TP9 – Tomographie

Transformation de Radon et tomographie

La *transformation de Radon* d'une image $f(x, y)$ consiste à effectuer la projection orthogonale de cette image sur une droite $\mathcal{D}$ d'angle polaire θ, paramétrée par une abscisse t :

$$p_\theta(t) = \int_{L(\theta,t)} f(z)\,dz \tag{1}$$

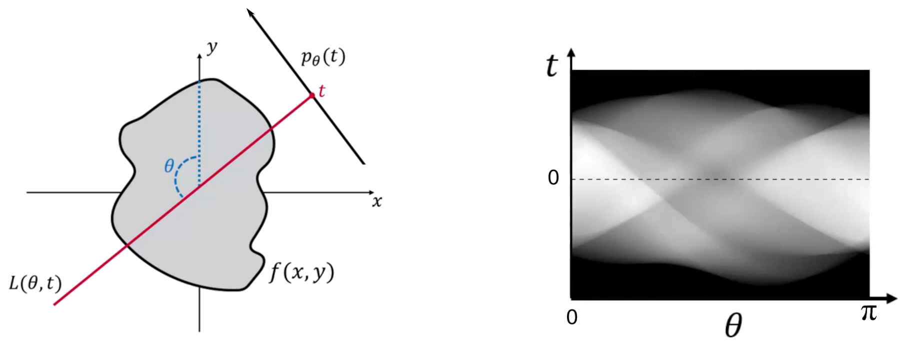
Dans cette expression :
- La droite $L(\theta, t)$, qui a pour équation cartésienne $x \cos\theta + y \sin\theta = t$, est orthogonale à $\mathcal{D}$.
- La notation $f(z)$ est un raccourci pour désigner $f(x(z), y(z))$, z étant une abscisse le long de $L(\theta, t)$.

Les droites $L(\theta, 0)$ et $\mathcal{D}$, associées aux abscisses respectives z et t, définissent donc un repère orthonormé direct dont la matrice de passage $\mathbf{M}$, relativement au repère image, est une rotation d'angle θ (cf. figure 1-a) :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Contrairement à la transformation de Fourier, qui est inversible, il est clair que la transformation de Radon, étant une projection, n'est pas inversible : en d'autres termes, il est impossible de retrouver l'image à partir d'une unique transformée de Radon. Le but de la *tomographie* est de reconstruire l'image à partir d'un certain nombre de transformées de Radon obtenues pour différentes valeurs θ.

En pratique, l'image $f(x, y)$ est discrète et les données sont regroupées dans une matrice 2D appelée *sinogramme* (cf. figure 1-b), dont le nombre de colonnes est égal au nombre n_θ d'orientations, et le nombre de lignes est égal au nombre n_{rayons} de lignes $L(\theta, s)$, qui est supposé être le même pour chaque valeur de θ.



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Définition des variables (θ, t). (b) Sinogramme : chaque colonne correspond à une valeur de θ.

Bien entendu, ce problème n'a d'intérêt que s'il est impossible d'obtenir directement l'image $f(x, y)$. Cela permet en particulier de « cartographier » le corps humain sans avoir besoin de le découper en tranches. Les rayons X permettent d'obtenir des transformées de Radon du corps humain. En effet, ils sont suffisamment énergétiques pour traverser le corps humain en ligne droite (absence de réfraction), mais pas trop énergétiques quand même, ce qui fait que leur *atténuation* dépend directement de l'intégrale dans (1), dans laquelle la fonction $f(x, y)$, qui constitue l'inconnue du problème, désigne un *coefficient d'atténuation* local des rayons X (ce coefficient est plus élevé pour les os que pour les tissus).

Exercice 1 : résolution algébrique de la tomographie

Les équations discrètes à résoudre pour retrouver la fonction f en chaque pixel à partir de son sinogramme discret, peuvent être regroupées sous forme matricielle :

$$\mathbf{W}\,\mathbf{f} = \mathbf{p} \tag{3}$$

où :
- $\mathbf{p}$ est un vecteur de taille $n_{\text{mesures}} = n_\theta\, n_{\text{rayons}}$ égal au sinogramme vectorisé ;
- $\mathbf{f}$ est un vecteur de taille $n_{\text{pixels}} = n_{\text{lignes}}\, n_{\text{colonnes}}$, qui constitue l'inconnue ;
- la matrice $\mathbf{W}$, de taille $n_{\text{mesures}} \times n_{\text{pixels}}$, contient la longueur du trajet de chaque rayon à travers chaque pixel ; comme cette matrice est un peu fastidieuse à calculer, elle vous est fournie.

Lancez le script `calcul_sinogramme`, qui calcule le sinogramme d'une image carrée « pas trop grande ». Attention : l'exécution de ce script peut être un peu longue.

La résolution en moindres carrés du système linéaire (3) s'écrit :

$$\min_{\mathbf{f}\in\mathbb{R}^{n_{\text{pixels}}}} \|\mathbf{W}\,\mathbf{f} - \mathbf{p}\|^2 \tag{4}$$

mais comme la matrice $\mathbf{W}$ est généralement énorme, il est impossible de calculer sa pseudo-inverse. Un algorithme plus adapté à la résolution de (3) est *l'algorithme de Kaczmarz*, dont l'itération courante s'écrit :

$$\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}^k + \frac{p_i - \mathbf{w}_i^\top \mathbf{f}^k}{\|\mathbf{w}_i\|^2}\,\mathbf{w}_i^\top \tag{5}$$

où $\mathbf{w}_i$ et p_i désignent, respectivement, la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{W}$ et le $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathbf{p}$.

Écrivez la fonction `kaczmarz`, appelée par le script `exercice_1`, permettant résoudre le système (3) en $k_{\max}$ itérations du type (5). Une fois cette fonction mise au point, testez différentes valeurs de $k_{\max} \in \{1,\dots,20\}$. Vous pourrez également faire d'autres tests en faisant varier le nombre de rayons, qui doit être impair, ainsi que le pas `delta_theta` entre deux angles θ successifs. Enfin, ne vous privez pas de tester d'autres images, à condition toutefois que celles-ci soient carrées et de taille paire.

Exercice 2 : résolution de la tomographie par rétroprojection

Le principal problème de l'approche précédente est sa lenteur. Une autre manière de retrouver une image $f(x,y)$ à partir de son sinogramme consiste à « déprojeter » les données, ce qui revient à calculer, en chaque point (x,y) de l'image, la somme des contributions des différentes déprojections :

$$f(x,y) \approx \frac{1}{n_\theta} \sum_\theta p_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta) \tag{6}$$

En pratique, pour chaque angle θ, et pour chaque pixel de l'image, il est nécessaire de chercher la valeur de l'abscisse t qui correspond au rayon $L(\theta,t)$ passant au plus près de ce pixel.

Écrivez la fonction `retroprojection`, appelée par `exercice_2`, permettant de résoudre ainsi le problème.

Ce script doit fournir des résultats flous, car les hautes fréquences sont bien moins représentées dans le sinogramme que les basses fréauences (voir cours). Une idée pour améliorer les résultats consiste à appliquer un filtrage aux différentes colonnes du sinogramme, de manière à rétablir l'équilibre entre basses et hautes fréquences. Un tel filtrage peut être fait dans le domaine Fourier (cf. TP8). C'est généralement le filtre de Ram-Lak qui est utilisé en tomographie. Ce filtre 1D est tout simplement égal à la valeur absolue de la fréquence.

Faites une copie du script `exercice_2`, de nom `exercice_2_bis`, où vous commencerez par appeler une fonction de nom `filtrage_sinogramme` qu'il vous est demandé d'écrire, avant d'appliquer la rétroprojection.