

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**  
Факультет систем управления и робототехники

**Лабораторная работа №3**  
**Жесткая фильтрация**

Студент: Сайфуллин Д.Р.  
Поток: ЧАСТ.МЕТ. R23 1.5  
Преподаватели: Перегудин А.А.  
Догадин Е.В.

Санкт-Петербург  
2025 г.

# Содержание

<b>Задание 1. Жесткие фильтрации</b>	<b>2</b>
Постановка задачи . . . . .	2
Убираем высокие частоты . . . . .	2
Убираем специфические частоты . . . . .	10
Убираем низкие частоты . . . . .	13
<b>Задание 2. Фильтрация звука</b>	<b>15</b>

## Задание 1. Жесткие фильтрации

### Постановка задачи

Для выполнения задания необходимо задать параметры  $a, t_1, t_2$  и рассмотреть предложенную функцию. Пусть  $a = 3, t_1 = -2, t_2 = 1$ , тогда функцией нашего сигнала будет:

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t \in [-2, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построим график нашей функции:

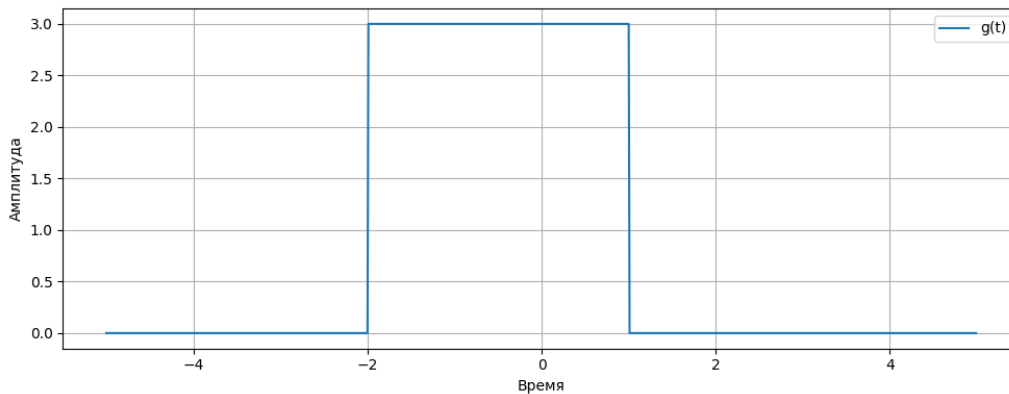


Рис. 1: График функции  $g(t)$

Также нужно задать зашумлённую версию нашего сигнала, которая имеет вид:

$$u(t) = g(t) + b\xi(t) + c \sin dt,$$

где  $\xi(t)$  — белый шум (равномерно распределённый на  $[-1, 1]$ ), а  $b, c, d$  — параметры возмущения.

### Убираем высокие частоты

При выполнении этого пункта гармоническая составляющая отсутствует ( $c = 0$ ). Таким образом к исходному сигналу добавляется только белый шум с коэффициентом  $b$ . Сигнал принимает вид:

$$u(t) = g(t) + b \cdot \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  — белый шум, равномерно распределённый на интервале  $[-1, 1]$ . Параметр  $b$  зададим как множество значений  $b = \{0.1, 1.0, 3.0\}$ . Для каждого значения  $b$  построим графики временных сигналов и спектров:

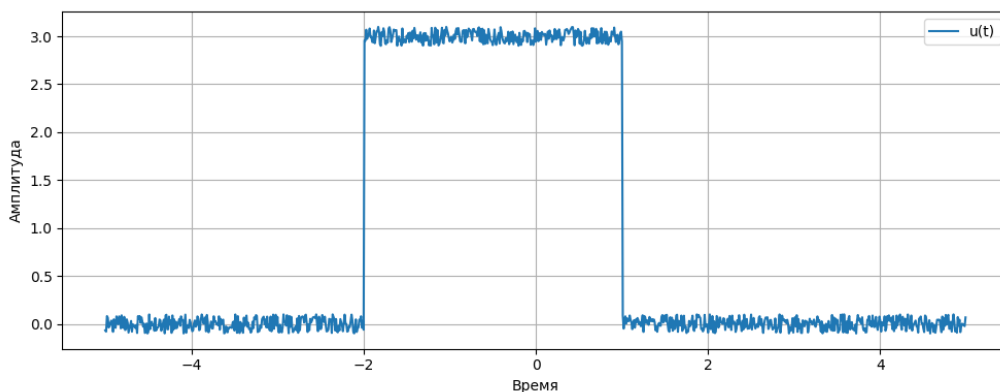


Рис. 2: График зашумленного сигнала при  $b = 0.1$

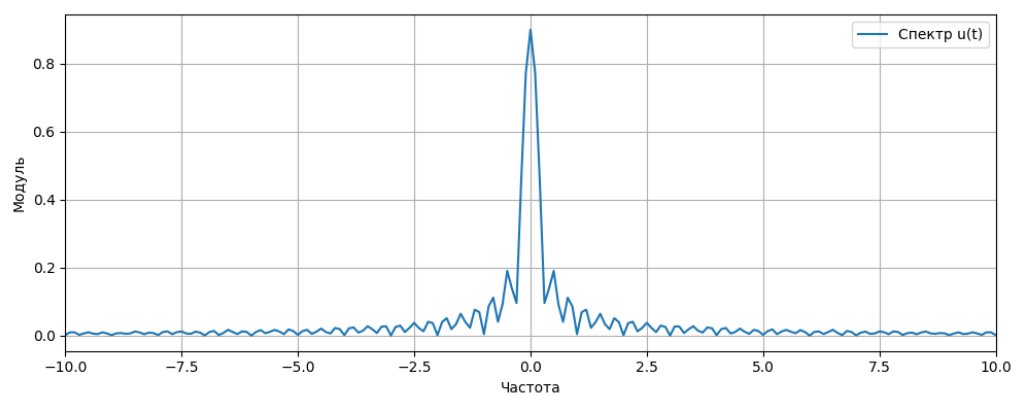


Рис. 3: График Фурье-образа сигнала при  $b = 0.1$

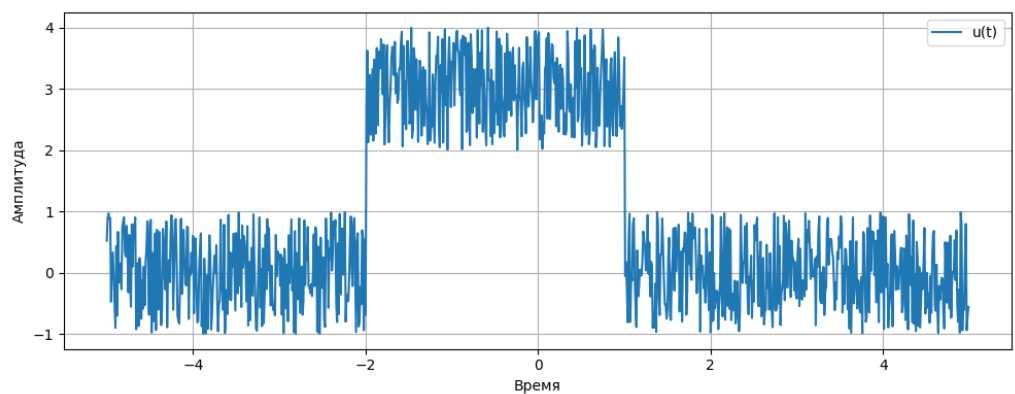


Рис. 4: График зашумленного сигнала при  $b = 1.0$

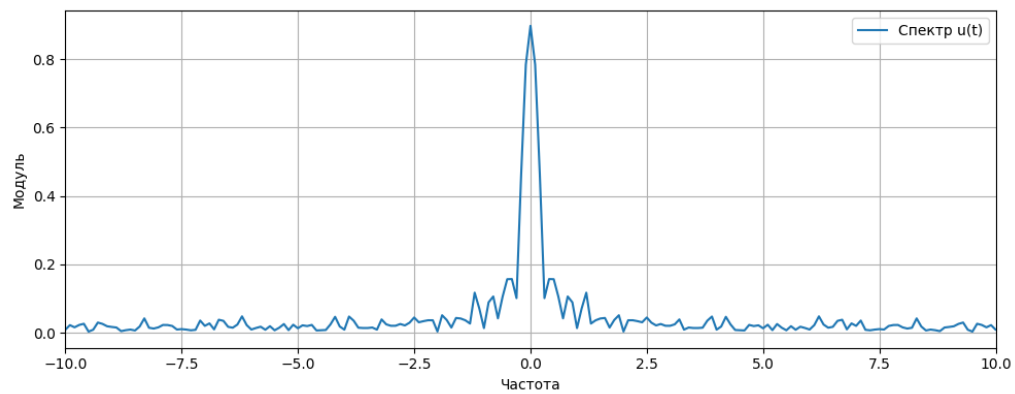


Рис. 5: График Фурье-образа сигнала при  $b = 1.0$

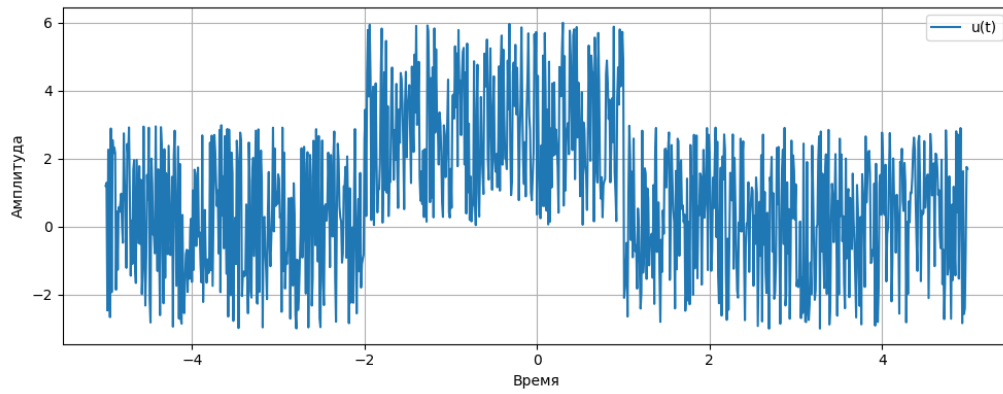


Рис. 6: График зашумленного сигнала при  $b = 3.0$

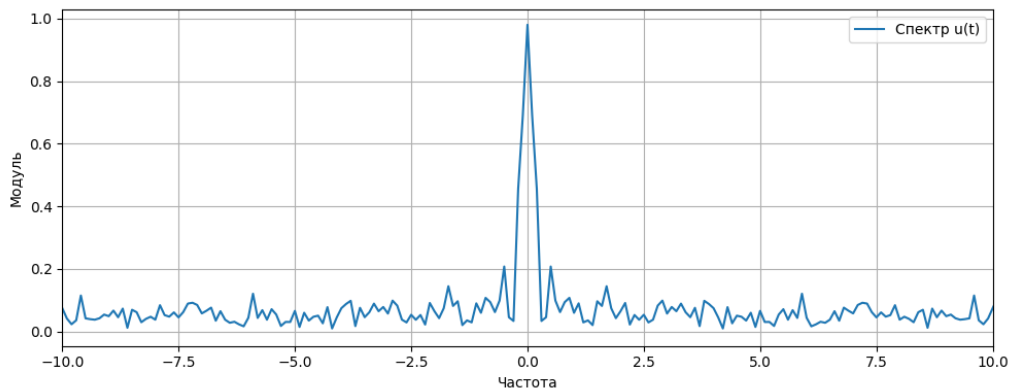


Рис. 7: График Фурье-образа сигнала при  $b = 3.0$

Исходя из графиков можем сделать вывод, что при увеличении параметра  $b$  увеличивается уровень шума в сигнале, что приводит к более выраженному рассеянию спектральных компонент.

Теперь посмотрим на то, как параметры  $b$  и  $\nu_0$  влияют на эффективность фильтрации. К каждому значению параметра  $b$  будем перебирать значения параметра  $\nu_0$ , который зададим как множество значений  $\nu_0 = \{1.0, 5.0, 10.0\}$ . Для каждой пары значений построим 2 сравнительных графика. Первый включает в себя графики исходного сигнала, его зашумленную версию и версию с применением фильтра низких частот. Второй будет включать модули Фурье-образов для каждого из сигналов.

Пусть параметр  $b = 0.1$ , переберем значения параметра  $\nu_0$ :

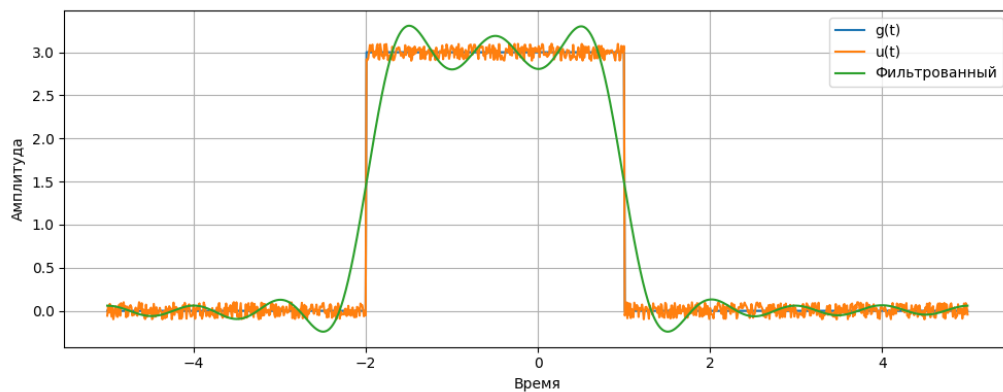


Рис. 8: Сравнительные временные графики при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 1.0$

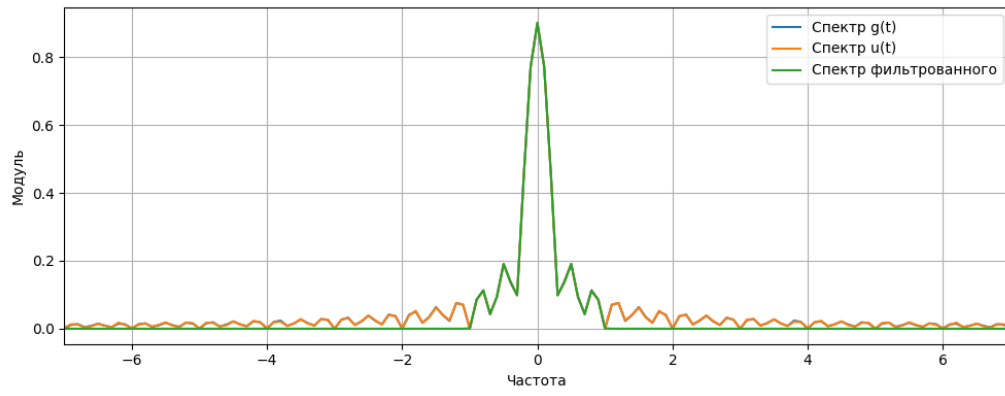


Рис. 9: Сравнительные спектры при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 1.0$

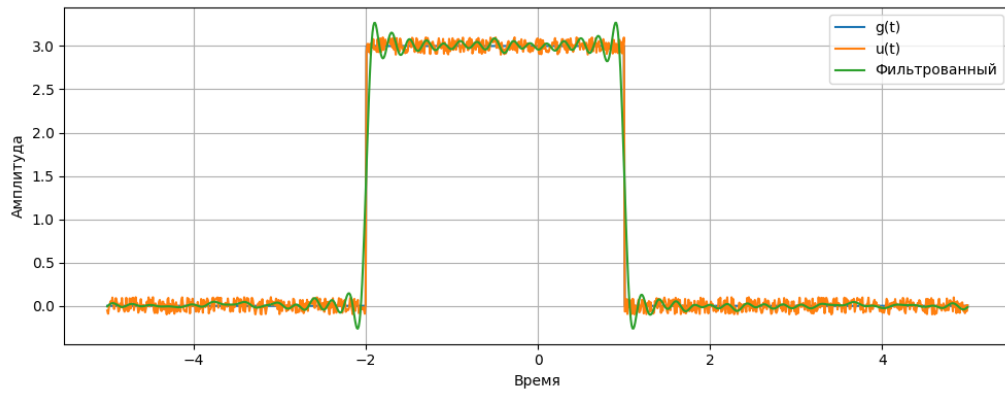


Рис. 10: Сравнительные временные графики при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 5.0$

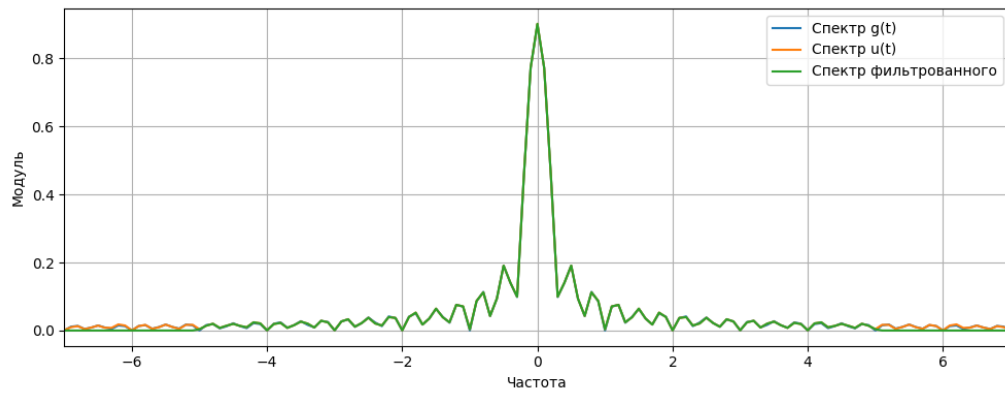


Рис. 11: Сравнительные спектры при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 5.0$

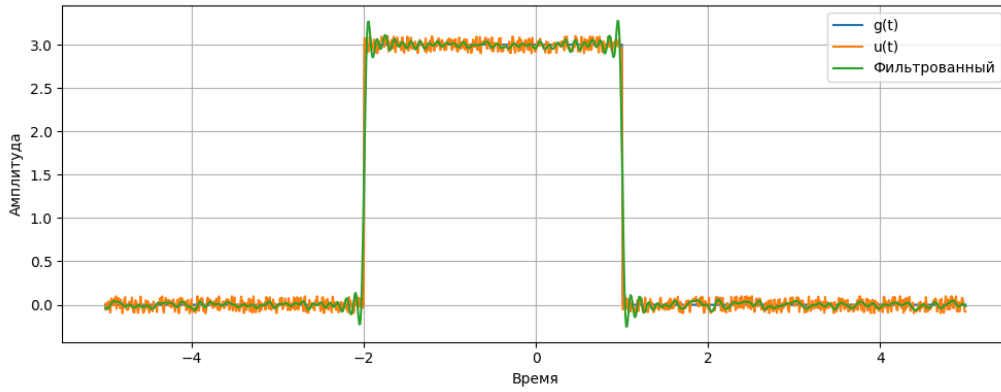


Рис. 12: Сравнительные временные графики при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 10.0$

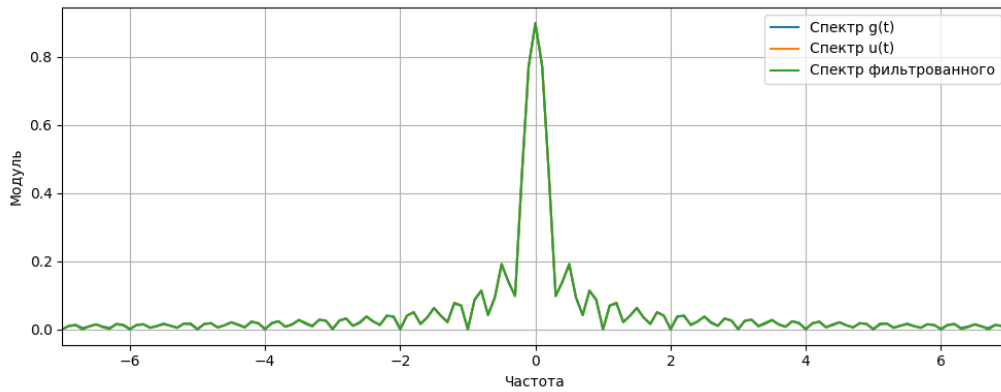


Рис. 13: Сравнительные спектры при  $b = 0.1$  и  $\nu_0 = 10.0$

Мы видим, что при  $\nu_0 = 1$  спектре остаются только самые низкие частоты, поэтому резкие фронты исходного прямоугольного сигнала сглаживаются. На временном графике видно, что фильтрованный сигнал повторяет общую форму  $g(t)$ , но переходы становятся более пологими, что говорит о потере высокочастотных составляющих, важных для чёткого воспроизведения прямоугольных границ.

При  $\nu_0 = 5$  баланс между сохранением формы сигнала и удалением шума становится лучше. Фильтрованный сигнал в целом ближе к исходному  $g(t)$ , а шумовая составляющая заметно подавлена.

При  $\nu_0 = 10$  пропускается более широкий диапазон частот, что позволяет лучше восстановить резкие переходы прямоугольника. Однако при этом часть высокочастотного шума также сохраняется.

Таким образом, при невысоком уровне шума оптимальным с точки зрения компромисса между удалением шума и сохранением резких границ может считаться промежуточное значение частоты среза, то есть  $\nu_0 = 5$ .

Теперь  $b = 1.0$ , снова переберем значения параметра  $\nu_0$ :

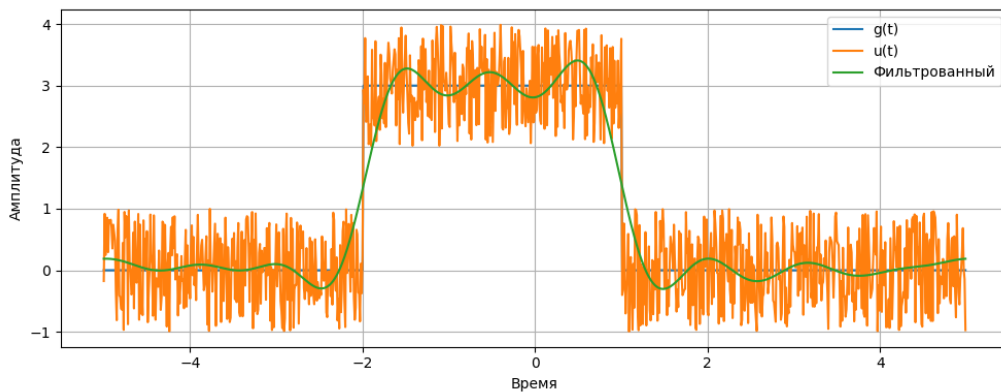


Рис. 14: Сравнительные временные графики при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 1.0$

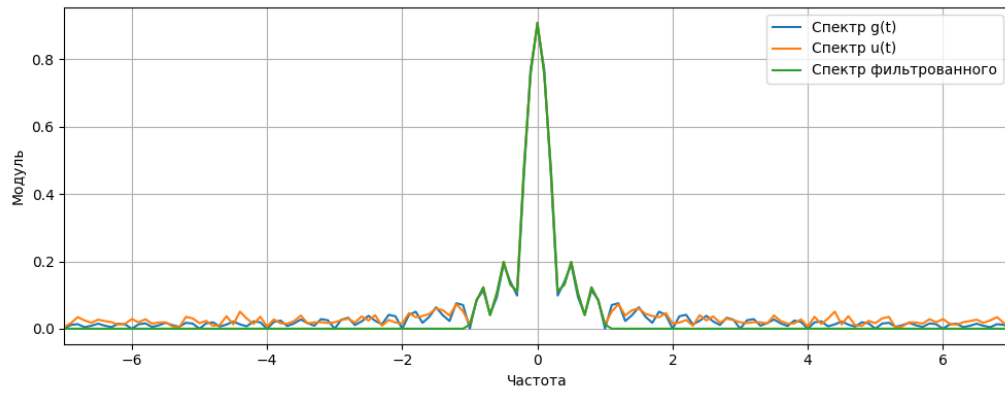


Рис. 15: Сравнительные спектры при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 1.0$

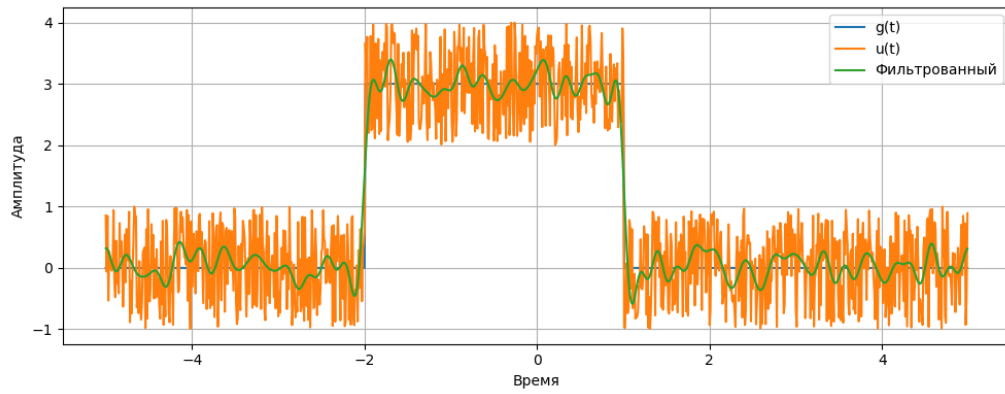


Рис. 16: Сравнительные временные графики при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 5.0$

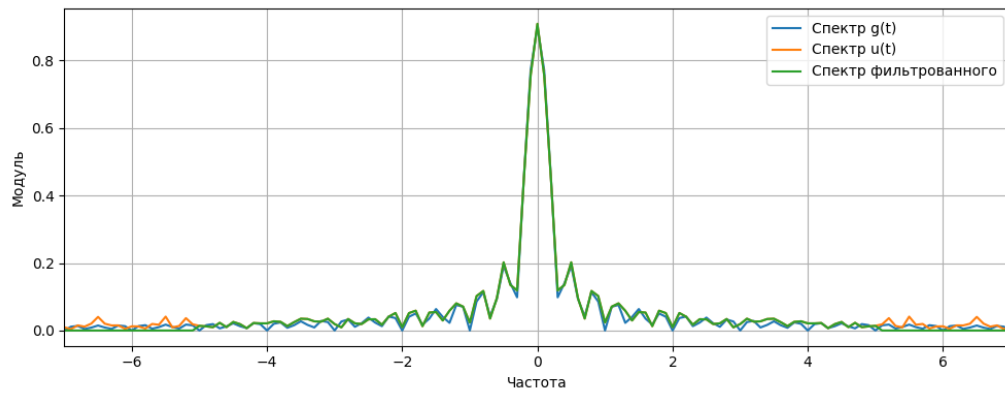


Рис. 17: Сравнительные спектры при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 5.0$



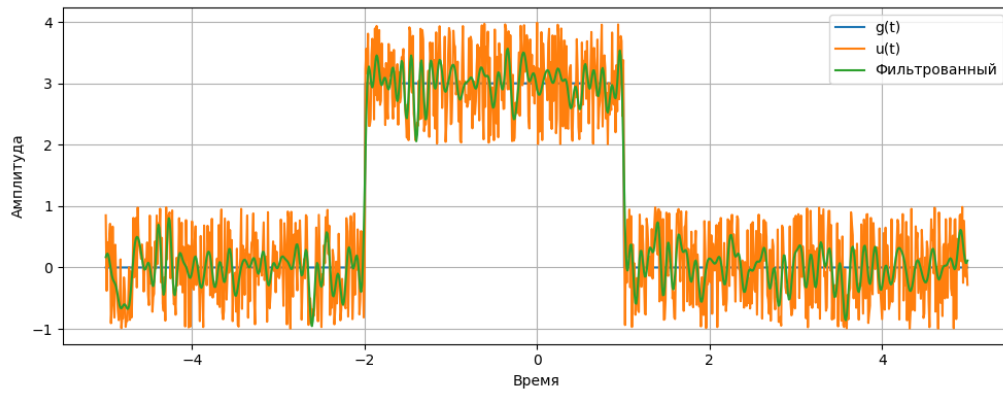


Рис. 18: Сравнительные временные графики при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 10.0$

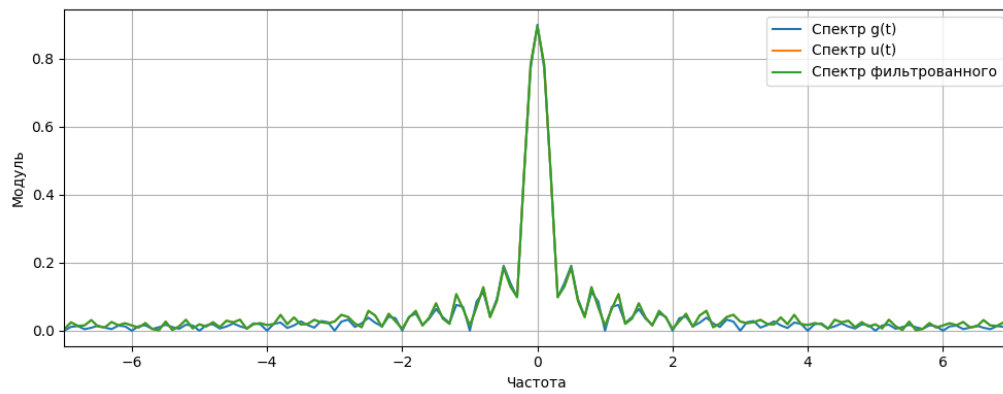


Рис. 19: Сравнительные спектры при  $b = 1.0$  и  $\nu_0 = 10.0$

Проанализировав графики делаем вывод, что при повышенном уровне шума слишком низкая частота среза  $\nu_0$  чрезмерно сглаживает сигнал, а слишком высокая — пропускает заметную часть шума. И снова оптимальным значением можно считать  $\nu_0 = 5.0$ .

Посмотрим на случай  $b = 3.0$ :

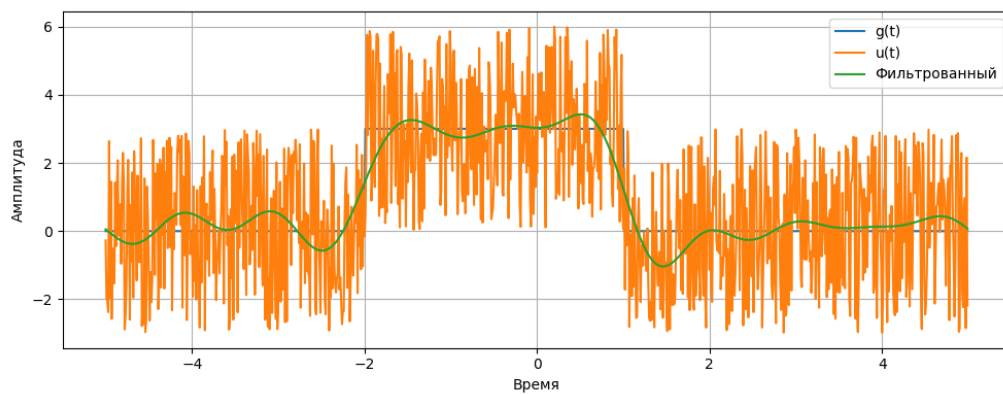


Рис. 20: Сравнительные временные графики при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 1.0$

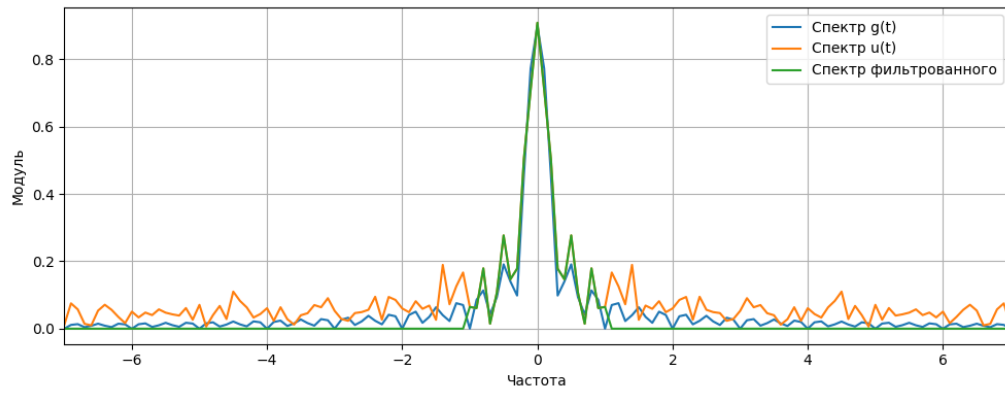


Рис. 21: Сравнительные спектры при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 1.0$

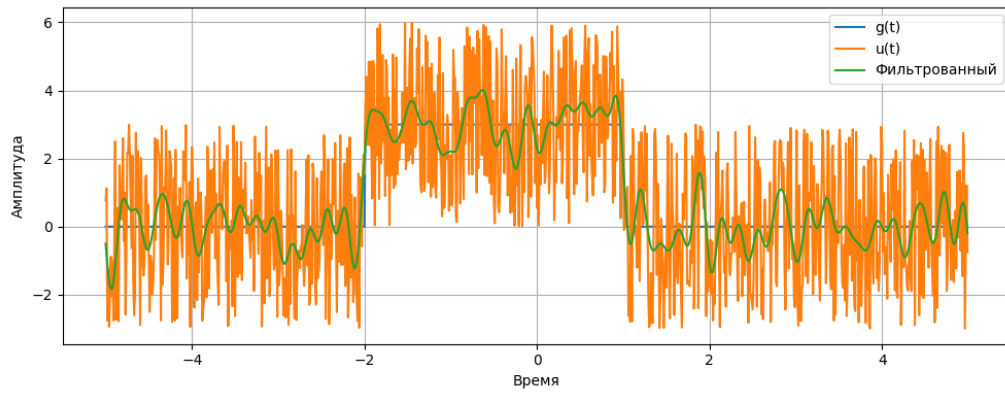


Рис. 22: Сравнительные временные графики при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 5.0$

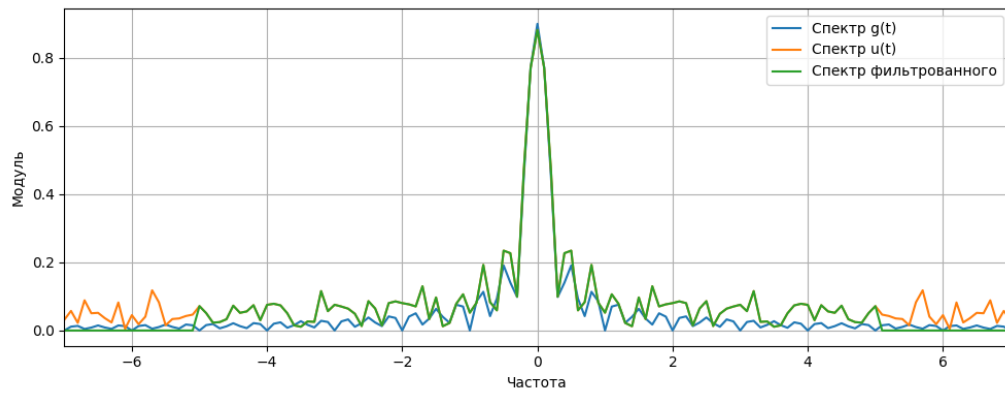


Рис. 23: Сравнительные спектры при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 5.0$

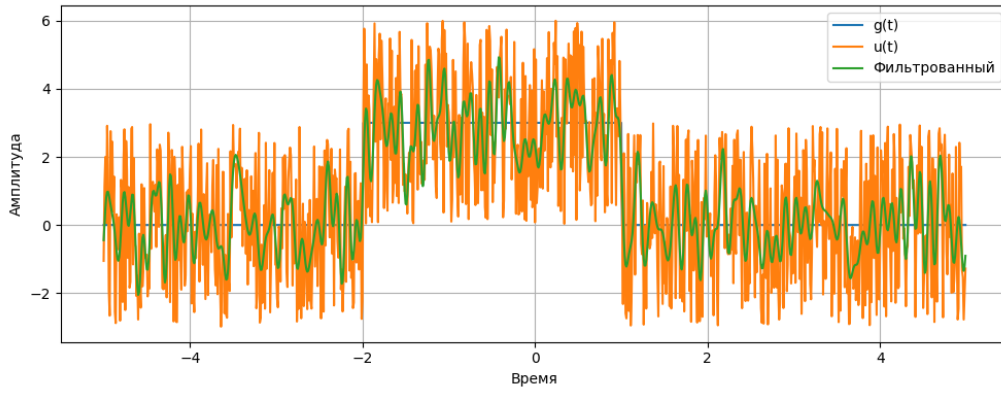


Рис. 24: Сравнительные временные графики при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 10.0$

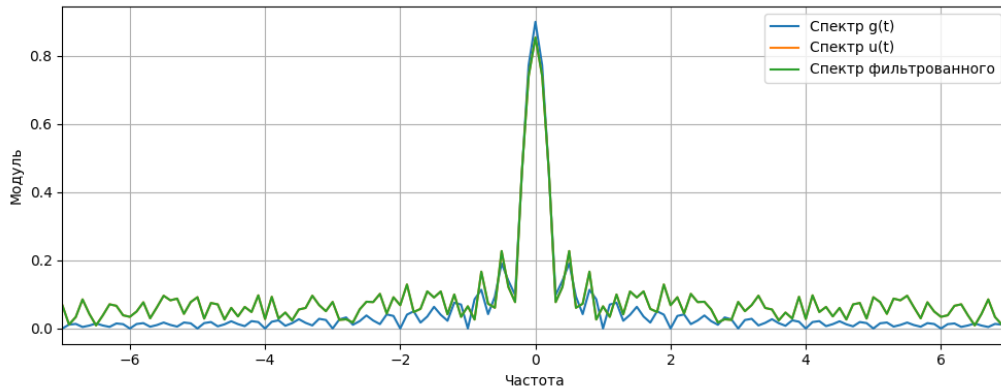


Рис. 25: Сравнительные спектры при  $b = 3.0$  и  $\nu_0 = 10.0$

Анализ совокупности полученных графиков при различных значениях коэффициента шума  $b$  и частоты среза  $\nu_0$  показывает следующее:

- При слишком низкой частоте среза ( $\nu_0 = 1$ ) хорошо подавляются шумовые компоненты, но резкие переходы исходного прямоугольного сигнала сглаживаются.
- При слишком высокой частоте среза ( $\nu_0 = 10$ ) сохраняются фронты сигнала, однако шумовая составляющая остаётся заметной.
- Оптимальным компромиссом между подавлением шума и сохранением формы сигнала оказалась промежуточная частота среза ( $\nu_0 = 5$ ).
- Для значений  $b \approx 0.1-1.0$  фильтр при  $\nu_0 = 5$  восстанавливает форму прямоугольника достаточно хорошо и при этом существенно подавляет шум.

Таким образом, при решении задачи жёсткой фильтрации нижних частот для заданных параметров сигнала наилучшие результаты даёт частота среза  $\nu_0 \approx 5$  при умеренном уровне шума ( $b \approx 0.1-1.0$ ).

## Убираем специфические частоты

В этом пункте рассмотрим случай, когда в сигнале присутствуют оба вида помех:

- Белый шум с коэффициентом  $b \neq 0$ ,
- Гармоническая составляющая  $c \sin(dt)$ .

Тогда зашумлённый сигнал примет вид:

$$u(t) = g(t) + b \cdot \xi(t) + c \sin(dt),$$

где  $\xi(t)$  — белый шум, равномерно распределённый на интервале  $[-1, 1]$ .

Для устранения одновременно и белого шума, и гармонической помехи воспользуемся совмещённым жёстким фильтром, который состоит из:

1. Фильтра нижних частот с частотой среза  $\nu_0$  который мы рассмотрели ранее.
2. Notch-фильтра, который обнуляет спектр в узкой полосе вокруг частоты  $\pm \frac{d}{2\pi}$ . Тем самым удаляется гармоника  $\sin(dt)$ .

Давайте зададим необходимые параметры и приступим к анализу. Пусть  $b \in \{0.0, 1.0, 2.0\}$ ,  $c \in \{0.5, 1.0\}$ ,  $d \in \{5.0, 10.0\}$ ,  $\nu_0 \in \{4.0, 8.0\}$ . Ширину выреза вокруг  $d$  возьмём  $\delta = 0.3$ .

Далее в отчете я приведу лишь те графики, которые наиболее наглядно иллюстрируют влияние параметров на результат фильтрации. Остальные графики можно найти в [облаке](#).

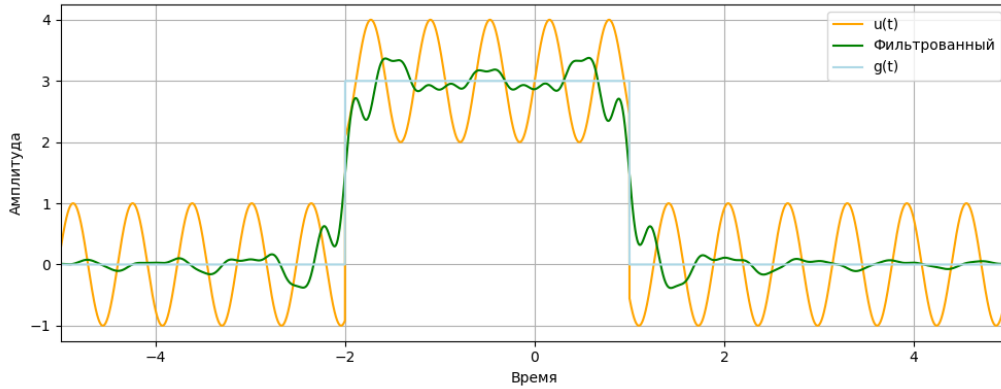


Рис. 26: Сравнительные временные графики при  $b = 0.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

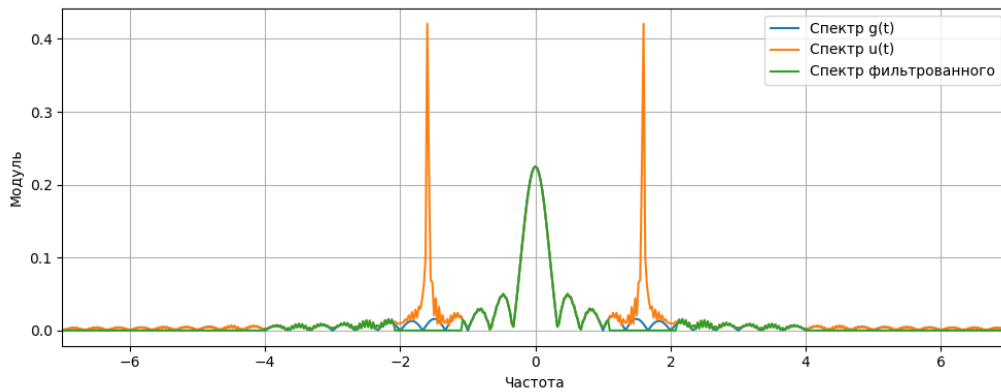


Рис. 27: Сравнительные спектры при  $b = 0.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

На графиках показан случай, когда в сигнале отсутствует белый шум ( $b = 0$ ), но присутствует гармоническая помеха с параметрами  $c = 1.0$  и  $d = 10.0$ . Применяем совмещённый фильтр (низкочастотный с  $\nu_0 = 4.0$  и Notch вокруг  $\pm \frac{d}{2\pi}$ ). Видно, что:

- Временной сигнал после фильтрации (зелёная кривая) заметно стремится к исходному прямоугольнику (голубая кривая), поскольку шум отсутствует и надо было лишь убрать гармонику.
- На спектре исчезают выраженные пики на частотах  $\pm \frac{d}{2\pi}$ , соответствующие гармонике  $c \sin(dt)$ . При этом сохраняется центральная часть спектра, отвечающая форме прямоугольного сигнала.

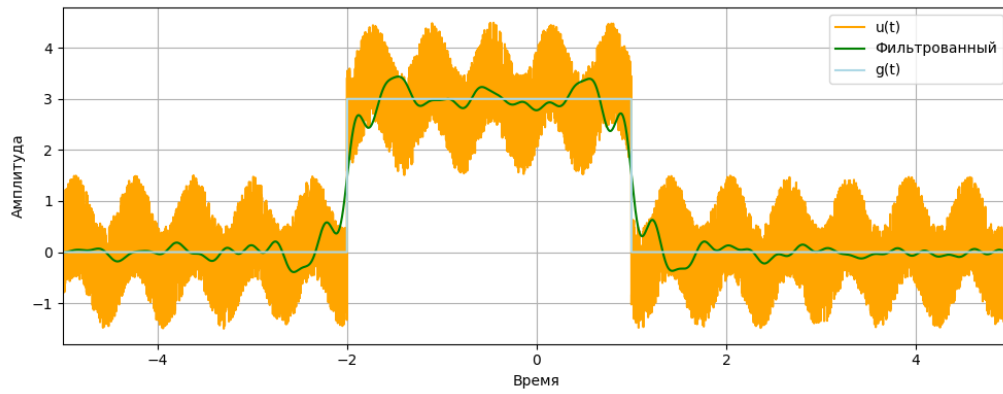


Рис. 28: Сравнительные временные графики при  $b = 1.0$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

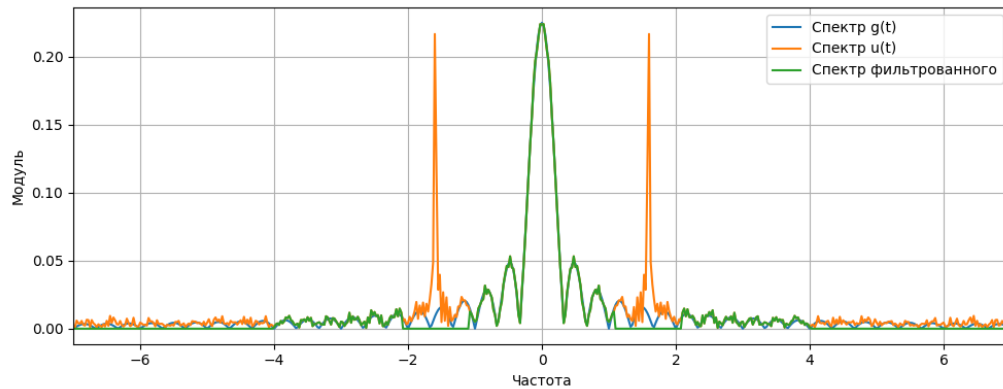


Рис. 29: Сравнительные спектры при  $b = 1.0$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

На этих графиках изображён сигнал при умеренном уровне белого шума  $b = 1.0$  и меньшей амплитуде гармоники  $c = 0.5$  (частота  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$ ). Здесь:

- Оранжевая область на временном графике показывает диапазон шума: видим, что при  $b = 1.0$  «толщина» шумовой полосы не слишком велика, и фильтр (зелёная кривая) в целом восстанавливает прямоугольник.
- На спектре основной пик гармоники при  $\pm \frac{d}{2\pi}$  меньше, чем в предыдущем случае ( $c = 0.5$  вместо  $c = 1.0$ ), но всё равно отчётливо подавляется Notch-фильтром. Высокочастотные шумовые компоненты также частично срезаны.

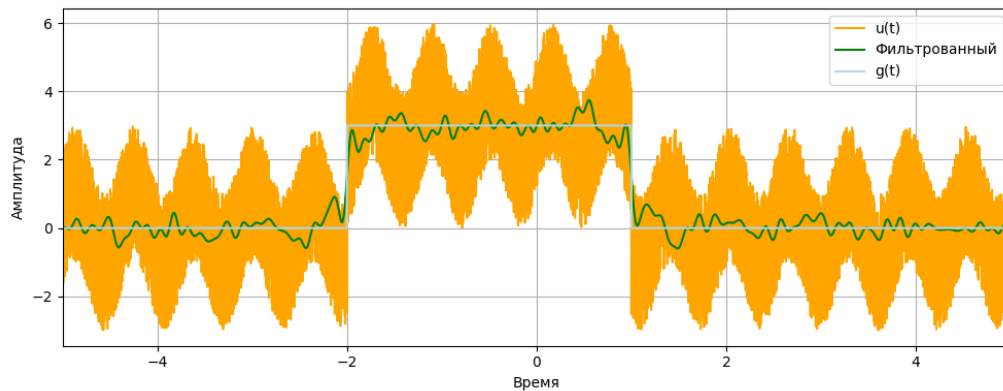


Рис. 30: Сравнительные временные графики при  $b = 2.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 8.0$

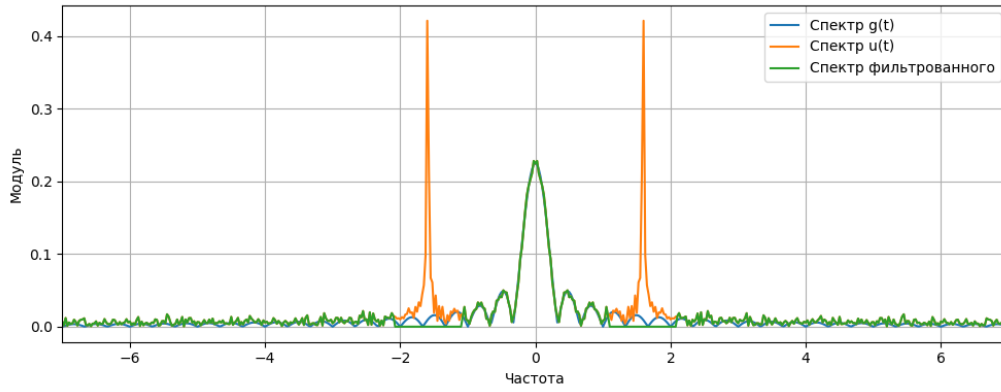


Рис. 31: Сравнительные спектры при  $b = 2.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 8.0$

Далее, мы видим пример более сильного шума ( $b = 2.0$ ) и более широкого диапазона пропускания ( $\nu_0 = 8.0$ ), при этом  $c = 1.0$  и  $d = 10.0$ . Сравнивая с предыдущими случаями, видим:

- Шумовая «полоса» (оранжевый цвет) стала шире, так как  $b = 2.0$  заметно повышает амплитуду белого шума.
- Повышенная частота среза  $\nu_0 = 8.0$  лучше сохраняет резкие переходы прямоугольника, но при этом часть шума просачивается в итоговый сигнал (зелёная кривая).

Таким образом, из рассмотренных графиков можно сделать несколько ключевых наблюдений:

- При отсутствии белого шума ( $b = 0$ ) достаточно убрать гармоническую помеху с помощью Notch-фильтра; выбор  $\nu_0$  лишь влияет на сохранение резких переходов прямоугольника.
- При умеренном шуме (например,  $b = 1.0$ ) фильтр низких частот помогает убрать шумовые компоненты, а Notch-фильтр — гармонику. Компромиссное значение  $\nu_0$  (около 4–5) часто даёт хорошее сочетание подавления шума и сохранения формы сигнала.
- При большом  $b = 2.0$  (сильном шуме) для сохранения фронтов желательно повышать  $\nu_0$ , но тогда часть шума попадает в итоговый сигнал. Следовательно, выбирается баланс между сохранением резких переходов и подавлением шума.
- Во всех случаях Notch-фильтр эффективно устраняет гармонику с частотой  $d$ , причём важно корректно задать ширину полосы выреза, чтобы полностью подавить пик на  $\pm \frac{d}{2\pi}$ , не затронув избыточно соседние частоты прямоугольного импульса.

## Убираем низкие частоты

В третьем пункте рассмотрим фильтр, который обнуляет все спектральные компоненты в некоторой окрестности нулевой частоты, то есть при  $|f| < \nu_0$ . Другими словами, это фильтр высоких частот (High-Pass Filter), который вырезает низкочастотную часть сигнала.

Для наглядности зададим пару значений параметра  $\nu_0 = [4.0, 8.0]$  и посмотрим, как влияет такой «срез» на прямоугольный сигнал  $g(t)$ , к которому добавлены белый шум и гармоническая составляющая. Пусть зашумлённая версия имеет вид как в прошлом задании.

Построим графики и посмотрим на результаты.

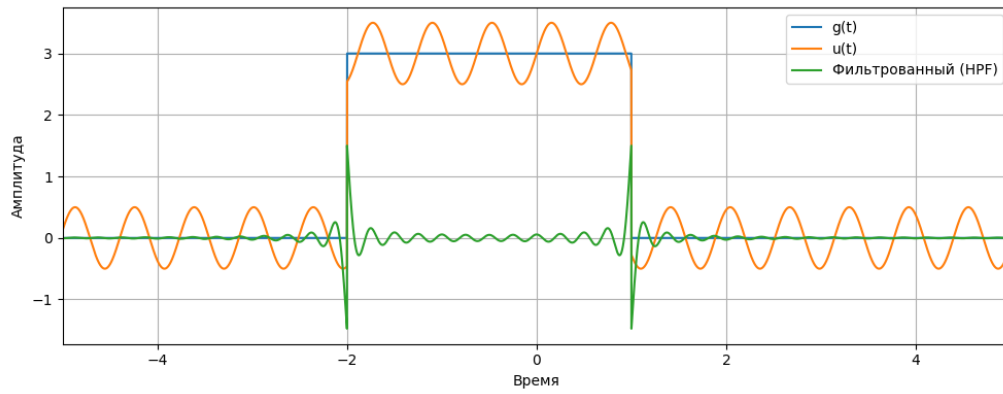


Рис. 32: Сравнительные временные сигналы при  $b = 0.0$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

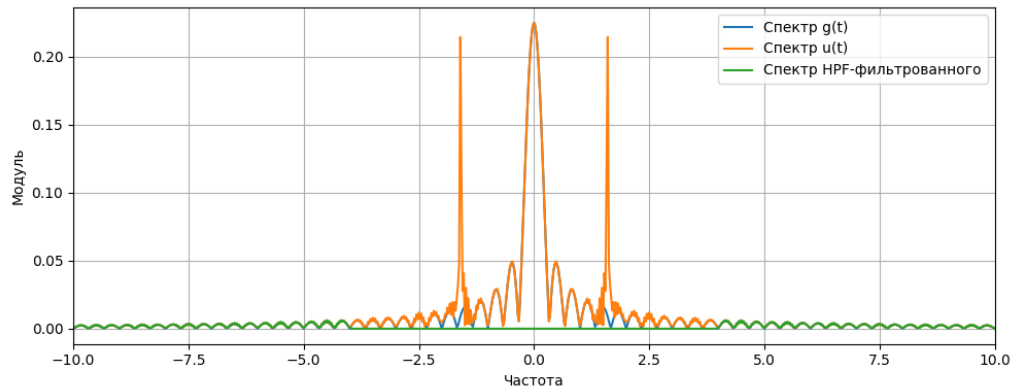


Рис. 33: Сравнительные спектры при  $b = 0.0$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 4.0$

Здесь мы видим, что:

- Временной сигнал после фильтрации сохраняет высокочастотные колебания, однако теряет «ступенчатую» структуру исходного прямоугольника.
- На спектральном графике отчётливо видно обнуление области  $|f| < 2.0$ , что приводит к исчезновению медленных переходов и постоянной составляющей.

Теперь стоит рассмотреть случай более сильного шума ( $b = 2.0$ ) и более высокого значения  $\nu_0 = 8.0$ .

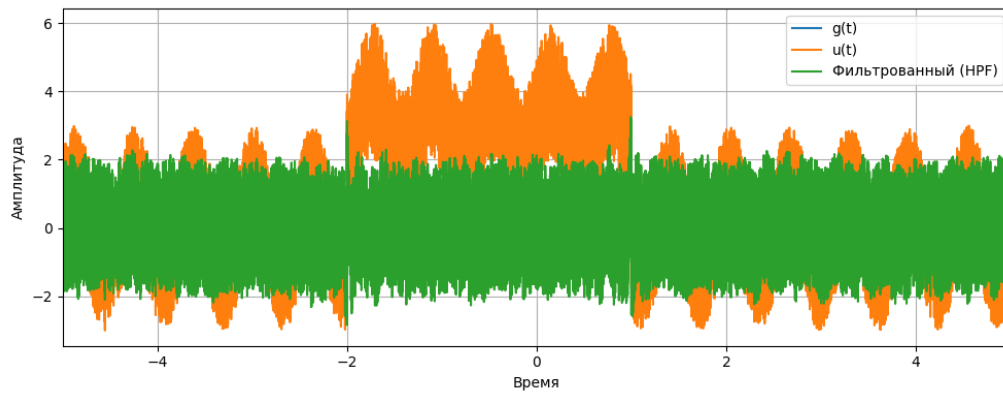


Рис. 34: Сравнительные временные сигналы при  $b = 2.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 8.0$

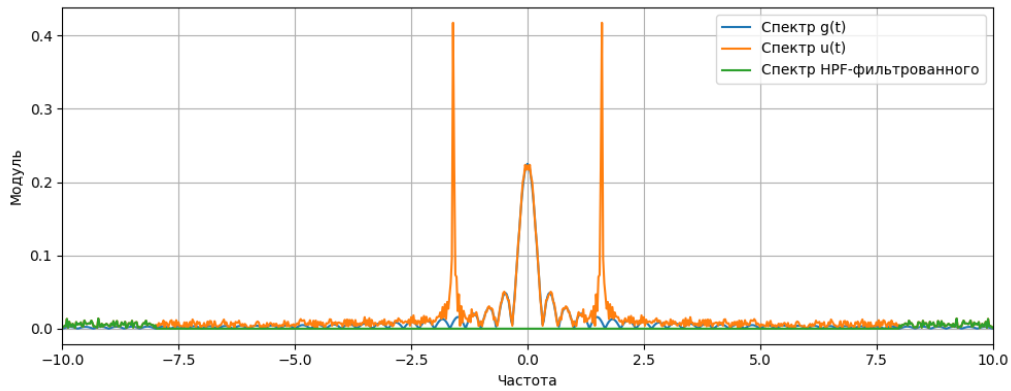


Рис. 35: Сравнительные спектры при  $b = 2.0$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 10.0$ ,  $\nu_0 = 8.0$

На графиках видно, что:

- Фронты прямоугольника становятся ещё менее выраженными, так как низкочастотная часть сигнала полностью «вырезана».
- Высокочастотный шум проходит через фильтр, делая итоговый сигнал заметно «колеблющимся».

Таким образом, фильтр, который вырезает низкие частоты, может быть полезен для удаления медленных трендов или постоянной компоненты, но не подходит для восстановления прямоугольных сигналов с резкими переходами.

## Задание 2. Фильтрация звука

В этом задании требуется выделить голос из аудиозаписи, в которой присутствуют посторонние шумы. В качестве входных данных используем файл `MUNA.wav`, содержащий речевой фрагмент с различными помехами. Необходимо отфильтровать исходный сигнал, чтобы максимально подавить шум и оставить только человеческий голос.

Для этого с помощью функций чтения аудиофайла получаем массив отсчётов сигнала и частоту дискретизации.

Посмотрим на график временного сигнала и спектрограмму записи, чтобы оценить, какие частоты преобладают в аудиофайле и какие шумы присутствуют.

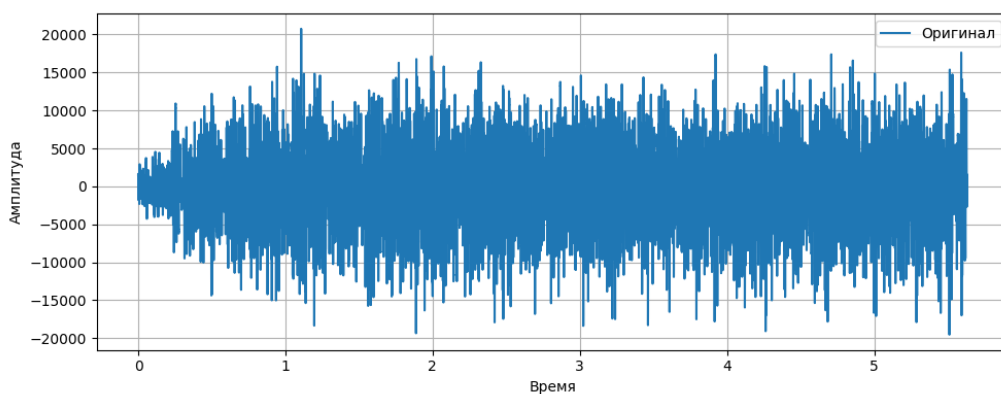


Рис. 36: Временной сигнал исходной записи



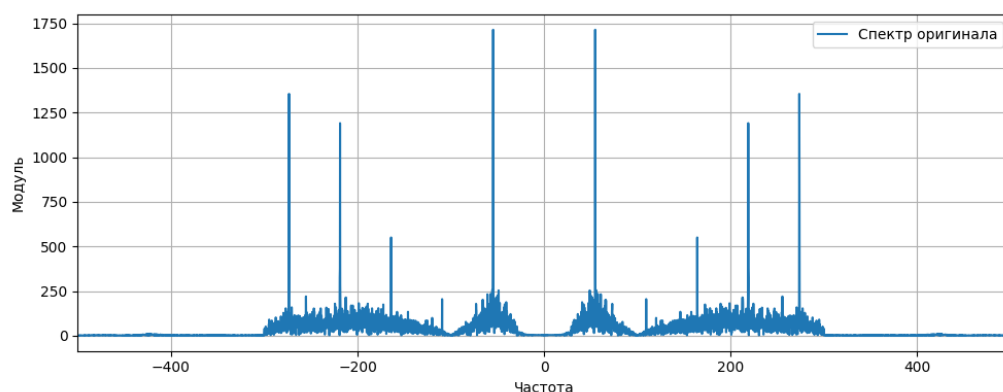


Рис. 37: Спектр сигнала исходной записи

Можно обратить внимание, что шум присутствует в диапазоне частот от 0 до  $\sim 300$  Гц. Для простоты фильтрации будем использовать полосовой жёсткий фильтр, который оставит только частоты в определенном диапазоне.

Применим его и построим графики для сравнения исходного и отфильтрованного сигналов.

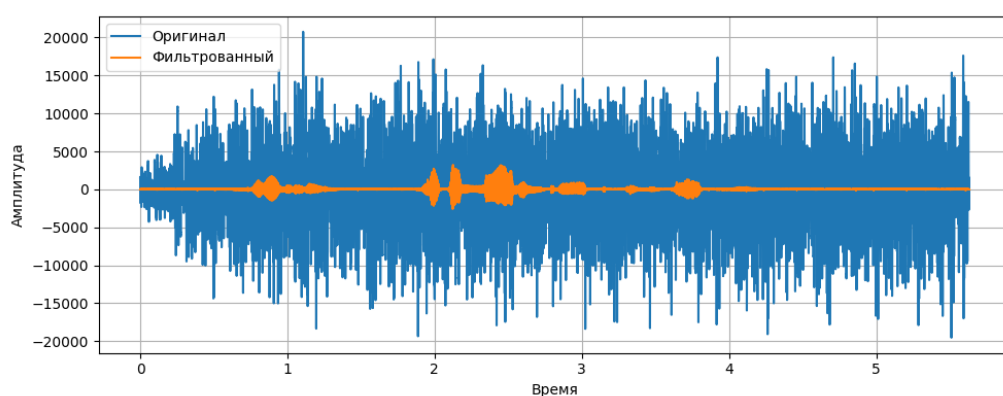


Рис. 38: Временные сигналы: исходный и фильтрованный

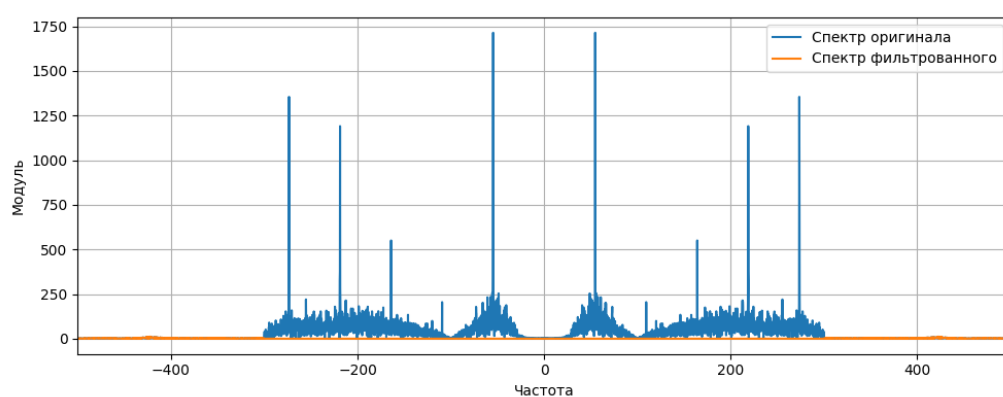


Рис. 39: Спектры исходного и фильтрованного сигналов

После фильтрации видно, что:

- Низкочастотные компоненты ниже 300 Гц полностью обнулены.
- Основная энергия сигнала сосредоточена в голосовом диапазоне, что и позволяет лучше различать речь.

Стоит отметить, что при прослушивании фильтрованного файла голос стал чётче. Однако в ходе выполнения задания я подбирал оптимальные параметры фильтрации опытным путем. При малом диапазоне

частот голос искажался: менялся тембр речи или снижалась разборчивость. Итоговый вариант вы также можете найти в [облаке](#).

Следовательно, можно сделать вывод, что слишком «агрессивное» вырезание частот может ухудшить качество речи, поэтому при восстановлении исходных сигналов стоит использовать более «гибкие» фильтры.