Operation Research

Lecture 2

Prof. Kamel Rahouma

What s the simplex method?

Although the graphical method of solving linear programming problem is an invaluable aid to understand its basic structure, the method is of limited application in industrial problems as the number of variables occurring there is substantially large. A more general method known as **Simplex Method** is suitable for solving linear programming problems with a larger number of variables. The method through an iterative process progressively approaches and ultimately reaches to the maximum.or minimum value of the objective function. The method also helps the decision maker to identify the redundant constraints, an unbounded solution, multiple solution and an infeasible problem.

In industrial applications of linear programming, the coefficients of the objective function and the right hand side of the constraints are seldom known with complete certainty. In many problems the uncertainty is so great that the effect of inaccurate coefficients can be predominant. The effect of changes in the coefficients in the maximum.or minimum value of the objective function can be studied through a technique known as **Sensitivity Analysis.**

Example of the Simplex Method

Maximise $50x_1 + 60x_2$

Subject to :

$$2x_1 + x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 509$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 812$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Solution

We introduce variables x_3 .>. 0, x_4 0, x5 r 0 So that the constraints become equations

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 300 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 &= 509 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_5 &= 812 \end{aligned}$$

The variables x_3, x_4, x_5 are known as slack variables corresponding to the three constraints. The system of equations has five variables (including the slack variables) and three equations.

Basic Solution of Simplex Problem

In the system of equations as presented above we may equate any two variables to zero. The system then consists of three equations with three variables. If this system of three equations with three variables is solvable such a solution is known as a **basic solution.**

In the example considered above suppose we take $x_1 = 0$, $x_2 = O$. The solution of the system with remaining three variables is $x_3 = 300$, $x_4 = 509$, $x_5 = 812$. This is a **basic solution** of the system. The variables x_3, x_4 and x_5 are known as **basic variables** while the variables x_1, x_2 are known as **non basic variables** (variables which are equated to zero).

Since there are three equations and five variables the two non basic variables can be chosen in $5c_2$, = 10 ways. Thus, the maximum number of basic solutions is 10, for in some cases the three variable three equation problem may not be solvable.

In the general case, if the number of constraints of the linear programming problem is m and the number of variables (including the slack variables) is n then there are **at most** ${}^{n}C_{n-m} = {}^{n}C_{m}$ basic solutions.

Basic Feasible Solution

A basic solution of a linear programming problem is a **basic feasible solution** if it is feasible, i.e. all the variables are non negative. The solution $x_3 = 300$, $x_4 = 509$, $x_5 = 812$ is a basic feasible solution of the problem. Again, if the number of constraints is m and the number of variables (including the slack variables) is n, the **maximum** number of basic feasible solution is $^nC_{n-m} = {}^nC_m$

The following result (Hadley, 1969) will help you to identify the extreme points of the convex set of feasible solutions analytically.

Every **basic feasible solution** of the problem is an **extreme point** of the convex set of feasible solutions and every extreme point is a basic feasible solution of the set of Constraints.

When several variables are present in a linear programming problem it is not possible to identify the extreme points geometrically. But we can identify them through the basic feasible solutions. Since one of the basic feasible solutions will maximise or minimise the objective function, we can carry out this search starting from one basic feasible solution to another. The **simplex method** provides a systematic search so that the objective function increases (in the case of maximisation) progressively until the basic feasible solution has been identified where the objective function is maximised. The computational aspect of the simplex method is presented in the next section.

يتم تكوين جدول الحل الاولي بالترتيب الاتي:

* العمود الأول ويسمى عمود المتغيرات الأساسية (Basic Variables (BV)) وهي جميع المتغيرات الوهمية (سواء كانت متغيرات مساعدة أو متغيرات صناعية) والتي نبدأ بها الحل التي تم إضافتها لقيود المسألة عند تحويلها للصيغة القياسية، وفي الجزء الأسفل لهذا العمود يتم وضع رمز متغير دالة الهدف وعادة نستخدم الرمز (Z).

* العمود الثاني يتضمن في جزءهِ الأعلى جميع رموز متغيرات دالة الهدف (All Variables)، ونضع معاملاتها الموجودة في القيود في الجزء الأوسط كلاً في مكانهِ، أما في الجزء الأسفل فنضع معاملات متغيرات دالة الهدف.

* عمود معاملات الجانب الأيمن (Right Hand Side (RHS)) لجميع قيود المسألة إضافة إلى قيمة دالة الهدف (المساوية للصفر في الحالة الاعتيادية).

* عمود النسبة (Ratio) وهو العمود الأخير (يتم اعداده خلال مراحل الحل).

* يدعى الصف الأخير من الجدول السابق بصف معاملات دالة الهدف أو صف (Z).

٣) نحدد العمود الرئيسي (Pivot Column) وهو صاحب أكبر رقم سالب من صف (Z) وهو يعني دخول متغير هذا العمود الحل، ويسمى المتغير الداخل (Entering Variable (EV)).

٤) نحدد الصف الرئيسي (Pivot Row) الذي يُمثل المتغير الخارج (Leaving Variable (LV)) وهو يقابل أصغر رقم موجب في عمود النسبة (Ratio)، والذي يتم حسابهُ وفق المعادلة:

$$\text{Ratio} = \frac{\text{RHS Column}}{\text{Pivot Column}}$$

أي حاصل قسمة معاملات عمود (RHS) على معاملات العمود الرئيسي الداخل (باستثناء قيمة دالة الهدف Z).

٥) يتم وضع رمز المتغير الداخل في عمود (BV) محل رمز المتغير الخارج، ويتم تعديل قيم معاملات الصف الرئيسي الجديد (الداخل) وفق المعادلة:

معاملات الصف الرئيسي الجديد = معاملات الصف الرئيسي القديم ÷ العنصر المحوري (جاء من تقاطع الصف الرئيسي مع العمود الرئيسي)

Modification of main New = Old Pivot row ÷ Pivot number

معادلة تعديل باقي الصفوف = معاملات أي صف قديم (صف غير رئيسي) – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي × معاملات الصف الرئيسي الجديد

$$\begin{pmatrix}\text{Modification}\\\text{New row}\end{pmatrix} = (\text{Old row}) - \begin{pmatrix}\text{Pivot column}\\\text{coefficient}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\text{New pivot}\\\text{row}\end{pmatrix}$$

٦) عند هذهِ المرحلة يتم تكوين الجدول الجديد، وللحكم على أن الجدول الأخير هو جدول الحل الأمثل من عدمهِ نطبق الشروط الآتية:

* إذا كانت دالة الهدف من نوع (.Max) فيجب أن تكون جميع قيم صف (Z)أما صفر أو موجبة، وإذا كان هنالك على الأقل قيمة واحدة سالبة فإن الحل غير أمثل، لذا يتم البحث عن حل مقبول جديد يحقق هذا الشرط، ويتم ذلك بجعل أحد المتغيرات غير الأساسية كمتغير أساسي ويتم اختيار المتغير الداخل (EV) الذي يناظر أكبر رقم سالب في صف (Z)، ولتحديد المتغير الخارج (LV) يتم قسمة عناصر العمود (RHS) على معاملات المتغير الداخل الأكبر من صفر فقط، واختيار النسبة (Ratio) الأصغر.

* إذا كانت دالة الهدف من نوع (.Min)فيجب أن تكون جميع قيم صف (Z) أما صفر أو سالبة، وإذا كان هنالك على الأقل قيمة واحدة موجبة فإن الحل غير أمثل، لذا يتم البحث عن حل مقبول جديد، إذ يتم اختيار المتغير الذي يناظر أكبر رقم موجب في صف (Z) واعتباره كمتغير داخل، أما المتغير الخارج فيتم اختياره بنفس الطريقة المستخدمة في حالة (.Max).

٧) تكرار الخطوات من (٣) إلى (٦) حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

Constructing the solution table

- 1. The first column is the basic variables column
- 2. The following columns give the constraints variables, the values are below them
- 3. The following column gives the RHS values
- 4. The last column is the Ratio column
- 5. The last row gives the objective function factors
- 6. The pivot columns is the one with the most negative factor of the objective function
- 7. The pivot row is the one with the least +ve ratio
- 8. Ratios = (RHS values) / (Pivot column values)
- 9. The pivot variable is used in the put in place of the corresponding column of the basic variables and the rows values are modified giving a new table.
- 10. The new table is checked up for optimality. **For maximization** all values of z are zeros or positive and **for minimization** all values of z are zeros or negative. In case of mixed signs, the solutions needs more iterations (steps 6 – 8 are repeated).

Example

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. To

$$-X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 14$$

$$X_1 - X_2 \le 3$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

Max. $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3$

Sub. To

$$-X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 14$$

$$X_1 - X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \ge 0$$

$$-X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 14$$

$$X_1 - X_2 + S_3 = 3$$

$$Z - 3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

Solution Table

المتغير الداخل

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

B.V. \ All	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	−1	2	1	0	0	4	يهمل
S_2	3	2	0	1	0	14	4.67
S_3	1	−1	0	0	1	3	3
Z	−3	−2	0	0	0	0	

المتغير الخارج

العمود المحوري

العنصر المحوري

الصف المحوري

أقل حاصل قسمة

- **Modifying the pivot row (replacing the basic variable s3 by a new one x1):**
- The row (3rd row) new values = the row old values + the pivot element.
- New Row 3 (R3) = Old R3 + 1
- = 1/1 -1/1 0/1 0/1 1/1 3/1
- = 1 -1 0 0 1 3

- **Modifying the other rows (the first row represents s1 and the 2nd row represents s2):**
- The new first row values = the old first row values - the intersection value * the factors of the new 3rd row

New R_1 = Old $R_1 - (-1) \times$ New R_3 ➔ New R_1 = Old R_1 + New R_3

➔ Old R_1 = −1 2 1 0 0 4

New R_3 = 1 −1 0 0 1 3

+ ------------------------------------

New R_1 = 0 1 1 0 1 7 صف١ الجديد في الجدول الثاني

The new (2^{nd}) solution table

B.V. \ All	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	1	1	0	1	7	7
S_2	0	5	0	1	−3	5	1
X_1	1	−1	0	0	1	3	يهمل
Z	0	−5	0	0	3	9	

The new (3rd) solution table

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
S_1	0	0	1	−1/5	8/5	6
X_2	0	1	0	1/5	−3/5	1
X_1	1	0	0	1/5	2/5	4
Z	0	0	0	1	0	14

- Values of Z are zeros and positive (final solution)
- X1 = 4 X2=1 Z = 14

Example

$$\text{Min. } Z = -5X_1 - 3X_2 + 2X_3$$

Sub. To

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 5$$

$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 \le 4$$

$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 15$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$$

الحل:

$$\text{Min. } Z = -5X_1 - 3X_2 + 2X_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3$$

Sub. To

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$

$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$

$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , S_3 \ge 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$

$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$

$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$

$$Z + 5X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

The first solution table

B.V. \ All	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	1	0	0	5	5
S_2	1	−2	−2	0	1	0	4	4
S_3	3	3	2	0	0	1	15	5
Z	5	3	−2	0	0	0	0	

The first solution table

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	3	3	1	−1	0	1	1/3
X_1	1	−2	−2	0	1	0	4	يهمل
S_3	0	9	8	0	−3	1	3	1/3
Z	0	13	8	0	−5	0	−20	

The optimal solution table

B.V. \ All	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
X_2	0	1	1	1/3	−1/3	0	1/3
X_1	1	0	0	2/3	1/3	0	14/3
S_3	0	0	−1	−3	0	1	0
Z	0	0	−5	−13/3	−2/3	0	−73/3

- X1 = 1/3 X2 = 14/3 Z = -73/3
- S3 = 0

Notes

- 1. When ratios are equal, the corresponding basic variable is zero (S3=0).
- 2. Incase of having any constraints with the signs (=) or (≥), artificial variables (R1, R2, …) are used to verify the starting solution where R1 ≥ 0, R2 ≥ 0 …. And these variable are treated as virtual variables.
- 3. There are two ways to solve this problems: these are the **Big M Method** and the **2-phases Simplex Method**.