

# Rapport du projet de Télécommunication partie 1 : Transmission en bande de base

Théo PETIT  
Thomas SADURNI

Département Sciences du Numérique - Première année  
2019-2020

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Objectifs du travail réalisé . . . . .	4
1.2	Schéma général des chaînes à étudier (canal AWGN) . . . . .	4
1.2.1	Génération de l'information binaire à transmettre . . . . .	4
1.2.2	Mapping . . . . .	4
1.2.3	Suréchantillonnage . . . . .	4
1.2.4	Filtrage de mise en forme . . . . .	4
1.2.5	Canal de transmission AWGN . . . . .	4
1.2.6	Filtrage de réception . . . . .	5
1.2.7	Echantillonnage . . . . .	5
1.2.8	Décisions . . . . .	5
1.2.9	Demapping . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"</b>	<b>5</b>
2.1	Etude théorique . . . . .	5
2.2	Implantation sous Matlab (cette chaîne servira de chaîne de référence pour la suite) . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception</b>	<b>10</b>
3.1	Etude théorique . . . . .	10
3.2	Implantation sous Matlab . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Troisième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée</b>	<b>15</b>
4.1	Etude théorique . . . . .	15
4.2	Implantation sous Matlab . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Quatrième chaîne à étudier : impact du choix du mapping</b>	<b>19</b>
5.1	Etude théorique . . . . .	19
5.2	Implantation sous Matlab . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Références</b>	<b>22</b>

## List of Figures

1	Chaîne de transmission en bande de base . . . . .	4
2	Signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception, sans bruit. . . . .	6
3	Diagramme de l'oeil avec une base de $T_s$ . . . . .	6
4	Signal transmis. . . . .	7
5	Densité spectrale de puissance du signal transmis. . . . .	7
6	Signal sans bruit en sortie du filtre de réception et échantillonné. . . . .	8
7	Signal avec du bruit en sortie du filtre de réception et échantillonné. . . . .	8
8	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception, sans bruit. . . . .	9
9	Comparaison des TEB simulé et théorique. . . . .	9
10	Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception. . . . .	10
11	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ . . . . .	10
12	Signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	10
13	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	11
14	Signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	12
15	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	12
16	Comparaison des TEB de la chaîne de référence et de la deuxième chaîne. . . . .	13
17	Comparaison des TEB théorique et simulé de la deuxième chaîne. . . . .	13
18	Comparaison des DSP de la chaîne de référence et la deuxième chaîne. . . . .	14
19	Signal reçu en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	15
20	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . . . . .	16
21	Comparaison du TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée. . . . .	16

22	Comparaison du TEB de la chaîne étudiée au TEB de la chaîne de référence. . . . .	17
23	Comparaison de la DSP de la chaîne étudiée à la DSP de la chaîne de référence, sans bruit. . . . .	17
24	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour un passage dans un filtre passe bas de fréquence 1500Hz, sans bruit. . . . .	18
25	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour un passage dans un filtre passe bas de fréquence 3000Hz, sans bruit. . . . .	18
26	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ . . . . .	19
27	Signal en sortie du filtre de d'émission $h(t)$ . . . . .	20
28	Comparaison de l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence, sans bruit. . . . .	20
29	Diagramme de l'oeil, sans bruit, en sortie du filtre de réception. . . . .	21
30	Comparaison du TES obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TES théorique étudié. . . . .	21
31	Comparaison du TEB obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TEB théorique. . . . .	22

# 1 Introduction

## 1.1 Objectifs du travail réalisé

L'objectif de ce travail est de montrer les impacts des différents choix qui suivent sur une transmission en bande de base d'un message binaire : le choix du filtre de réception, le choix du filtre de mise en forme, et le choix du mapping. De plus, ce projet a l'intention de nous former à planter une chaîne de transmission en bande de base de référence complète, de l'analyser et de la comparer en fonction des différents choix explicités précédemment, en terme d'efficacité spectrale et d'efficacité en puissance.

## 1.2 Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)

La figure 1 présente le schéma général des chaines à étudier.

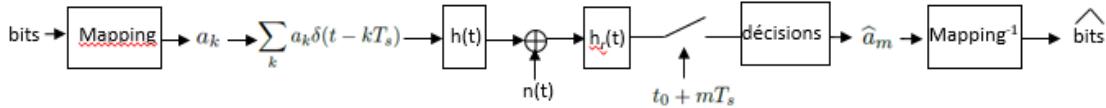


Figure 1: Chaîne de transmission en bande de base

### 1.2.1 Génération de l'information binaire à transmettre

La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants) pourra être réalisée grâce à la fonction *randi* de Matlab.

### 1.2.2 Mapping

Un mapping devra être réalisé afin de passer de l'information binaire aux symboles  $a_k$ . Le mapping est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et planter.

### 1.2.3 Suréchantillonnage

La suite d'impulsions de Dirac espacées de la durée symbole  $T_s$  et pondérées par les symboles  $a_k$  issus du mapping sera générée, en numérique, en insérant  $N_s - 1$  zéros entre deux symboles  $a_k$ , si  $N_s$  représente le nombre d'échantillons utilisés par symbole (ou facteur de suréchantillonnage :  $T_s = N_s T_e$ ,  $T_e$  étant la période d'échantillonnage).  $N_s$  devra être déterminé pour que le signal numérique généré respecte la condition d'échantillonnage de Shannon.

### 1.2.4 Filtrage de mise en forme

La réponse impulsionnelle,  $h(t)$ , du filtre de mise en forme est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et planter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ( $h = [h(0)h(1)\dots h(N-1)]$ , si  $N$  représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : *signal\_filtre=filter(h,1,signal\_a-filtrer)* (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TP de traitement du signal.

### 1.2.5 Canal de transmission AWGN

Le canal de transmission est supposé à bruit,  $n(t)$ , additif blanc et Gaussien, de densité spectrale de puissance égale à  $\frac{N_0}{2}$  quelle que soit la fréquence. Pour les simulations, ce bruit sera généré sur la bande  $F_e$  (fréquence d'échantillonnage), grâce à la fonction *randn* de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées  $\sigma_n^2$  :  $bruit = \sigma_n * randn(1, length(r))$ ; si  $r$  représente le vecteur d'échantillons de signal à l'entrée du récepteur. On calculera la puissance du bruit  $\sigma_n^2$ , en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur  $\frac{E_b}{N_0}$ , de la manière suivante (voir démonstration en annexe) :

$$\sigma_n^2 = \frac{P_r N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où  $N_s$  représente le facteur de suréchantillonage,  $M$  l'ordre de la modulation et  $P_r$  la puissance du signal  $r$  qui peut être obtenue sous matlab de la manière suivante :  $P_r = \text{mean}(\text{abs}(r).\wedge 2)$ .

### 1.2.6 Filtrage de réception

La réponse impulsionnelle,  $h_r(t)$ , du filtre de mise de réception est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ( $hr = [hr(0)hr(1)\dots hr(N-1)]$ , si  $N$  représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction `filter` de matlab : `signal_filtre=filter(hr,1,signal_a_filtrer)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction `conv.m`, comme lors des TPs de traitement du signal.

### 1.2.7 Echantillonnage

Le signal filtré devra être échantillonné à  $t_0+mT_s$  pour revenir au rythme symbole. L'instant d'échantillonnage optimal  $t_0$  pourra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à planter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

### 1.2.8 Décisions

Un détecteur à seuil permettra de prendre les décisions sur les symboles à partir du signal échantillonné. Le seuil optimal devra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à planter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

### 1.2.9 Demapping

Un demapping devra être réalisé en vue de comparer les bits reçus aux bits émis dans l'objectif de calculer le taux d'erreur binaire simulé de la transmission, TEB simulé qui devra être comparé au TEB théorique déterminé dans l'étude théorique de la chaîne en question.

## 2 Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"

On considère un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $a_k 1, 1$ ) et des réponses impulsionales des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , rectangulaires de durée  $T_s$ . Le résultat du produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$  est donné dans la figure 26.

### 2.1 Etude théorique

Calculons d'abord la densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2\frac{\sigma_a^2}{T_s} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a(k)e^{j2\pi fkT_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

$$\text{avec } \sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2]$$

$$\text{et } a_k = -1, 1, m_a = 0$$

$$\text{donc } \sigma_a^2 = 1$$

Comme les  $a_k$  sont indépendants  $E[a_m^* a_{m-k}^2] = E[a_m^*]E[a_{m-k}^2] = m_a m_a = 0$

$$\text{on a } S_x(f) = \frac{1}{T_s} |H(f)|^2 \text{ avec } H(f) = T_s \text{sinc}(\pi f T_s) e^{-j\pi f T_s}$$

$$\Rightarrow S_x(f) = T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s)$$

La bande nécessaire à la transmission d'un tel signal est  $\frac{8}{T_s}$  mais en théorie, elle est infinie.

Montrons maintenant que la chaîne de communication vérifie le critère de Nyquist.

Pour  $t_0 = 0$  on a bien  $g(t_0) \neq 0$  et  $g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}^*$

On a  $g(t) = h(t) * h_r(t)$  et  $G_0^t(f) = TF\left(\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)}\right)$   
 $\sum_k G_0^t(f - \frac{k}{T_s}) = cste$

donc le critère de Nyquist est vérifié.

Traçons ensuite le signal  $z(t)$  sans bruit en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  pour la suite de bits émis suivante : 0110100 ainsi que le diagramme de l'oeil associé :

$$z(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * g(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * h(t) * h_r(t)$$



Figure 2: Signal  $z(t)$  en sortie du filtre de réception, sans bruit.

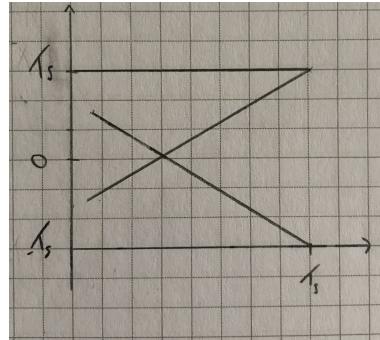


Figure 3: Diagramme de l'oeil avec une base de  $T_s$ .

On retrouve bien le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist.

On suppose maintenant que l'on échantillonne aux instants optimaux ( $ISI = 0$ ). Calculons le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (en admettant que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré, en sortie du filtre de réception). On prend ici  $t_0 = T_s$ .  
 On note ici  $w_n$  le bruit.

$$P_{w_n} = \int_R s_{w_n} df = \int_R S_{w_n} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r(f)|^2 df = \frac{N_0 T_s}{2} = \sigma^2$$

$$P_{signal} = E[|a_m g(t_0)|^2] = E[|a_m|^2 |g(t_0)|^2] = E[|g(t_0)|^2] = |g(T_s)|^2 = |T_s|^2 = T_s^2$$

$$\Rightarrow SNR = 10 \log\left(\frac{2g(t_0)^2}{N_0 T_s}\right) = 10 \log\left(\frac{2T_s^2}{N_0}\right)$$

Le seuil optimal à utiliser est à 0.

A l'entrée du récepteur les symboles ont une énergie  $E_b = P_{signal} T_b = T_s$ . On peut maintenant en déduire, après calculs, le taux d'erreur binaire  $TEB$  :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)$$

$$\text{Or } \sigma = \sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}} \text{ donc } TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}}\right) = Q\left(\frac{E_b}{\frac{N_0 T_s}{2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

L'étude théorique terminée, implantons tout cela sur Matlab.

## 2.2 Implantation sous Matlab (cette chaîne servira de chaîne de référence pour la suite)

Pour l'implantation Matlab, on utilise les paramètres suivants : durée symbole en nombre d'échantillons  $N_s = 4$ , nombre de bits généré  $nb_{bits} = 10000$ , temps de départ d'échantillonnage  $t_0 = N_s$ .

1. Dans un premier temps, générerons le signal à transmettre ainsi que sa densité spectrale de puissance en utilisant un périodogramme.

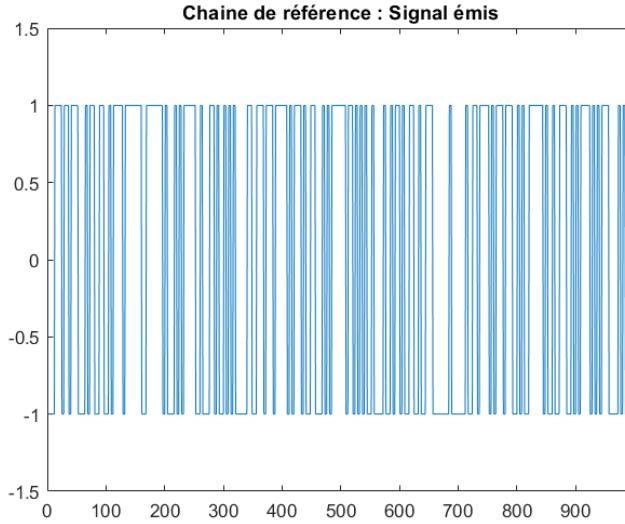


Figure 4: Signal transmis.

On observe bien un signal en créneau jonglant entre 1 et  $-1$ , comme ce qui était prévu avec les  $a_k$ .

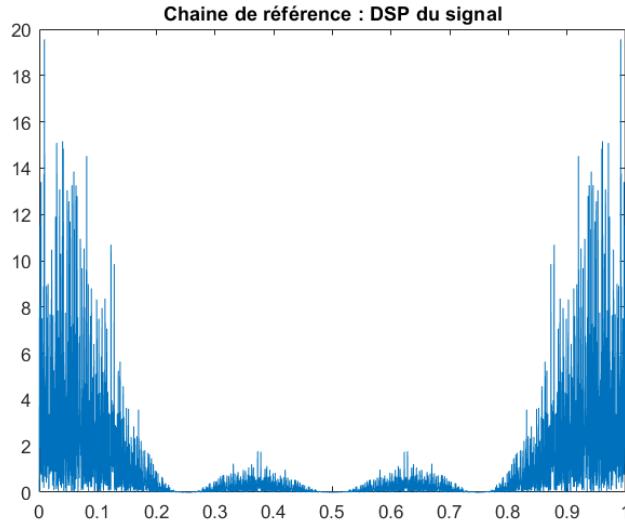


Figure 5: Densité spectrale de puissance du signal transmis.

2. Implantation de la chaîne sans bruit :

(a) Tracé du signal en sortie du filtre de réception.

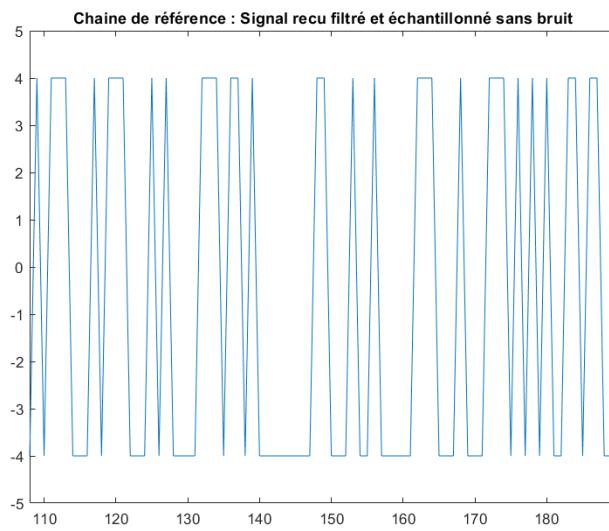


Figure 6: Signal sans bruit en sortie du filtre de réception et échantillonné.

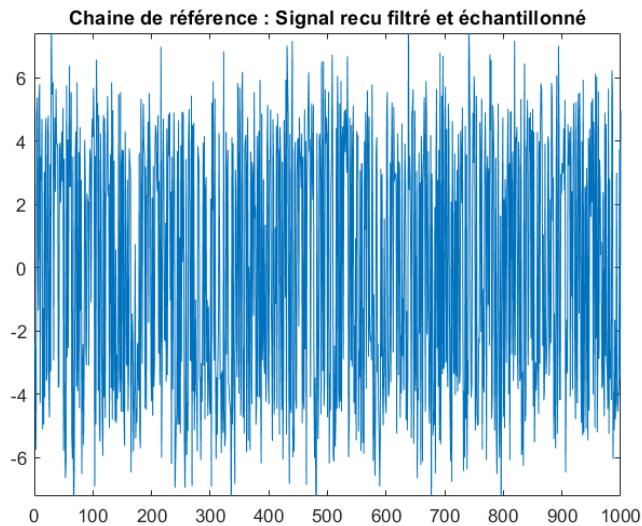


Figure 7: Signal avec du bruit en sortie du filtre de réception et échantillonné.

(b) Tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception.

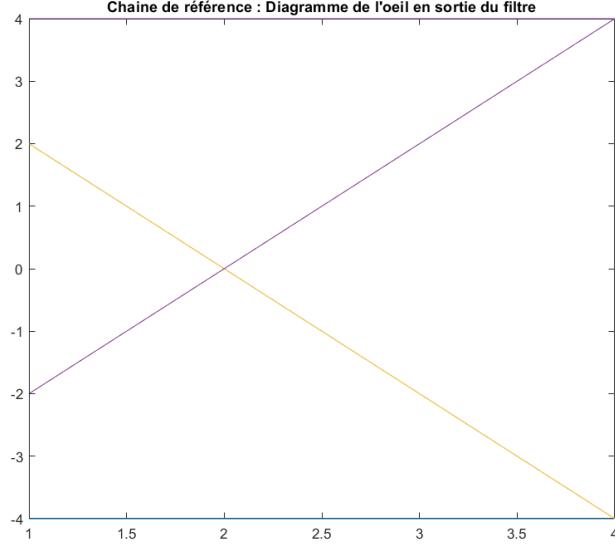


Figure 8: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception, sans bruit.

Le diagramme de l'oeil, tracé sans bruit sur une durée  $T_s$  à partir d'un signal  $z(t)$ , représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur ce signal pendant  $T_s$ . Ici on remarque 4 valeurs possibles, et les résultats sont les mêmes que l'étude théorique. Les différentes valeurs possibles sont clairement visibles sur le diagramme.

3. Implantation de la chaîne avec bruit : rajoutons le bruit et comparons le taux d'erreur binaire simulé au TEB théorique en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $E_b/N_0$ ) en décibels. Nous prenons des valeurs de  $(E_b/N_0)_{dB}$  allant de 0 à 6 dB.

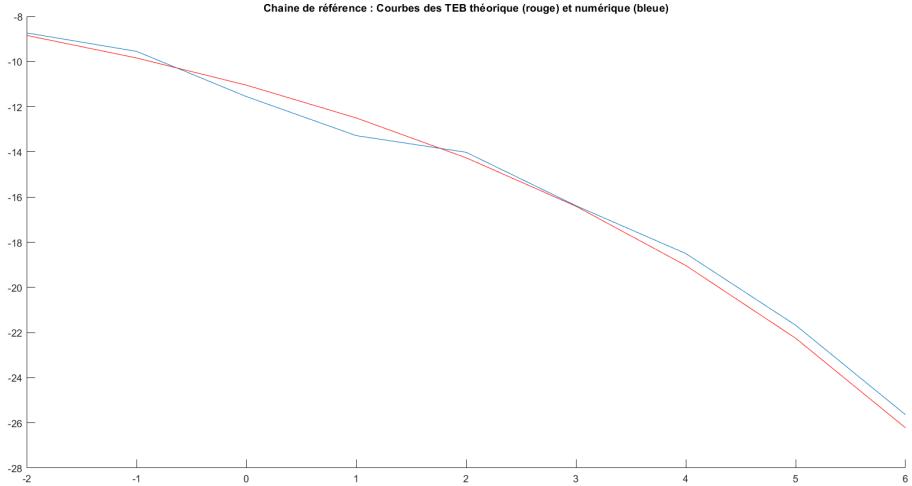


Figure 9: Comparaison des TEB simulé et théorique.

Ce tracé nous permet de valider le bon fonctionnement de notre chaîne de transmission, car les deux courbes sont confondues. Le taux d'erreur est donc optimal et ceci est satisfaisant, le message transmis est donc le même que le message reçu.

### 3 Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception

On considère ici un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $a_k \in \{-1, 1\}$ ) et les réponses impulsionales des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , données par la figure 10. Le résultat du produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$  est donné dans la figure 31.

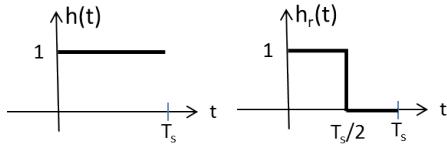


Figure 10: Réponses impulsionales des filtres d'émission et de réception.

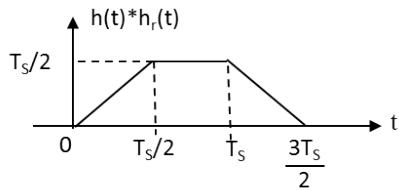


Figure 11: Produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$ .

#### 3.1 Etude théorique

De la même façon que la première chaîne, commençons l'étude théorique de la deuxième chaîne, qui montrera l'impact du choix du filtre de réception.

Prenons ici  $t_0 = \frac{T_s}{2}$  (même si ce n'est pas le seul à fonctionner ici, mais la distance entre symboles reçus est la plus grande, ce qui donne la meilleure robustesse en présence de bruit)  
on a  $g(t_0) = \frac{T_s}{2} \neq 0$  et  $g(t_0 + pT_s) = 0 \forall p \in Z^*$   
donc le critère de Nyquist est vérifié.

Ainsi, sans bruit, le signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  pour la suite de bits 0110100 est le suivant :

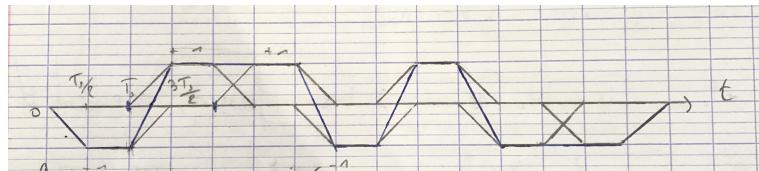


Figure 12: Signal  $z(t)$  en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

et toujours sans bruit le diagramme de l'oeil correspondant :

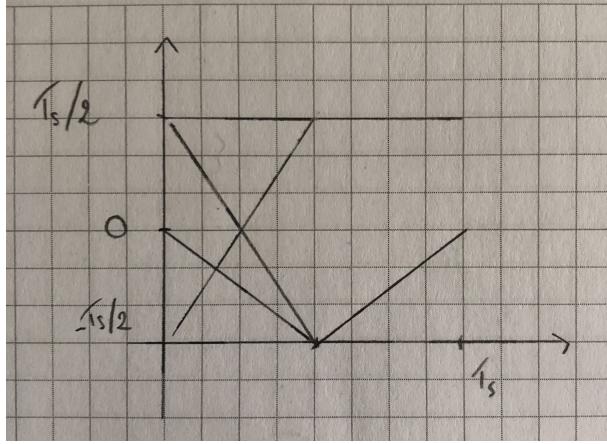


Figure 13: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

On suppose encore une fois que l'on échantillonne aux instants optimaux. Et on calcule le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage.

$$P_{a_m}g(t_0) = E[|a_m g(t_0)|^2] = E[|g(t_0)|^2] = g(t_0)^2$$

$$P_{w_n} = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r(f)|^2 dt = \frac{N_0 T_s}{4}$$

$$\Rightarrow SNR = 10\log\left(\frac{4g(t_0)^2}{N_0 T_s}\right) = 10\log\left(\frac{T_s}{N_0}\right)$$

On peut ainsi comparer les rapports signal sur bruit des deux premières chaînes.

On remarque que  $SNR_2 < SNR_1$ , le filtre de réception est modifié. Le critère de filtrage adapté est respecté si on positionne en réception un filtre de réponse impulsionnelle proportionnelle au filtre de réception décalé de  $t_0$ . On a établi ici que  $t_0 = \frac{T_s}{2}$ , les filtres sont causaux, nous pouvons affirmer que le critère de filtrage adapté est respecté. On peut donc supposer que  $TEB_2 < TEB_1$

Pour le vérifier, calculons le taux erreur binaire de cette deuxième chaîne.

On a toujours, comme pour la première chaîne :  $TEB = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right)$  donc  $TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)$ , ce qui valide bien notre hypothèse.

De même, l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur  $E_s$  se calcule de la façon suivante :

$$E_s = P_{a_m} T_b \text{ avec } T_b = T_s$$

$$E_s = \int_R S_x(f) T_s df \text{ avec } S_x = T_s \sin^2(\pi f T_s)$$

$$\Rightarrow E_s = \int_R T_s^2 \sin^2(\pi f T_s) = T_s$$

On peut donc en déduire le taux d'erreur binaire :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{E_b}{2\sqrt{\frac{N_0 T_s}{4}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Encore une fois, on a bien la vérification que  $TEB_2 < TEB_1$

### 3.2 Implantation sous Matlab

Pour l'implantation Matlab, on utilise les paramètres suivants : durée symbole en nombre d'échantillons  $N_s = 4$ , nombre de bits générés  $nb_{bits} = 10000$ , temps de départ d'échantillonage  $t_0 = N_s$ .

1. Implantation de la chaîne sans bruit

- (a) Tracé du signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

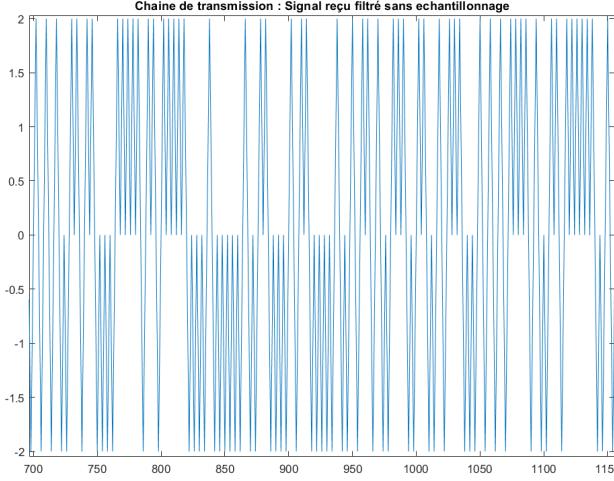


Figure 14: Signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

- (b) Tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception.

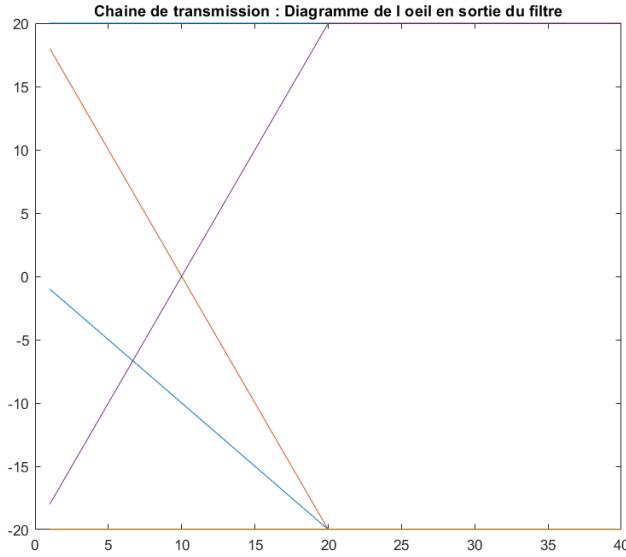


Figure 15: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

Le diagramme de l'oeil, tracé sans bruit sur une durée  $T_s$  à partir d'un signal  $z(t)$ , représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur ce signal pendant  $T_s$ . Ici, nous avons augmenté la durée symbole en nombre d'échantillons  $N_s$  à 40 pour pouvoir apercevoir correctement les différentes valeurs. On remarque qu'il y en a 7 possibles, et les résultats sont semblables à l'étude théorique. Les différents passages d'un valeur à l'autre possibles sont clairement visibles sur le diagramme.

2. Implantation de la chaîne avec bruit : rajoutons le bruit et comparons le taux d'erreur binaire simulé au TEB théorique en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $E_b/N_0$ ) en décibels. Nous prenons, de la même façon que dans la chaîne de référence, des valeurs de  $(E_b/N_0)_{dB}$  allant de 0 à 6 dB.

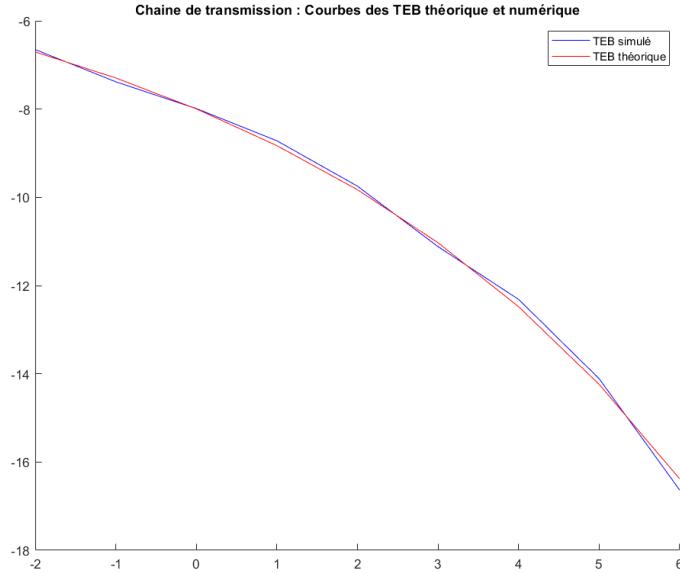


Figure 16: Comparaison des TEB de la chaîne de référence et de la deuxième chaîne.

Ainsi, comme les courbes sont confondues, ce tracé nous permet de valider le bon fonctionnement de notre chaîne de transmission.

3. Pour poursuivre l'étude, on peut comparer le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation de la chaîne de référence.

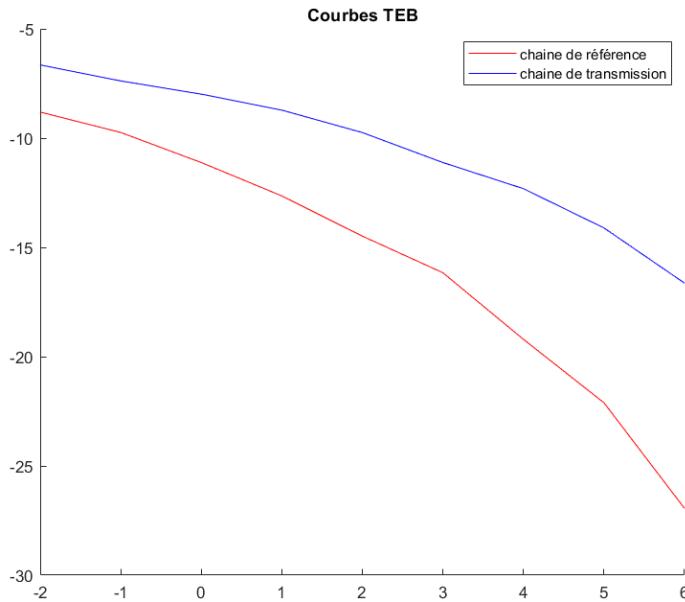


Figure 17: Comparaison des TEB théorique et simulé de la deuxième chaîne.

On remarque que la chaîne de référence décroît plus rapidement que la chaîne de transmission, en effet, les résultats diffèrent dans le fait que les filtres de réception ne sont pas les mêmes, donc les TEB ne seront forcément pas les mêmes. L'étude théorique nous montre qu'un facteur 2 intervient entre les expressions théoriques du TEB. Ce facteur 2 se retrouve ici, lors de l'affiche de la comparaison des courbes et provient que l'on a pris deux temps de départ d'échantillonnage différents d'un facteur 2 :  $T_s$  pour la première chaîne et  $T_s/2$  pour la deuxième.

La chaîne la plus efficace reste donc la chaîne de référence, les erreurs sont moins fréquentes que la chaîne de transmission, grâce au fait que dans cette chaîne de référence les filtres d'émissions et de réceptions sont identiques.

4. Enfin, nous pouvons comparer l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence.

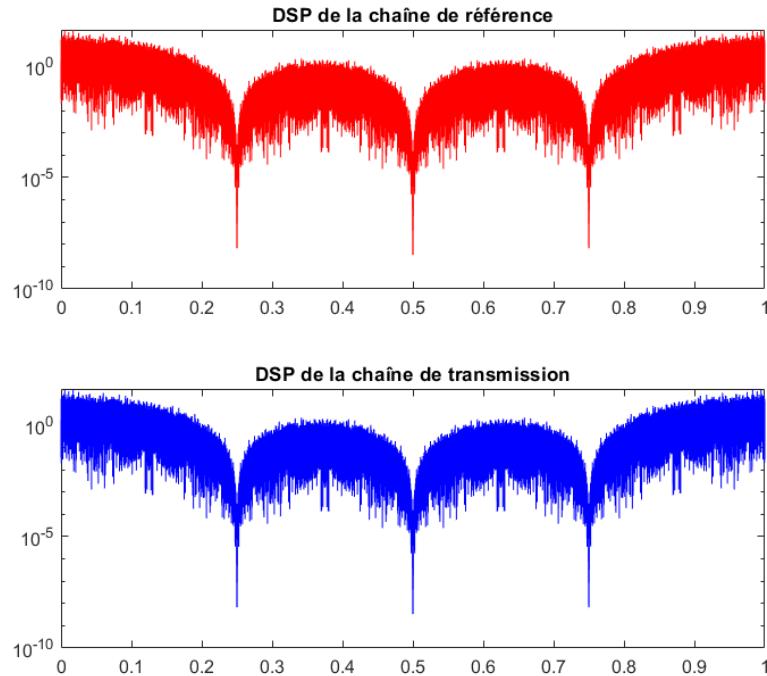


Figure 18: Comparaison des DSP de la chaîne de référence et la deuxième chaîne.

On remarque ici que les DSP sont les mêmes dans les deux chaînes, ce qui est normal car nous n'avons pas changé le filtre d'émission mais seulement le filtre de réception.

## 4 Troisième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

On considère un mapping binaire à moyenne nulle (symboles  $a_k \in \{-1, 1\}$ ) et des réponses impulsionales des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , en racine de cosinus surélevé de même roll off  $\alpha = 0.5$ . Le résultat du produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$  est donc un cosinus surélevé de roll off 0.5.

### 4.1 Etude théorique

Pour cette chaîne, on utilisera un facteur de suréchantillonnage minimum de 2.

En effet, comme  $f_e > 2f_{max}$  et  $f_{max} = \frac{1+\alpha}{2T_s}$ , alors  $T_s > (1 + \alpha)T_e$

On en conclut que  $N_s > 1,5$  donc  $N_s = 2$  au minimum.

De plus cette chaîne de communication vérifie le critère de Nyquist car elle est causale et finie avec  $t_0 = \frac{NT_e}{2}$

Cette chaîne vérifie aussi le critère de filtrage adapté car on a bien  $h(t) = h_r(t)$ , avec  $t_0 \neq 0$  et des filtres causaux, exactement comme les chaînes précédentes.

Comme un symbole est un bit et comme on vérifie ici le critère précédent, le taux d'erreur binaire s'écrit de la même façon que la première chaîne, c'est-à-dire :  $TEB = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$

Enfin, on pourrait transmettre le signal généré par la modulateur proposé dans un canal de transmission idéal à bande limitée de bande  $BW = 1500Hz$ , en revanche, il ne faut pas que  $H_c(f)$  vienne perturber la forme de  $H(f)H_r(f)$  donc il faudrait que sa bande passante soit supérieure à  $H(f)H_r(f)$  donc supérieure à  $1500Hz$

### 4.2 Implantation sous Matlab

1. Pour l'implantation Matlab, on utilise les paramètres suivants : fréquence d'échantillonnage  $F_e = 12000$  Hz, rythme symbole  $R_s = 3000$  symboles par seconde, durée symbole en nombre d'échantillons  $N_s = 4$ , nombre de bits générés  $nb_{bits} = 10000$ , temps de départ d'échantillonnage  $t_0 = 1$  roll off du filtre de mise en forme et du filtre de réception  $\alpha = 0.5$ .
2. Implantation de la chaîne sans bruit :
  - (a) Tracé du signal en sortie du filtre de réception.

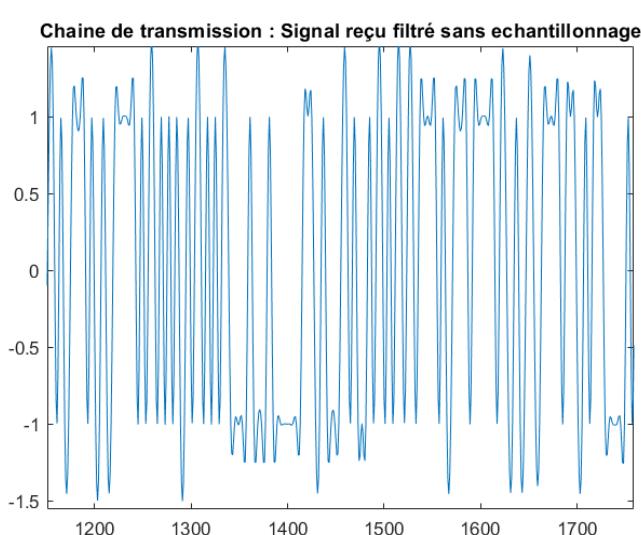


Figure 19: Signal reçu en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

(b) Traçons désormais le diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception.

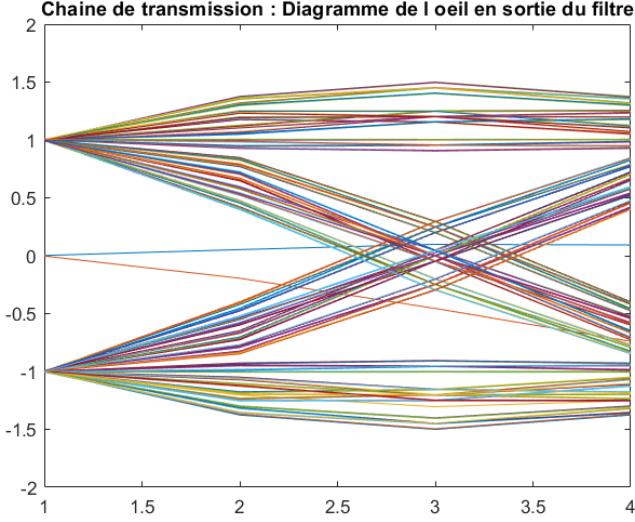


Figure 20: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .

L'influence du roll off modifie également l'ouverture du l'oeil plus le roll off est grand, plus l'oeil est ouvert. Un oeil ouvert semble permettre un meilleur échantillonnage les trais semblent plus précis on obtient donc un TEB plus faible avec un roll off plus grand. Passons donc à l'étude du TEB.

3. Implantation de la chaîne avec bruit : rajoutons le bruit et comparons le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu au TEB théorique en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $E_b/N_0$ ) en décibels. On prend des valeurs de  $(E_b/N_0)_{dB}$  allant de 0 à 6 dB.

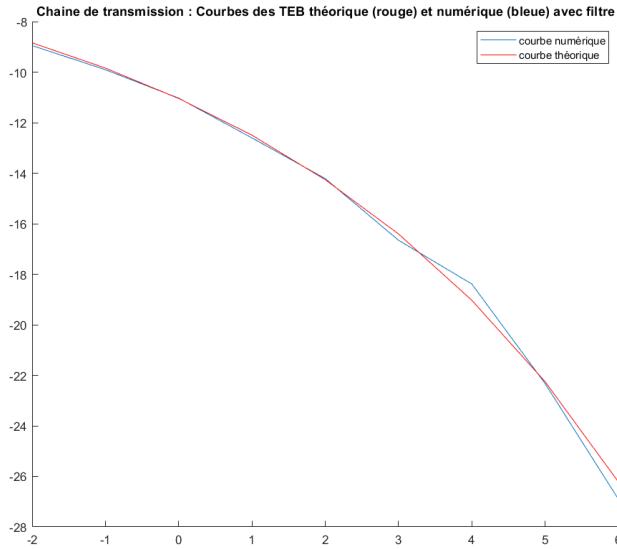


Figure 21: Comparaison du TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée.

Les courbes sont confondues, les erreurs sont de plus en plus faible plus le rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $\frac{E_b}{N_0}$ ) en décibels augmente. Ainsi notre chaîne de transmission est correcte.

4. On peut poursuivre l'étude pour comparer le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation de la chaîne de référence, ce qui donne la figure ci-dessous.

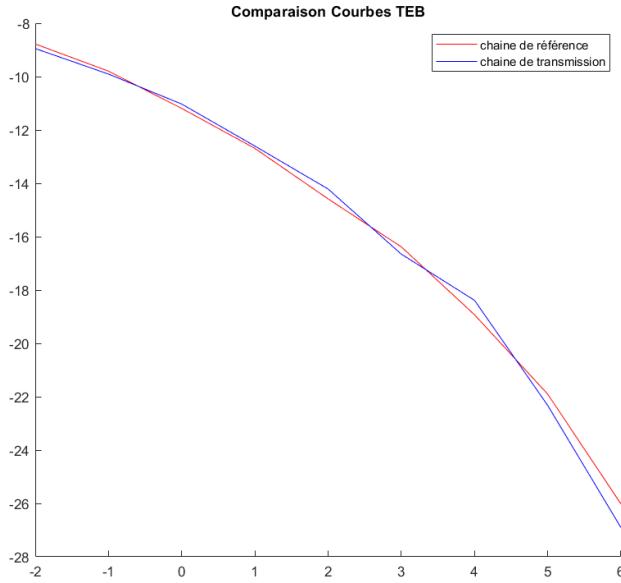


Figure 22: Comparaison du TEB de la chaîne étudiée au TEB de la chaîne de référence.

Cette fois, on remarque que les deux courbes sont confondues, contrairement à la chaîne précédente. Les deux filtres de transmissions sont les mêmes dans ces deux chaînes. On ne peut donc pas voir de grandes différences entre celles-ci. Les deux semblent efficaces.

5. Pour pouvoir les différencier, nous allons comparer l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en traçant les DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire).

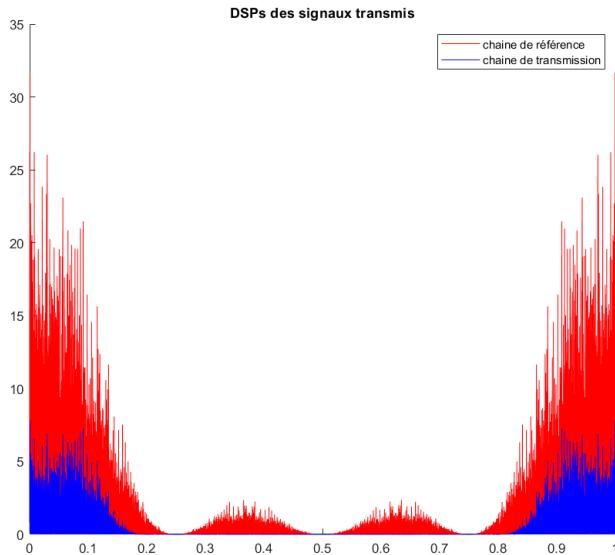


Figure 23: Comparaison de la DSP de la chaîne étudiée à la DSP de la chaîne de référence, sans bruit.

Encore une fois, on remarque que la DSP de la chaîne de référence est plus grande, et la répartition d'énergie plus importante. La chaîne de référence semble être donc plus efficace spectralement.

6. Reprenons la chaîne de transmission sans bruit et introduisons un passage dans un canal de transmission

(a) de bande  $BW = 1500$  Hz. Voici le diagramme de l'oeil associé.

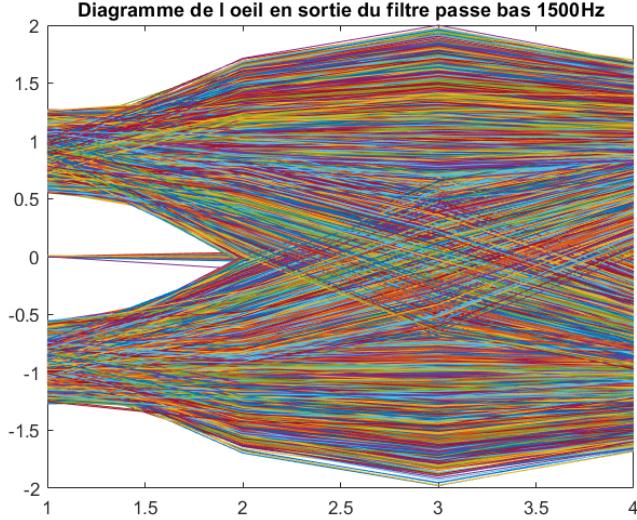


Figure 24: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour un passage dans un filtre passe bas de fréquence 1500Hz, sans bruit.

(b) de bande  $BW = 3000$  Hz. Voici le diagramme de l'oeil

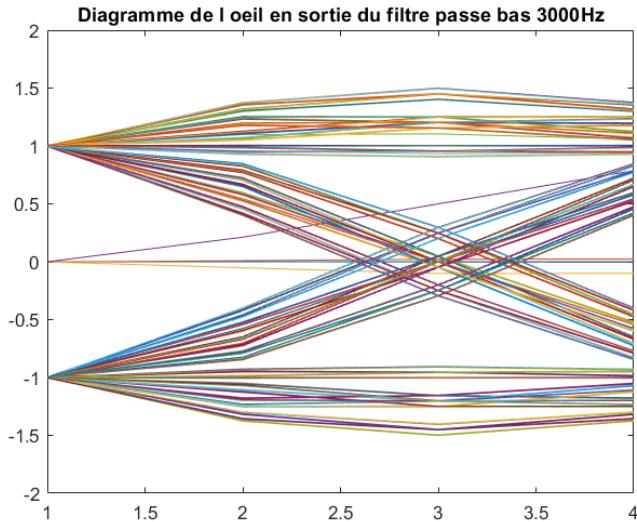


Figure 25: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception pour un passage dans un filtre passe bas de fréquence 3000Hz, sans bruit.

On remarque qu'une largeur de bande limitée crée des interférences de symboles, alors qu'une bande supérieure en crée beaucoup moins. Il est donc important d'étudier la bande avant la transmission d'un signal de sorte à ce que le signal soit reçu dans la bonne "forme".

## 5 Quatrième chaîne à étudier : impact du choix du mapping

On considère enfin un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles  $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ ) et des réponses impulsives des filtres de mise en forme et de réception,  $h(t)$  et  $h_r(t)$ , rectangulaire de durée  $T_s$ .

### 5.1 Etude théorique

Pour cette dernière chaîne, semblable à la chaîne de référence, nous prendrons un départ d'échantillonnage similaire soit  $t_0 = T_s$ . On a alors les figures suivantes :

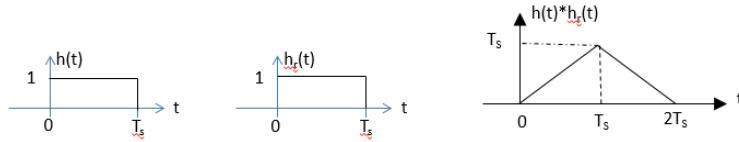


Figure 26: Produit de convolution entre  $h(t)$  et  $h_r(t)$ .

On échantillonnera ensuite aux instants optimaux  $t_0 + mT_s$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Et comme on a  $g(t_0) = T_s$ , on utilise les seuils optimaux 0, 2 et  $-2V$

Poursuivons l'étude en calculant les probabilités de détecter les symboles du mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 11 : +1, 10 : +3 sachant que l'on a émis 00 : -3.

On rappelle que la puissance du bruit, calculé lors de l'étude de la première chaîne est  $\sigma^2 = \frac{N_0 T_s}{2}$ . On note  $w_n$  le bruit,  $Q(x)$  la fonction qui à  $x$  associe  $1 - \text{normcdf}(x)$  et de plus on a  $g(t_0) = g(T_s) = T_s$

$$\begin{aligned} P(\hat{a}_m = -1 | a_m = -3) &= P[-2g(t_0) < -3g(t_0) + w_n < 0] = P[g(t_0) < w_n < 3g(t_0)] = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) \\ P(\hat{a}_m = 1 | a_m = -3) &= P[0 < -3g(t_0) + w_n < 2g(t_0)] = P[3g(t_0) < w_n < 5g(t_0)] = Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right) \\ &= Q\left(\frac{3T_s}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right) = Q\left(3\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) - Q\left(5\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) \\ P(\hat{a}_m = 3 | a_m = -3) &= P[2g(t_0) < -3g(t_0) + w_n] = P[5g(t_0) < w_n] = Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5T_s}{\sigma}\right) = Q\left(5\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Si on effectue les applications numériques avec les valeurs préconisées soit :  $N_0 = 10^{-3} V^2 / Hz$ ,  $R_b = 1$  kbps, c'est à dire  $R_s = 500 symb/s$  donc  $T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{500}$ , on obtient :

$$- P(\hat{a}_m = -1 | a_m = -3) = Q(2) - Q(6) = 0,0228$$

$$- P(\hat{a}_m = 1 | a_m = -3) = Q(6) - Q(10) = 9,87 \cdot 10^{-10}$$

$$- P(\hat{a}_m = 3 | a_m = -3) = Q(10) = 7,62 \cdot 10^{-24}$$

La règle de codage choisie est intéressante, on l'appelle le codage de Gray.

Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}} \right)$$

On peut donner le taux d'erreur binaire qui s'écrit :

$$TEB = \frac{TES}{\log_2(M)}$$

or ici  $M = 4$  car on est dans un mapping 4-aire.

$$\text{On a finalement } TEB = \frac{TES}{2} = \frac{3}{4} Q \left( \sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}} \right)$$

## 5.2 Implantation sous Matlab

Pour l'implantation Matlab, on utilise les paramètres suivants : durée symbole en nombre d'échantillons  $N_s = 4$ , nombre de bits généré  $nb_{bits} = 10000$ , temps de départ d'échantillonnage  $t_0 = 2T_s$  et  $T_s = 2N_s$ . Commençons par planter la dernière chaîne sans bruit: on l'implante en utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3

1. (a) Tracé du signal en sortie du filtre d'émission, ainsi que sa densité spectrale de puissance.

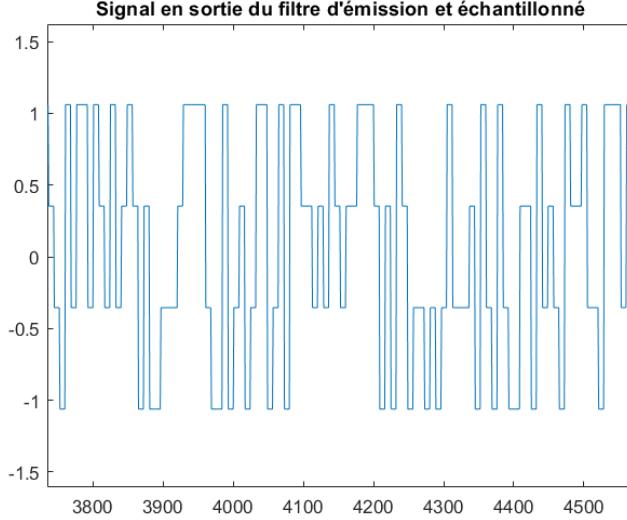


Figure 27: Signal en sortie du filtre de d'émission  $h(t)$ .

- (b) Comparons l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence.

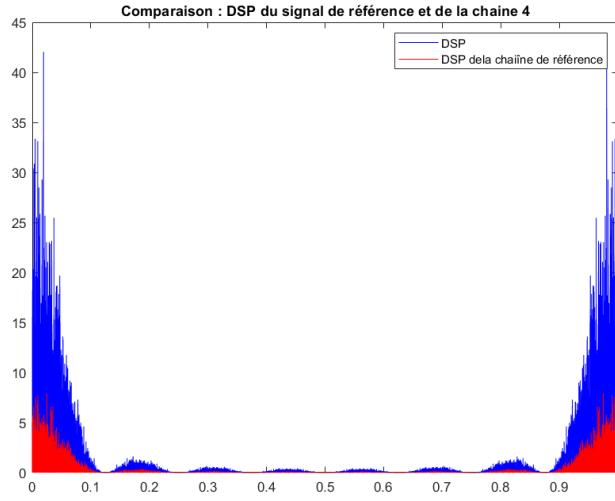


Figure 28: Comparaison de l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence, sans bruit.

Pour cette dernière chaîne, on remarque que la DSP est plus importante que la chaîne de référence. Le nombre de niveau possible pour le mapping 4-aire naturel en est la conséquence. La répartition d'énergie se trouve toujours aux mêmes fréquences, mais cette chaîne est plus efficace spectralement.

(c) De même que les autres chaînes, traçons le diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception :

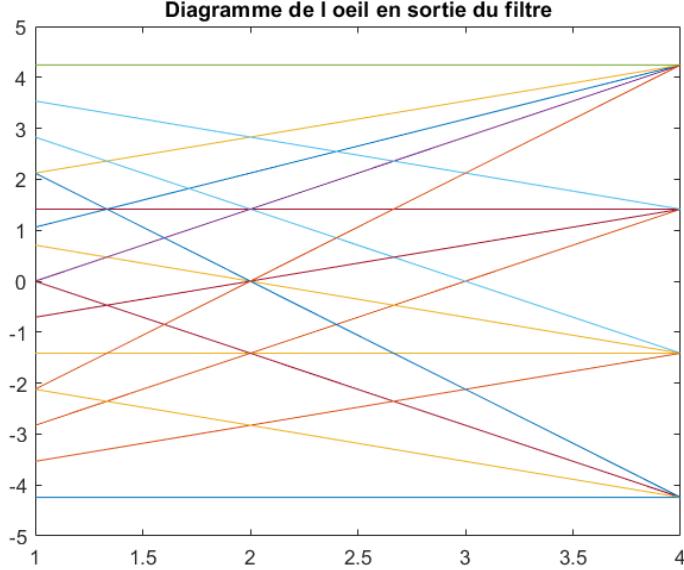


Figure 29: Diagramme de l'oeil, sans bruit, en sortie du filtre de réception.

On remarque qu'il y a de nombreux niveaux supplémentaires sur le diagramme de l'oeil, ce qui est cohérent car les  $a_k$  ne sont plus 1 ou  $-1$  mais 1, 3,  $-1$ ,  $-3$ , donc il y a beaucoup plus de passage d'un niveau à l'autre.

2. Rajoutons maintenant le bruit et comparons le taux d'erreur symbole (TES) obtenu au TES théorique en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $E_b/N_0$ ) en décibels. On prendra des valeurs de  $(E_b/N_0)_{dB}$  allant de 0 à 6 dB.

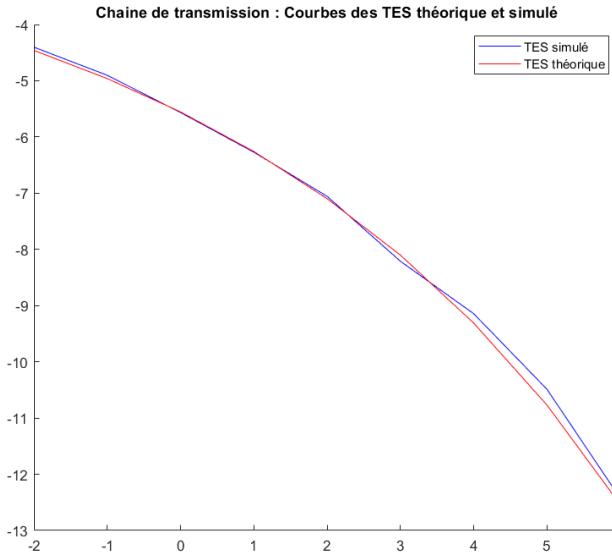


Figure 30: Comparaison du TES obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TES théorique étudié.

Les courbes TES sont similaires, Les erreurs symboles sont conformes à la théorie, donc optimal, ce qui semble être satisfaisant.

3. Retour au TEB : enfin, et pour conclure, traçons le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu ainsi que le TEB théorique en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur ( $E_b/N_0$ ) en décibels. On prendra des valeurs de  $(E_b/N_0)_{dB}$  allant de 0 à 6 dB et comparons les :

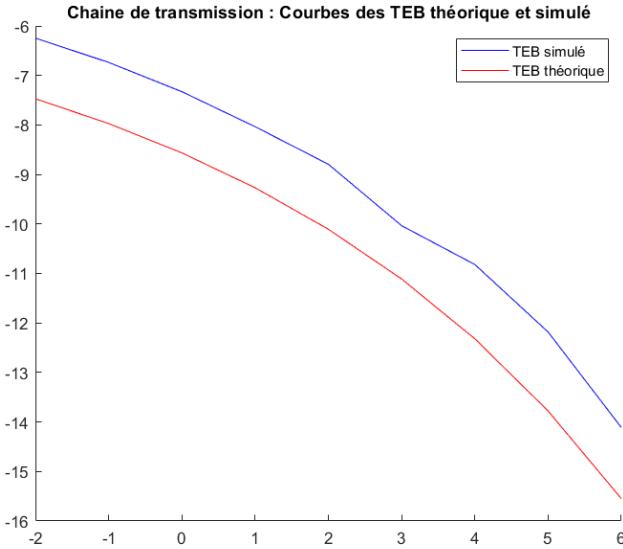


Figure 31: Comparaison du TEB obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TEB théorique.

Pour cette chaîne et celle-ci seulement, les deux tracés ne sont pas confondus, mais ils sont décalés d'un décibels. Le démapping de Matlab n'est peut être pas optimal. On remarque quelques erreurs entre les bits estimés et les bits réellement transmis. Mais les erreurs restent extrêmement minimales par rapport au bits transmis correctement (il semblerait y avoir 3 fois plus d'erreurs que la troisième chaîne, d'après l'invariant de notre boucle "while", pour le même nombre de bits).

## 6 Conclusion

Pour conclure, les différentes chaînes que nous avons étudiées ont chacune leur impact sur la transmission d'un message binaire en bande de base. On a vu que le mapping, le filtre de mise en forme et le filtre de réception ont des effets différents sur cette transmission, et plus particulièrement sur l'efficacité spectrale et l'efficacité en puissance. Le TEB est très proche, voire confondu avec le TEB théorique dans tous les cas, donc nos chaînes sont performantes, et les messages sont bien transmis. La troisième chaîne étudiée montre cependant l'effet d'une largeur de bande limitée qu'il est important d'étudier avant la transmission d'un signal.

## 7 Références

1. <http://thomas.perso.enseeiht.fr/DigitalCommunications.html>, Nathalie Thomas.
2. <https://www.mathworks.com/help/matlab/>, Documentation MATLAB.