



Rapport Projet 2020-2021

Equations aux Dérivées Partielles

ROUX Thibault
SADURNI Thomas
FAN Yanghai
NEJI Mariem

Département Sciences du Numérique - Filière Image et Multimédia
2020-2021

Contents

1	Partie Théorique	3
2	Mise en pratique	5
2.1	Triangle	5
2.2	Quadrilatères	5
2.3	Résolution du système par une méthode directe	7

List of Figures

1	Solution du problème : triangle	5
2	Solution du problème : quadrangle	6
3	Comparaison avec la solution exacte (à droite)	6
4	Ordre de discrétisation dans le cas des éléments triangles	7
5	Tracé de l'évolution du nombre d'éléments non nuls de R en fonction de la taille de la matrice	7

1 Partie Théorique

- Montrons qu'en supposant $u \in H^1(\Omega)$ en se plaçant sur l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(w) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d\}$$

et en considérant $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx$$

Preuve :

Ecriture du problème en une forme variationnelle (PFv)

Reprenons les équations de l'énoncé et multiplions les par $w \in H_0^1(\Omega)$. On obtient :

$$-\Delta u w = f w$$

En intégrant sur Ω :

$$-\int_{\Omega} \Delta u w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx$$

En utilisant la formule de Green :

$$-\int_{\Omega} \Delta u w \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

Or on a $\partial\Omega = \partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d$ et $w \in H_0^1$ donc $\gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega_d$:

$$\int_{\Omega} f w \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

Avec $v = u - u_d$:

$$\int_{\Omega} f w \, dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

Or $\gamma_1(u) = g$ sur $\partial\Omega_n$ donc on obtient bien :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx$$

- Montrons maintenant que le problème admet une unique solution.

Preuve : On va utiliser les propriétés du théorème de Lax Milgram.

On pose $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow R$ une forme bilinéaire telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \langle u, v \rangle_{1,\Omega}$$

Continuité de a

Montrons que a est continue, c'est à dire montrons que $\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $|a(u, v)| \leq \alpha |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$ avec $\alpha \geq 0$.

On a :

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx \right| = \left| \langle u, v \rangle_{1,\Omega} \right| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \text{ (D'après Cauchy Schwartz)}$$

avec $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ définit la norme issue du produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$. D'où a est continue sur $H_0^1(\Omega)$

Coercivité de a

Montrons maintenant que a est coercive : $a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx = \langle v, v \rangle_{1,\Omega} = |v|_{1,\Omega}^2 \geq 0$

Ainsi, a est bilinéaire, continue et coercive (on vérifie bien que a est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$).

Continuité de l

Posons maintenant $l : H_0^1(\Omega) \longrightarrow R$ linéaire par linéarité de l'intégrale et telle que

$$\begin{aligned}
l(w) &= \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx \\
l_1(w) &= \int_{\Omega} f w \, dx \\
l_2(w) &= \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx \\
l_3(w) &= \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w \, dx
\end{aligned}$$

Montrons que ces trois fonctions l_1, l_2, l_3 sont continues :

Continuité de l_1

f et w sont continues sur $L^2(\Omega)$

$$|l_1(w)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

par inégalité de Poincaré (Ω est borné) :

$$\begin{aligned}
\exists C_0 \geq 0; \forall w \in H_0^1 \\
\|w\|_{L^2(\partial\Omega_n)} &\leq C_0 |w|_{1,\Omega} \\
|l_1(w)| &\leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} |w|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Continuité de l_2

g et γ_0 sont continues sur $L^2(\partial\Omega_n)$

$$\begin{aligned}
|l_2(w)| &\leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \\
\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} &\leq M_{\gamma} \|w\|_{H_1(\Omega)} \\
\|w\|_{H_1(\Omega)} &\leq \sqrt{1 + C_0^2} |w|_{1,\Omega} \\
|l_2(w)| &\leq C_2 \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} |w|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

avec $C_2 = M_{\gamma} \sqrt{1 + C_0^2}$

Continuité de l_3

$\langle, \rangle_{1,\Omega}$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$|l_3(w)| \leq |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

Ainsi, l_1, l_2, l_3 sont continues et par composition de fonctions continues, l est continue.

D'après le théorème de Lax Milgram avec $H_0^1(\Omega)$ Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive et l linéaire et continue, $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall w \in H_0^1(\Omega) \, a(u, w) = l(w)$.

- Enfin, montrons que la forme variationnelle discrète aboutit au système linéaire d'équations $Ax = b$ avec $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ et $x, b \in \mathbf{R}^n$.

Preuve

Soit (P_{FVn}) le problème variationnel discret, et $V_n \subset H_0^1$ un s.e.v de dimension finie n . Alors le problème (P_{FVn}) trouver $u_k \in V_n$ et $v_k \in V_n$ tels que $a(u_k, v_k) = l(v_k)$ admet une solution unique.

Soit $(\eta_i)_{i=0}^n$ une base de (P_{FVn}) . $\iff \forall u_n \in V_n, \exists ! (U_k)_{k=0}^n; u_n = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$

u_n est une solution de $(P_{FVn}) \iff \forall v_n \in V_n \, a(u_n, v_n) = l(v_n)$

$$\iff \forall i \in [1, n] \, a(u_n, \eta_i) = l(\eta_i)$$

$$\iff \forall i \in [1, n] \, a(\sum_{j=1}^n u_j \eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$$

$$\iff \forall i \in [1, n] \, \sum_{j=1}^n a(\eta_j, \eta_i) u_j = l(\eta_i)$$

$$\iff Ax = b$$

avec $A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i) = \int_{\Omega} \nabla \eta_j^T \nabla \eta_i \, dx$

et $b_i = l(\eta_i) = \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_i^T \nabla \eta_k \, dx$ (la décomposition nodale de la condition limite $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$).

En plus, A est définie positive (a est un produit scalaire sur H_0^1) donc le problème (P_{FV_n}) admet une unique solution.

2 Mise en pratique

2.1 Triangle

Nous considérons dans cette partie les fonctions de bases données dans le sujet sur les triangles.

Nous construisons d'abord la matrice de raideur élémentaire M_T^A , puis nous l'assemblons dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles. Pour cela, nous avons implémenté la fonction *raideurTriangle* à l'aide de la formule 10 ainsi que *b_dirichlet.t* assemblant le second membre avec les conditions de Dirichlet. Pour plus d'information sur le code, veuillez vous référer à celui-ci.

Voici, pour les triangles, les résultats que nous obtenons :

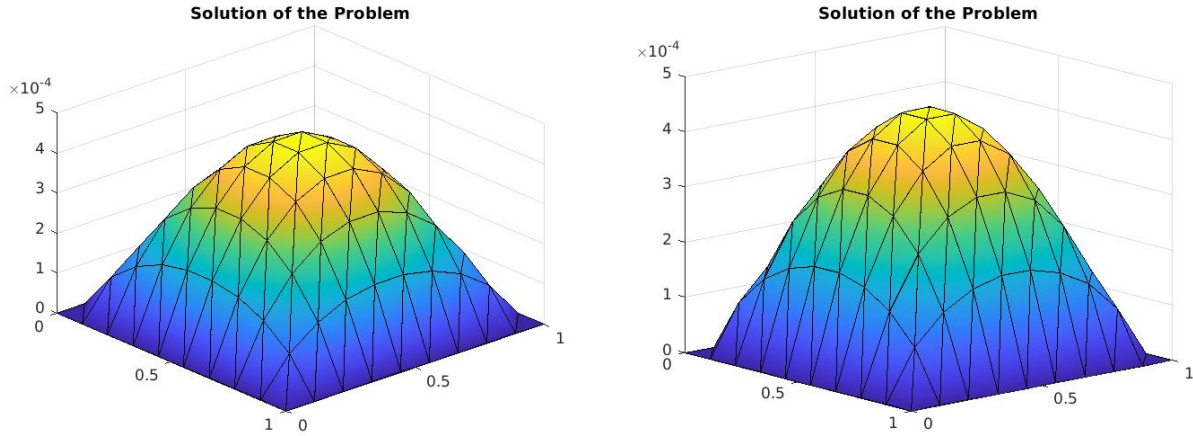


Figure 1: Solution du problème : triangle

2.2 Quadrilatères

Ici, nous devons établir les formules donnant la matrice de raideur associée à un élément de type quadrangle.

- En posant Φ_Q on a : $\Phi_Q(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Notons $J_Q = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = J_Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - J_Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

De plus, sachant que $\eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y))$ on a :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_Q \nabla \eta_i(x, y)^T \nabla \eta_j(x, y) \, d(x, y) \\ &= \int_Q \nabla(\phi_i \circ \Phi_Q)(x, y)^T \nabla(\phi_j \circ \Phi_Q)(x, y) \, d(x, y) \end{aligned}$$

En utilisant la formule du changement de variable :

$$M_{ij} = |J_Q| \int_Q \nabla \phi_i(\xi, \zeta)^T J \nabla \phi_j(\xi, \zeta)$$

Avec $J = (J_Q^T J_Q)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

En calculant les 10 intégrales, on obtient la matrice suivante :

$$M = \frac{|J_Q|}{6} \begin{pmatrix} 2(a+c) + 3b & -2a+c & -((a+c)+3b) & a-2c \\ -2a+c & 2(a+c) - 3b & a-2c & -(a+c)+3b \\ -((a+c)+3b) & a-2c & 2(a+c) + 3b & -2a+c \\ a-2c & -(a+c)+3b & -2a+c & 2(a+c) - 3b \end{pmatrix}$$

Vous pouvez retrouver dans le code *Matlab* la fonction *raideurQuadrangle* qui correspond à ces calculs. Nous assemblons la matrice *A* avec la fonction *A_quadrangle* qui fait appel à *A_triangle* utilisée pour les triangles.

Dans notre script *Matlab*, incluons maintenant le traitement des éléments de type quadrangle ainsi que les conditions de Neumann. Ceci se trouve dans la fonction *b_quadrangle*, qui fait appel à *b_dirichlet t* utilisée pour les triangles. Voici nos résultats :

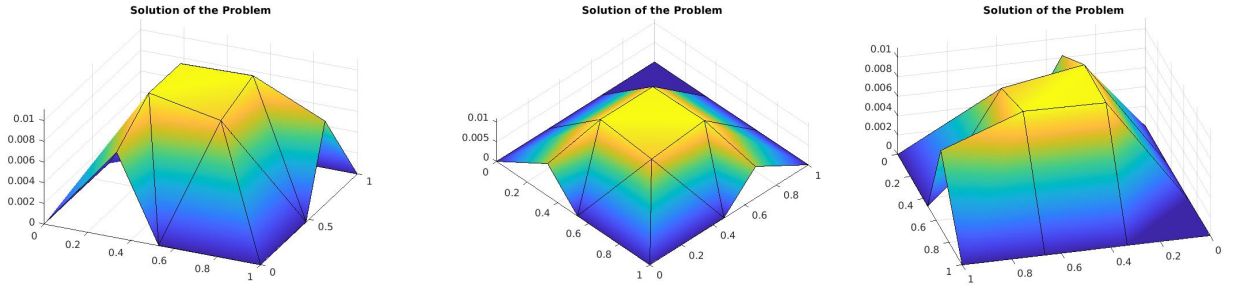


Figure 2: Solution du problème : quadrangle

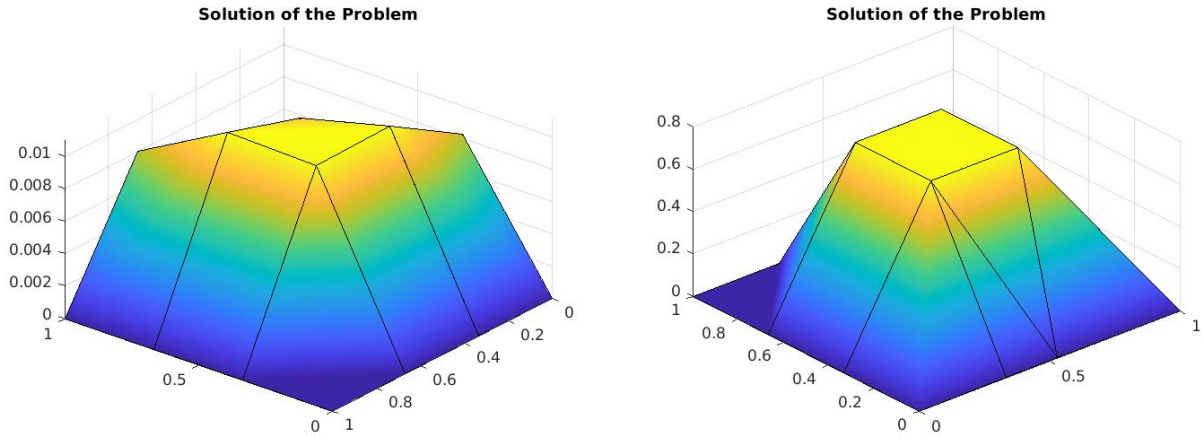


Figure 3: Comparaison avec la solution exacte (à droite)

- Voici ce que nous obtenons pour l'analyse de l'ordre de la discrétisation dans le cas d'éléments triangles : un ordre de 2 (cf figure 4)

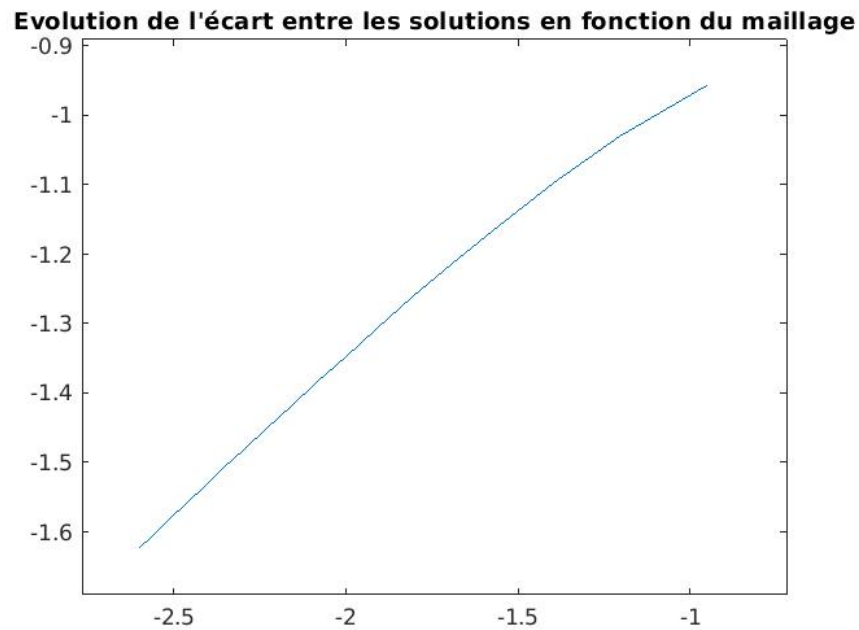


Figure 4: Ordre de discrétisation dans le cas des éléments triangles

2.3 Résolution du système par une méthode directe

Voici le tracé obtenu :

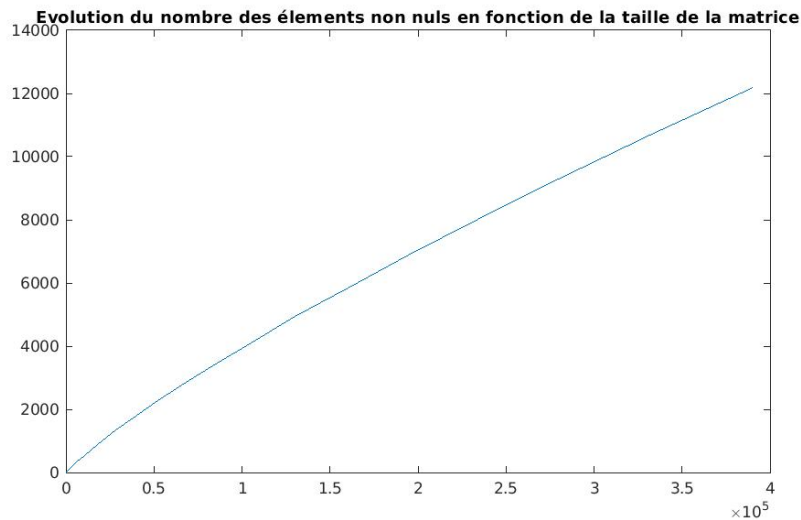


Figure 5: Tracé de l'évolution du nombre d'éléments non nuls de R en fonction de la taille de la matrice

- On remarque que plus la matrice est importante, plus le nombre d'éléments non nuls augmente, ainsi, plus le temps de calcul est important.
- Pour réduire le cout mémoire de la factorisation, on peut essayer de réduire l'espace occupé par les matrices sans pour autant perdre l'information ou utiliser une méthode de différentiation.