|.\|v\| \qquad (*)$$

Or si u et v ne sont pas colinéaires : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad u + \lambda v \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (u + \lambda v | u + \lambda v) > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda (u|v) + \|u\|^2 > 0$$
$$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Delta' = (u|v)^2 - \|u\|^2.\|v\|^2 < 0$$

ce qui contredit $(*)$

Théorème 5 : (Caractérisation du m.a.)

$g^\star$ m.a. de y dans $G \quad \Leftrightarrow \quad \forall g \in G \quad (y - g^\star | g) = 0$
($g^\star$ est la projection orthogonale de y sur G)

démonstration :

i) $g^\star$ m.a. de y sur G. Supposons : $\exists g_1 \in G \;\; (y - g^\star | g_1) = \alpha \neq 0$

Soit $g_2 = g^\star + \dfrac{\alpha g_1}{\|g_1\|^2}$

$$\begin{aligned} \|y - g_2\|^2 &= (y - g^\star - \frac{\alpha g_1}{\|g1\|^2} \mid y - g^\star - \frac{\alpha g_1}{\|g_1\|^2}) \\ &= \|y - g^\star\|^2 + (\frac{\alpha}{\|g_1\|})^2 - 2(\frac{\alpha}{\|g_1\|})^2 = \|y - g^\star\|^2 - (\frac{\alpha}{\|g_1\|})^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \;\; \|y - g_2\|^2 < \|y - g^\star\|^2$ et $g^\star$ ne serait pas m.a. de y dans G.

ii) Soit $g^\star \in G$ *t.q.* $\forall g \in G \quad (y - g^\star | g) = 0$

$$\begin{aligned} \forall g \;\; \in \;\; G \quad & \|y - g\|^2 = (y - g^\star - g + g^\star \mid y - g^\star - g + g^\star) \\ = \;\; & \|y - g^\star\|^2 + \|g - g^\star\|^2 - 2(y - g^\star | g - g^\star) \end{aligned}$$

or $g - g^\star \in G \;\; \Rightarrow \;\; (y - g^\star | g - g^\star) = 0$

donc $\|y - g\|^2 = \|y - g^\star\|^2 + \|g - g^\star\|^2$ qui prend une valeur minimale pour $g = g^\star$

2.1.3 Calcul du meilleur approximant dans un espace préhilbertien

Soit $dim\ G = p$. Soit $\{e_j\} \;\; j = 1, \dots, p$ une base quelconque de G.

$$\begin{aligned} \forall g \;\; \in \;\; G \quad (y - g^\star | g) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; & j = 1, \dots, p \quad (y - g^\star | e_j) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & j = 1, \dots, p \quad (g^\star | e_j) = (y | e_j) \end{aligned}$$

Recherchons $g^\star$ par ses composantes dans la base : $g^\star = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^\star e_i$

On obtient un système linéaire d'ordre p dont la solution (l'existence a déjà été établie) donne $\alpha_i^\star \quad i = 1, \dots, p : j = 1, \dots, p \qquad \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^\star (e_i | e_j) = (y | e_j)$

Si $\{e_j\} \quad j = 1, \dots, p$ est une base orthonormée : $j = 1, \dots, p \quad \alpha_j^\star = (y | e_j)$

2.2 Meilleure approximation polynômiale au sens des moindres carrés de données discrètes

2.2.1 Position du problème

Soient $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 0, \dots, n$ fixés. Existence, unicité et calcul de $p_m \in \mathcal{P}_m$ $(m \leq n)$ vérifiant :

$$(R) \; : \quad \sum_{i=0}^{n} (y_i - p_m(x_i))^2 = \min_{p \in \mathcal{P}_m} \sum_{i=0}^{n} (y_i - p(x_i))^2$$

2.2.2 Existence et unicité : Théorème 6

$\exists! p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant (R).

démonstration : Existence et unicité de p_m assurées par le Théorème 5, appliqué avec :
$E = \mathcal{P}_n$ préhilbertien muni du produit scalaire :
$\quad \forall (P,Q) \in E^2 \ \ (P|Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$
$G = \mathcal{P}_m$
$y = W_n \in \mathcal{P}_n$ unique polynôme (de Lagrange) vérifiant :
$\quad W_n(x_i) = y_i \ \ i = 0, \ldots, n$

Conclusion du Théorème 5 : $\exists! p_m \in \mathcal{P}_m \quad \|W_n - p_m\| = \min\limits_{p \in \mathcal{P}_m} \|W_n - p\|$
On obtient (R) en élevant au carré.

Remarque : Si $m = n$, il s'agit d'un problème d'interpolation de Lagrange.

2.2.3 Calcul de p_m dans la base canonique

$e_j \ : \ x \longrightarrow x^j \quad j = 0, \ldots, m$ base canonique de $\mathcal{P}_m$. Soit $p_m = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i^\star x^i$

Les composantes $\alpha_i^\star \ \ i = 0, \ldots, m$ sont solutions du système linéaire :

$$j = 0, \ldots, m \qquad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^\star (e_i|e_j) = (W_n|e_j) \ \ \Leftrightarrow \ \ \sum_{i=0}^{m} m_{ij}\alpha_i^\star = w_j$$

avec :

$$m_{ij} = (x^i|x^j) = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \qquad w_j = (W_n|x^j) = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^j$$

Propriété : La matrice $M = [m_{ij}]$, d'ordre m, est symétrique définie positive.

2.2.4 Calcul de p_m dans une base orthonormée

p_m s'exprime directement dans une base orthonormée $\{e_j\} \ \ j = 0, \ldots, m$:

$$p_m = \sum_{i=0}^{m} (W_n|e_i) \, e_i$$

Base obtenue (par exemple) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Soient :

$$e_0 = k_0$$
$$e_1 = k_1(x - \lambda_{10}e_0)$$
$$\ldots \ \ \ldots$$
$$e_j = k_j(x^j - \lambda_{j0}e_0 - \ldots - \lambda_{jp}e_p - \ldots - \lambda_{jj-1}e_{j-1})$$
$$\ldots \ \ \ldots$$
$$e_m = k_m(x^m - \lambda_{m0}e_0 - \ldots - \lambda_{mm-1}e_{m-1})$$

Par construction les $\{e_j\}$ $j = 0, \ldots, m$ forment une base de $\mathcal{P}_m$.

Supposons déjà déterminés $e_0, \ldots, e_{j-1}$ formant une base orthonormée de $\mathcal{P}_{j-1}$ et calculons e_j afin de former une base orthonormée de $\mathcal{P}_j$.

$$p = 0, \ldots, j-1 \quad (e_j|e_p) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{jp} = (x^j|e_p)$$

$$\|e_j\| = 1 \;\Rightarrow\; |k_j| = \frac{1}{\|x^j - \sum\limits_{p=0}^{j-1} \lambda_{jp} e_p\|}$$

(le choix du signe de k_j est sans importance)

2.3 Meilleure approximation polynômiale au sens des moindres carrés d'une fonction $f \in C[a,b]$

2.3.1 Position du problème

Soit $f \in C[a,b]$. Existence, unicité et calcul de $p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant :

$$(R\,') \;:\quad \int\limits_a^b \omega(x)(f(x) - p_m(x))^2 dx = \min_{p \in \mathcal{P}_m} \int\limits_a^b \omega(x)(f(x) - p(x))^2 dx$$

$\omega(x)$ désigne une fonction donnée positive sur $[a,b]$ (fonction poids)

2.3.2 Existence et unicité : Théorème 7

$\exists! p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant $(R\,')$

démonstration : Existence et unicité assurées par application du Théorème 5 avec :
$E = C[a,b]$ muni du produit scalaire :
$\quad \forall (f,g) \in C[a,b]^2 \quad (f|g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$
$G = \mathcal{P}_m,\; y = f$ (supposée ne pas appartenir à $\mathcal{P}_m$ sinon $p_m = f$)

Conclusion du Théorème 5 : $\exists! p_m \in \mathcal{P}_m \quad \|f - p_m\| = \min\limits_{p \in \mathcal{P}_m} \|f - p\|$
On obtient $(R\,')$ en élevant au carré.

2.3.3 Calcul de p_m dans la base canonique

$e_j \;:\; x \longrightarrow x^j \quad j = 0, \ldots, m$ base canonique de $\mathcal{P}_m$. Soit $p_m = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i^\star x^i$

Les composantes $\alpha_i^\star \quad i = 0, \ldots, m$ sont solutions du système linéaire :

$$j = 0, \ldots, m \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^\star (e_i|e_j) = (f|e_j) \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=0}^{m} m_{ij} \alpha_i^\star = w_j$$

avec : $m_{ij} = (x^i|x^j) = \int_a^b \omega(x) x^{i+j} dx \qquad w_j = (f|x^j) = \int_a^b \omega(x) f(x) x^j dx$

2.3.4 Calcul de p_m dans une base orthonormée

p_m s'exprime directement dans une base orthonormée $\{e_j\}$ $j = 0, \ldots, m$:

$$p_m = \sum_{i=0}^{m} (f|e_i)\ e_i$$

Obtention de la base par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Les composantes $(f|e_i)$ $\quad i = 0, \ldots, m$ sont les coefficients de Fourier de f.

Propriété : Soit $\{Q_j\}$ une suite de polynômes telle que le degré de (Q_j) est égal à j et les polynômes sont orthogonaux deux à deux par rapport au produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in C[a, b]^2 \quad (f|g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

alors les zéros de Q_j $\quad j = 1, 2, \ldots$ sont réels, distincts et appartiennent à $[a, b]$.

<u>**Exercice 5**</u>

On considère la suite $\{Q_j\}$ de polynômes à coefficient principal réduit (degré de $Q_j = j$) et orthogonaux par rapport au produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in C[a, b]^2 \qquad (f|g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\ dx$$

avec $\omega(x)$ fonction continue et positive sur $[a, b]$.

1) Soit E l'ensemble des abscisses de $[a, b]$ en lesquelles Q_n change de signe.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b \omega(x) Q_n(x) dx = 0$ **et que** $card\ E \neq 0$

b) Montrer que $\forall p \in P_m$ **(avec** $m < n$**)** $\quad (p|Q_n) = 0$

c) Montrer que l'hypothèse $card\ E = m$ **(avec** $m < n$**) conduit à une contradiction avec le résultat de la question b).**

2) Montrer que ces polynômes satisfont à la relation de récurrence :

$$xQ_n(x) - Q_{n+1}(x) = \alpha Q_n(x) + \beta Q_{n-1}(x)$$

avec $\beta = \dfrac{(xQ_n|Q_{n-1})}{(Q_{n-1}|Q_{n-1})}$ **et** $\alpha = \dfrac{(xQ_n|Q_n)}{(Q_n|Q_n)}$

2.4 Meilleure approximation polynômiale uniforme de données discrètes

2.4.1 Position du problème

Soient $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $\ i = 0, \ldots, n$ fixés (on supposera désormais que, si $i < j$, alors $x_i < x_j$). Existence, unicité et calcul de $p_m \in \mathcal{P}_m$ ($m \leq n$ et en général $m \ll n$) vérifiant :

$$(R\text{''}) \ : \quad \max_{i=0,\ldots,n} |y_i - p_m(x_i)| = \min_{p \in \mathcal{P}_m} \max_{i=0,\ldots,n} |y_i - p(x_i)|$$

2.4.2 Existence et unicité : Théorème 8

i) $\exists! p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant (R "). p_m est appelé polynôme de m.a. uniforme (ou au sens de Tchebycheff ou de minimax) des données (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, n$.
On notera $E_m = \max\limits_{i=0,\ldots,n} |y_i - p_m(x_i)|$

L'existence est assurée par le Théorème 1 avec $E = \mathcal{P}_n$ muni de la norme :

$$\forall p \in P_n \quad \|p\| = \max_{i=0,\ldots,n} |p(x_i)|$$

$$G = \mathcal{P}_m \quad y = W_n$$

L'unicité découle de la propriété suivante :

ii) p_m vérifie la propriété d'équioscillation :

$\exists (m+2)$ abscisses au moins $\{x_{i_j}\}$ $\quad j = 0, \ldots, m+1$ $(\{i_0, \ldots, i_{m+1}\}$ inclus dans $\{0, \ldots, n\})$, avec $x_{i_j} < x_{i_{j+1}}$, telles que $y_{i_j} - p_m(x_{i_j}) = \pm E_m$ avec alternance de signe :

$$(y_{i_j} - p_m(x_{i_j}))(y_{i_{j+1}} - p_m(x_{i_{j+1}})) = -E_m^2$$

Les points (x_{i_j}, y_{i_j}) $j = 0, \ldots, m$ sont appelés points extrémaux.

iii) Réciproquement, si $p \in \mathcal{P}_m$ et si $\exists$ au moins $(m+2)$ abscisses x_{i_j} $\quad j = 0, \ldots, m+1$ prises parmi $x_0, \ldots, x_n$ (avec $x_{i_j} < x_{i_{j+1}}$), telles que $y_{i_j} - p(x_{i_j}) = \pm \max\limits_{i=0,\ldots,n} |y_i - p(x_i)|$ avec alternance de signe alors $p_m = p$.

2.4.3 Calcul de p_m dans le cas où $m = n - 1$

(*Rappel* : si $m = n$, c'est un problème d'interpolation de Lagrange et $E_m = 0$)

Les $(m+2) = (n+1)$ points extrémaux correspondent à la totalité des abscisses x_i $i = 0, \ldots, n$.

Calcul par résolution d'un système linéaire

Le polynôme de minimax $p_{n-1}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ vérifie donc les $(n+1)$ équations traduisant la propriété d'équioscillation : $i = 0, \ldots, n$ $\quad \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j - y_i = (-1)^i h$

avec $|h| = E_{n-1}$

$(a_0, \ldots, a_{n-1}, h)$ solution unique du système d'ordre n (existence et unicité assurées par la démonstration du Théorème 8) :

$$i = 0, \ldots, n \qquad \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j - (-1)^i h = y_i$$

Calcul par formule explicite

Soit $p^{[h]} \in \mathcal{P}_n$ vérifiant les conditions :

$$i = 0, \ldots, n \quad p^{[h]}(x_i) - y_i = (-1)^i h \;\Rightarrow\; i = 0, \ldots, n \quad p^{[h]}(x_i) = y_i + (-1)^i h$$

C'est l'expression d'un polynôme de Lagrange : $p^{[h]}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)(y_i + (-1)^i h)$

$p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ est le polynôme $p^{[h]}$ correspondant à une valeur du paramètre h choisie telle que le coefficient de x^n dans $p^{[h]}$ soit nul :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i + (-1)^i h}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} = 0$$

Soit $\lambda_i = \dfrac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$ $\qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(y_i + (-1)^i h) = 0$

Or λ_i et λ_{i+1} sont de signes contraires (évident en développant), par suite, $(-1)^i\lambda_i$ est de signe constant i.e. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda_i > 0$ si n pair, < 0 si n impair.

$$h = (-1)^{n-1} \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i}{\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|} \qquad E_{n-1} = \frac{|\sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i|}{\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|}$$

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\ (y_i + (-1)^{i+n-1} \frac{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j y_j}{\sum_{j=0}^{n} |\lambda_j|})$$

Proposition

Soit $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ avec des valeurs $(y_i - Q(x_i)) \quad i = 0, \ldots, n$ qui alternent en signe et qui ne sont pas toutes égales en valeur absolue alors :

$$\min_{i=0,\ldots,n} |y_i - Q(x_i)| < E_{n-1} < \max_{i=0,\ldots,n} |y_i - Q(x_i)| \ (= \|W_n - Q\|)$$

démonstration :

Soit Z_{n-1} le polynôme de minimax, dans $\mathcal{P}_{n-1}$, associé aux valeurs $(x_i, y_i - Q(x_i)) \quad i = 0, \ldots, n$

$$\|(W_n - Q) - Z_{n-1}\| = \frac{|\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(y_i - Q(x_i))|}{\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|}$$

Mais d'autre part :

$\|(W_n - Q) - Z_{n-1}\| = \min_{p\in\mathcal{P}_{n-1}} \|(W_n - Q) - p\| = \min_{p\in\mathcal{P}_{n-1}} \|W_n - (p + Q)\|$
car $\{Q + p/\ Q$ fixé dans $\mathcal{P}_{n-1}$, $p \in \mathcal{P}_{n-1}\} = \mathcal{P}_{n-1}$ donc

$$E_{n-1} = \frac{|\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(y_i - Q(x_i))|}{\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|}$$

Or $(y_i - Q(x_i)) \quad i = 0, \ldots, n$ alternent en signe et il en est de même pour $\lambda_i \;\; i = 0, \ldots, n$ donc les $\lambda_i(y_i - Q(x_i)) \quad i = 0, \ldots, n$ sont de signe constant.

$$E_{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i|.|y_i - Q(x_i)|}{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i|}$$

$$E_{n-1} > \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i| \min\limits_{i=0,\ldots,n} |y_i - Q(x_i)|}{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i|} \qquad E_{n-1} < \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i| \max\limits_{i=0,\ldots,n} |y_i - Q(x_i)|}{\sum\limits_{i=0}^{n} |\lambda_i|}$$

d'où le résultat.

2.4.4 Calcul de p_m dans le cas où $m < n-1$: algorithme d'échange

Notations

Si T est un $(m+2)-uplet$ de $\{x_0, \ldots, x_n\}$, p_m^T désigne le polynôme de minimax dans $\mathcal{P}_m$ associé aux points $(x_i, y_i) \quad x_i \in T$ et $E_m^T = \min\limits_{p \in \mathcal{P}_m} \max\limits_{x_i \in T} |y_i - p(x_i)|$

(Rappel : pour T fixé, le paragraphe précédent permet de calculer p_m^T et E_m^T)

Proposition

Soit T un $(m+2)-uplet$ de $\{x_0, \ldots, x_n\}$ t.q. $\forall T' \;\; (m+2)-uplet$ de $\{x_0, \ldots, x_n\}$, $E_m^T \geq E_m^{T'}$ alors $p_m^T = p_m$ et $E_m^T = E_m$

démonstration :

i) Montrons par l'absurde que $\forall x_i \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T \qquad |y_i - p_m^T(x_i)| \leq E_m^T$

Supposons donc que $\exists x_j \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T \qquad |y_j - p_m^T(x_j)| > E_m^T$

Soit $T = \{x_{i_0} < \ldots < x_{i_{m+1}}\}$ et supposons que $x_{i_k} < x_j < x_{i_{k+1}}$,
(raisonnement analogue si $x_j < x_{i_0}$ ou $x_{i_{m+1}} < x_j$)

Soit p_m^T le polynôme de minimax associé aux points $(x_{i_k}, y_{i_k}) \quad k = 0, \ldots, m+1$.

Propriété d'équioscillation : $(y_{i_k} - p_m^T(x_{i_k}))$ et $(y_{i_{k+1}} - p_m^T(x_{i_{k+1}}))$, égaux en valeur absolue à E_m^T, sont de signes opposés.

Par exemple, $(y_{i_k} - p_m^T(x_{i_k}))$ est de même signe que $(y_j - p_m^T(x_j))$ (raisonnement analogue dans le cas de $(y_{i_{k+1}} - p_m^T(x_{i_{k+1}})))$.

Soit $T\,'$ le $(m+2)-uplet$ déduit de T en échangeant x_{i_k} et x_j :

$$T\,' = \{x_{i_0} < \ldots < x_{i_{k-1}} < x_j < x_{i_{k+1}} < \ldots < x_{i_{m+1}}\}$$

Lorsque x_r parcourt $T\,'$, les valeurs $(y_r - p_m^T(x_r))$ alternent en signe et ne sont pas toutes égales en valeur absolue.

D'aprés la proposition du paragraphe précédent :

$$\min_{x_r \in T'} |y_r - p_m^T(x_r)| < E_m^{T'} \Rightarrow E_m^T < E_m^{T'}$$

ce qui contredit l'hypothèse.

ii)

$$\max_{i=0,\ldots,n} |y_i - p_m^T(x_i)| = \max_{x_i \in T} |y_i - p_m^T(x_i)|$$

Plus exactement, aux $(m+2)$ abscisses x_i de T : $y_i - p_m^T(x_i) \pm \max_{i=0,\ldots,n} |y_i - p_m^T(x_i)|$
D'aprés la réciproque de la propriété d'équioscillation : $p_m^T = p_m$ et $E_m^T = E_m$.

Algorithme d'échange

Son principe est directement suggéré par la démonstration précédente :

Construction d'une suite $\{T^{(k)}\}$ de $(m+2) - uplets$ de $\{x_0, \ldots, x_n\}$ t.q. $E_m^{T^{(k+1)}} > E_m^{T^{(k)}}$. On assure ainsi une progression vers le (ou l'un des) $(m+2) - uplets$ T t.q. $\forall T'$ $E_m^T \geq E_m^{T'}$.

Soit $T^{(0)} = \{x_0, \ldots, x_{m+1}\}$ choisi arbitrairement. Calcul de $p_m^{T^{(0)}}$ et $E_m^{T^{(0)}}$ (cf. 4.4.2)

Cas 1 : $\forall x_i \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T^{(0)}$ $|y_i - p_m^{T^{(0)}}(x_i)| \leq E_m^{T^{(0)}}$
fin de l'algorithme : $p_m^{T^{(0)}} = p_m$ et $E_m^{T^{(0)}} = E_m$

Cas 2 : Il existe au moins une abscisse $x_j \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T^{(0)}$ t.q.
$|y_j - p_m^{T^{(0)}}(x_j)| > E_m^{T^{(0)}}$ alors construction d'un nouveau $(m+2) - uplet$ $T^{(1)}$.

Il faut sélectionner une des abscisses vérifiant l'inégalité ci-dessus.
choix standard : $x_j^\star \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T^{(0)}$ t.q.
$E_m^{T^{(0)}} < |y_j^\star - p_m^{T^{(0)}}(x_j^\star)| = \max_{x_k \in \{x_0, \ldots, x_n\} - T^{(0)}} |y_k - p_m^{T^{(0)}}(x_k)|$

On supprime alors une abscisse dans $T^{(0)}$ (qui sera remplacée par $x_j^\star$) t.q., aprés remplacement, les valeurs $(y_i - p_m^{T^{(0)}}(x_i))$ $x_i \in T^{(1)}$ alternent toujours en signe.

D'aprés la proposition précédente $E_m^{T^{(1)}} > E_m^{T^{(0)}}$. On calcule alors $p_m^{T(1)}$ et $E_m^{T(1)}$ ......

2.5 Meilleure approximation polynômiale uniforme d'une fonction $f \in C[a,b]$

2.5.1 Position du problème

Soit une fonction $f \in C[a,b]$. Existence, unicité et calcul de $p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant :

$$(R''') : \quad \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_m(x)| = \min_{p \in \mathcal{P}_m} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

2.5.2 Existence et unicité : Théorème 9

i) $\exists! p_m \in \mathcal{P}_m$ vérifiant (R'''). p_m est appelé polynôme de m.a. uniforme (ou au sens de Tchebycheff ou de minimax) de la fonction f.
On notera $E_m = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p_m(x_i)|$

Existence assurée par le Théorème 1 avec $E = C[a,b]$ muni de la norme :

$$\forall g \in C[a,b] \quad \|g\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$$

$G = \mathcal{P}_m$, y f.

ii) p_m vérifie la propriété d'équioscillation : $\exists (m+2)$ abscisses au moins $\{x_j\} \quad j = 0, \ldots, m+1$ de $[a,b]$, avec $x_j < x_{j+1}$, telles que
$f(x_j) - p_m(x_j) = \pm E_m$ avec alternance de signe i.e. :

$$(f(x_j) - p_m(x_j))(f(x_{j+1}) - p_m(x_{j+1})) = -E_m^2$$

iii) Réciproquement, si $p \in \mathcal{P}_m$, si $\exists (m+2)$ abscisses $x_j \quad j = 0, \ldots, m+1$ de $[a,b]$ (avec $x_j < x_{j+1}$) telles que : $y_j - p(x_j) = \pm \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$ avec alternance de signe alors $p_m = p$.

Mais une procédure de calcul ?

<u>Exercice 6</u>

1) Trouver la droite de minimax sur $[a,b]$ d'une fonction f à dérivée seconde strictement positive sur $[a,b]$ (on pourra se contenter, pour les points x_i vérifiant la propriété d'équioscillation d'une caractérisation implicite de la forme $f(x_i) = valeur$).

2) Quel est le polynôme de degré 1 réalisant l'approximation minimax de $x - sin(x)$ sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$?

<u>Exercice 7</u>

Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui réalise la meilleure approximation polynômiale uniforme de la fonction $f(x) = x^{n+1}$ sur $[-1,1]$.

<u>Exercice 8</u>

On définit sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ le produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in C[a,b]^2 \qquad (f|g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx$$

avec ω fonction poids continue et positive sur $[a,b]$.
Soit $\{Q_j\} \quad j = 0,1,2,\ldots$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à ce produit scalaire i.e.

– **Degré**$(Q_j) \ = \ j$
– $i \neq j \qquad (Q_i|Q_j) \ = \ 0$

On note, d'une part, $x_i \ \ i = 0, \ldots, n-1$ **les racines de** Q_n **et, d'autre part,** $L_i(x) \ \ i = 0, \ldots, n-1$ **les polynômes intervenant dans une interpolation de Lagrange aux abscisses** $x_i \ \ i = 0, \ldots, n-1$**.**

1) Montrer que : $i \neq j \qquad (L_i|L_j) \ = \ 0$

2) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n-1} (L_k|L_k) \ = \ \int_a^b \ \omega(x)dx$

<u>Rappel</u> : $\sum_{k=0}^{n-1} \ L_k(x) \ = \ 1$