Département Sciences du Numérique

Théorie des graphes
Chapitre 4 : Parcours de graphes, algorithme de Dijkstra

8 novembre 2018

Problème

On considère dans cette partie des graphes pondérés, i.e. à chaque arête/arc est associé un coût positif ou nul. On suppose toujours que le graphe est simple (pas de boucle, pas d'arêtes/arcs multiples).

Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra détermine pour un graphe connexe le plus court chemin d'un sommet choisi à n'importe quel autre sommet du graphe. Cet algorithme peut s'exécuter sur des graphes orientés ou non. Il construit donc un arbre couvrant du graphe, admettant le sommet d'origine comme racine. C'est un algorithme en temps polynomial.

On suppose que le sommet de départ est le sommet 0. On prend un vecteur C de taille n tel $C(i)$ contient la distance courante entre le sommet 0 et le sommet i. Un ensemble S contient les sommets déjà visités, un autre R contient les sommets restants.

Algorithme de Dijkstra

Initialisation
si l'arête $\{v_0, v_i\}$ existe **alors**
    $C(i) = c_{0i}$
sinon
    $C(i) = +\infty$
fin si
$S = \{v_0\}$
$R = \{v_1, \ldots, v_n\}$
$i = 0$
Corps
tant que $R \neq \emptyset$ **faire**
    Choisir i tel que $i = \mathrm{argmin}_{j \in R} C(j)$
    {Mise à jour de C}
    pour Tous les sommets v_j voisins de v_i **faire**
        $C(j) = \min(C(j), C(i) + c_{ij})$
    fin pour
    Ajouter v_i à S
    Retirer v_i à R
fin tant que

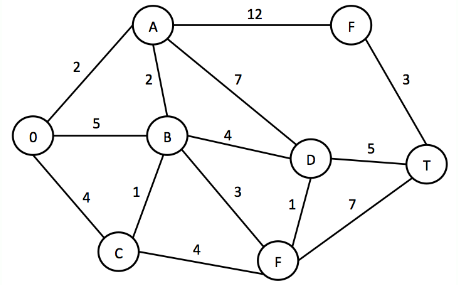
Convergence

- Argument de terminaison : on visite les sommets un à un, donc $\#R$ est strictement décroissant.
- C'est un algorithme de type glouton qui mène à une solution globale optimale.
- Pour la complexité, on parcourt les sommets (passage de 1 sommet R à S et les arêtes sont toutes parcourues –les arcs 1 fois ; les arêtes 2 fois–). A chaque passage sur un sommet, un chercher le minimum dans R. Au pire, la recherche du minimum est linéaire, donc $O(m + n + n^2) = O(m + n^2)$, on peut aussi faire mieux en gardant R trié, mais du coup, il faut pour chaque visite d'arête, insérer dans la liste triée $O((m + n) ln(n))$.

Exercices

▷ Exercice

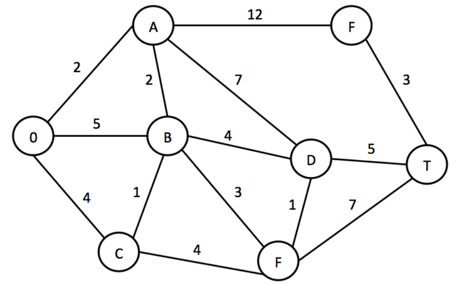
Trouver le plus court chemin de 0 *à* T



Exercices

▷ Exercice

Trouver le plus court chemin de 0 *à* T



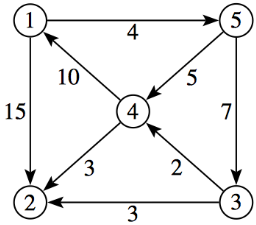
▷ **Solution**

13.

Exercices

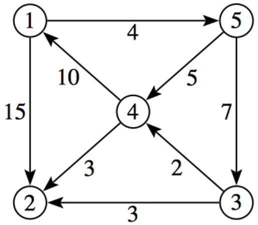
▷ Exercice

Trouver les plus courts chemins partant de 1 *aux autres sommets du graphe*



▷ Exercice

Trouver les plus courts chemins partant de 1 aux autres sommets du graphe



▷ **Solution**

2 : 12 ; 3 :11 ; 4 :9 ; 5 :4.

Cas de poids négatifs

Remarque : si les poids peuvent être négatifs, il faut utiliser l'algorithme de Bellman-Ford, capable d'identifier un cycle absorbant (cycle tel que $d(v_i, v_i) < 0$).