Exercice 2

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ SPD

u_i les colonnes de A $\quad i \in \{0, \dots, n-1\}$

$\{u_i\}_{i \in \{0,\dots n-1\}} \xrightarrow{\text{A orthogonalisation de GS}} \{d_i\}_{i \in \{0,\dots n-1\}}$ base A-orthogonale de $\mathbb{R}^n$

(1) Exprimer la solution du système $Ax = b$ dans la base $\{d_i\}$

$$x^* = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j d_j \quad \text{solution de } Ax = b$$

$$Ax^* = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A d_j$$

soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$ $\quad (d_i | Ax^*) = \alpha_i (d_i | Ad_i)$

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | Ax^*)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$

et comme $Ax^* = b$

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$

(2) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$x^* = y + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b - Ay | d_i)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | Ay)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$ ($\hat{m}$ façon que calcul de α_j de x^*)

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$

$$x^* - y = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b - Ay)}{(d_i | Ad_i)} d_i$$

③ algo itératif

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + \alpha_p d_p$$

avec $\alpha_p = \dfrac{(d_p \mid b - A x^{(p)})}{(d_p \mid A d_p)}$

Montrer que $(d_p \mid A x^{(p)}) = (d_p \mid A x^{(0)})$

- $x^{(p+1)} \longleftrightarrow x^{(0)}$

$$x^{(p+1)} = x^{(0)} + \sum_{i=0}^{p} \alpha_i d_i \quad (\text{récurrence})$$

- Hypothèse de récurrence $\forall i \leq p \ (d_i \mid A x^{(i)}) = (d_i \mid A x^{(0)})$

$i = 1 \quad (d_1 \mid A x^{(1)}) = (d_1 \mid A x^{(0)} + \alpha_0 A d_0)$

$$= (d_1 \mid A x^{(0)}) + \alpha_0 \underbrace{(d_1 \mid A d_0)}_{=0}$$

car d_1 et d_0 sont A-orthogonaux

$i = p+1 \quad (d_{p+1} \mid A x^{(p+1)}) = (d_{p+1} \mid A x^{(0)} + A \sum_{i=0}^{p} \alpha_i d_i)$

$$= (d_{p+1} \mid A x^{(0)}) + \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \underbrace{(d_{p+1} \mid A d_i)}_{=0}$$

(4) Montrer que l'algorithme atteint la solution en n itérations

$$x^{(n)} = x^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d_i$$

$$= x^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b - A x^{(i)})}{(d_i | A d_i)} d_i$$

$$= x^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b)}{(d_i | A d_i)} d_i - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overbrace{(d_i | A x^{(i)})}^{(d_i | A x^{(0)}) \; (3)}}{(d_i | A d_i)} d_i$$

$$= x^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(d_i | b - A x^{(0)})}{(d_i | A d_i)} d_i$$

$$= x^* \quad \left(\text{cf } (2) \text{ avec } y = x^{(0)}\right)$$