Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ

О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

По дисциплине «Практическая линейная алгебра»

«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ»

Студенты:
Бахтагиров Р.А. группа R3243
Сайфуллин Д.Р. группа R3243
Симонов И.А. группа R3236

Проверил:
Догадин Егор Витальевич, ассистент

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Введение

В данной лабораторной работе исследуются непрерывные и дискретные линейные динамические системы второго порядка. Основная цель работы – изучить различные типы динамических систем, их свойства и характер движения в зависимости от параметров системы.

Рассматриваются системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_3 x_1(t) + a_4 x_2(t), \end{cases}$$

для непрерывного случая и

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k), \\ x_2(k+1) = a_3 x_1(k) + a_4 x_2(k), \end{cases}$$

для дискретного случая.

2 Ход работы

2.1 Непрерывные динамические системы

Для выполнения первого задания были выбраны два неколлинеарных вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Далее были построены шесть различных систем с заданными свойствами:

2.1.1 Система 1: Асимптотически устойчивая

Матрица системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Собственные векторы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Траектории системы сходятся к началу координат. При этом скорость сходимости по второй координате выше, чем по первой.

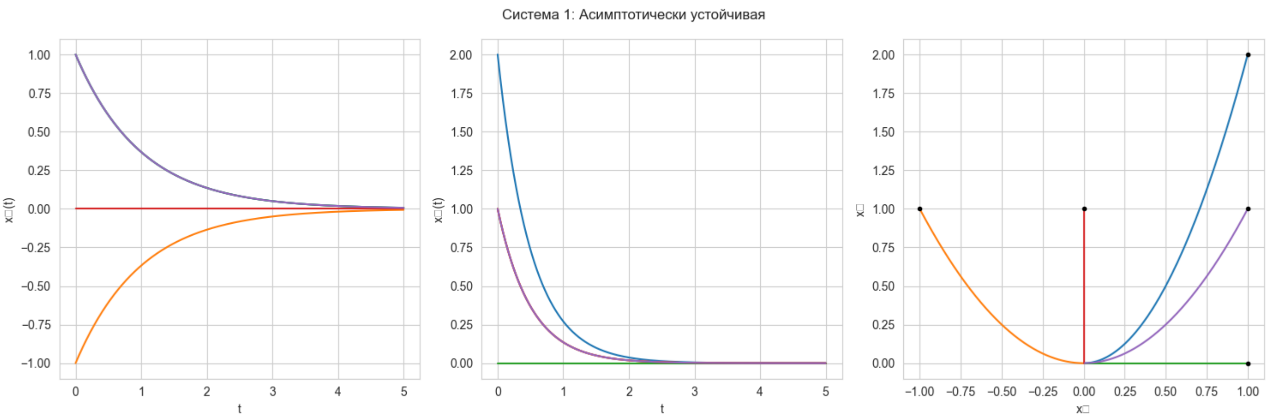

Рис. 1: Траектории системы 1

2.1.2 Система 2: Неустойчивая без неколлинеарных собственных векторов

Матрица системы:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (кратное)
Собственный вектор:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обобщенный собственный вектор:

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Траектории системы расходятся, причем скорость расхождения увеличивается со временем из-за наличия обобщенного собственного вектора.

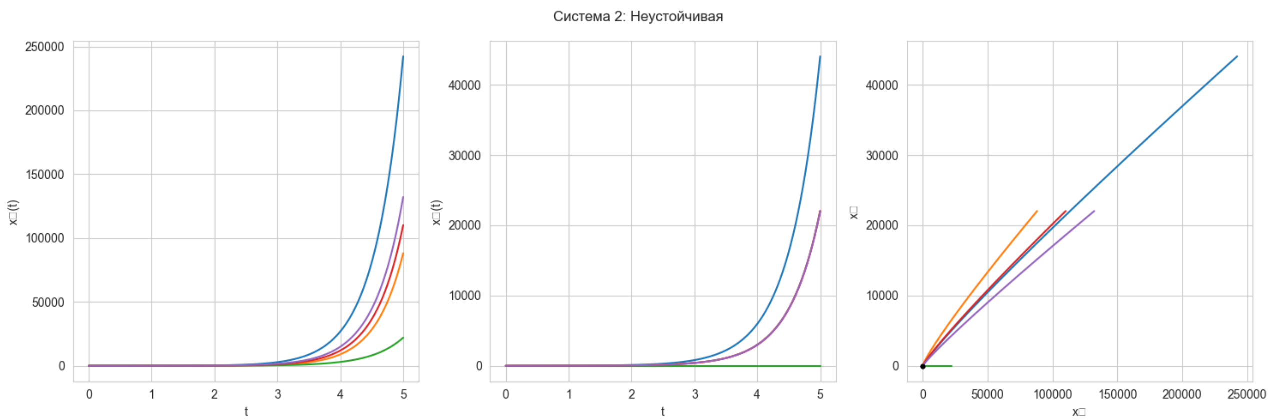

Рис. 2: Траектории системы 2

2.1.3 Система 3: Неустойчивая с особым направлением

Матрица системы:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

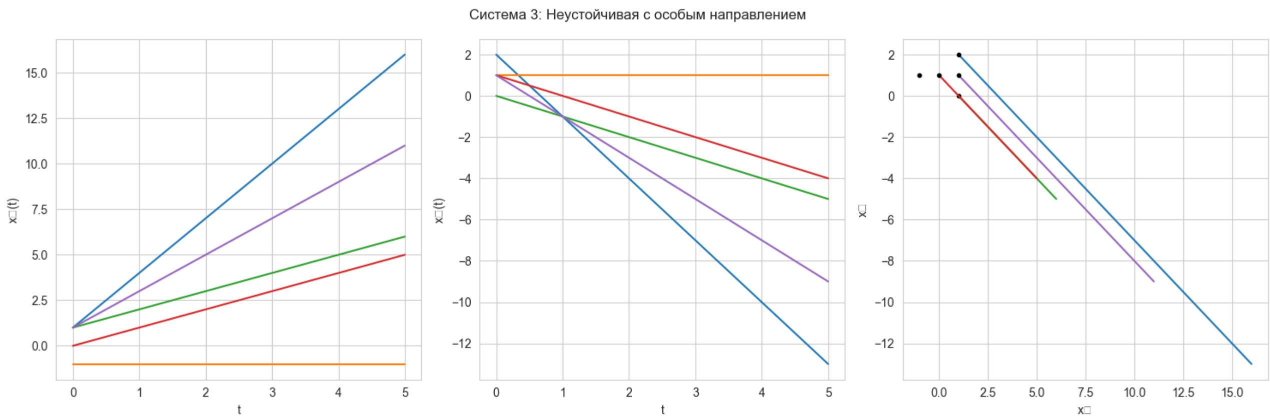

Рис. 3: Траектории системы 3

2.1.4 Система 4: Асимптотически устойчивая с комплексными собственными числами

Матрица системы:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

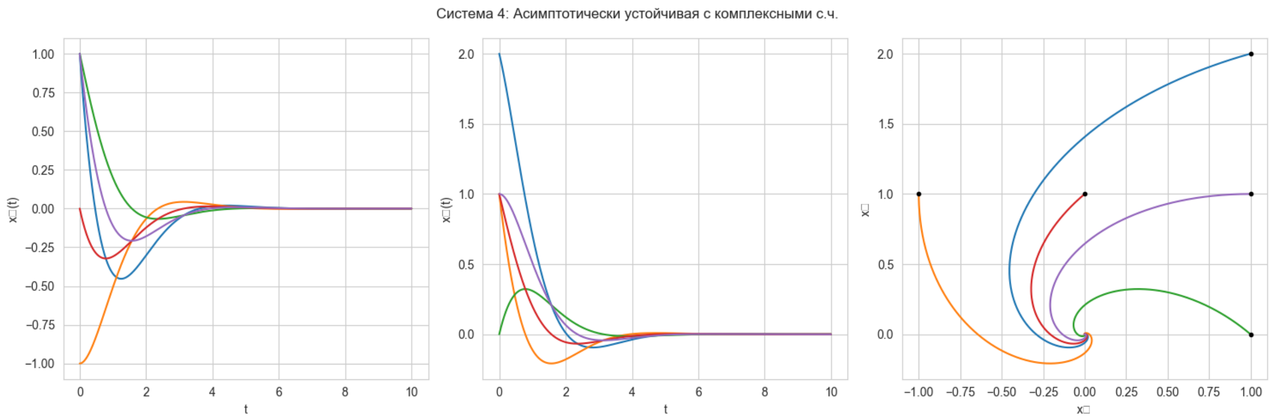

Рис. 4: Траектории системы 4

2.1.5 Система 5: Неустойчивая с комплексными собственными числами

Матрица системы:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

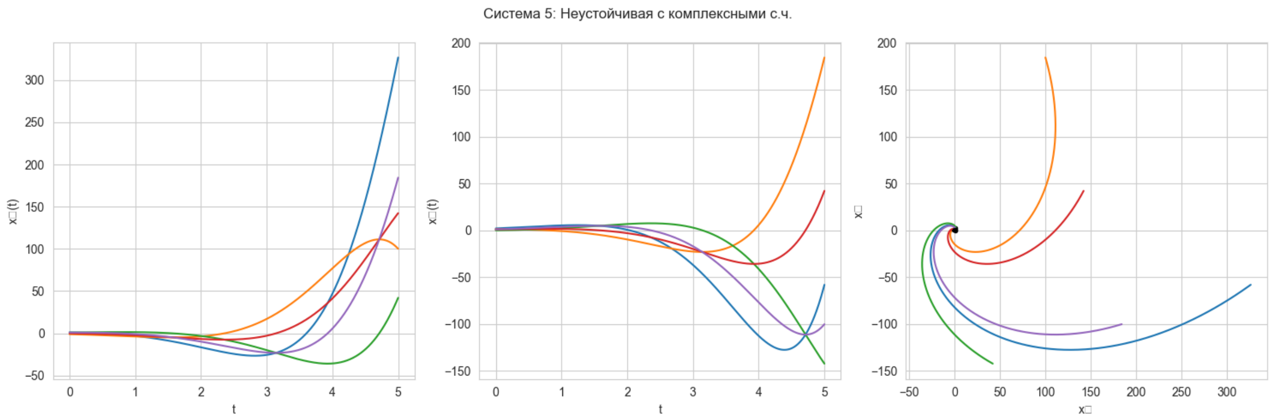

Рис. 5: Траектории системы 5

2.1.6 Система 6: На границе устойчивости

Матрица системы:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

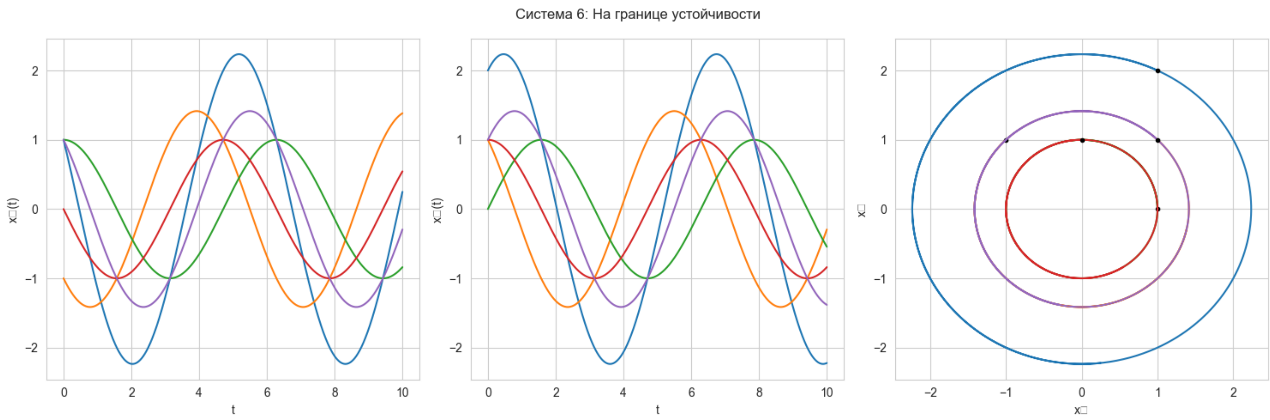

Рис. 6: Траектории системы 6

3 Дискретные динамические системы

3.1 Расположение собственных чисел

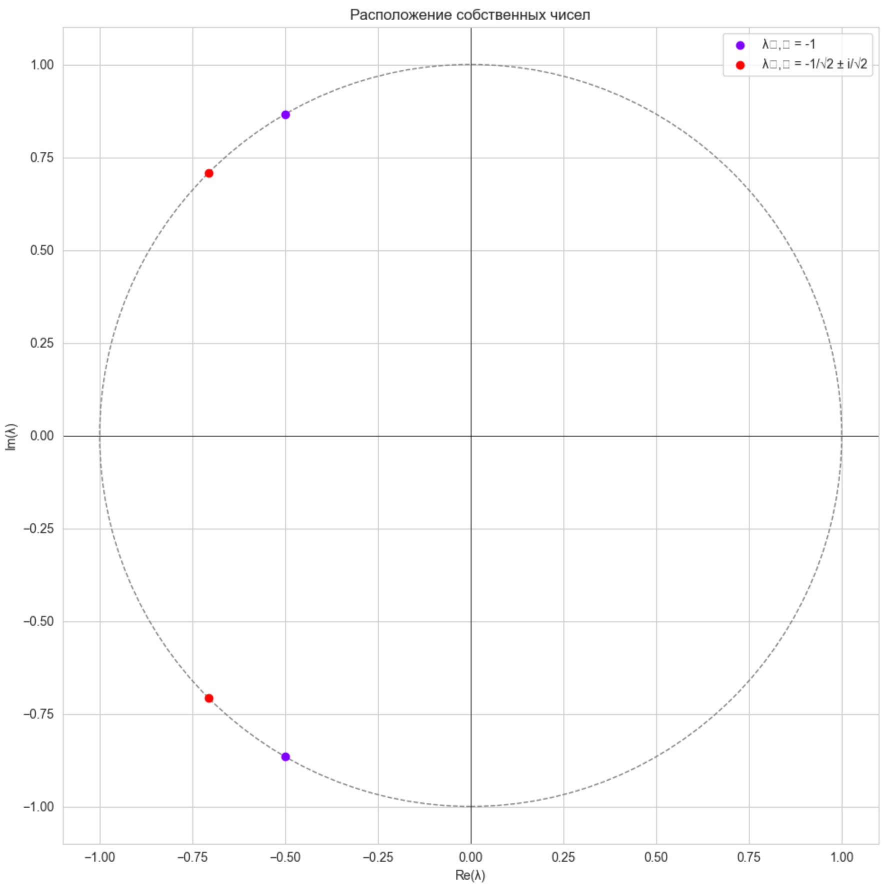

Рис. 7: Расположение собственных чисел дискретных систем

3.2 Система 1: $\lambda_{1,2} = -1$

Матрица системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система совершает колебания с периодом 2.

3.3 Система 2: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

Матрица системы:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система демонстрирует затухающие колебания.

3.4 Система 3: $\lambda_{1,2} = \pm i$

Матрица системы:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система совершает незатухающие колебания с постоянной амплитудой. Физическая интерпретация: дискретный аналог консервативного осциллятора.

3.5 Система 4: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

Матрица системы:

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система демонстрирует расходящиеся колебания. Физическая интерпретация: дискретный аналог осциллятора с отрицательным трением.

3.6 Система 5: $\lambda_{1,2} = 1$

Матрица системы:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система показывает линейный рост с течением времени. Физическая интерпретация: система с нейтральной устойчивостью и накоплением отклонений.

3.7 Системы 6-8: Масштабированные системы с $c = 0.5$

Матрицы систем получены умножением матриц систем 1, 3 и 5 на $c = 0.5$. Это приводит к затухающему поведению во всех случаях, так как собственные числа оказываются внутри единичного круга.

Физическая интерпретация: добавление демпфирования в исходные системы.

3.8 Системы 9-11: Масштабированные системы с $d = 1.5$

Матрицы систем получены умножением матриц систем 1, 3 и 5 на $d = 1.5$. Это приводит к расходящемуся поведению во всех случаях, так как собственные числа оказываются вне единичного круга.

Физическая интерпретация: добавление положительной обратной связи в исходные системы.

3.9 Система 12: $\lambda_{1,2} = 0$

Матрица системы:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система достигает нулевого состояния за два шага независимо от начальных условий. Физическая интерпретация: система с максимальным демпфированием, "мертвая зона"в теории управления.

4 Осциллятор

4.1 Случай 1: $a < 0, b = 0$

В этом случае система описывает консервативный осциллятор. Физический пример: математический маятник без трения.

Матрица системы при $a = -1, b = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система совершает незатухающие гармонические колебания.

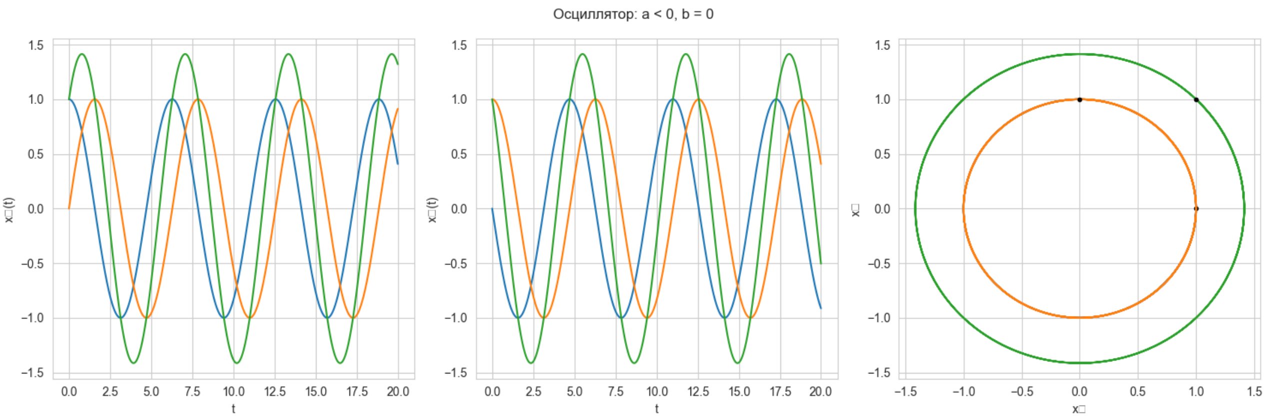

Рис. 8: Траектории консервативного осциллятора

4.2 Случай 2: $a < 0, b < 0$

Система описывает затухающий осциллятор. Физический пример: математический маятник с вязким трением.

Матрица системы при $a = -1, b = -0.5$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Система совершает затухающие колебания.

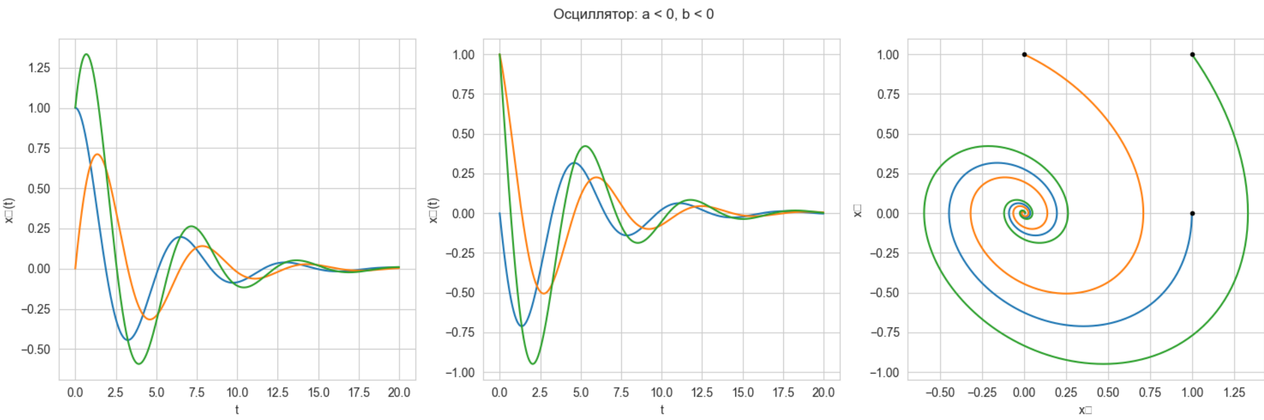

Рис. 9: Траектории затухающего осциллятора

4.3 Случай 3: $a > 0, b = 0$

Система описывает неустойчивый осциллятор. Физический пример: перевернутый маятник без трения.

Матрица системы при $a = 1, b = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характер движения: Траектории системы неограниченно расходятся.

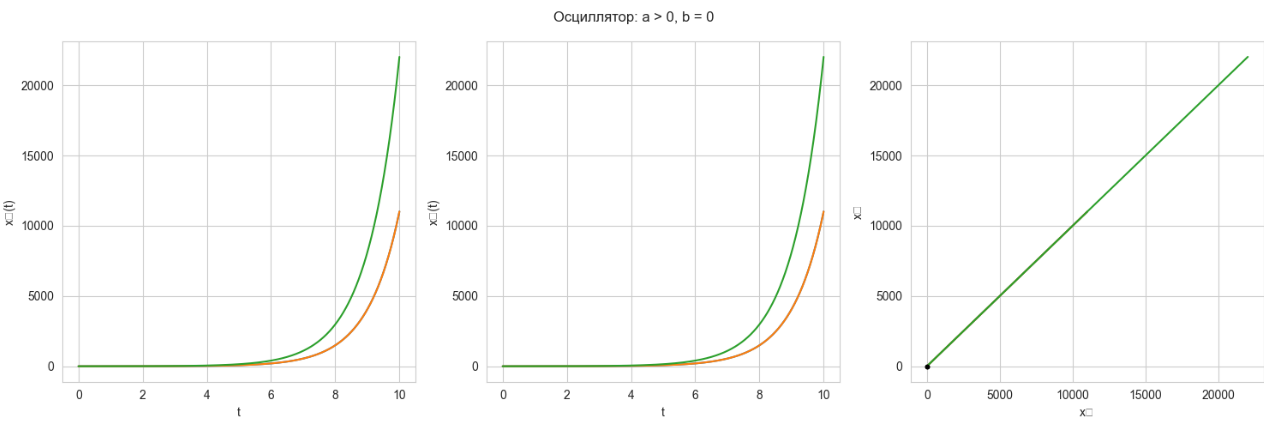

Рис. 10: Траектории неустойчивого осциллятора

4.4 Случай 4: $a > 0, b < 0$

Система описывает осциллятор с отрицательным трением. Физический пример: электрическая цепь с отрицательным сопротивлением.

Матрица системы при $a = 1, b = -0.5$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Характер движения: В зависимости от начальных условий, система может демонстрировать как расходящиеся колебания, так и монотонное расхождение.

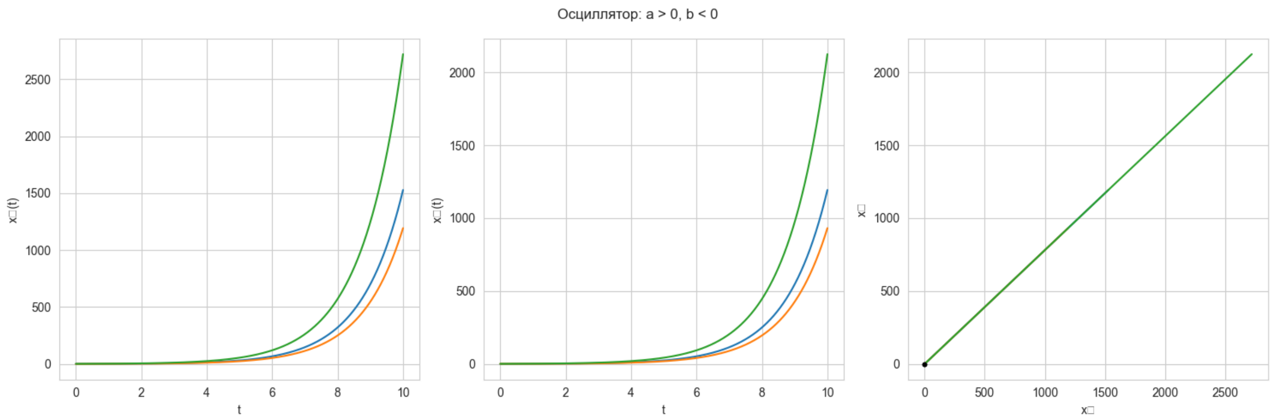

Рис. 11: Траектории осциллятора с отрицательным трением

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были получены следующие результаты:
1. Исследованы различные типы непрерывных динамических систем:

- Асимптотически устойчивые системы демонстрируют сходимость траекторий к началу координат
- Неустойчивые системы показывают расходящиеся траектории
- Системы на границе устойчивости демонстрируют периодические колебания

2. При изучении дискретных систем выявлены закономерности:

- Собственные числа внутри единичного круга обеспечивают устойчивость
- Комплексные собственные числа приводят к колебательному поведению
- Кратные собственные числа могут приводить к полиномиальному росту решений

3. Исследование осциллятора позволило:

- Понять влияние параметров на характер колебаний
- Установить связь между физическими системами и их математическими моделями
- Изучить различные режимы колебаний: затухающие, незатухающие и расходящиеся

Особенно интересным оказалось наблюдение за тем, как расположение собственных чисел на комплексной плоскости влияет на поведение системы. Это дает глубокое понимание связи между алгебраическими свойствами матрицы системы и характером движения.