2020 EDP

2SN HPC, S. Gratton, E. Simon

Janvier 2019

D'après les notes de M.Serge Gratton.

1 Les distributions

1.1 L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$

Définition 1.1. C'est l'ensemble des fonctions définies sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, C^∞ sur Ω, et à support compact $\subset \Omega$. [Support : complémentaire du plus grand ouvert où la fonction est nulle]. $\mathscr{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.1. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x\|_2 \geq 1 \\ \exp \frac{1}{\|x\|_2^2 - 1} & \text{sinon} \end{cases}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; alors $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; vérifier que les dérivées partielles de φ en 1 sont nulles.

Remarque. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, toutes ses dérivées sont dans $\mathscr{D}(\Omega)$; par récurrence.

Définition 1.2 (Pseudo topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$)**.** On dit que $(\varphi)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(\in \mathscr{D}(\Omega))$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si

- Il existe un compact K tel que le support de φ est inclus dans K et $supp(\varphi_p) \subset K$ pour p assez grand.
- Chacune des dérivées $(D^\alpha \varphi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$:
  $\underset{x\in K}{sup}|D^\alpha \varphi_p - D^\alpha \varphi| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  où $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice.

Lemme 1.1. *(Admis)*

- *$\forall p$, $1 \leq p < \infty$, $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. La convergence dans $\mathscr{D}(\Omega)$ implique la convergence dans L^p*
- *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x = 0$. Alors $f = 0$ presque partout.*

1.2 L'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω

Définition 1.3. Soit T une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$. ON dit que T est une distribution si et seulement si T est séquentiellement continue. i.e.

$$\forall (\varphi_p) \in \mathscr{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}, \varphi_p \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \implies T(\varphi_p) \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} T(\varphi).$$

On note $T(\varphi)$ par le crochet $< T, \varphi >$.

Remarque. On a que

- $[\varphi_p \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \phi] \iff [\varphi_p - \phi \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0]$
- Comme T est linéaire, il suffit de montrer que :
  si $\varphi_p \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$ alors $T(\varphi_p) \overset{\mathbb{R}}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 1.2. La distribution de Dirac en $a \in \Omega$ notée δ_a et définie par

$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a).$$

Vérification :
δ_a est linéaire. Supposons que :

$$\varphi_p \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$$

Alors :

$$\underset{x\in\Omega}{sup}|\varphi_p(x) - \varphi(x)| = \underset{x\in\Omega}{sup}|\varphi_p(x)| \longrightarrow 0$$

donc en particulier :

$$\varphi_p(a) =< \delta_a, \varphi_p > \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. Si $a = 0$ on note $\delta_0 = \delta$.

Exemple 1.3. Soit $f \in L^2(\Omega)$.
Alors f définit une distribution

$$< T_f, \varphi >= \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Vérification : comme $\varphi \in L^2(\Omega)$ (à fortiori), $f\varphi \in L^1(\Omega)$. T_f est linéaire.
Si

$$\varphi_p \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$$

alors

$$\varphi_p \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} 0 \text{ et } < T_f, \varphi_p >\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\|\varphi_p\right\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$< T_f, \varphi_p > \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus l'application $f \to T_f$ est injective [si $T_f = T_g$, $f = g$] et linéaire.
Si $T_f = 0$, comme $\mathscr{D}(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$,

$$\exists\varphi_p \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} f. \text{ Alors } 0 =< T_f, \varphi_p > \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} < T_f, f >= \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Donc $f = 0$.
On a donc $L^2(\Omega)$ pouvant être vu comme sev de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemple 1.4. Fonction localement intégrable.
Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ on défini :

$$< T_f, \varphi >= \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x$$

ce qui a un sens car $supp(\varphi) \subset K$. Alors

$$| < T_f, \varphi > | = | \int_K f\varphi \mathrm{d}x| \leq \int_K |f||\varphi|\mathrm{d}x \leq \int_K |f| \underset{K}{supp}(\varphi)\mathrm{d}x$$

Où $\underset{K}{supp}(\varphi) < \infty$ car $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.
Grâce au lemme admis, si $T_f = T_g$, f et g localement intégrable, $f = g$. Donc on peut identifier $L^1_{loc}(\Omega)$ avec un sev de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

C'est une généralisation du résultat précédent car $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$

1.3 Dérivation des distributions

Soit f une fonction C^1 sur $\bar{\Omega}$, Ω étant un domaine borné Lipschitz-continu.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, Γ frontière de Ω.
Alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega (f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})(x)\mathrm{d}x + \int_\Gamma f(x)\varphi(x)n_i(x)\mathrm{d}\Gamma(x).$$

Or $\varphi(x) = 0$ sur Γ, donc

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x$$

Comme f et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont dans L^1_{loc}, ce résultat s'interprète comme

$$< \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi >= - < f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >.$$

Définition 1.4. Soit T une distribution sur Ω, et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On appelle dérivée α-ième de T la distribution $D^\alpha T$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), < D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >$$

où $|\alpha| = \sum\limits_i \alpha_i$

Vérification :
$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >$ est bien une distribution. Elle est linéaire.
Si $\varphi_p \longrightarrow 0$, alors

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_p(x)| \longrightarrow 0 \text{ et } \sup_{x\in K} |D^\beta D^\alpha \varphi_p(x)| \longrightarrow 0$$

Donc $D^\alpha \varphi_p \longrightarrow 0$ et ainsi $< T, D^\alpha \varphi_p > \longrightarrow 0$ car T est une distribution.

Exemple 1.5. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on note aussi $D^\alpha T \overset{def}{=} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} T$.
Alors on a l'écriture

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), < \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$

Lemme 1.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est régulière au sens où la formule de Green s'y applique. Si $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors $\frac{\partial}{\partial x_i}(T_f)$ coïncide avec $(T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}})$.*

Démonstration. En effet, d'après Green,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \underbrace{\int_\Gamma f\varphi n_i \mathrm{d}\Gamma}_{=0} \overset{def}{=} < \frac{\partial}{\partial x_i}T_f, \varphi >$$

□

Remarque. — La distribution de Dirac n'est pas identifiable à un élément de L^1_{loc}.
Sinon

$$\exists f, \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

Soit une suite de fonctions telle que $supp(\varphi_p) \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$ et $\varphi_p(0) = 1$. Alors

$$|f(x)\varphi_p(x)| \leq |f(x)|\chi_{]-\frac{1}{p},\frac{1}{p}[} \leq |f|?????????????$$

Donc comme $\chi_{]-\frac{1}{p},\frac{1}{p}[} \longrightarrow 0$, on a

$$\int_\Omega f\varphi_p \mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

Or

$$\int_\Omega f\varphi_p \mathrm{d}x = 1 \text{ impossible.}$$

— La dérivée d'une fonction de L^1_{loc}, qui ? ? ? dans les $\mathscr{D}'(\Omega)$, n'est pas forcément dans L^1_{loc}.

  Exemple Heaviside : $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

  Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$; alors

  $< H', \varphi >= - < H, \frac{\partial \varphi}{\partial x} >= -\int_{-\infty}^{0} 0\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} 1\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta, \varphi >$

  Ce qui est faux.

1.4 Convergence des distributions

Définition 1.5. Soit $(T_p) \in \mathscr{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$. On dit que (T_p) converge vers une distribution T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si et seulement si,

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), < T_p, \varphi > \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} < T, \varphi >.$$

Lemme 1.3. *La dérivation des distributions est une application linéaire et continue sur $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Dans le cas où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
Montrons que l'application $T \longrightarrow D^\alpha T$ est continue (elle est linéaire).
Soit $T_p \overset{\mathscr{D}'(\Omega)}{\longrightarrow} T$, et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >.$$

Alors par définition de la convergence de (T_p)

$$\forall \varphi, (-1)^{|\alpha|} < T_p, D^\alpha \varphi > \longrightarrow (-1)^{|\alpha| < T, D^\alpha \varphi >}$$

Donc

$$\forall \varphi, < T_p, D^\alpha \varphi > \longrightarrow < T, D^\alpha \varphi >$$

Cela montre que D^α est sequentiellement continue. □

Lemme 1.4. *Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ suite de $L^2(\Omega)$, converge vers $f \in L^2(\Omega)$. Alors*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (D^\alpha f_p) \overset{\mathscr{D}'(\Omega)}{\longrightarrow} D^\alpha f$$

Démonstration. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)^{\mathbb{N}}$, tel que $f_p \longrightarrow f \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (f_p - f)(D^\alpha \varphi) \longrightarrow 0 \text{ d'après Cauchy-Schwarz.}$$

Donc

$$(-1)^{|\alpha|} < f_p, D^\alpha \varphi > \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha \varphi >$$

Ce qui signifie $D^\alpha f_p \longrightarrow D^\alpha f$. □

2 Espaces de Sobolev

2.1 Introduction

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f, & x \in \Omega \text{ avec } c \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega) \\ u(x) = 0 & \end{cases}$$

En supposant $\omega \in C^2(\Omega)$, on peut multiplier l'équation par $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, et utiliser la formule de Green

$$\int_\Omega \Delta u(x) \Delta \phi(x) + \int_\Omega c(x)u(x)\phi(x) = \int_\Omega f(x)\psi(x)dx$$

où on a exploité que $\phi = 0$ sur Γ. On va résoudre cette égalité $\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ en introduisant l'espace $H^1(\Omega)$ dit de Sobolev.

2.2 L'espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

Définition 2.1. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable dont chacune des dérivées première (au sens des distributions) est de carré intégrable.

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \forall i \in [\![1, N]\!], \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

On munit cet espace du produit scalaire(vérifier que c'en est un) $(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u, v)_{1,\Omega}$, avec $(u, v)_{1,\Omega} = (\sum_i (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$. La norme associée est $\|v\|_{H^1} = ((v, v)_{L^2} + \|v\|_{1,\Omega}$ avec $\|v\|_{1,\Omega} = \sum_i (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2})^{1/2}$

Théorème 2.1. $(H^1, (\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)})$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. H^1 est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Reste à montrer que H^1 est un espace complet pour cette norme. On considère une suite de Cauchy dans H^1 : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors (v_n) et $(\frac{\partial v_n}{\partial v_i})$ sont toutes des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc convergent respectivement vers w et w_i dans $L^2(\Omega)$. Il reste à montrer que $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ (au sens des distributions) est w_i. D'après le 2ème lemme de I.4, comme

$$w_n \xrightarrow[\alpha \to 0]{\mathscr{D}'(\Omega)} w, \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xrightarrow[\alpha = 1]{\mathscr{D}'(\Omega)} \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

or

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)(dans\ L^2\ donc\ dans\ \mathscr{D}')} w_i,$$

donc d'après l'unicité de la limite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, w_i et $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ sont la même distribution. $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ est donc identifiée à un élément de $L^2(\Omega)$ □

Remarque. — Si Ω est borné, alors $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

— $H^1(\Omega)$ est strictement dans $L^2(\Omega)$. Soit $\Omega =]-1, 1[$ la fonction de Heaviside est dans $L^2(\Omega)$, mais sa dérivée Dirac n'est pas dans $L^2(\Omega)$.

— $\mathscr{D}(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$. Mais $\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$ cf. suite.

Lemme 2.2. *Dans $H^1(\Omega)$, l'application $(u, v) \mapsto (u, v)_{1,\Omega} = \sum_i (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$ est une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive. En conséquence, l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante a lieu :*

$$|(u, v)_{1,\Omega}| \leq \sqrt{(u, u)_{1,\Omega}} \sqrt{(v, v)_{1,\Omega}}.$$

Il en découle que la fonction définie sur $H^1(\Omega)$ par $u \mapsto \|u\|_{1,\Omega} = \sqrt{(u, u)_{1,\Omega}}$ est une semi-norme sur $H^1(\Omega)$.

2.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.2. On appelle $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit, $H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \exists (v_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}\ telle\ que\ \lim \left\| v_p - v \right\|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \right\}$

Théorème 2.3 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante positive $C_p(\Omega)$ telle que :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega)|v|_{1,\Omega},$$

où $|v|_{1,\Omega} = \left[< \nabla v, \nabla v >_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit v une fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$. On prolonge v par 0 en dehors de $\Omega = \widetilde{v}$. Alors $\widetilde{v} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Comme Ω est bornée, on a $supp(\widetilde{v}) \subset \{x, a < x_n < b\}$ pour a et b connus $\notin \Omega$. On a alors

$$\widetilde{v}(x', x_n) - \widetilde{v}(x', a) = \widetilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) dt \forall x_n \in]a, b[$$

D'après Cauchy-Schwartz, on a

$$|\widetilde{v}(x', x_n)|^2 \leqslant (b - a) \int_a^b (\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_n}(x', t))^2 dt \leqslant (x_n - a) \int_a^{x_n} (\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_n}(x', t))^2 dt$$

par intégration sur x' (attention au passage Riemann-Lebesgue), on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\widetilde{v}(x', x_n))^2 dx' \leqslant (b - a) \left\| \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

En intégrant à nouveau par rapport à x_n' sur $[a, b]$, on obtient,

$$\forall v \in \mathscr{D}(\Omega),$$

$$\int_\Omega (v(x))^2 dx \leqslant (b-a)^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant (b-a)^2 (\nabla v, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Ceci est vrai pour tous les $v_p(x)$ tels que $v_p(x) \xrightarrow[H^1(\Omega)]{} v$. Par prolongement de l'inégalité justifié par $||_\Omega \leqslant \|\|_1$, on obtient le résultat, avec $c_p(\Omega) = b - a$. □

Remarque. — Pour Ω borné, H_0^1 est strictement dans $H^1(\Omega)$. En effet, la fonction constante non nulle sur Ω est dans $H^1(\Omega)$, mais ne vérifie pas Poincaré.
— De même, Poincaré n'est pas vrai dans $H^1(\Omega)$, si Ω borné (à nouveau, constante non nulle)

Corollaire 2.3.1. *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors la semi-norme $||_{1,1}$ est équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$. On peut alors poser*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^n}$$

et $H_0^1(\Omega)$ et un espace de Hilbert pour ce produit scalaire réduit.

Démonstration. On a $||_{1,\Omega} \leqslant \|\|_{H^1(\Omega)}$. Supposons $v \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$|v|^2_{1,\Omega} \leqslant \|v\|^2_{H_1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\nabla v, \nabla v)\|_{L^2(\Omega)^n} \leqslant (c_p(\Omega)^2 + 1)|v|^2_{1,\Omega}$$

d'où l'équivalence des normes. Donc $H_0^1(\Omega)$ est complet pour le produit scalaire $(\|.\|_{H^1(\Omega)})$ donc aussi complet pour la (semi-)norme $|.|_{1,\Omega}$. □

Lemme 2.4 (Admis)**.** *$H^n(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\left(\sum_{|\alpha \leqslant n} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$ et $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^n(\Omega)$.*

3 Notion de trace sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$

Si $f \in C^0(\overline{\Omega})$, on peut définir la restriction de f au bord de Γ de Ω. On cherche à étendre cette définition à des fonctions moins régulières, comme à des fonctions de $H^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné Lipschitzien. On traite la dimension 1, "le demi espace, puis le cas général.

3.1 Cas mono-dimensionnel

Dans ce cas, il n'y a pas de problème pour définir la notion de trace, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.0.1. *Soit $v \in H^1(\Omega)$ où $\Omega =]a,b[$. Il existe une fonction $\widetilde{v} \in C^0([a,b])$ qui soit égale presque partout à v. De plus, on a $\sup_{x\in[a,b]} \widetilde{v}(x) \leqslant c \,\|\|_{H^1(\Omega)'}$, ce qui montre que la correspondance entre v et $\widetilde{v}$ est continue.*

Démonstration. Soit $v \in H^1(\Omega)$ et soit $\overline{v}(x) = \int_a^x v'(t)dt$. La fonction $\overline{v}$ vérifie $|\overline{v}(x) - \overline{x}(y)| = |\int_x^y v'(t)dt| \leqslant \sqrt{|y-x|}\int_x^y (v'(t))^2 dt$, pour $(x,y) \in \Omega^2$, ce qui montre que $\overline{v}$ est continue. Soit $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$< \overline{v}', \phi >= - < \overline{v}, \phi' >= - \int_a^b \Big(\int_t^b \phi'(x)dx \Big) \phi'(x)dx$$

, et comme $v'(x)\phi'(x)$ est intégrale sur le domaine $(a < x < b, a < t < x)$, on a Fubini, et donc

$$< \overline{v}', \phi >= - \int_a^b (\phi'(x)dx)v'(t)dt = \int_a^b \phi(t)v'(t)dt$$

donc $\overline{v}' = v'$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. On ADMET qu'alors $\bar{v}$ et v diffèrent d'une constante c au sens des distributions.

$$< \bar{v} - v, \varphi >=< c, \varphi >$$

donc soit $\widetilde{v} = \bar{v} + c$,$\widetilde{v}$ est C^0. comme $\bar{v}(a) = 0$, $c = \widetilde{v}(a)$ et on a donc $\widetilde{v}(x) = \widetilde{v}(a) + \int_a^x v'(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in [a,b]$. De même, on obtient $\widetilde{v}(x) = \widetilde{v}(y) + \int_y^x v(t)\mathrm{d}t$. D'après Cauchy-Schwartz, on a $|\widetilde{v}(x)| \leq |\widetilde{v}(y)| + \sqrt{b-a}\,\|v'\|_{L^2(]a,b[)}$ d'où par intégration suivant y, $(b-a)|\widetilde{v}(x)| \leq \sqrt{b-a}\,\|\widetilde{v}\|_{L^2(]a,b[)} + (b-a)^{\frac{3}{2}}\,\|v\|_{L^2(]a,b[)}$, d'où l'on tire

$$sup|\widetilde{v}(x)| \leq \left\| \Big(\frac{1}{\sqrt{(b-a)}}, \sqrt{b-a}\Big) \right\|_2 \|v\|_{H^1(]a,b[)}$$

Comme $f \longrightarrow T_f$ est injective de $L^2(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, $v \overset{\mathscr{D}'(\Omega)}{=} \bar{v} + c \;\Rightarrow\; v =$ presque partout dans $L^2(\Omega)$. □

Exemple 3.1. Si $v(x) = |\varphi_n(x)|^2 = |\varphi_{n,r}|^r$ en polaire et $\Omega = \{|r| < 1\}$ $v \in H^1$ $\in]0, \frac{1}{2}[$.......

3.2 Cas du demi-espace

Soit $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n), x \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}.$$

Le bord Γ est l'hyperplan $\{(x',0), x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit $v \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, la valeur de v sur Γ est bien définie, et on a la majoration entre $\|v(.,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$ et $\|v\|_{H^1(\Omega)}$

Proposition 3.0.2. *Pour tout* $v \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *on a* $v(.,0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ *et* $\|v(.,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Démonstration. On a

$$v^2(x',0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(v^2(x',x_n)\right) dx_n = -2\int_0^{+\infty}\left(v\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\left(x',x_n\right) dx_n$$

Puisque

$$-2ab \leq a^2 + b^2$$

on a,

$$v^2(x',0) \leq \int_0^{+\infty}\left(v^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_n})^2\right)\left(x',x_n\right) dx_n$$

et en intégrant par rapport à x',

$$\int_{R^{n-1}} v^2\left(x',0\right) dx' \leq \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

□

Théorème 3.1. *Il existe une application linéaire continue définie sur* $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ *à valeurs dans* $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$*, notée* γ_0 *telle que pour toute fonction* $v \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *on ait*

$$\gamma_0 v = v|_\Gamma.$$

De plus $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ *on a*

$$\left\|\gamma_0 v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Démonstration. On sait que $\mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Soit

$$v \in H^1(\mathbb{R}^n_+), \exists (v_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \text{ telle que } v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v.$$

Comme, si on appelle τ la restriction à Γ,

$$\left\|\tau v_p - \tau v_q\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \left\|v_p - v_q\right\|_{H^1(\Omega)}$$

(τv_p) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, donc converge vers un élément appelé $\gamma_0(v)$.

Montrons que cet élément ne dépend pas de la suite choisie.
Soit $(w_p) \subset \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ telle que

$$w_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} w.$$

Alors on a

$$\left\|\tau w_p - \tau v_p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \left\|w_p - v_p\right\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq \left\|w_p - v\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|v - v_p\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Et on a

$$\left\|v - v_p\right\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{p\to+\infty} 0$$

ce qui montre que (τw_p) et (τv_p) ont la même limite : $\gamma_0(v)$.

On vérifie facilement la linéarité de γ_0, et par prolongement de

$$\left\|\tau v_p\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

on obtient l'inégalité qui montre que γ_0 est continue. □

3.3 Cas général et formule de Green

Théorème 3.2. *Soit Ω un ouvert à frontière Lipschitzienne. Il existe une application continue notée γ_0, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ telle que :*

- $\forall v \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, $\gamma_0 v = v|_\Gamma$
- *Ker* $\gamma_0 = H_0^1(\Omega)$
- γ_0 *n'est pas surjective en général, mais son image* $\gamma_0(H^1(\Omega))$ *notée* $H^{1/2}(\Gamma)$ *est dense dans* $L^2(\Gamma)$.

Proposition 3.2.1. $\forall u \in H^2(\Omega)$ *et* $\forall v \in H^1(\Omega)$, *on a la formule de Green*

$$\int_\Omega (\Delta u v)(x)dx = -\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)(x)dx + \int_\Gamma (\gamma_1 u\ \gamma_0 v)(x)d\Gamma(x)$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$ *et* $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right)(x)dx = -\int_\Omega \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)(x)dx + \int_\Gamma (\gamma_0 v\ \gamma_0 u n_i)(x)d\gamma(x)$$

où $\gamma_1 u = \sum_{i=1}^d \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) n_i$ *pour* $u \in H^2(\Omega)$.

Démonstration. (du second point)
Pour chaque intégrale, on introduit $\left(u_p\right) \subset \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ et $\left(v_p\right) \subset \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ telles que

$$u_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} u \text{ et } v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v.$$

On a alors :

$$\left| \int_\Gamma (v_p u_p n_i)(x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma (\gamma_0(v)\gamma_0(u))(x)d\Gamma(x)\right|$$

D'après Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_\Gamma (u_p - \gamma_0 u)v_p n_i \mathrm{d}\gamma\right| \leq \left\|u_p - \gamma_0 u\right\|_{L^2(\Gamma)} \left\|v_p n_i\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left\|u_p - u\right\|_{H^1(\Gamma)} \left\|v_p\right\|_{L^2(\Gamma)}$$

où n_i est un vecteur unitaire,

$$\left\|u_p - u\right\|_{H^1(\Gamma)} \longrightarrow 0 \text{ et } \left\|v_p\right\|_{L^2(\Gamma)} \text{ converge et est donc bornée.}$$

□

4 Complément sur les espaces de Hilbert : le théorème de Lax-Milgram

4.1 Cadre fonctionnel du problème

Soit V un espace de Hilbert.
On s'intéresse au problème suivant : trouver u $\in V$, $\forall v \in V$, $a(u, v) = L(v)$ où
L est une forme linéaire continue sur V :

$$\exists c, \forall v \in V, |L(v)| \leq c \, \|v\|_V$$

a est une forme bilinéaire, continue, coercive :

$$\exists M, \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \, \|u\|_V \, \|v\|_V$$

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, |a(u, u)| \geq \alpha \, \|u\|_V^2$$

4.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 4.1. *Si L est une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert V et a une forme bilinéaire continue coercive sur V, alors il existe un unique $u \in V$ solution de*

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v)$$

Démonstration. Unicité : Soit u_1 et u_2 deux solutions. Alors

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in V.$$

Pour $v = u_1 - u_2$, on a

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \left\|u_1 - u_2\right\|_V^2.$$

donc $u_1 = u_2$.
Existence : Les applications

$$v \mapsto a(u, v) \text{ et } v \mapsto L(v)$$

sont des formes linéaires continues sur V.
D'après le théorème de Riesz, il existe deux éléments uniques $A(u)$ et f tels que le problème s'écrit :

$$\forall v \in \mathrm{V}, A(u) = f.$$

Propriété de A :

— A est linéaire

$$< Au_1 + \alpha A u_2 - A(u_1 + \alpha u_2, v >= 0, \forall v \in V.$$

— A est continue

$$|a(u, Au)| =< Au, Au >= ||Au||^2 \leq M||u||||Au||$$

donc si

$$Au \neq 0, ||Au|| \leq M||u||.$$

— A est surjective
$Im(A)$ est fermée. Soit (Au_p) une suite de Cauchy dans V. Alors
$$\alpha \left\|u_p - u_q\right\|^2 \leq a(u_p - u_q, u_p - u_q) \leq \left\|u_p - u_q\right\| . \left\|Au_p - Au_q\right\|.$$
Donc
$$\frac{1}{\alpha} \left\|Au_p - Au_q\right\| \geq \left\|u_p - u_q\right\|.$$
Donc (u_p) est de Cauchy, donc converge vers u et comme A est continue, (Au_p) converge vers Au.
$$V = Im(A) \oplus Im(A)^{\perp}.$$
Soit $u \in Im(A)^{\perp}$. On a
$$< Au, u >= 0 = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$
donc $\|u\| = 0$. Ainsi $V = Im(A)$.

— A est injective
Si $v = Au$, alors si
$$v = 0, 0 =< Au, u >\geq \alpha \|u\|^2$$
donc $u = 0$.

□

Corollaire 4.1.1. *La solution u dépend continûment de la donnée $L \in V$.*

Démonstration. A est linéaire et inversible. Soient L_1 et L_2 deux formes linéaires continues sur V et u_1, u_2 les deux solutions correspondants.
$$\alpha \left\|u_1 - u_2\right\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)$$
$$= L_1(u_1 - u_2) - L_2(u_1 - u_2) \leq \left|\!\left|\!\left|L_1 - L_2\right|\!\right|\!\right| . \left\|u_1 - u_2\right\|_V$$
Donc
$$\left\|u_1 - u_2\right\| \leq \frac{\left|\!\left|\!\left|L_1 - L_2\right|\!\right|\!\right|}{\alpha}.$$

□

Proposition 4.1.1. *Si a est symétrique, alors*

$$\text{trouver } u, \forall v \in V\, a(u, v) = L(v) \Leftrightarrow \text{trouver } u \text{ qui minimise } \frac{1}{2}a(u, v) - L(v), v \in V.$$

Démonstration. Soit $E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$. Alors
$$E(u + \lambda v) = E(u) + \lambda < a(u, v) - L(v), v > + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v).$$
Si $\forall v, a(u, v) = L(v)$, alors u solution du problème d'optimisation.
Réciproquement, on a
$$\lambda < a(u, v) - L(v), v > + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) \geq 0.$$
En divisant par λ et laissant $\lambda \to 0^+$ et $\lambda \to 0^-$, on a
$$a(u, v) = L(v).$$

□

5 Exercices

5.1 Exercice 1

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Lambda u + u & = f \text{ dans } \Omega =]0,1[x]0,1[\\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1) Mettre ce problème sur forme variationnelle. Montrer que dans un espace de Hilbert que vous préciserez, les hypothèses de Lax-Milgram sont satisfaites ; et en déduire l'unicité de la solution.

2) On s'intéresse à V_h, espace vectoriel de dimension finie consistant en les fonctions linéaire par triangle et continues sur $\bar{\Omega}$.

Soit φ_i fonction linéaire par triangle définie par $\varphi_i(A_{ij}) = \delta_{ij}$ où $j, i = [\![1, N]\!]$ points intérieurs.
Montrer que $V_h =< \varphi_1, ..., \varphi_N >$ et que $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$ et $dim(V_h) = N$

3) Soit le problème $(\mathcal{P}_h)$ trouver u_h, $\forall v_h$, $\mathcal{A}(u_h, v_h) = L(v_h)$.
Résoudre ce problème et vérifier notamment que les hypothèses de Lax-Milgram sont satisfaits. Soit $A\alpha = b$ le système linéaire obtenue, quel est le caractère creux de A ?.

4) Calculer les éléments de A et b.

1) $\int_\Omega -\Delta uv + uv = f$ donc, sachant $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + uv - \int_{\partial\Omega} (\gamma_1 u \gamma_0 v)(x) \mathrm{d}\Gamma(x) + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

et ainsi

$$\underbrace{\int_\Omega (\nabla u . \nabla v)(x) + (uv)(x) \mathrm{d}x}_{\mathcal{A}(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv}_{L(v)}$$

Vérification de Lax-Milgram :

$$\mathcal{A}(u, v) =< u, v >_{H_0^1(\Omega)} \text{ et } L(v) = \int_\Omega fv$$

(pas besoin d'après Riesz).
Sinon

$$\int_\Omega \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \leq \sum \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2} \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2} + \sqrt{\int_\Omega u^2} \sqrt{\int_\Omega v^2}$$
$$\leq \sqrt{\sum (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 + \int_\Omega u^2} \sqrt{\sum (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 + \int_\Omega v^2} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Coercivité :

$$\mathcal{A}(u,v) =< u, u >\geq 1. \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Linéaire - continuité de L

$$\int_\Omega fv \leq \sqrt{\int_\Omega f^2}\sqrt{\int_\Omega v^2} \leq \sqrt{\int_\Omega f^2}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

2) Sur un triangle ABC

a) Si φ est linéaire et continue et

$$M = \alpha_A A + \alpha_B B + (1 - \alpha_A + \alpha_B)C$$

alors

$$\varphi(M) = \alpha_A\varphi(A) + \alpha_B\varphi(B) + (1 - \alpha_A + \alpha_B)\varphi(C)$$

Donc toute fonction linéaire sur un triangle définie par sa valeur sur 3 sommets.

b) Toute fonction de $< \varphi_i, ..., \varphi_N >$ est linéaire par morceaux et continue.

En effet, la valeur sur chaque arrête est donnée par

$$\varphi_{i[A,B]} = \alpha_A\varphi(A) + \alpha_B\varphi(B) + 0\varphi(C)$$

donc ??? des valeurs aux sommets donc même valeur sur 2 triangles adjacents.

c) $V_h =< \varphi_1, ..., \varphi_N >$, on a

$$< \varphi_1, ..., \varphi_N >\subset V_h \text{ et } dim(V_h) = N$$

Si $\varphi \in V_h$, $\varphi = \Psi$ où

$$\Psi = \textstyle\sum_{i=1}^N \varphi(A_i)\varphi_i \text{ (égales sur les sommets)}$$

Si $\Psi = 0$ alors

$$\forall j, \Psi(A_j) = \textstyle\sum_{i=1}^N \underbrace{\varphi(A_i)}_{\alpha_i}\delta_{ij} = \varphi(A_j = 0)$$

donc $\Psi = 0$

d) Montrons que $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$. φ_i est de carré sommable sur Ω (continuer sur un borné).

Calcul de $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ definie par

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \\
= \quad & \sum_{\mathcal{T}_K} -\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \\
= \quad & \sum_{\mathcal{T}_K} \int_\Omega \frac{\partial\partial\varphi_i}{\partial x_j}\varphi + \int_{\mathcal{T}_K} \varphi_i\varphi n_k \mathrm{d}\Gamma(\Omega) \\
= \quad & < \{\varphi_i\}, \varphi > + \sum_{\mathcal{T}_K}\int_{\mathcal{T}_K} \varphi_i\varphi n_k \mathrm{d}\Gamma(\Omega) \\
= \quad & < \{\varphi_i\}, \varphi > + \underbrace{\sum_{\text{arrêtes } a_K} \int_{a_i} \varphi_i\varphi n_K + \int \varphi_i\varphi(-n_K)}_{????????}
\end{aligned}$$

3) Le problème s'écrit $u = \sum \alpha_j \varphi_j$ et $v = \sum \beta_i \varphi_i$

$$\sum_{i,j} \alpha_j \beta_j \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi j) = \sum_i \beta_i L(\varphi_i)$$

d'où

$$\sum_i \beta_i \left[L(\varphi_i) - \sum_j \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_j \right] = 0, \forall \beta_i$$

donc

$$\sum_j \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi j)\alpha_j = L(\varphi_i), \forall i \in [\![1, N]\!]$$

4) Calcul des éléments de (A)
Si

$$mes(supp(\varphi_i \cap \varphi_j)) = 0$$

alors

$$\mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j) = a_{i,j} = 0$$

(Schéma) Calcul distinct possible.

Technique de l'élément de référence :
a)

(Schéma)

$$G(M) = A^{(1)}(\mathcal{T}) + x(A^2(\mathcal{T}) - A^1(\mathcal{T})) + y(A^3(\mathcal{T}) - A^1(\mathcal{T}))$$

Transformation inversible.
Si

$$\begin{aligned} M &= \lambda^{(1)}A^{(1)} + \lambda^{(3)}A^{(2)} + (1 - \lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})A^{(3)} \\ &= (1 - x - y)A^{(1)} + xA^{(2)} + yA^{(3)} \end{aligned}$$

alors

$$G(M) = (1 - x - y)A^{(1)}(\mathcal{T}) + xA^{(2)}(\mathcal{T}) + yA^{(3)}(\mathcal{T})$$

et donc les coordonnées barycentriques sont inchangées par la transformation. Donc $\lambda^{(i)}(G(M)) = \lambda^{(i)}(M)$
b) Les coordonnées barycentriques sont des fonctions linéaires du point.

$$\lambda^{(i)}(M) = 1 \text{ si } M = A^{(i)}$$
$$\lambda^{(i)}(M) = 0 \text{ si } M = A^{(j)},\ j \neq i$$

Donc sur $\mathcal{T}$, $\lambda^{(i)}(M) = \varphi_i(M)$.
c) Le calcul de $A = [a_{i,j}]$ revient à calculer la somme de termes de type

$$\int_{\mathcal{T}} (\varphi_i \varphi_j + \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{T}} \lambda^{(i)}(\mathcal{T})\lambda^{(j)}(\mathcal{T})(+???)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[Suite à écrire]

Théorème 5.1. *Soit Ω un ouvert à fonction polygonale. Supposons que la solution du problème variationnelle est régulière, et soit u_h la solution du problème discrétisé. Si la triangulation $\mathcal{T}$ vérifie*

$$\underset{sup}{T\ triangle}\frac{h(T)}{\rho(T)} \leq c$$

où $h(t)$ est le diamètre et $\rho(T)$ le rayon du cercle inscrit le plus grand.
Alors

$$\exists C \text{ (dépendant de u), } \left\|u - u_h\right\|_{H_0^1} \leq Ch$$

où h est le plus grand diamètre de $\mathcal{T}$

Lemme 5.2. *Cea Sous les hypothèses de Lax-Milgram*

$$\left\|u - u_h\right\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\underset{V_h}{inf}\left\|u - v_h\right\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \alpha\left\|u - u_h\right\| &\leq a(u - u_h, u - v_h + v_h - uh) \\ &\leq a(u - u_h, u - v_h) \text{car } a(u - u_h, v_h - u_h) = 0 \\ &\leq M\left\|u - u_h\right\|\left\|u - v_h\right\| \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3. *Relation sur les coordonnés barycentriques*

— $\sum \lambda_i(x) = 1$ *donc* $\sum \nabla\lambda_i(x) = 0$

— $M = \left[A^{(1)}\, A^{(2)}\, A^{(3)}\right]\begin{bmatrix} d^1(x) \\ d^2(x) \\ d^3(x) \end{bmatrix}$

donc

$$I = \sum_{i=1}^3 A^{(i)}\nabla\lambda^{(i)}(x)^T = \sum_{i=1}^3 \nabla\lambda^{(i)}(x)A^{(i)T}$$

— *Sur le triangle* $\mathcal{T}_k$, $\left\|\nabla\lambda^{(i)}(x)\right\|_2 \leq \frac{1}{\rho(T_k)}$

Démonstration. 3^e point :

$$\nabla\lambda^i(x)^T(x - y) = \lambda^i(x) - \lambda^i(y)$$

Comme $\lambda^i \in [0, 1]$,

$$\left|\nabla\lambda^i(x)^T(x - y)\right| \leq 1$$

donc

$$\begin{aligned} &\underset{y\in Cercle}{sup}\left|\nabla\lambda^i(x)^T(x - y)\right| \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ &\left\|\nabla\lambda^i(x)\right\|_2 \rho(T_k) \leq 1 \end{aligned}$$

□

Lemme 5.4. *Majoration de* $\underset{v_h \in V_h}{inf} \left\| u - v_h \right\|_{H_0^1}$

Démonstration. Ici on part de $\left| u - v_h \right|_{H_0^1}$ qui est équivalente à $\left\| u - v_h \right\|_{H_0^1}$
Soit $\Pi_h u(x)$, $u(x) \in V_h$, qui interpole u aux points de la triangulation sut $\mathcal{T}_k$
Alors

$$u(A^{(i)}) = u(x) + (A^{(i)} - x)^T \nabla u(x) + \frac{1}{2}(A^{(i)} - x)^T \nabla^2 u(y)(A^{(i)} - x)$$

$\Pi_h u(x)$ étant linéaire sur $\mathcal{T}_k$,

$$\Pi_h u(x) = \sum \lambda^{(i)} \Pi_k u(A^{(i)})$$

et donc

$$\begin{gathered} \Pi_h u(x) = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \nabla \lambda^{(i)}(x) u(A^{(i)}) \\ \textstyle\sum_i \nabla \lambda^{(i)}(x) x^T = 0 \\ \textstyle\sum_i \nabla \lambda^{(i)}(x) u(x) = 0 \\ \textstyle\sum_i \nabla \lambda^{(i)} A^{(i)T} = I \end{gathered}$$

d'où

$$\nabla \Pi_k u(x) - \nabla u(x) = \tfrac{1}{2} \sum_i (A^{(i)} - x)^T \nabla u(x) + \frac{1}{2}(A^{(i)} - x)^T \nabla^2 u(y)(A^{(i)} - x)$$

$\forall x$,

$$\left\| \nabla \Pi_h u(x) - \nabla u(x) \right\|_2 \leq \tfrac{3}{2} \tfrac{h(T_k)}{\rho(T_k)} \underset{\Omega}{sup} \left\| \nabla^2 u \right\|_2 \leq \tfrac{3}{2} hC \underset{\Omega}{sup} \left\| \nabla u \right\|_2$$

donc

$$\textstyle\int_\Omega \left\| (\nabla u - \nabla \Pi_h u)(x) \right\|^2 \leq (\frac{3}{2} hC \underset{\Omega}{sup} \left\| \nabla u \right\|_2)^2 mes(\Omega)$$

d'où

$$\left| u - \Pi_h(u) \right|_{H_0^1} \leq \frac{3}{2} hC \underset{\Omega}{sup} \left\| \nabla u \right\|_2 \sqrt{mes(\Omega)}$$

et donc

$$\left| u - u_h \right|_{H_0^1} \leq \frac{3}{2} \frac{M}{\alpha} hC \underset{\Omega}{sup} \left\| \nabla u \right\|_2 \sqrt{mes(\Omega)}$$

□