

Théorie des graphes

Chapitre 5 : Planarité et coloration de graphes

11 décembre 2020



Définition 5.1.1 – Graphe planaire

- On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. On rappelle que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Une représentation planaire particulière d'un graphe est appelée une **carte**. Une carte divise le plan en plusieurs régions appelées **faces**.

Remarque 5.1.1.

- Il s'agit en fait d'étudier les aspects topologiques d'un graphe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir si un graphe peut être représenté sur une surface S
- Exemple d'application : carte électronique
- Les notions utilisés ici sont à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ! Ce chapitre s'inspire très fortement de l'ouvrage *Éléments de théorie des graphes*, Bretto, Faisant, Hennecard.

Définition 5.1.2

- Soient x et y deux points de T , on appelle **arc géométrique** de x à y toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$ injective telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une courbe simple entre x et y est l'image d'un arc géométrique de x à y : $\gamma([0, 1])$. On note \mathcal{C}_T l'ensemble des courbes simples sur T .
- On appelle **dessin** F d'un graphe $G = (V, E)$ sur T une application $\sigma : V \sqcup E \rightarrow T \sqcup \mathcal{C}_T$ injective telle que :
 - 1) $\sigma|_V : V \rightarrow T$ soit injective ;
 - 2) $\sigma|_E : E \rightarrow \mathcal{C}_T$ soit injective ;
 - 3) si $\sigma(v_i) = x, \sigma(v_j) = y$ et $e = \{v_i, v_j\}$, alors $\sigma(e)$ est une courbe simple de x à y .

a

a. \sqcup est l'opérateur de réunion disjointe

Remarque 5.1.2. Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup (\bigcup_{e \in E} \sigma(e))$ est encore appelé dessin de G sur T .

Définition 5.1.3 – Plongement

Un dessin d'un graphe G dans $T \subset \mathbb{R}^k$ est un **plongement** si et seulement si les courbes simples ne se coupent qu'aux sommets.

Proposition 5.1.4

Tout graphe (d'ordre fini) admet un plongement dans R^3

► À démontrer



Exemple 5.1.1.

- Une chaîne élémentaire admet un plongement dans \mathbb{R}
- Un cycle élémentaire avec $n > 1$ admet un plongement dans \mathbb{R}^2 mais pas dans \mathbb{R}

Définition 5.1.5 – Graphe planaire

On dit qu'un graphe est **planaire** s'il admet un plongement dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 5.1.2. Le dodécaèdre est-il un graphe planaire ?

Exercice 5.1.3. Tous les graphes sont-ils planaires ?

Exercice 5.1.4. $K_{3,3}$ est-il planaire ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe plongé dans \mathbb{R}^2 et F son dessin. F est un fermé, donc $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert. On a alors :

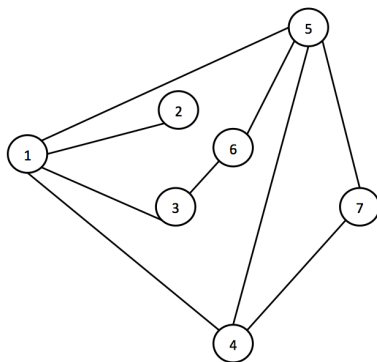
Définition 5.1.6 – Face

On appelle **face** tout composante connexe (et ouverte) de $\mathbb{R}^2 \setminus F$. On note Φ l'ensemble de ces composantes connexes,

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Remarque 5.1.3. Il existe R tel que $F \subset B_f(0, R)$. Par suite il n'existe qu'une seule face non bornée. On appelle cette face la face infinie.

Exemple 5.1.5. Donner les faces de ce graphe.
Attention, ne pas oublier la face infinie.



Soit φ une face finie, alors sa frontière $\partial\varphi$ est la réunion de cycles élémentaires disjoints et d'arêtes pendantes ou reliant 2 cycles.

Définition 5.1.7 – Contours

On appelle **contour** de la face φ bornée le cycle élémentaire c qui contient son intérieur $\partial\varphi \setminus c$.

Théorème 5.1.8

L'ensemble des contours de toutes les faces d'un graphe planaire forme une base de cycles de ce graphe.

Théorème 5.2.1 – Théorème d'Euler

Dans un graphe planaire d'ordre n , à m arêtes, possédant f faces à p composantes connexes, on a :

$$f = m - n + 1 + p.$$

Exercice 5.2.1. Validez la caractéristique d'Euler-Poincaré sur le graphe de l'exercice précédent.



Exercice 5.2.2. Remarquez que $K_{3,3}$ n'est pas plane en utilisant sa caractéristique d'Euler-Poincaré.

Définition 5.3.1

- On appelle **substitution** d'un sommet v par un sommet u dans une arête $e = \{e_1, e_2\}$, notée $Subst_v^u(e)$, l'arête $\{e'_1, e'_2\}$ telle que $e'_i = u$ si $e_i = v$, $e'_i = e_i$ sinon
- On appelle **contraction** d'une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ la disparition de cette arête et l'identification des deux sommets u et v . On obtient alors un nouveau graphe $G' = (V \setminus \{v\}, Subst_v^u(E) \setminus \{u, u\})$.
- On appelle **contracté** d'un graphe G tout graphe obtenu par une suite finie (voire vide) de contractions à partir de G

On remarque que le graphe reste simple (car on considère l'ensemble des arêtes comme un ensemble qui ne contient pas de doublons).

Théorème 5.3.2 – Théorème de Kuratowsky (1930)

(caractérisation des graphes planaires) Un graphe G est planaire ssi il ne contient aucun sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 dans aucun contracté de G .

Définition 5.3.3 – graphe dual

Soit G un graphe planaire. On appelle **graphe dual** de G le graphe G^* défini par

- 1) les sommets de G^* sont les faces de G : $V^* = \Phi$;
- 2) pour chaque arête de G on définit une arête e^* de G^* de la façon suivante : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces φ, ψ ; on pose alors $e^* = \{\varphi, \psi\}$ (c'est une boucle si $\varphi = \psi$).

Exercice 5.3.1. Vérifiez que le bi-dual d'un cube est un cube.

De façon générale, le bi-dual d'un graphe est le graphe lui-même.

Définition 5.4.1 – Stable

Un **stable** d'un graphe est un ensemble de sommets qui ne contient que des sommets 2 à 2 non adjacents.

Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G noté $\alpha(G)$.

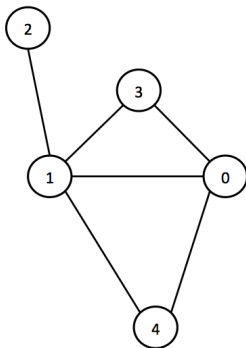
Définition 5.4.2 – Coloration

Une **coloration** d'un graphe consiste à affecter tous les sommets tels que 2 sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Une coloration à k couleurs est donc une partition de V en k stables.

Le **nombre chromatique** noté $\gamma(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une k -coloration.

Exercice 5.4.1. Donner les stables de ce graphe et son nombre de stabilité.



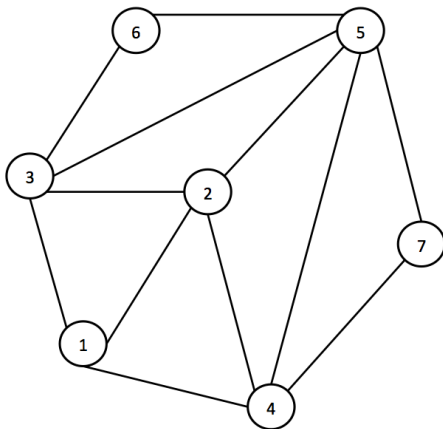
Exercice 5.4.2. Quel est le nombre chromatique du graphe de l'exercice précédent. La $\gamma(G)$ -coloration trouvée est-elle unique ?

Proposition 5.4.3

- 1) $\gamma(G) \leq r + 1$ où $r = \max_{v \in V} \delta(v)$;
- 2) $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$;
- 3) $\gamma(G) \geq \#sommets$ dans la plus grande clique.

(à faire) en exercice.

Exercice 5.4.3. Minorez et majorez le nombre chromatique de ce graphe.



Exercice 5.4.4. Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :

| l'élève | A | B | C | D | E | F | G |
|-------------|-----|---------|-----|-------|-------------|-------|---------|
| a rencontré | D,E | D,E,F,G | E,G | A,B,E | A,B,C,D,F,G | B,E,G | B,C,E,F |

De combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise lorsqu'il était dans la salle ?

Exercice 5.4.5. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

on utilise le fait qu'un graphe biparti peut être colorié avec seulement 2 couleurs.

C'est un algorithme de coloration glouton.

On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On colorie le premier sommet non encore colorié avec une nouvelle couleur, et en suivant l'ordre de la liste, tous les sommets que l'on peut colorier avec cette même couleur. On recommence, jusqu'à ce que chaque sommet ait été colorié.

Exercice 5.4.6. Montrez en utilisant un cube, que l'algorithme de Welsh-Powell ne mène pas à une solution optimale.

Exercice 5.4.7. Dans un tournoi de basket, chaque équipe rencontre toutes les autres, et chaque rencontre dure une heure. Déterminer la durée minimale du tournoi avec 3, 4, 5 ou 6 équipes.

Théorème 5.4.4 – Théorème des 4 couleurs

On peut colorier les sommets d'un graphe planaire en utilisant au plus quatre couleurs, de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Ce théorème a été démontré en 1976... en utilisant un ordinateur. La conjecture datait de 1852!!

On peut par contre démontrer le théorème des 5 couleurs de façon plus simple.

Exercice 5.4.8. Théorème des 5 couleurs Tout graphe planaire peut être colorié avec 5 couleurs.

Pour démontrer ce théorème, on démontre les deux lemmes suivants :

Lemme 5.4.1. $3f \leq 2m$ à partir d'un certain rang pour m (lequel?)

► En exercice



Lemme 5.4.2. *Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.*

► En exercice



- On se sert du lemme 2 pour faire une récurrence sur n pour démontrer le théorème :
- pour $n = 0$ OK
 - Supposons le théorème vrai pour n , et considérons un graphe à $n + 1$ sommets. Il existe un sommet de degré au plus 5 (lemme 2) : on applique l'hypothèse de récurrence sur le sous-graphe généré par les sommets restants. Appelons v_i , $i = 1 \dots 5$, les 5 voisins de v ordonnés en tournant autour de v .
 - Si 2 des v_i partagent une couleur, il y a une couleur restante pour v , dans ce cas, on l'utilise pour v , et la propriété est vérifiée ;
 - Sinon, tous les v_i sont tous de couleur différente :
 - si il n'existe aucun chemin bicolore entre v_1 et v_3 , alors, on peut recolorier le sous-graphe partiel restreint aux couleurs $\{c_1, c_3\}$ connexe à v_3 (qui ne contient du coup pas v_1) en intervertissant les couleurs c_1 et c_3 . v_3 devient de la même couleur que v_1 , et on colorie v avec c_3 .
 - si il existe un chemin bicolore de v_1 à v_3 , alors, par planarité, tout chemin entre v_2 et v_4 recoupe ce chemin en un sommet de couleur c_1 ou c_3 : il n'existe donc aucun chemin bicolore de v_2 à v_4 , et on peut donc colorier v_4 de la même couleur que v_2 en utilisant le même argument qu'au point précédent.

On peut donc colorier le graphe d'ordre $n + 1$ avec 5 couleurs ce qui termine la récurrence

Exercice 5.4.9. Voici les deux dernières versions des cartes des régions de France. A-t-on gagné une ou plusieurs couleurs en passant de 22 à 13 régions ?

