Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1
Ряды Фурье

Студент: Сайфуллин Д.Р.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. R23 1.5
Преподаватели: Перегудин А.А.
Догадин Е.В.

Санкт-Петербург
2025 г.

Содержание

Немного теории

Ряд Фурье представляет собой разложение функции $f(x)$ в бесконечную сумму синусоидальных функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Для функции с периодом T он записывается в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x)\,, \text{ где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Значения коэффициентов a_n и b_n определяют вклад соответствующих гармоник в общее представление функции. Они вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos \omega_n x\, dx, \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin \omega_n x\, dx, \quad b_0 = 0.$$

Если данные коэффициенты расписать используя формулы Эйлера и записать частичную сумму ряда, то можно вывести коэффициент c_n. Распишем полученные коэффициенты:

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

И вот как будет выглядеть такое преобразование:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = a\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2}\right) + b\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) - \frac{ib}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{a - ib}{2}\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = c\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \bar{c}\,\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

$$c_n = \frac{a - ib}{2} \quad c_{-n} = \frac{a + ib}{2}$$

Отсюда и выясняется причина, по которой комплексный ряд Фурье раскладывается в обе стороны от нуля — одна пара (a_n, b_n) дают два коэффициента (c_n, c_{-n}), которые двигаются в противофазе. Теперь запишем ряд в комплексном виде:

$$G_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}, \text{ где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Также стоит отметить одно из характерных явлений при разложении в ряд Фурье — **эффект Гиббса**, **Равенство Парсеваля**.

Эффект Гиббса — это колебательное поведение ряда вблизи точек разрыва кусочно-непрерывной функции. Даже при увеличении числа гармоник колебания не исчезают.

Равенство Парсеваля утверждает, что сумма квадратов коэффициентов Фурье функции равна интегралу от квадрата самой функции по одному периоду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_a^b |f(t)|^2 dt, \tag{1}$$

где $|c_n|^2 = Re(c_n)^2 + Im(c_n)^2$, $|f(t)|^2 = f(t) \cdot f(t)$.

Это равенство показывает сохранение энергии между временной и частотной областью, что делает его важным инструментом в анализе сигналов.

1 Задание 1. Вещественные функции

В данном задании требуется разложить в ряд Фурье несколько типов функций: периодическую кусочно-непрерывную функцию, чётную и нечётную периодические функции, а также функцию, не обладающую чётностью. Начнём с кусочно-заданной функции.

1.1 Определение параметров и функций

Зададим параметры:

$$a = 2, \quad b = 4, \quad t_0 = 2, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 6$$

Период функции:

$$T = t_2 - t_0 = 4.$$

1.2 Квадратная волна

Определив параметры мы можем записать функцию **Квадратной волны**:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [2, 3) \\ 4, & t \in [3, 6) \end{cases}$$

Теперь построим график функции $f(t)$, котораяциклично параметризуется с помощью этого набора чисел:

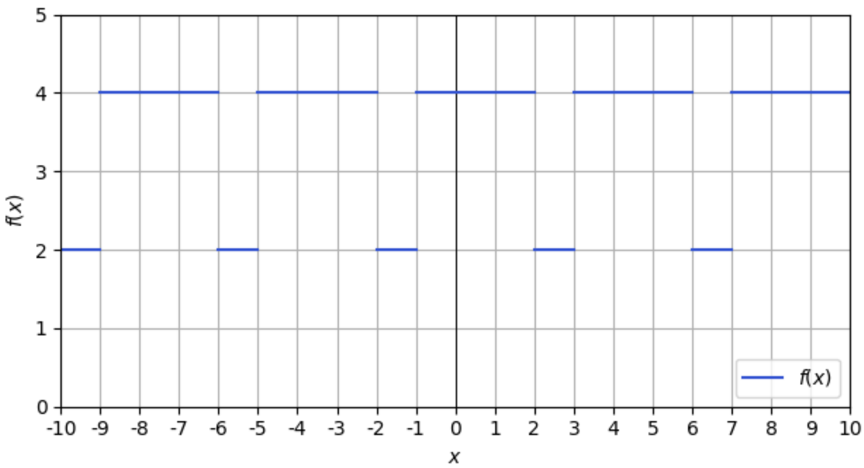

Рис. 1: График функции $f(t)$

Итак, период функции $f(t)$ равен $T = 4 \;\Rightarrow\; \omega_n = {}^{2\pi n}/_{4}$. Пришло время найти коэффициенты Фурье для этой функции — вычислим первые три a_n, b_n и c_n ручками.

$$a_0 = \frac{2}{4}\left(\int_2^3 2dt + \int_3^6 4dt\right) = \frac{2}{4}\left(2t\Big|_2^3 + 4t\Big|_3^6\right) = \frac{2}{4}(6 - 4 + 24 - 12) = \boxed{\frac{14}{2}}$$

$$a_1 = \frac{2}{4}\left(\int_2^3 2\cos\frac{2\pi t}{4}\,dt + \int_3^6 4\cos\frac{2\pi t}{4}\,dt\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{4\sin\frac{\pi t}{2}}{\pi}\Bigg|_2^3 + \frac{8\sin\frac{\pi t}{2}}{\pi}\Bigg|_3^6\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{-4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\right) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$a_2 = \frac{2}{4}\left(\int_2^3 2\cos\frac{4\pi t}{4}\,dt + \int_3^6 4\cos\frac{4\pi t}{4}\,dt\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{4\sin\pi t}{2\pi}\Bigg|_2^3 + \frac{8\sin\pi t}{2\pi}\Bigg|_3^6\right) = \frac{2}{4}(0 - 0) = \boxed{0}$$

Теперь найдём коэффициенты b_n:

$$b_1 = \frac{2}{4}\left(\int_2^3 2\sin\frac{2\pi t}{4}\,dt + \int_3^6 4\sin\frac{2\pi t}{4}\,dt\right) = -\frac{2}{4}\left(\frac{4\cos\frac{2\pi t}{4}}{\pi}\Bigg|_2^3 + \frac{8\cos\frac{2\pi t}{4}}{\pi}\Bigg|_3^6\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{-4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\right) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$b_2 = \frac{2}{4}\left(\int_2^3 2\sin\frac{4\pi t}{4}\,dt + \int_3^6 4\sin\frac{4\pi t}{4}\,dt\right) = -\frac{2}{4}\left(\frac{2\cos\pi t}{\pi}\Bigg|_2^3 + \frac{4\cos\pi t}{\pi}\Bigg|_3^6\right) = \frac{2}{4}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi}\right) = \boxed{-\frac{2}{\pi}}$$

На очереди коэффициенты c_n:

$$c_0 = \frac{1}{4}\left(\int_2^3 2\,dt + \int_3^6 4\,dt\right) = \frac{a_0}{2} = \boxed{\frac{14}{4}}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\left(\int_2^3 2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i t}{2}}\,dt + \int_3^6 4\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i t}{2}}\,dt\right) = \frac{\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}i}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{i}{\pi} = \boxed{0.318 - 0.318i}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{4}\left(\int_2^3 2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i t}{2}}\,dt + \int_3^6 4\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i t}{2}}\,dt\right) = \frac{\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}i}{2} = \frac{1}{\pi} + \frac{i}{\pi} = \boxed{0.318 + 0.318i}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\left(\int_2^3 2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi i t}{2}}\,dt + \int_3^6 4\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi i t}{2}}\,dt\right) = \frac{0 + \frac{2}{\pi}i}{2} = 0 + \frac{i}{\pi} = \boxed{0 + 0.318i}$$

$$c_{-2} = \frac{1}{4}\left(\int_2^3 2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi i t}{2}}\,dt + \int_3^6 4\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi i t}{2}}\,dt\right) = \frac{0 - \frac{2}{\pi}i}{2} = 0 - \frac{i}{\pi} = \boxed{0 - 0.318i}$$

Для проверки напишем программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье для любого n.

```
import numpy as np

T = 4

def f(t):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda t: 2 if 1 <= (t - 1) % 4 < 2 else 4)(t)

def a(n, func=f, s=(-T / 2), p=T):
    """Вычисляет коэффициент a_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 2 / p * dot_product(func, lambda t: np.cos(w(p) * n * t), s, s + p)

def b(n, func=f, s=(-T / 2), p=T):
    """Вычисляет коэффициент b_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 2 / p * dot_product(func, lambda t: np.sin(w(p) * n * t), s, s + p)

def c(n, func=f, s=(-T / 2), p=T):
    """Вычисляет коэффициент c_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 1 / p * dot_product(func, lambda t: np.exp(-1j * w(p) * n * t), s, s + p)

def dot_product(f, g, a, b):
    """Вычисляет скалярное произведение функций f и g на отрезке [a, b]."""
    x = np.linspace(a, b, 10000)
    dx = x[1] - x[0]
    return np.dot(f(x), g(x)) * dx

def coefficients(n):
    """Вычисляет коэффициенты Фурье a_n, b_n и c_n для функции f с периодом T."""
    return a(n).round(3), b(n).round(3), c(n).round(3), c(-n).round(3)

coef_num = int(data) if (data := input('Номер коэффициента: ')) else None
w = lambda period: 2 * np.pi / period
for n in range(0, coef_num + 1):
    a_n, b_n, c_n, c_mn = coefficients(n)
    print(f'a_{n} = {a_n},\tb_{n} = {b_n},\tc_{n} = {c_n}  c_{-n} = {c_mn}')
```

Листинг 1: Вычисление коэффициентов Фурье

Выведем первые четыре коэффициента Фурье для функции $f(t)$ для проверки скрипта:

```
a_0 = 7.0,  b_0 = 0.0,  c_0 = (3.5+0j)  c_0 = (3.5+0j)
a_1 = 0.636,  b_1 = 0.637,  c_1 = (0.318-0.318j)  c_-1 = (0.318+0.318j)
a_2 = 0.0,  b_2 = -0.637, c_2 = 0.318j  c_-2 = -0.318j
a_3 = -0.212, b_3 = 0.212,  c_3 = (-0.106-0.106j)  c_-3 = (-0.106+0.106j)
```

Листинг 2: Вывод программы

Как можно заметить коэффициенты посчитанные руками и коэффициенты посчитанные программой равны, следовательно, мы делаем вывод о корректной работе и можем продолжать работу.

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(t)$:

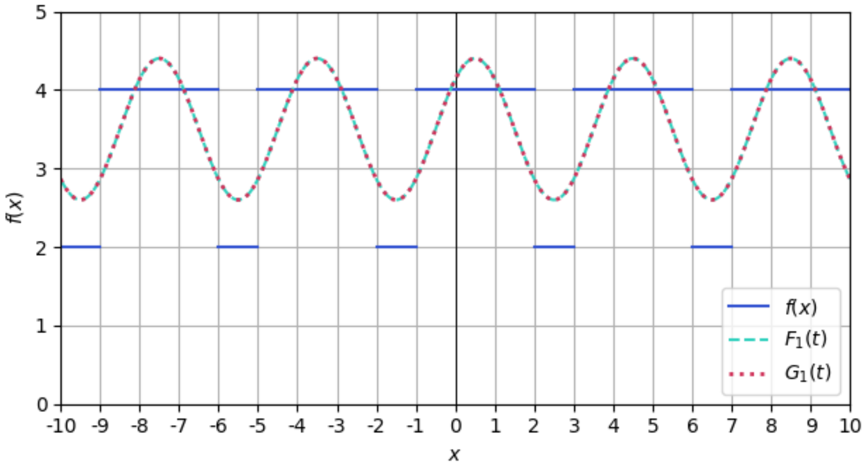

Рис. 2: $n = 1$

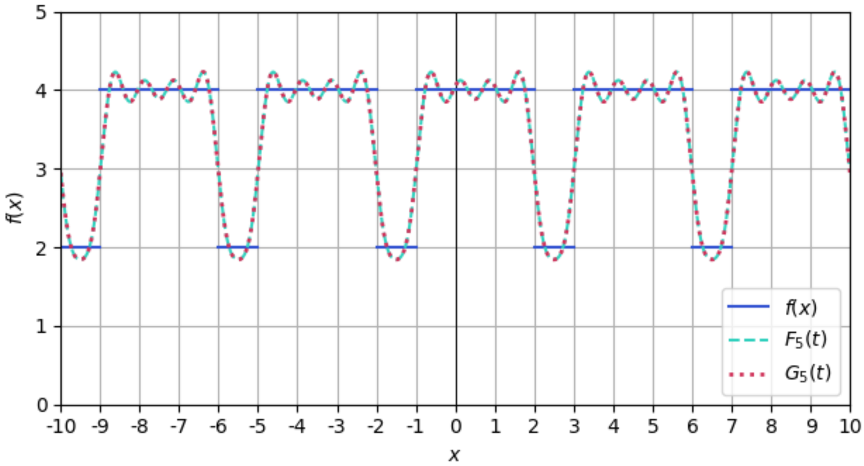

Рис. 3: $n = 5$

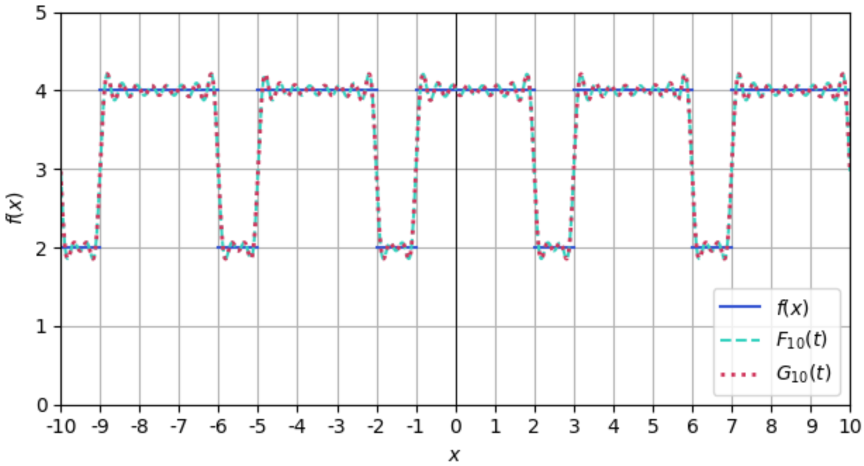

Рис. 4: $n = 10$

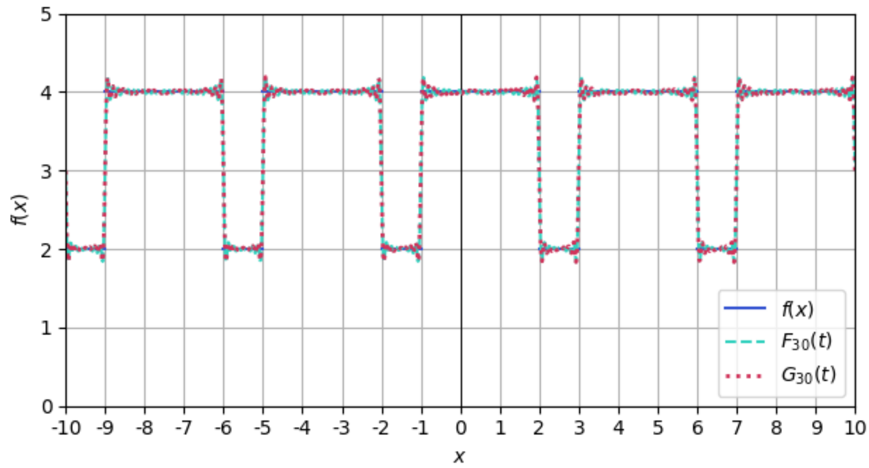

Рис. 5: $n = 30$

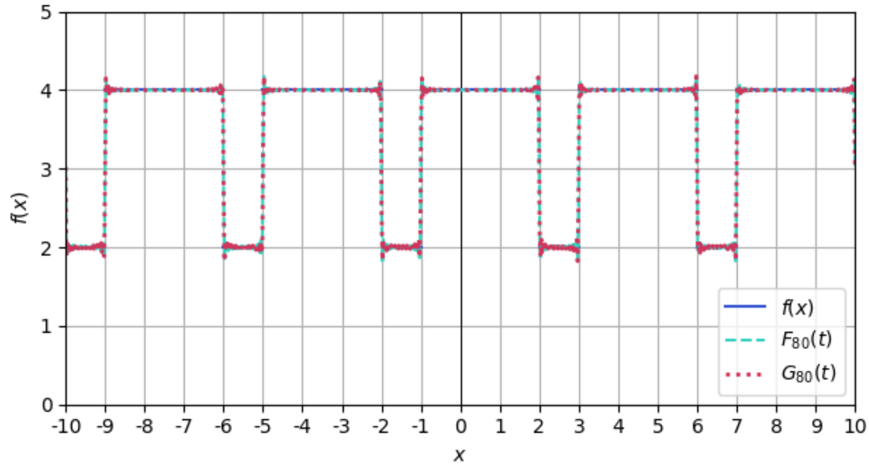

Рис. 6: $n = 80$

Как мы видим, ряды Фурье $F_n(t)$ и $G_n(t)$ совпадают и вполне неплохо аппроксимируют функцию $f(t)$ уже при $n = 10$

Чтобы убедиться в том, что ряд Фурье действительно хорошо приближается к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля при $n = 80$ и при $n = 1$ — так мы увидим разницу. Для этого напишем небольшую функцию для проверки равенства:

```
N = 1

def parseval_check():
    abs_func = np.vectorize(lambda x: abs(f(x)))
    norm_squared = dot_product(abs_func, abs_func, -np.pi, np.pi)

    a_coeffs = [a(i, abs_func, -np.pi, 2 * np.pi) for i in range(0, N + 1)]
    b_coeffs = [b(i, abs_func, -np.pi, 2 * np.pi) for i in range(0, N + 1)]
    c_coeffs = [c(i, abs_func, -np.pi, 2 * np.pi) for i in range(-N, N + 1)]
    ab_sum = np.pi * (a_coeffs[0] ** 2 / 2 + sum([a_coeffs[i] ** 2 + b_coeffs[i] ** 2 for i in range(1, N + 1)]))
    c_sum = 2 * np.pi * sum(abs(c_coeffs[i]) ** 2 for i in range(len(c_coeffs)))

    return abs(norm_squared - ab_sum), abs(norm_squared - c_sum)


print(
    '||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = {:.5f}\n'
    '||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = {:.5f}'.format(*parseval_check())
    )
```

Листинг 3: Проверка равенства Парсеваля

Посмотрим, что вывела программа:

```
Parseval deviation:
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 4.63817
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 4.63817
```

Листинг 4: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.05216
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.05216
```

Листинг 5: Равенство Парсеваля при $n = 80$

Мы видим, что при увеличении числа коэффициентов в равенстве Парсеваля отклонение стремится к нулю. Можно сделать вывод, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f(t)$ всё лучше и лучше с увеличением числа коэфициентов.

1.3 Чётная функция

Далее рассмотрим **четную периодическую функцию**: $f_{\text{чет}}(t) = |3\sin(2t)|$ на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Построим график этой функции:

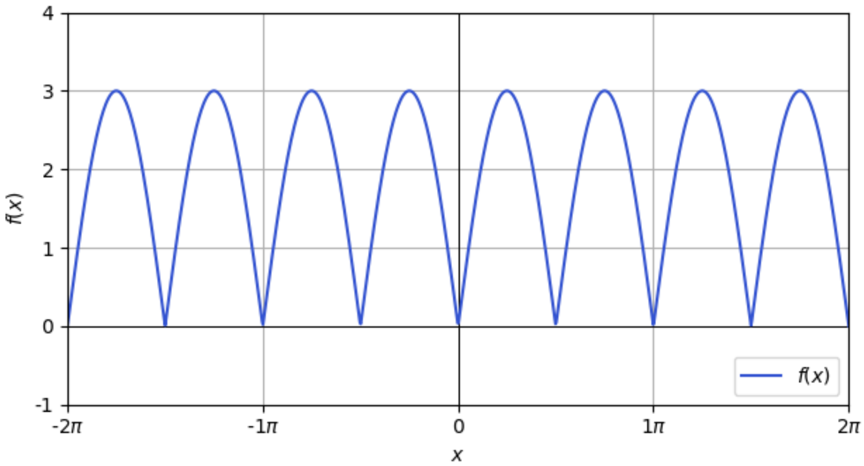

Рис. 7: График функции $f_{\text{чет}}(t)$

Период функции $f_{\text{чет}}(t)$ равен $T = \frac{\pi}{2}$, следовательно $\omega = 4n$. Чётность функции означает, что её разложение в ряд Фурье содержит только косинусные члены, а коэффициенты b_n при синусах равны нулю. Таким образом, коэффициенты a_n и c_n в общем виде вычисляются следующим образом:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |3\sin(2t)| \cos 4nt\, dt \qquad c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |3\sin(2t)|\, \mathrm{e}^{-4int}\, dt$$

Упростим формулы:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big|2\,\sin(2t)\big|\,\cos(4nt)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,\cos(4nt)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big((4n+2)\,t\big)\,\mathrm{d}t +$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big((2-4n)\,t\big)\,\mathrm{d}t\Big] = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\Big(\tfrac{2}{4n+2} + \tfrac{2}{2-4n}\Big) = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{4}{(4n+2)(2-4n)} =$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2} = \boxed{\frac{8}{\pi\,(1-4n^2)}.}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big|2\,\sin(2t)\big|\,e^{-4i\,n\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,e^{-4i\,n\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2i}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\,i(2-4n)\,t}\,\mathrm{d}t -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\,i(4n+2)\,t}\,\mathrm{d}t\Big] = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2} = \boxed{\frac{4}{\pi\,(1-4n^2)}.}$$

Изменим программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье для любого n, под нашу функцию.

```
...
def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda t: abs(3*np.sin(2 * t)))(x)
...
```

Листинг 6: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f_{\text{чет}}(t)$

Выведем первые четыре коэффициента Фурье, среди которых есть и необходимые по заданию a_2, b_2 и c_2:

```
a_0 = 2.547,    b_0 = 0.0,     c_0 = (1.273+0j)  c_0 = (1.273+0j)
a_1 = -0.849,   b_1 = 0.0,     c_1 = (-0.425+0j)  c_-1 = (-0.425-0j)
a_2 = -0.169,   b_2 = -0.0,    c_2 = (-0.085+0j)  c_-2 = (-0.085-0j)
a_3 = -0.073,   b_3 = -0.0,    c_3 = (-0.037-0j)  c_-3 = (-0.037+0j)
```

Листинг 7: Вывод программы

Убеждаемся, что, действительно, коэффициенты b_n равны нулю. Теперь сделаем графики. Воспользуемся этими коэффициентами для построения тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f_{\text{чет}}(t)$:

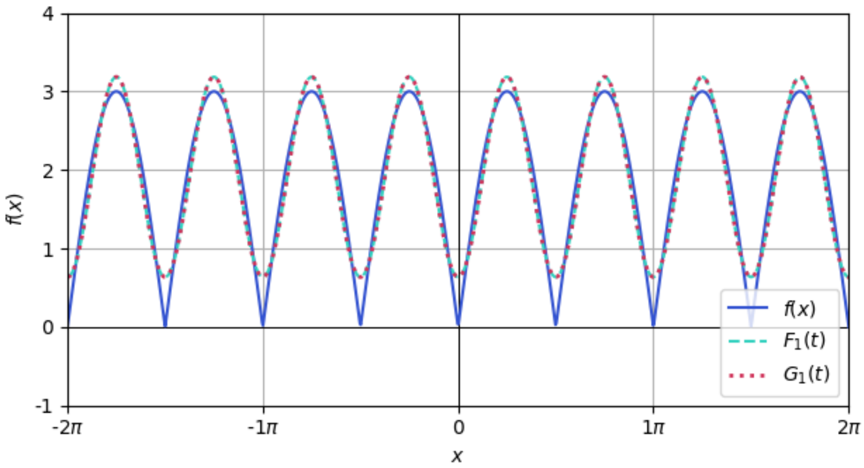

Рис. 8: $n = 1$

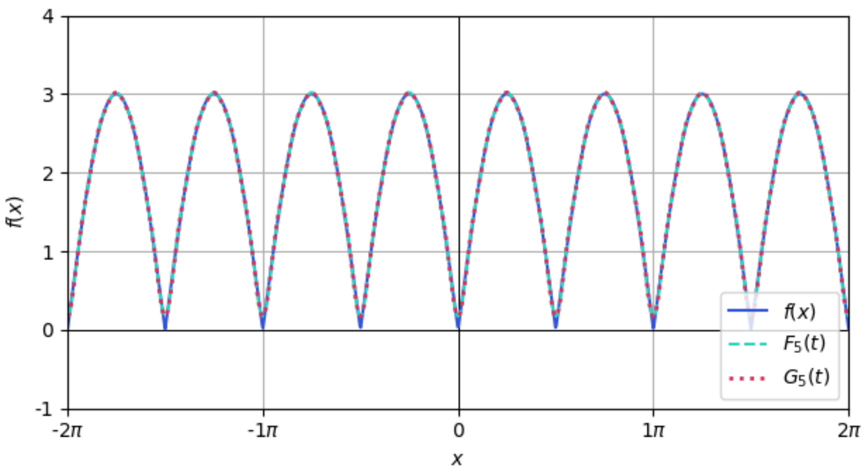

Рис. 9: $n = 5$

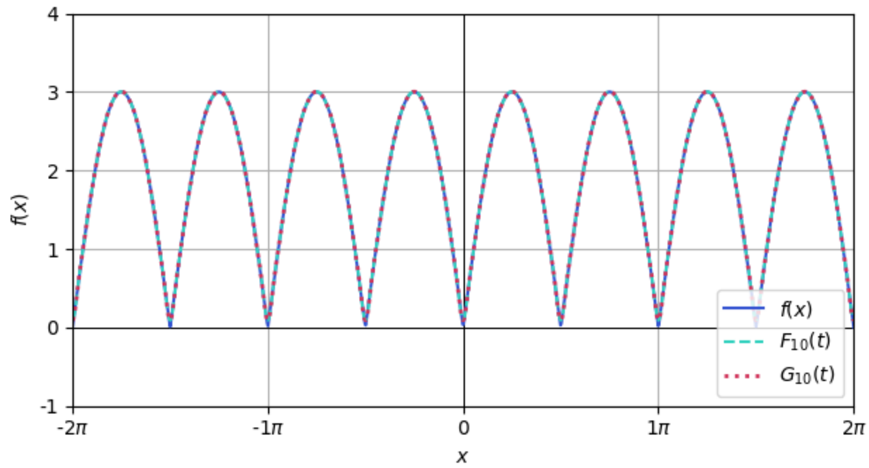

Рис. 10: $n = 10$

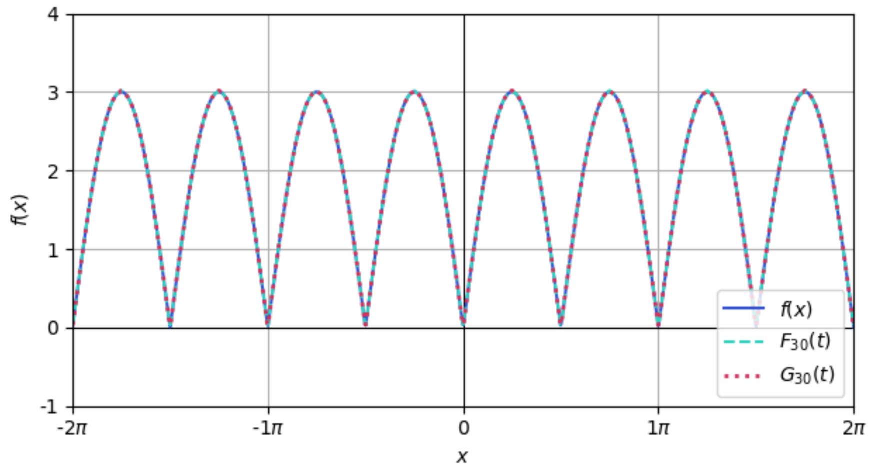

Рис. 11: $n = 30$

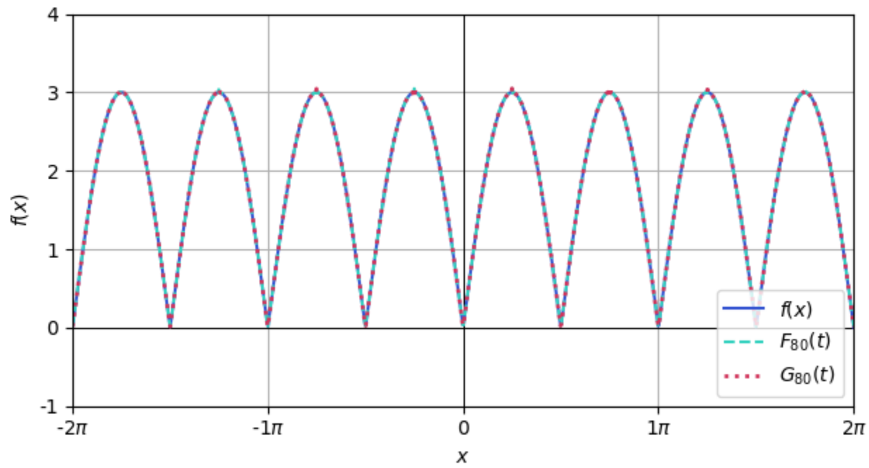

Рис. 12: $n = 80$

Видно, что даже при небольших n приближение довольно точное, а при увеличении числа гармоник аппроксимация становится практически неотличимой от оригинала. Разложение чётной функции в ряд Фурье содержит только косинусные члены, так как синусные члены отвечают за нечётную компоненту. В отличие от функций с разрывами, у данной функции нет эффекта Гиббса, что делает её аппроксимацию более гладкой.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 80$ ряд Фурье действительно аппроксимирует функцию $f_{\text{чет}}(t)$ довольно точно, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 5.35602
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 5.35602
```

Листинг 8: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.00011
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.00011
```

Листинг 9: Равенство Парсеваля при $n = 80$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f_{\text{чет}}(t)$ всё лучше и лучше.

1.4 Нечётная функция

Теперь рассмотрим **Нечётную периодическую функцию**:

$$f_{\text{неч}}(t) = ((t-3) \mod 6 - 3)$$

на промежутке $[-3, 3]$. Построим график этой функции:

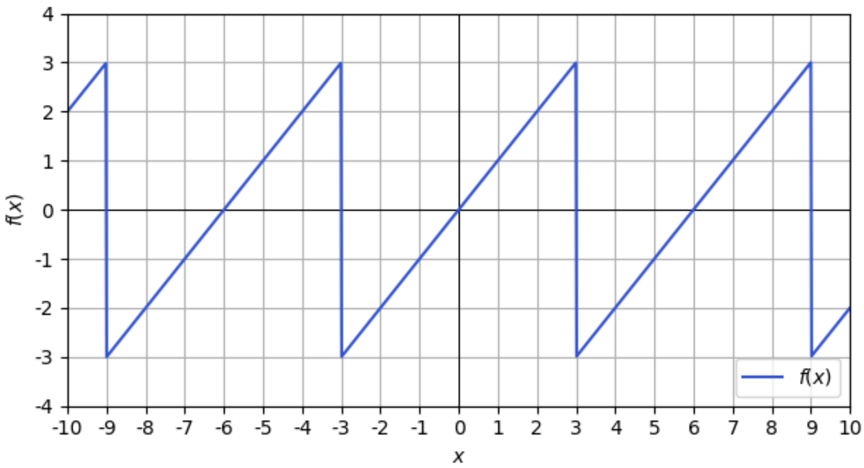

Рис. 13: График функции $f_{\text{чет}}(t)$

Период функции $f_{\text{неч}}(t)$ равен $T = 6$, следовательно $\omega = \frac{\pi n}{3}$. Вновь найдём коэффициенты Фурье для функции с помощью уже написанной нами ранее программы, но перед этим посмотрим на интегралы. Для нечётной функции $f_{\text{неч}}(t)$ коэффициенты a_n равны нулю и ряд Фурье строится по синусам. Таким образом, коэффициенты b_n и c_n в общем виде вычисляются следующим образом:

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} ((t-3) \bmod 6 - 3) \sin\frac{n\pi t}{3}\, dt \qquad c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} ((t-3) \bmod 6 - 3)\ \mathrm{e}^{\frac{-in\pi t}{3}}\, dt$$

$$\text{На отрезке } [-3, 3]: \quad ((t-3) \bmod 6)\ - 3 = t \quad \Longrightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} t \sin\!\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt = \frac{5}{n\,\pi}\,(-1)^{\,n+1},$$

$$c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t \exp^{\frac{-in\pi t}{3}}\ dt = i\,\frac{5}{2\,n\,\pi}\,(-1)^{\,n}$$

Изменим программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье для любого n, под нашу функцию.

```python
...
def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda t: ((t - 3) % 6 - 3))(x)
...
```

Листинг 10: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f_{\text{неч}}(t)$

Выведем первые четыре коэффициента Фурье и убедимся в отсутсвии $cos(t)$ в разложении:

```
a_0 = 0.0,  b_0 = 0.0,  c_0 = 0j  c_0 = 0j
a_1 = -0.0, b_1 = 1.592,  c_1 = (-0-0.796j)  c_-1 = (-0+0.796j)
a_2 = 0.0,  b_2 = -0.796, c_2 = 0.398j  c_-2 = -0.398j
a_3 = -0.0, b_3 = 0.531,  c_3 = (-0-0.265j)  c_-3 = (-0+0.265j)
```

Листинг 11: Вывод программы

С помошью программы находим коэффициенты при больших значениях n и строим соответсвующие графики тригонометрической функции F_n и экспоненциальной G_n рядов Фурье для функции $f_{\text{неч}}(t)$:

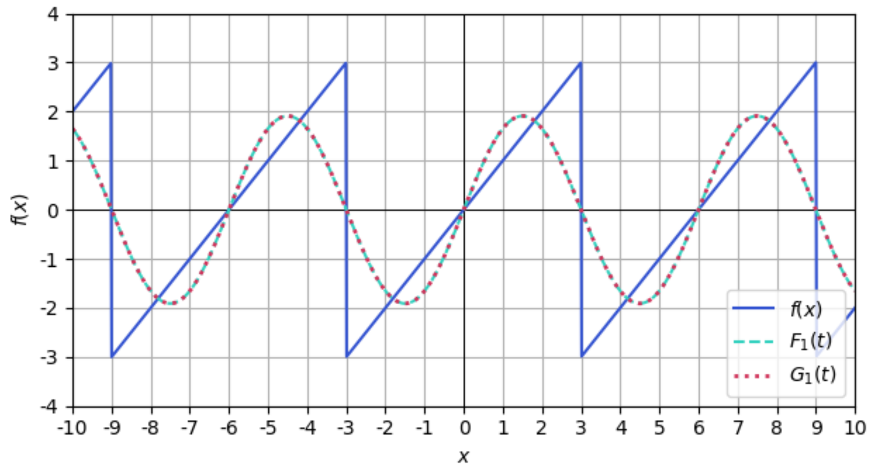

Рис. 14: $n = 1$

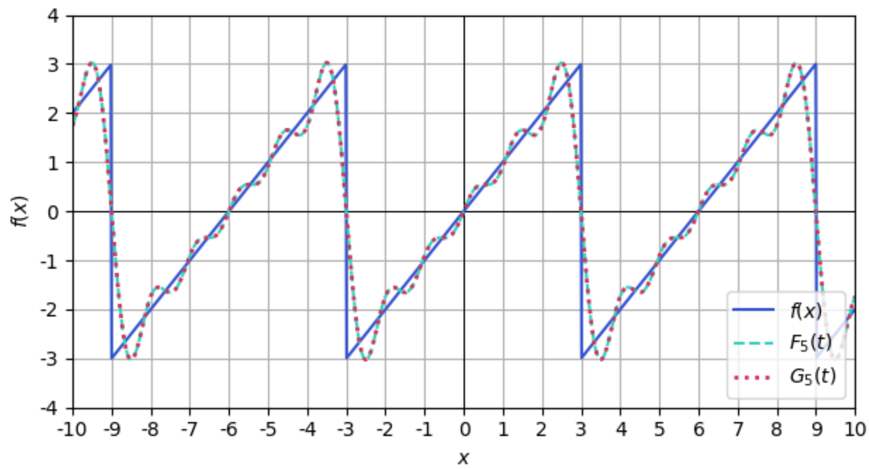

Рис. 15: $n = 5$

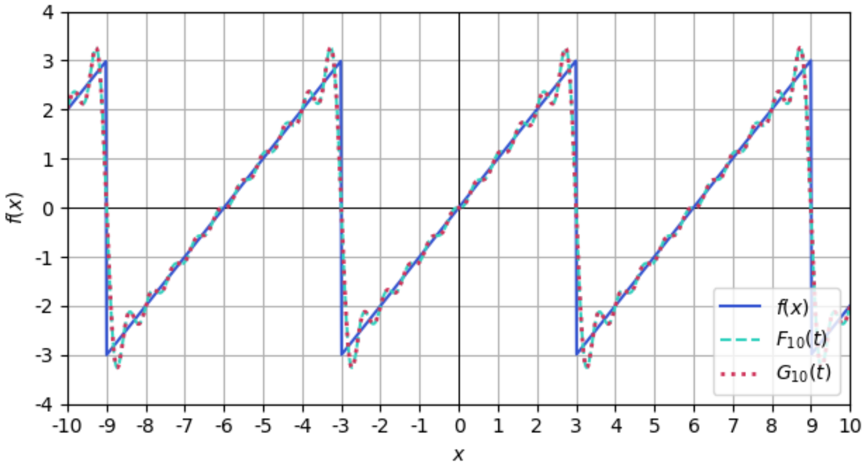

Рис. 16: $n = 10$

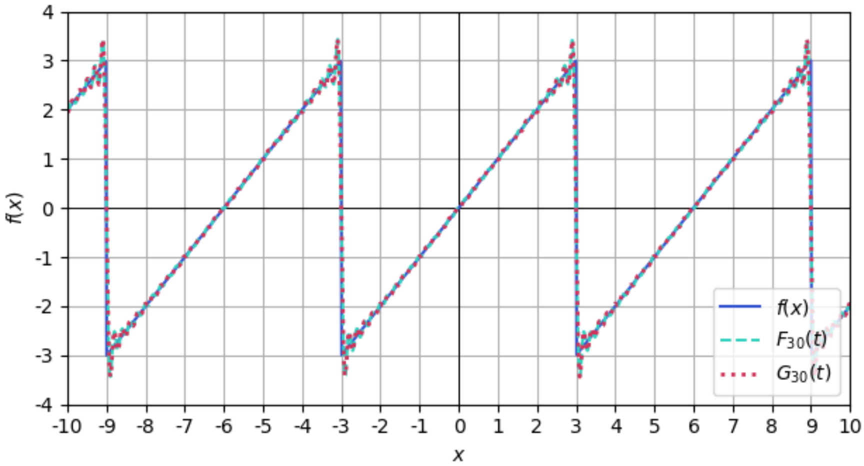

Рис. 17: $n = 30$

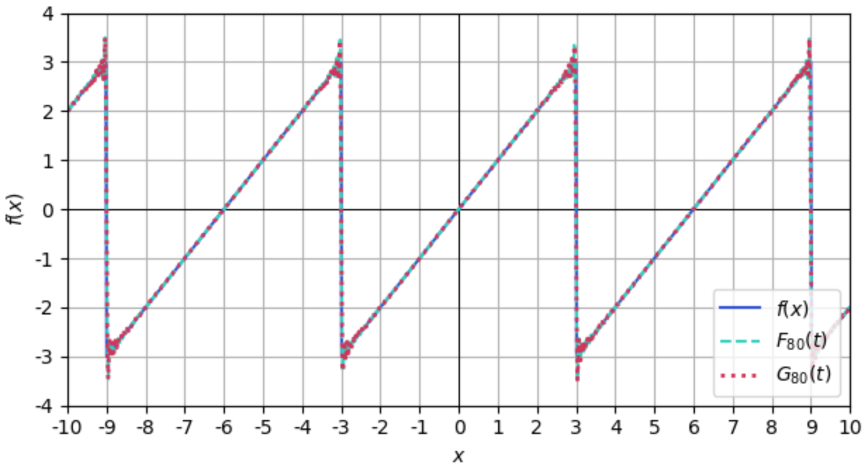

Рис. 18: $n = 80$

Графики рядов Фурье $F_n(x)$ и $G_n(x)$ совпадают и хорошо приближаются к функции $f(x)$ при $n > 10$. Также не наблюдается эффекта Гиббса. Чтобы убедиться в том, что при $n = 80$ ряд Фурье действительно аппроксимирует функцию $f_{\text{неч}}(t)$ довольно точно, проверим равенство Парсеваля при $n = 80$ и при $n = 1$:

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.05630
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.05630
```
Листинг 12: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.00524
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.00524
```
Листинг 13: Равенство Парсеваля при $n = 80$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f_{\text{чет}}(t)$ всё лучше и лучше.

1.5 Общая периодическая функция

И наконец рассмотрим **Общую периодическую функцию**:

$$f_{\text{об}}(t) = \sqrt{4 - ((t-1) \mod 2)^2}$$

на промежутке $[-1, 1]$. Она не является ни четной, ни нечетной. Построим график этой функции:

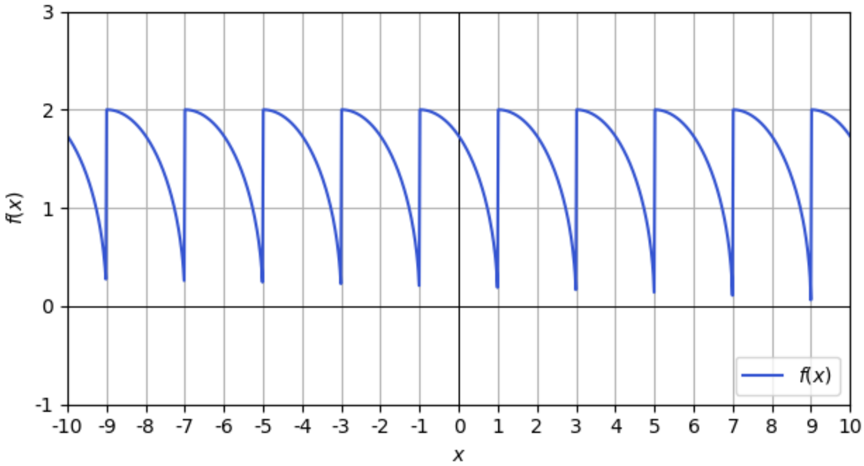

Рис. 19: График функции $f_{\text{чет}}(t)$

Период функции $f_{\text{об}}(t)$ равен $T = 2 \Rightarrow \omega = \pi n$. Взглянем на то, как вычисляются коэффициенты a_n, b_n и c_n в общем виде:

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - ((t-1) \mod 2)^2} \sin \pi n t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - ((t-1) \mod 2)^2} \cos \pi n t \, dt$$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - ((t-1) \mod 2)^2} \, \mathrm{e}^{-i\pi n t} \, dt$$

Далее изменим программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье, под функцию $f_{\text{об}}(t)$.

```python
...
def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda t: (4 - ((t - 1) % 2)**2) ** (1/2))(x)
...
```
Листинг 14: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f_{\text{об}}(t)$

Выведем первые четыре коэффициента Фурье:

```
a_0 = 3.142, b_0 = 0.0, c_0 = (1.571+0j) c_0 = (1.571+0j)
a_1 = 0.212, b_1 = -0.413, c_1 = (0.106+0.206j) c_-1 = (0.106-0.206j)
a_2 = -0.077, b_2 = 0.238, c_2 = (-0.038-0.119j) c_-2 = (-0.038+0.119j)
a_3 = 0.042, b_3 = -0.169, c_3 = (0.021+0.084j) c_-3 = (0.021-0.084j)
```
Листинг 15: Вывод программы

Программно найдем коэффициенты при больших значениях n и построим соответсвующие графики тригонометрической функции F_n и экспоненциальной G_n рядов Фурье для функции $f_{\text{об}}(t)$:

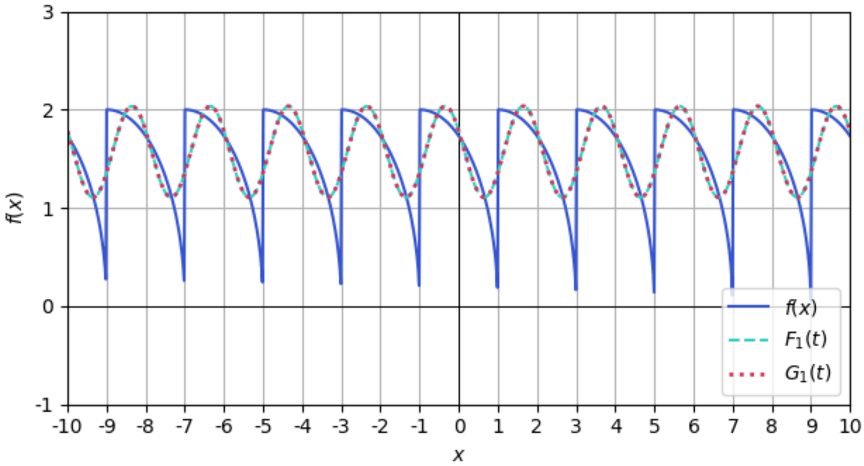

Рис. 20: $n = 1$

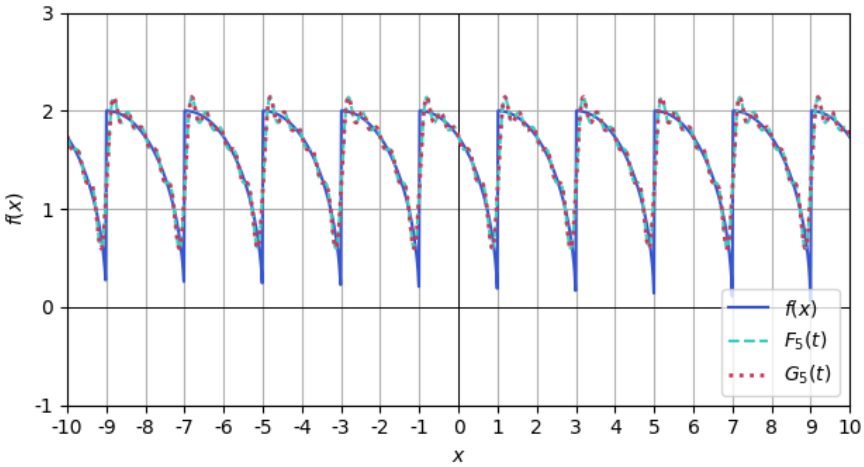

Рис. 21: $n = 5$

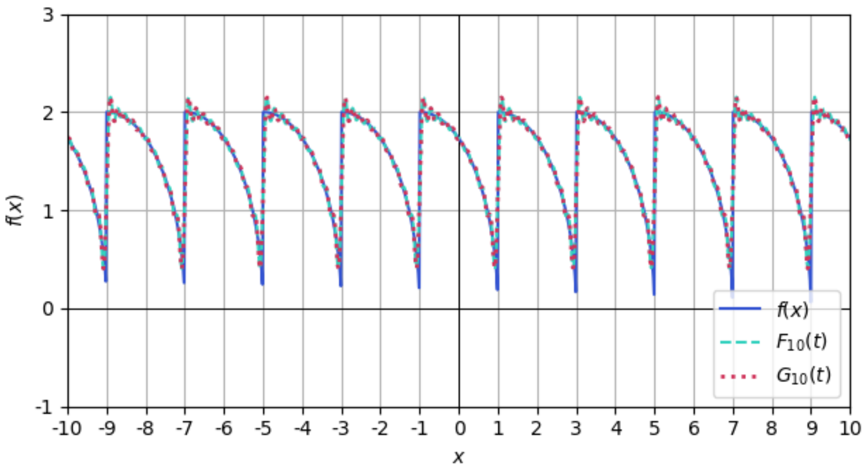

Рис. 22: $n = 10$

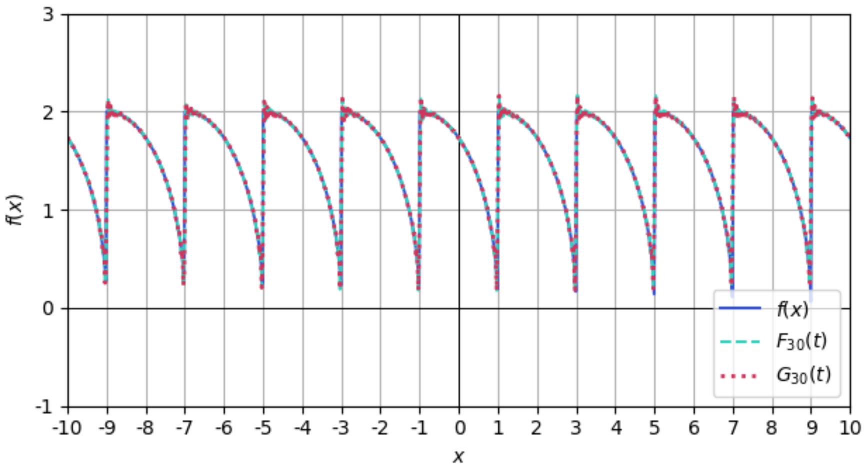

Рис. 23: $n = 30$

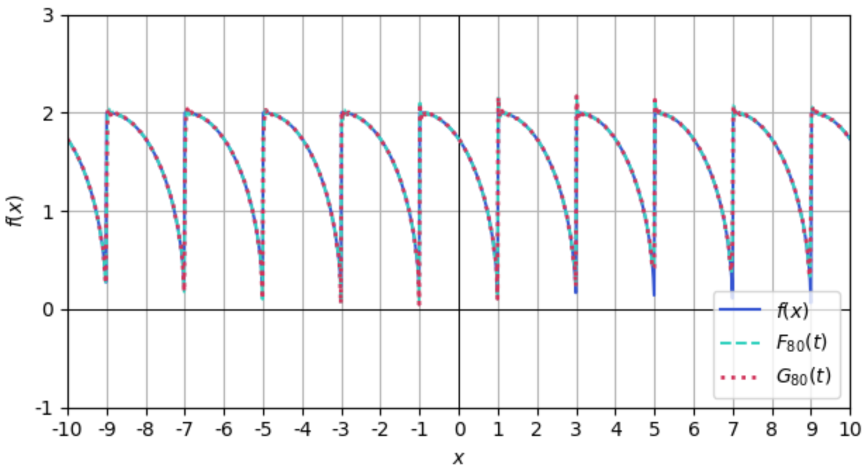

Рис. 24: $n = 80$

Графики рядов Фурье $F_n(x)$ и $G_n(x)$ совпадают и хорошо приближаются к функции $f(x)$. Проверим равенство Парсеваля для $n = 80$ и $n = 1$:

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 1.38261
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 1.38261
```

Листинг 16: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.06085
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.06085
```

Листинг 17: Равенство Парсеваля при $n = 80$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f_{\text{чет}}(t)$ всё лучше и лучше.

2 Задание 2. Комплексная функция

Для выполнения этого задания зададим $R = 2$ и $T = 4 \Rightarrow \omega = {}^{\pi n}/_2$. По условию получим следующую комплекснозначную функцию, заданную параметрическим образом:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 4 - 4t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -2, & t \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), \\ -12 + 4t, & t \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}), \end{cases} \qquad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 4t, & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 2, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ 8 - 4t, & t \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), \\ -2, & t \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}). \end{cases}$$

Расмотрим график функции $f(t)$ на комплексной плоскости:

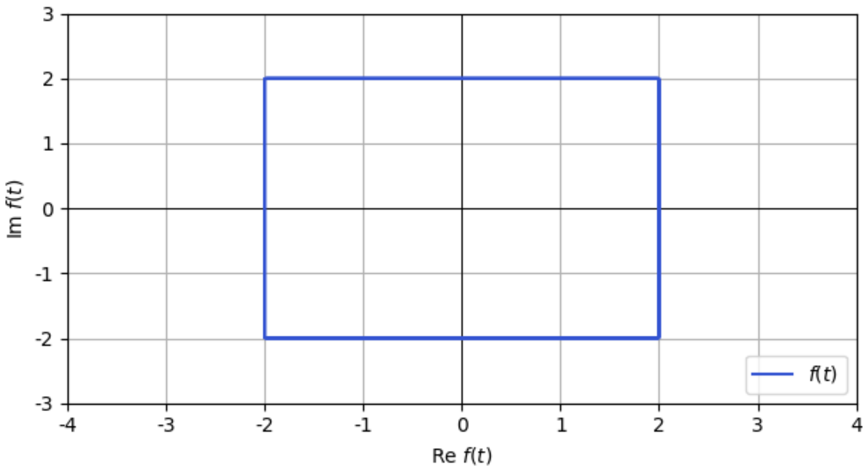

Рис. 25: График функции $f(t)$

Получаем вот такой квадрат на комплексной плоскости. Теперь найдём коэффициенты Фурье c_n для этой функции, которые в общем виде вычисляются так:

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{7/2} f(t)e^{-i\frac{\pi n}{2}t}\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}t}\,dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}t}\,dt + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}t}\,dt\right)$$

Вычислим вручную c_0, c_1, c_2:

$$c_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\;dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\;dt + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)\;dt + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\;dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2+2i-2-2i) = \boxed{0}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\,e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\,e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)\,e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\,e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt\right) = \boxed{2.293}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\,e^{i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\,e^{i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\,e^{i\frac{\pi}{2}t}\,dt\right) = \boxed{0}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\,e^{-i\pi t}\,dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\,e^{-i\pi t}\,dt + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)\,e^{-i\pi t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\,e^{-i\pi t}\,dt\right) = \boxed{0}$$

$$c_{-2} = \frac{1}{4}\left(\int_{-1/2}^{1/2}(2+4ti)\,e^{i\pi t}\,dt + \int_{1/2}^{3/2}(4-4t+2i)\,e^{i\pi t}\,dt + \int_{3/2}^{5/2}(-2+(8-4t)i)\,e^{i\pi t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{5/2}^{7/2}(-12+4t-2i)\,e^{i\pi t}\,dt\right) = \boxed{0}$$

Теперь воспользуемся программой, которая вычисляет коэффициенты Фурье для любого n. Программа уже написана, поэтому мы просто вставим в неё нашу функцию и запустим её, чтобы получить коэффициенты:

```
...
def f(x):
    def create_parametric_func(R, T):
        def pfunc_instance(t):
            t = (t + T / 8) % T - T / 8
            if -T / 8 <= t < T / 8:
                real = R
            elif T / 8 <= t < 3 * T / 8:
                real = 2 * R - 8 * R * t / T
            elif 3 * T / 8 <= t < 5 * T / 8:
                real = -R
            elif 5 * T / 8 <= t <= 7 * T / 8:
                real = -6 * R + 8 * R * t / T

            if -T / 8 <= t < T / 8:
                imag = 8 * R * t / T
            if T / 8 <= t < 3 * T / 8:
                imag = R
            if 3 * T / 8 <= t < 5 * T / 8:
                imag = 4 * R - 8 * R * t / T
            if 5 * T / 8 <= t <= 7 * T / 8:
                imag = -R

            return real + 1j * imag

        return pfunc_instance

    return create_parametric_func(2, 4)
...
```

Листинг 18: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(t)$

Итак, программа выдаёт нам первые 5 коэффициентов:

```
c_0 = (-0-0j)        c_0 = (-0-0j)
c_1 = (2.293+0j)     c_-1 = -0j
c_2 = (-0-0j)        c_-2 = (-0-0j)
c_3 = -0j            c_-3 = (-0.255+0j)
```

Листинг 19: Вывод программы

Мы видим, что коэффициент c_2 равен нулю, как и большинство коэффициентов c_n и c_{-n}.

Теперь построим графики для различных первых n коэффициентов:

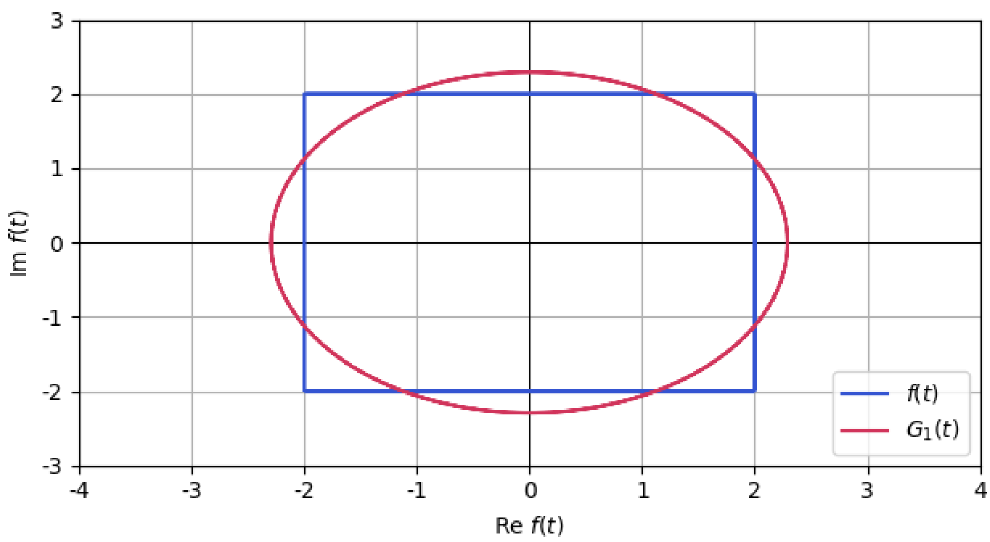

Рис. 26: $n = 1$

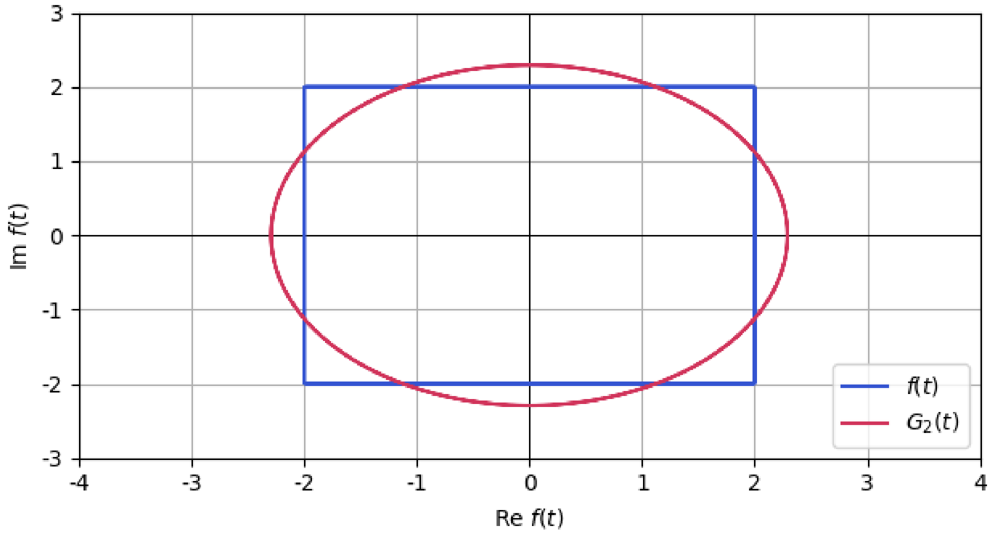

Рис. 27: $n = 2$

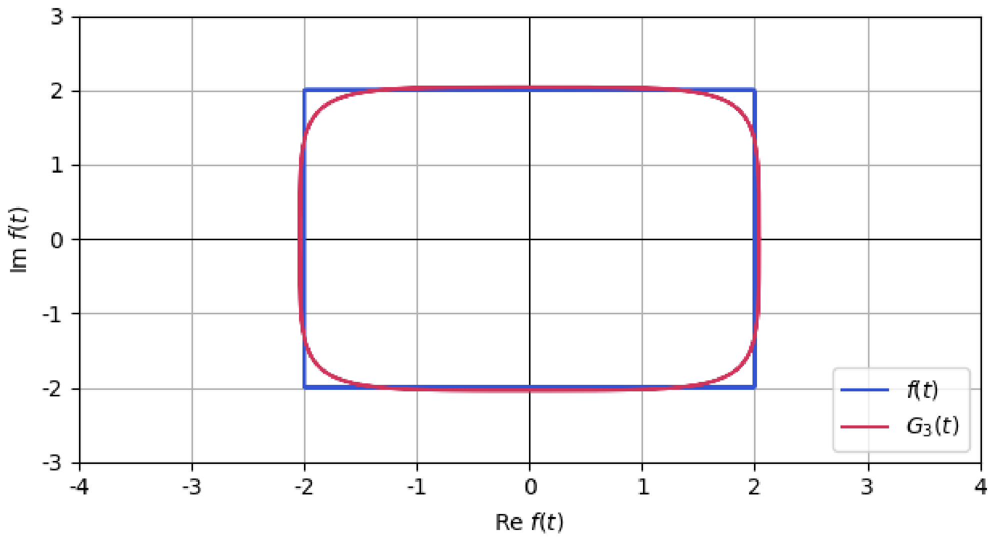

Рис. 28: $n = 3$

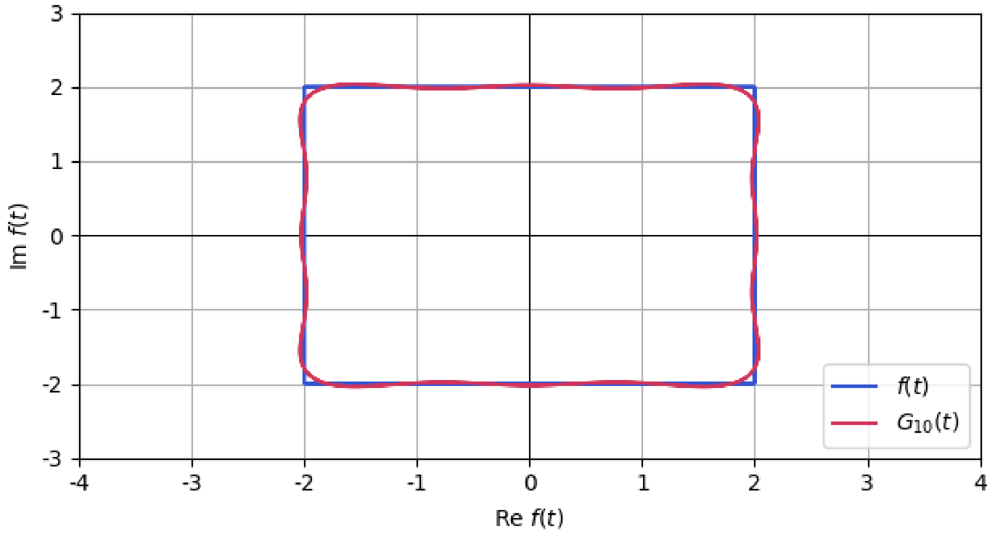

Рис. 29: $n = 10$

С первых значений, вокруг квадрата формируется круг, который с увеличением числа гармоник всё больше становится похож на квадрат. Теперь построим другие графики: на абсциссе отложим t, а по ординате отложим сначала вещественные части $f(t)$ и $G_n(t)$, а затем мнимые.

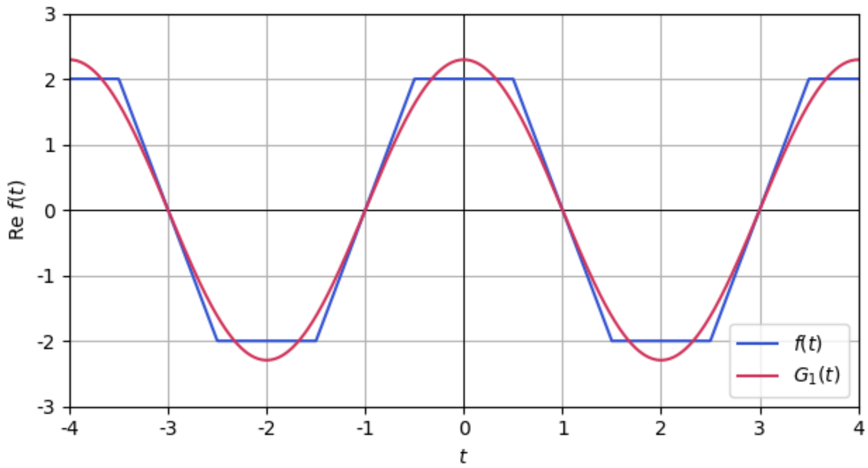

Рис. 30: $Re \quad n = 1$

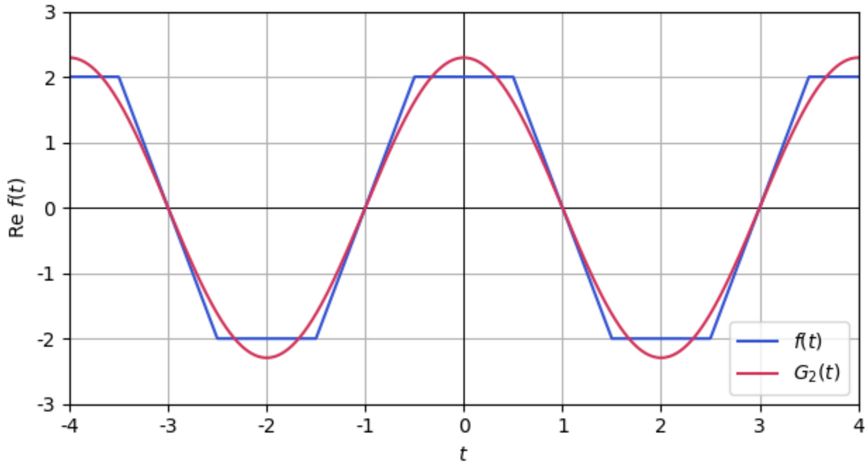

Рис. 31: $Re \quad n = 2$

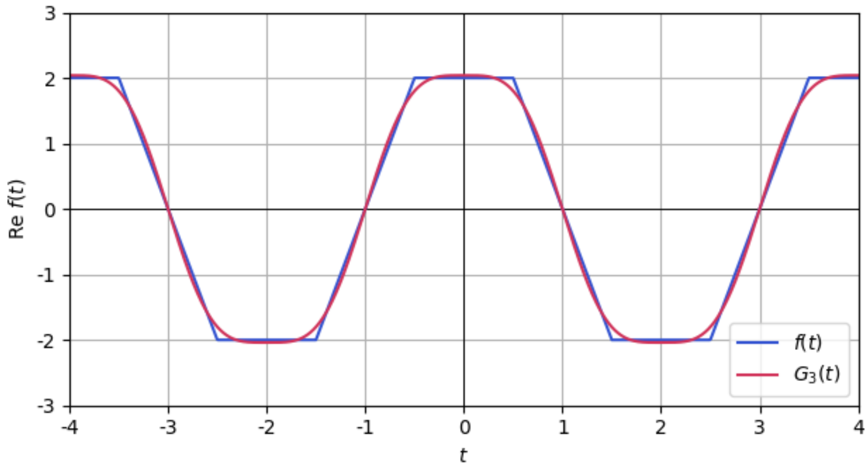

Рис. 32: $Re \quad n = 3$

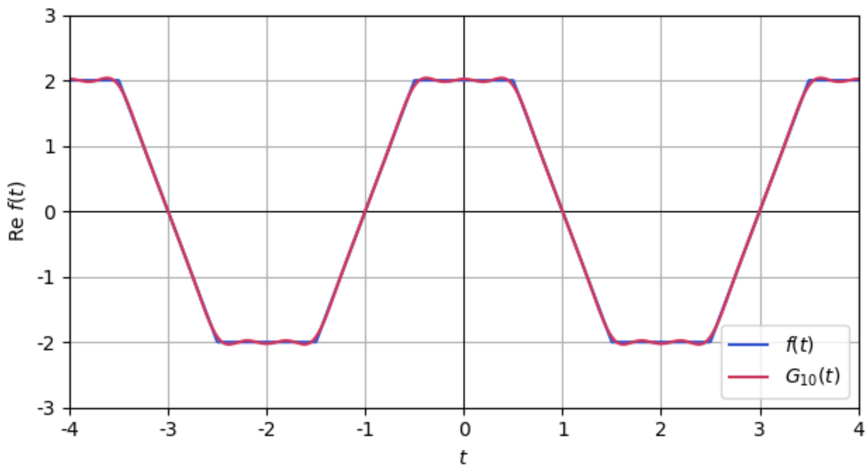

Рис. 33: $Re \quad n = 10$

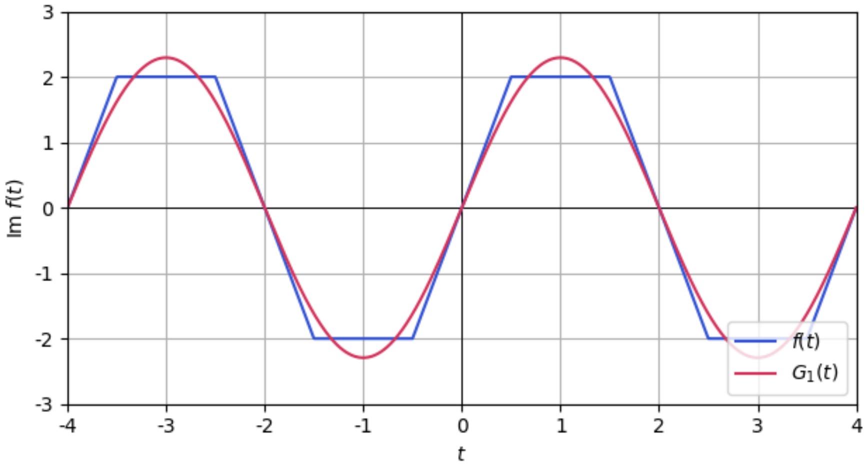

Рис. 34: $Im \quad n = 1$

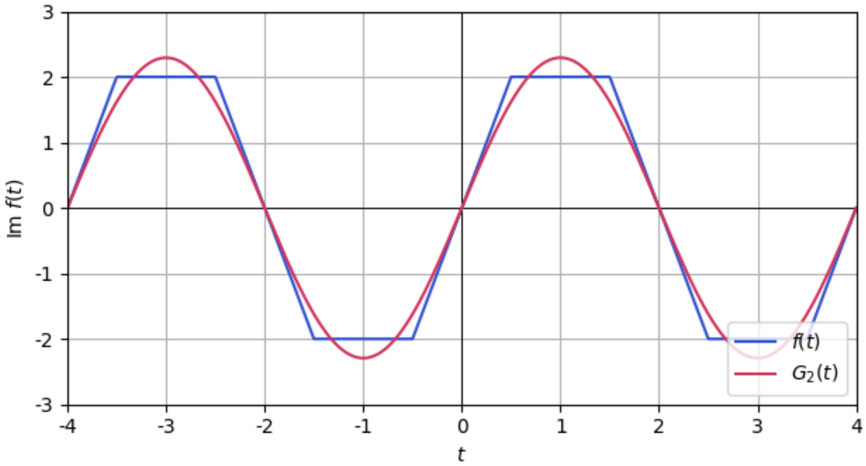

Рис. 35: $Im \quad n = 2$

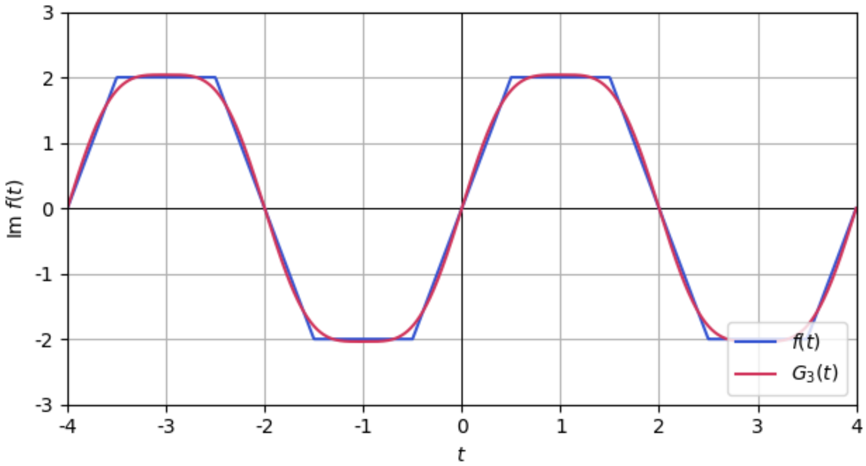

Рис. 36: $Im \quad n = 3$

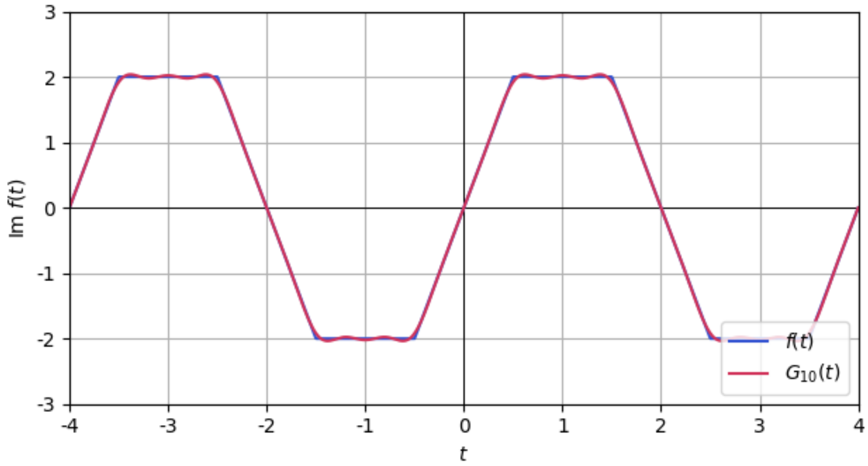

Рис. 37: $Im \quad n = 10$

Мы можем сделать вывод, что $G_n(t)$ приближает исходную функцию $f(t)$ в вещественной и мнимой частях. Чтобы убедиться в том, что при $n = 10$ ряд Фурье очень точен к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.39629
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.39629
```

Листинг 20: Равенство Парасеваля при $n = 1$

```
||f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2)| = 0.01920
||f|^2 - sum(|c_i|^2)|           = 0.01920
```

Листинг 21: Равенство Парасеваля при $n = 10$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f(t)$ всё лучше и лучше.

3 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы мы освоили методы нахождения коэффициентов Фурье для различных типов функций. Мы изучили два подхода к разложению: тригонометрическое и комплексное представления рядов Фурье.

Анализируя разложения различных функций, мы установили, что характер разложения зависит от чётности функции. В частности, если функция нечётная, в разложении присутствуют только синусные члены, а если функция чётная — только косинусные. В общем же случае в разложении ряда Фурье присутствуют оба типа функций.

Мы наглядно убедились, что с увеличением числа членов ряда Фурье улучшается точность аппроксимации исходной функции. Это подтверждается как графически — на построенных графиках было видно, что при увеличении количества членов ряда приближение становилось более точным, — так и аналитически через равенство Парсеваля. Последнее утверждает, что квадрат нормы исходной функции равен сумме квадратов модулей всех коэффициентов ряда Фурье, причём при увеличении числа членов ряда ошибка аппроксимации стремится к нулю.