



KỸ THUẬT GHI NHỚ, CỘNG DỒN

Trình bày: Phan Chí Trung

Nội dung buổi học

1. Kỹ thuật ghi nhớ
2. Kỹ thuật cộng dồn
3. Kỹ thuật mảng hiệu
4. Bài tập



01

Kỹ thuật ghi nhớ

Đặt vấn đề

Cho mảng n số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n ($1 \leq n \leq 10^6, a_i \leq 10^6$) và số nguyên dương S ($S \leq 10^6$). Hãy đếm xem có bao nhiêu cặp (a_i, a_j) thỏa mãn $a_i + a_j = S$.

Kỹ thuật ghi nhớ (đánh dấu)

- Đây là một kỹ thuật đơn giản nhưng mang lại tính hiệu quả rất cao trong các bài toán lập trình thi đấu
- Là kỹ thuật mà ta sẽ ghi nhớ (đánh dấu) tần suất xuất hiện của các đối tượng mà ta quan tâm.

Kỹ thuật ghi nhớ (đánh dấu)

- Lưu ý: cần khởi tạo tập hợp đủ lớn để chứa hết tất cả đối tượng!
- Trong C++, có kiểu dữ liệu `bitset` sẽ tối ưu việc đánh dấu dữ liệu xuất hiện hay không (chỉ lưu được `True` hoặc `False`)

Kỹ thuật ghi nhớ (đánh dấu)

Cho mảng n số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n ($1 \leq n \leq 10^6, a_i \leq 10^6$) và số nguyên dương S ($S \leq 10^6$). Hãy đếm xem có bao nhiêu cặp (a_i, a_j) thỏa mãn $a_i + a_j = S$.

Kỹ thuật ghi nhớ (đánh dấu)

Cho dãy số nguyên dương gồm n phần tử a_1, a_2, \dots, a_n ($0 < a_i \leq 10^4, n \leq 10^4$),

Hỏi có bao nhiêu bộ 3 số a_i, a_j, a_k thỏa mãn $a_i^2 + a_j^2 = a_k^2$ (với i, j, k đôi một khác



02

Kỹ thuật cộng dồn

Đặt vấn đề

Cho một dãy số gồm n ($1 \leq n \leq 10^6$) số nguyên dương $a_i \leq 10^6$, hãy xác định xem tồn tại bao nhiêu dãy con liên tiếp có tổng bằng S ?

- Lưu ý: giá trị a_i có thể là số âm!

Kỹ thuật cộng dồn

Ví dụ: với mảng $a[] = 1, 2, 3, 5, -2, -3, 5, -5$; $S = 0$

Kỹ thuật cộng dồn

- Là kỹ thuật mà ta sẽ cộng các giá trị liên tiếp lại với nhau

Kỹ thuật cộng dồn

Cho một dãy số gồm n ($1 \leq n \leq 10^6$) số nguyên dương $a_i \leq 10^6$, hãy xác định xem tồn tại bao nhiêu dãy con liên tiếp có tổng bằng S ?

- Hãy thay thế, thay vì tính tổng ta thử tính trung bình cộng cho bài toán này nhé!

Kỹ thuật cộng dồn

1.3. Bài toán 3: Cho một dãy số gồm n ($1 \leq n \leq 10^6$) số nguyên $|a_i| \leq 10^9$, hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng dãy con liên tiếp của dãy ban đầu?

Kỹ thuật mảng cộng dồn

A. Tổng Đoạn

time limit per test: 1 second

memory limit per test: 256 megabytes

Bạn được cho một dãy số a có n số nguyên a_i . Chúng tôi cho bạn q câu hỏi và mỗi câu hỏi bao gồm hai chỉ số l và r trong đoạn từ 1 đến n hãy cho biết tổng các số nguyên trong mảng a từ l tới r tương ứng với từng câu hỏi.

Input

Dòng đầu tiên gồm một số nguyên n ($1 \leq n \leq 10^5$).

Dòng thứ hai gồm n số nguyên a_i ($1 \leq a_i \leq 10^5$)

Dòng thứ ba gồm một số nguyên q đại diện cho số lượng câu hỏi $q \leq 10^5$

q dòng tiếp theo mỗi dòng gồm hai số nguyên l và r trong đoạn từ 1 đến n

Output

Với mỗi câu hỏi hãy cho biết tổng các số nguyên trong đoạn từ l đến r

Kỹ thuật mảng cộng dồn

- Để xây dựng mảng cộng dồn, ta sẽ xây dựng một mảng S mà tại mỗi vị trí $S[i] = \text{sum}(A[1], A[2], \dots, A[i])$
- Và để hạn chế việc tính đi tính lại sum của một vài vị trí nhiều lần, ta có công thức tối ưu như sau:

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	3	-1	-4	1	5	9	-2	-6
S								
	0	1	2	3	4	5	6	7

$$S_i = 0 \quad \text{với } i = 0$$

$$S_i = S_{i-1} + A_{i-1} \quad \text{với } i > 0$$

Kỹ thuật mảng cộng dồn

- Để trả lời các truy vấn tổng các phần tử trên một đoạn l, r ta có công thức trả lời như sau:

$$\text{Sum_Segment}(l, r) = S[r] - S[l - 1]$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	3	-1	-4	1	5	9	-2	-6

S	0	3	2	-2	-1	4	13	11	5
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$S_i = 0 \quad \text{với } i = 0$$

$$S_i = S_{i-1} + A_{i-1} \quad \text{với } i > 0$$

Kỹ thuật mảng cộng dồn

A. Tổng Đoạn

time limit per test: 1 second

memory limit per test: 256 megabytes

Bạn được cho một dãy số a có n số nguyên a_i . Chúng tôi cho bạn q câu hỏi và mỗi câu hỏi bao gồm hai chỉ số l và r trong đoạn từ 1 đến n hãy cho biết tổng các số nguyên trong mảng a từ l tới r tương ứng với từng câu hỏi.

Input

Dòng đầu tiên gồm một số nguyên n ($1 \leq n \leq 10^5$).

Dòng thứ hai gồm n số nguyên a_i ($1 \leq a_i \leq 10^5$)

Dòng thứ ba gồm một số nguyên q đại diện cho số lượng câu hỏi $q \leq 10^5$

q dòng tiếp theo mỗi dòng gồm hai số nguyên l và r trong đoạn từ 1 đến n

Output

Với mỗi câu hỏi hãy cho biết tổng các số nguyên trong đoạn từ l đến r

Kỹ thuật mảng cộng dồn 2 chiều

Tuấn là người chiến thắng trong một cuộc thi “tìm hiểu kiến thức vũ trụ” và được nhận các phần thưởng do công ty XYZ tài trợ. Các phần thưởng được bố trí trên một bảng hình vuông kích thước $n * n$ có dạng một lưới ô vuông kích thước đơn vị. Các dòng của bảng được đánh số từ **1** đến **n** , từ trên xuống dưới và các cột của bảng được đánh số từ **1** đến **n** , từ trái qua phải. Ô nằm trên giao của dòng **i** và cột **j** được gọi là ô **(i, j)** và trên ô đó chứa một món quà có giá trị là **$a[i, j]$** ($1 \leq i, j \leq n$).

Để nhận phần thưởng, Tuấn được chọn một hình vuông **$k * k$** chiếm trọn trong một số ô của bảng và nhận tất cả các phần quà có trong các ô nằm trong đó.

Yêu cầu: Hãy xác định tổng giá trị quà lớn nhất mà Tuấn có thể nhận được.

Dữ liệu vào: Dòng thứ nhất chứa hai số nguyên dương **n, k** ($n \leq 10^3, \frac{n}{3} \leq k \leq n$). Dòng thứ **i** trong số **n** dòng tiếp theo chứa **n** số nguyên dương, số thứ **j** là **$a[i, j]$** ($a[i, j] \leq 1000$)

Kết quả ra: Ghi ra một số nguyên duy nhất là tổng giá trị lớn nhất của các món quà mà Tuấn có thể nhận được.

Ví dụ:

BONUS.INP	BONUS.OUT	Giải thích
4 3 1 9 1 1 9 9 9 9 1 9 9 9 1 9 9 14	86	Chọn vùng 3x3 như sau: 1 9 1 1 9 9 9 9 1 9 9 9 1 9 9 14

Kỹ thuật mảng cộng dồn 2 chiều

- Để xây dựng mảng cộng dồn 2 chiều, ta sẽ đi xây dựng mảng S 2 chiều với $S[i][j]$ là tổng của các phần tử nằm vùng hình chữ nhật có góc trái trên là vị trí $A[1][1]$ và góc phải dưới là $A[i][j]$ trên mảng A 2 chiều.

	1	2	3	4
1	3	-6	7	8
2	-7	9	4	-4
3	1	-1	7	1
4	4	4	-2	-3

A

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	3	-3	4	12
2	0	-4	-1	10	14
3	0	-3	-1	17	22
4	0	1	7	23	25

S

Kỹ thuật mảng cộng dồn 2 chiều

- Công thức xây dựng:

$$S[i][j] = A[i][j] + S[i][j - 1] + S[i - 1][j] - S[i - 1][j - 1]$$

	1	2	3	4
1	3	-6	7	8
2	-7	9	4	-4
3	1	-1	7	1
4	4	4	-2	-3

A

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	3	-3	4	12
2	0	-4	-1	10	14
3	0	-3	-1	17	22
4	0	1	7	23	25

S

Kỹ thuật mảng cộng dồn 2 chiều

- Trả lời truy vấn tổng hình chữ nhật có ô trái trên (x1, y1) ô phải dưới là (x2, y2):

$$\text{Sum}(x1, y1, x2, y2) = S[x2][y2] - S[x2][y1 - 1] - S[x1 - 1][y2] + S[x1 - 1][y2 - 1]$$

	1	2	3	4
1	3	-6	7	8
2	-7	9	4	-4
3	1	-1	7	1
4	4	4	-2	-3

A

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	3	-3	4	12
2	0	-4	-1	10	14
3	0	-3	-1	17	22
4	0	1	7	23	25

S

Kỹ thuật mảng cộng dồn 2 chiều

H. Đếm cây

time limit per test: 1 second

memory limit per test: 256 megabytes

Bạn được cho một lưới kích thước $n \times n$ đại diện cho bản đồ của một khu rừng. Mỗi ô có thể trống hoặc chứa một cây. Ô góc trên bên trái có tọa độ $(1,1)$, và ô góc dưới bên phải có tọa độ (n,n) . Nhiệm vụ của bạn là xử lý q truy vấn có dạng: có bao nhiêu cây nằm trong hình chữ nhật đã cho trong khu rừng?

Input

Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên n ($1 \leq n \leq 1000$) và q ($1 \leq q \leq 10^5$): kích thước của forest và số lượng truy vấn.

Sau đó có n dòng mô tả khu rừng. Mỗi dòng có n ký tự: $.$ là một hình vuông trống và $*$ là một cái cây.

Cuối cùng là q dòng mô tả các truy vấn. Mỗi dòng có 4 số nguyên y_1, x_1, y_2, x_2 tương ứng với các góc của hình chữ nhật.

Đảm bảo các góc của hình chữ nhật khi truy vấn luôn nằm trong hình chữ nhật lớn bản đồ khu rừng

Output

Số cây đếm được với từng truy vấn

Kỹ thuật mảng hiệu

Cho mảng A gồm n phần tử và q truy vấn. Với mỗi truy vấn sẽ gồm 3 số l, r, v yêu cầu tăng tất cả phần tử nằm trong đoạn l, r lên v giá trị. In ra mảng A sau khi thực hiện q truy vấn

Kỹ thuật mảng hiệu

- Để xây dựng mảng hiệu, ta đi xây dựng mảng D với:

$$D[i] = A[i] - A[i - 1]$$

index	0	1	2	3	4	5	6
A	0	2	3	10	7	4	9
D	0	2	1	7	-3	-3	5

- Với mảng hiệu này, ta hoàn toàn có thể tính giá trị $A[i]$ mới sẽ là $A[i] = A[i - 1] + D[i]$

⇒ Vậy với bài toán update đoạn trên ta chỉ cần tác động vào $D[i]$ thì sẽ thay đổi cả mảng A từ vị trí i trở về sau bởi vì

$$+ A[i] = A[i - 1] + D[i]$$

$$+ \text{mà } A[i + 1] = A[i] + D[i + 1] = (A[i - 1] + D[i]) + D[i + 1]$$

$$+ \dots$$

Kỹ thuật mảng hiệu

- Truy vấn update đoạn l, r lên v giá trị:
 - + $D[l] = D[l] + v$
 - + $D[r + 1] = D[r + 1] - v$

index	0	1	2	3	4	5	6
A	0	2	3	10	7	4	9
D	0	2	1	7	-3	-3	5

- Để xây dựng lại mảng A mới sau khi update, ta chỉ cần xây dựng lại mảng cộng dồn S của mảng D

Kỹ thuật mảng hiệu 2 chiều

- Công thức xây dựng:

$$D[i][j] = A[i][j] - A[i-1][j] - A[i][j-1] + A[i-1][j-1]$$

	1	2	3	4
1	3	-6	7	8
2	-7	9	4	-4
3	1	-1	7	1
4	4	4	-2	-3

A

	1	2	3	4
1	3	-9	13	1
2	-10	25	-18	-9
3	8	-18	13	2
4	3	2	-14	5

$D(A)$

Kỹ thuật mảng hiệu 2 chiều

- Update truy vấn tăng giá trị trong vùng hình chữ nhật $(x1, y1)$ $(x2, y2)$ lên v :
 - + $D[x1][y1] += v$
 - + $D[x1][y2 + 1] -= v$
 - + $D[x2][y1 + 1] -= v$
 - + $D[x2 + 1][y2 + 1] += v$

	1	2	3	4
1	3	-9	13	1
2	-10	25	-18	-9
3	8	-18	13	2
4	3	2	-14	5

$D(A)$