Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ

О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

По дисциплине «Практическая линейная алгебра»

«2D-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

Студенты:
Бахтагиров Р.А. группа R3243
Сайфуллин Д.Р. группа R3243
Симонов И.А. группа R3236
Холухина Д.Е. группа R3240

Проверил:
Догадин Егор Витальевич, ассистент

Санкт-Петербург
2024

Подготовка

Подберём подходящий многоугольник для нашей работы. Мы выбрали квадрат с вершинами в точках (1, 1), (1, 4), (4, 1) и (4, 4). Его стороны параллельны осям координат. Это делает вычисления проще, а также позволяет более наглядно визуализировать результат линейных преобразований.

Теперь, чтобы начать работу, выберем числа a, b, c, и d в соответствии с заданием. Пусть это будут числа 3, 2, 7, и 11 соответственно.

Отображение 1

Задание: Отразить плоскость относительно прямой $y = ax$.

В начале поймём как отразить координатную плоскость относительно оси OY. Для этого используется следующая матрица преобразования:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь перейдем к следующему базису: ось y станет прямой $y = 3x$, а ось x будет перпендикулярна ей (то есть прямой $y = -\frac{1}{3}x$, после чего мы вернемся к стандартному положению. Таким образом, мы получим следующее преобразование:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Формула для получения матрицы трансформации используется именно в таком виде, потому что она позволяет нам последовательно применять преобразования: сначала мы изменяем базис, затем применяем необходимое преобразование, и, наконец, возвращаемся к стандартному базису. Это обеспечивает правильное отображение точек в новом пространстве.

Независимо от выбора коэффициента a, матрица преобразования всегда будет симметричной, поскольку отражение относительно прямой является симметричным преобразованием. Это связано с тем, что общее преобразование задается матрицей:

$$P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

где P — это матрица перехода к новому базису, в котором прямая $y = ax$ становится осью. Поскольку отражение — это ортогональное преобразование, оно сохраняет симметрию.

Визуализируем трансформацию:

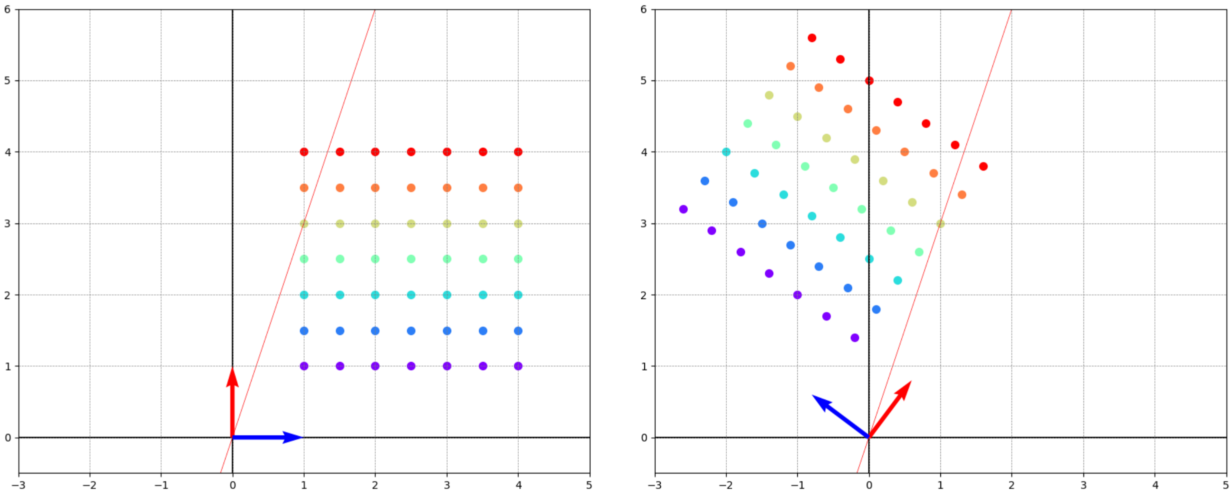

Рис. 1: Отображение 1

Range: Span $\left(\begin{bmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\right)$

Null space: $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

Определитель:

$$\det\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right) = -1$$

Отображение 2

Задание: Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$.

Для того, чтобы отобразить все точки пространства в прямую $y = 2x$, нужно перейти в пространство, базисные вектора которого лежат на этой прямой. Возьмём для примера следующий базис:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица векторов этого базиса и будет являться нашей матрицей преобразования. Визуализируем её влияние на координатную плокость с помощью точек нашего прямоугольника:

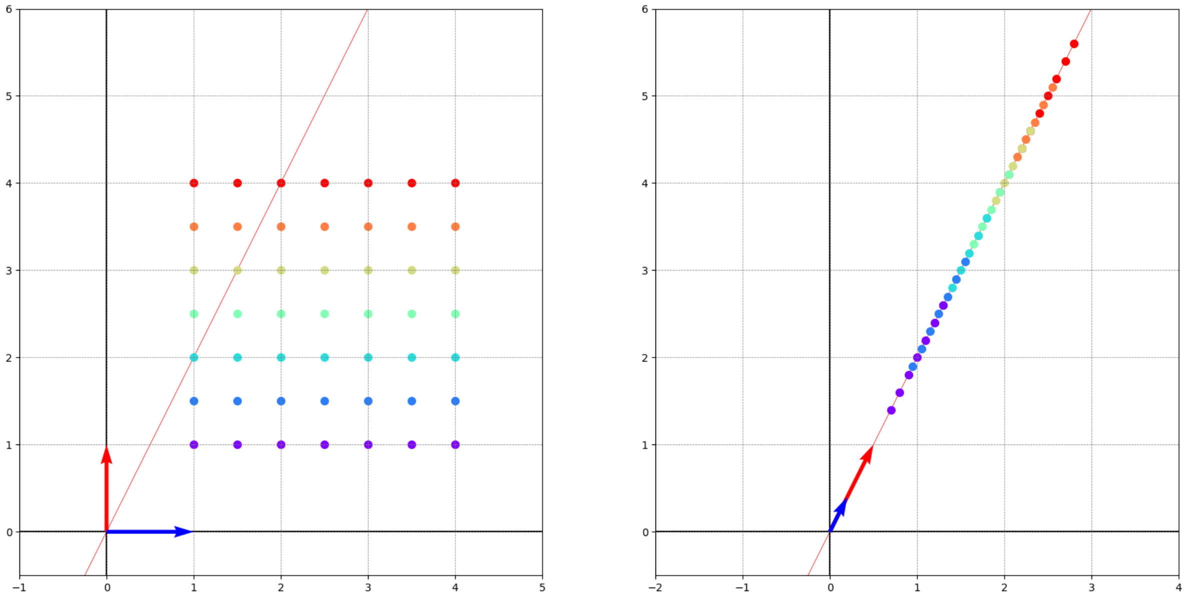

Рис. 2: Отображение 2

Range: Span $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

Null space: $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$, где t — любое действительное число

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{6}{5}$$

Определитель:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Отображение 3

Задание: Поворот плоскости на $10c$ градусов против часовой стрелки.

Составим матрицу базисных векторов, повёрнутых на 70 градусов против часовой стрелки. Нетрудно посчитать, что она примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \cos(70°) & -\sin(70°) \\ \sin(70°) & \cos(70°) \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования получена. Визуализируем её влияние на пространство:

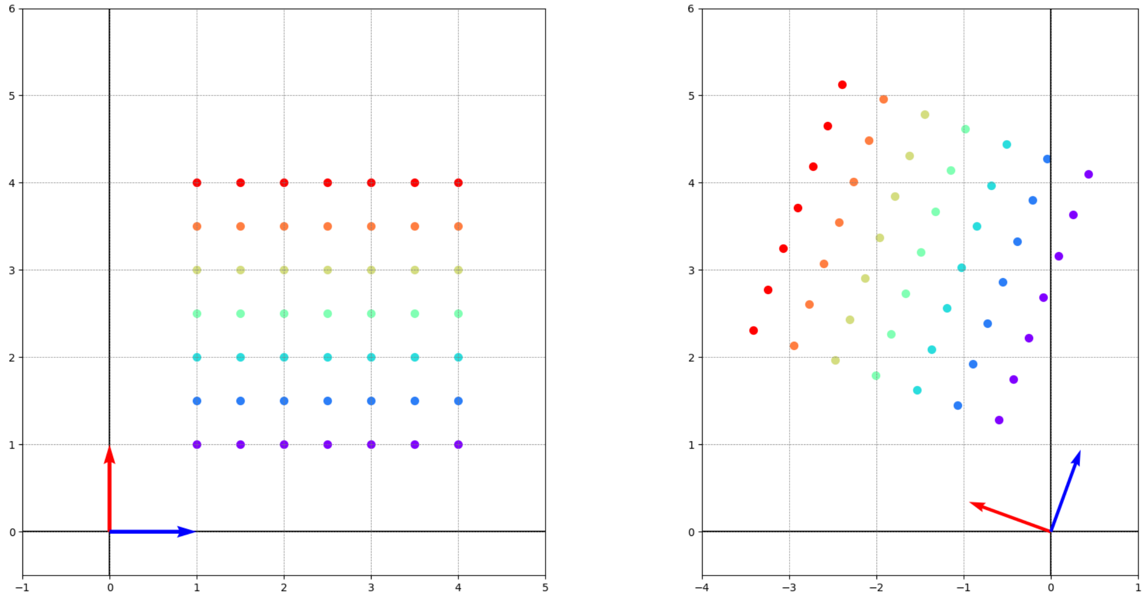

Рис. 3: Отображение 3

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 \approx 0,342 - 0,94i, \lambda_2 = 0,342 + 0,94i$$

Определитель:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \cos(70°) & -\sin(70°) \\ \sin(70°) & \cos(70°) \end{bmatrix}\right) = 1$$

Отображение 4

Задание: Центральная симметрия плоскости относительно начала координат.

Для того чтобы добиться центарльной симметрии нужно всего лишь совершить поворот пространства на 180 градусов. Или, другими словами, инвертировать всё его вектора. Чтобы найти матрицу преобразования нужно записать базисные вектора со знаком минус:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

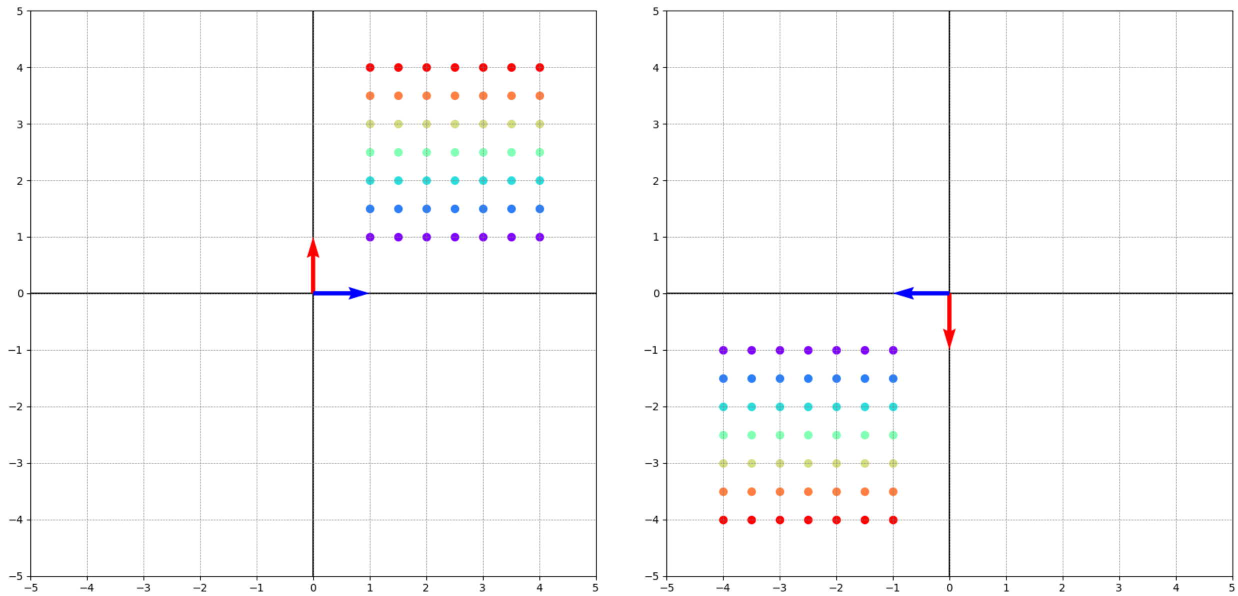

Рис. 4: Отображение 4

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Определитель:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

Отображение 5

Задание: Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$, потом поворот на $10d$ градусов по часовой стрелке.

Для начала получим матрицу для поворота пространства со стандартным базисом на 110 градусов по часовой стрелке. Воспользуемся матрицей из *Отображения 3*. В нём мы производили поворот пространства против часовой стрелки, поэтому в текущем случае вставим значение угла со знаком минус.

$$\begin{bmatrix} \cos(-110^\circ) & -\sin(-110^\circ) \\ \sin(-110^\circ) & \cos(-110^\circ) \end{bmatrix}$$

Последовательно применим матрицу *Отображения 3* и матрицу поворота на 110 градусов по часовой стрелке и получим итоговую матрицу преобразования:

$$\begin{bmatrix} \cos(-110^\circ) & -\sin(-110^\circ) \\ \sin(-110^\circ) & \cos(-110^\circ) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Получим:

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4\cos(110^\circ) + 3\sin(110^\circ) & 3\cos(110^\circ) + 4\sin(110^\circ) \\ 4\sin(110^\circ) + 3\sin(110^\circ) & -3\sin(110^\circ) + 4\sin(110^\circ) \end{bmatrix}$$

Посчитаем примерные значения элементов матрицы:

$$\begin{bmatrix} -0.29 & -0.96 \\ -0.96 & 0.29 \end{bmatrix}$$

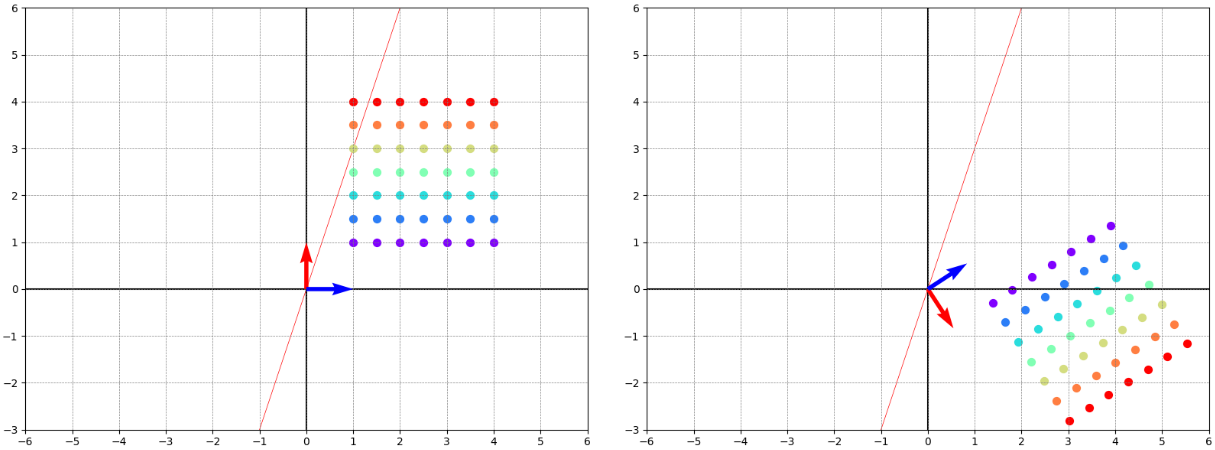

Рис. 5: Отображение 5

Определитель:

$$\det\left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4\cos(110^\circ) + 3\sin(110^\circ) & 3\cos(110^\circ) + 4\sin(110^\circ) \\ 4\sin(110^\circ) + 3\sin(110^\circ) & -3\sin(110^\circ) + 4\sin(110^\circ) \end{bmatrix}\right) \approx -0.562$$

Отображение 6

Задание: Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ и прямую $x = 0$ в $y = bx$.

Для реализации такого отображения нужно составить базис нового пространства. Вектора i и j стандарного базиса как раз находятся на прямых $y = 0$ и $x = 0$. Достаточно лишь перенести базисные вектора на прямые $y = 3x$ и $y = 2x$ соответсвенно и записать в матричной форме. Важно при этом сохранить соотношение длин векторов, иначе изображение может исказиться. В итоге получим такую матрицу преобразования:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

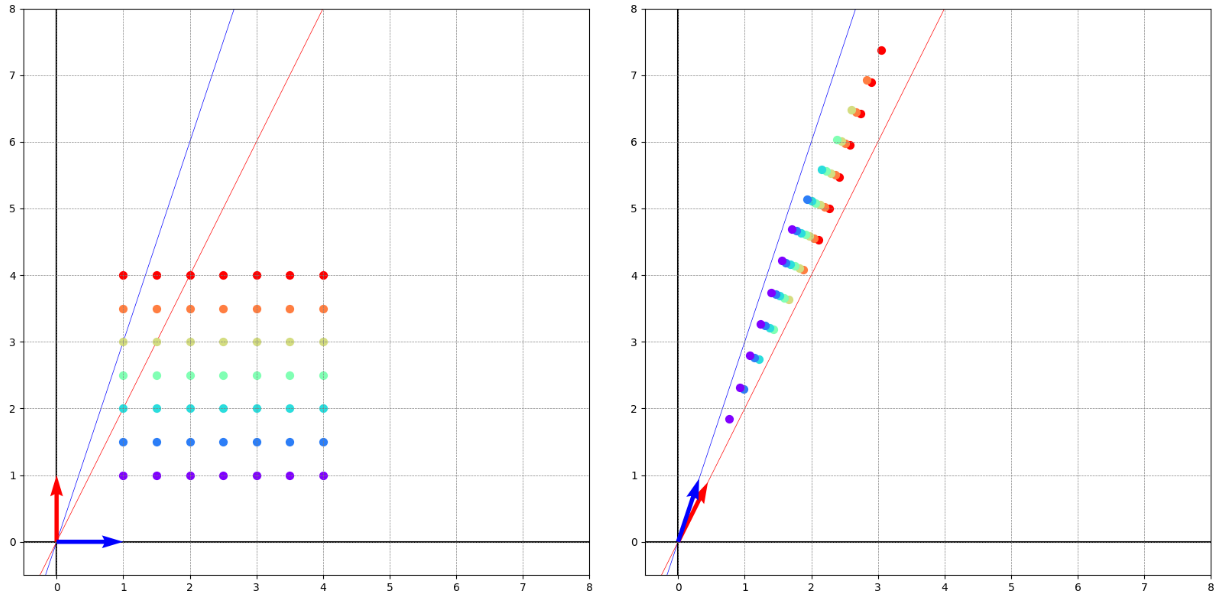

Рис. 6: Отображение 6

Отображение 7

Задание: Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ в $y = 0$ и прямую $y = bx$ в $x = 0$.

В этом задании у нас буквально противоположная задача. Нам нужно провести обратный переход, но из стандартного пространства. Матрица преобразования следующая:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{10} & \sqrt{10} \\ 3\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

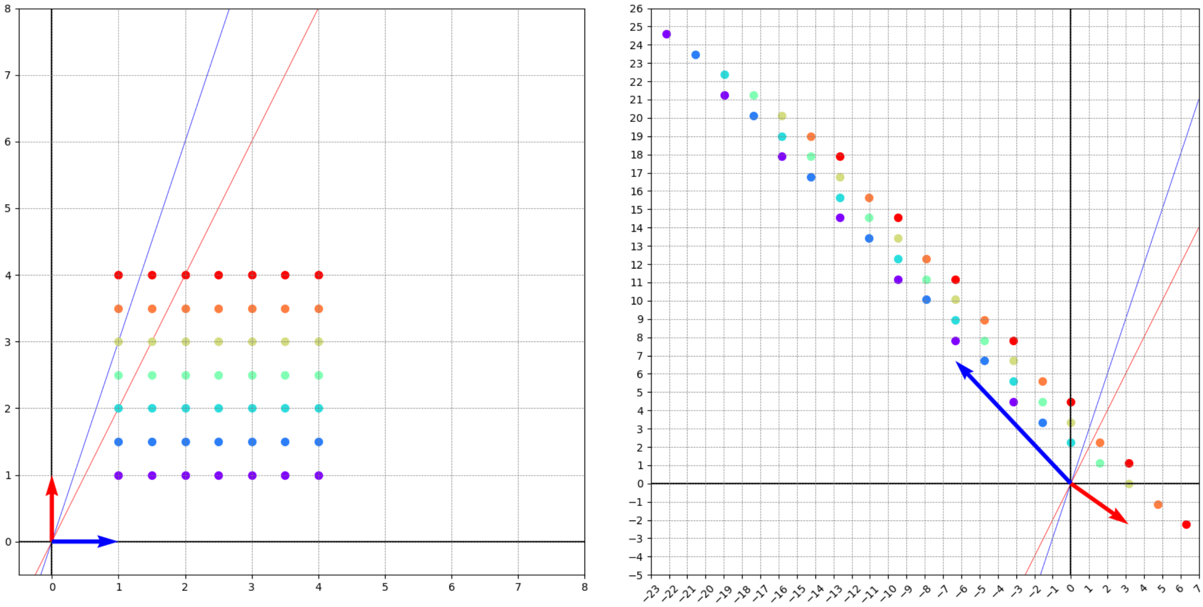

Рис. 7: Отображение 7

Отображение 8

Задание: Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$.

Для начала перейдем в пространство, базисные вектора i и j которого лежат соответсвенно на прямых $y = 2x$ и $y = 3x$, поменяем их местами и вернёмся к исходному базису. Итоговая матрица преобразования получится такой:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Здесь мы получили симметричную матрицу преобразования, но так будет далеко не при всех возможных значениях a и b. Итоговая матрица преобразования зависит от выбора начальных прямых и их взаимного расположения. В общем случае, матрица перестановки не сохраняет симметрию, так как она меняет местами векторы, что может нарушить симметричность итоговой матрицы.

Чтобы доказать вышесказанное, приведём пример. Рассмотрим прямые $y = x$ и $y = 2x$. Мы хотим найти матрицу преобразования, которая меняет эти прямые местами.

Прямые $y = x$ и $y = 2x$ соответствуют векторам:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Нормализуем их:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Итоговая матрица преобразования:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы и получим:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{10} \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

Как видим, матрица получилась несимметричной.

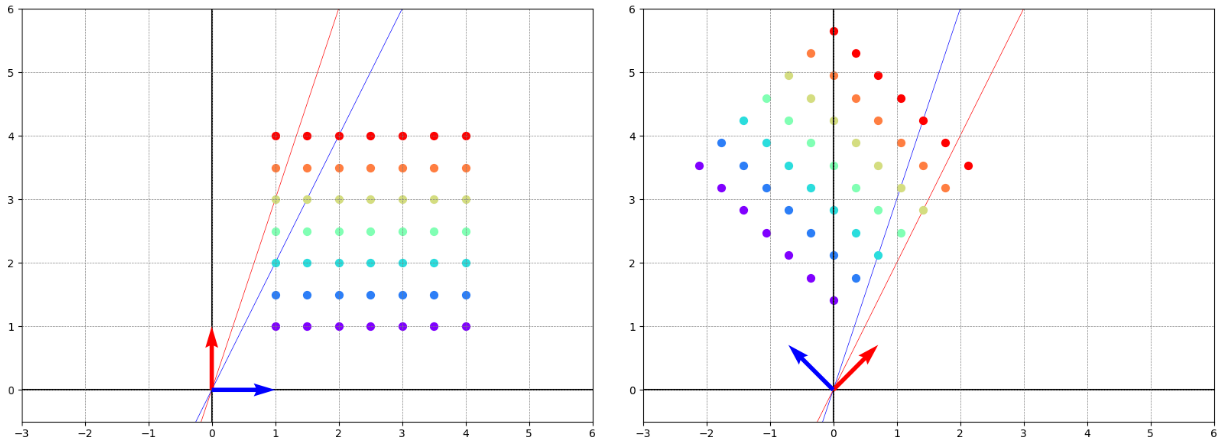

Рис. 8: Отображение 8

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

Отображение 9

Задание: Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c.

Найдём радиус исходного круга, зная, что его площадь равна 1:

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

Чтобы площадь круга увеличилась в 7 раз, его радиус должен увеличиться в $\sqrt{7}$ раз. Чтобы провести такое преобразование, удлинним каждый из базисных векторов в $\sqrt{7}$ раз. Получим:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

В этом задании матрица преобразования очевидно будет всегда получаться симметричной, ведь она нужна только для того, чтобы расятянуть базисные вектора, а значит справа и слева от главной диагонали всегда будут оставаться нули.

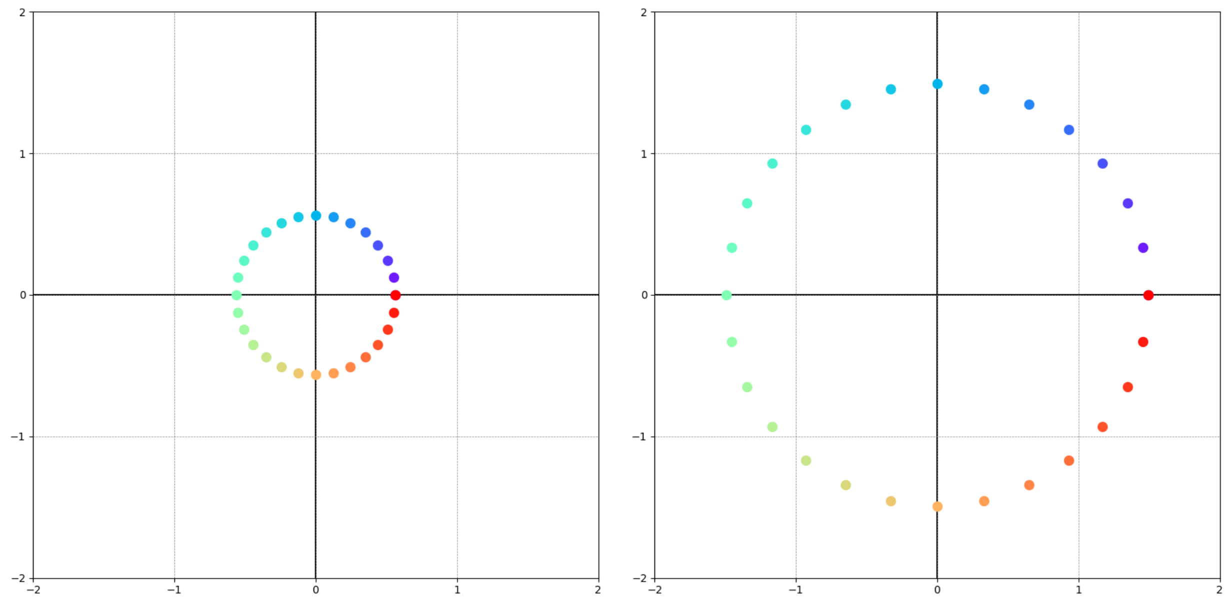

Рис. 9: Отображение 9

Определитель:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}\right) = 7$$

Отображение 10

Задание: Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d.

Вспомним формулу площади эллипса $S = \pi ab$, где a - длина большей полуоси, b - меньшей. В случае круга единичной площади $a = b = \sqrt{1 - \pi}$. Таким образом, чтобы увеличить его площадь в 11 раз, достаточно растянуть оси OX и OY в n и m раз соответсвенно таким образом, чтобы $nm = 11$. Важно, чтобы $n \neq m$, иначе снова получится круг. Возьмём для привера $n = 3$ и $m = \frac{11}{3}$. Получим:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

В этом задании матрица преобразования всегда будет получаться симметричной по причине аналогичной той, что была описана в прошлом задании.

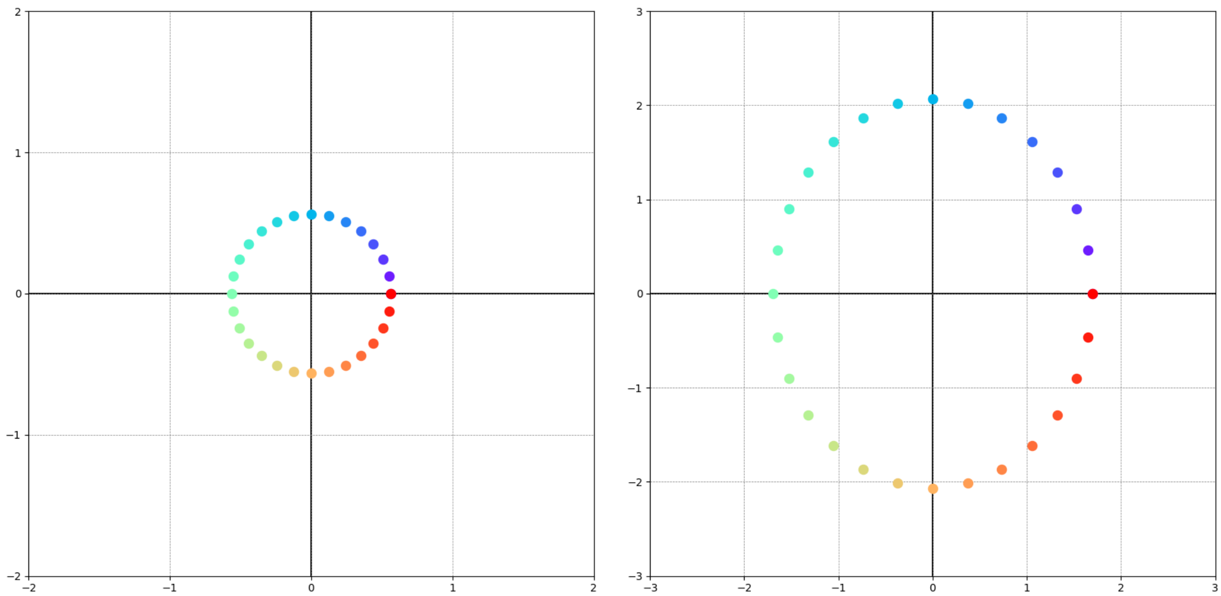

Рис. 10: Отображение 10

Определитель:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}\right) = 11$$

Отображение 11

Задание: Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.

Зададим матрицу преобразования с помощью спектрального разложения. Выберем любые собственные вектора, не лежащие на прямых $y = 0$ или $y = x$. К примеру:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Эти векторы перпендикулярны, так как их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0$$

Также возьмем собственные числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$. Теперь спектральное разложение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 49 & -3 \\ -3 & 41 \end{bmatrix}$$

Визуализируем влияние этой матрицы:

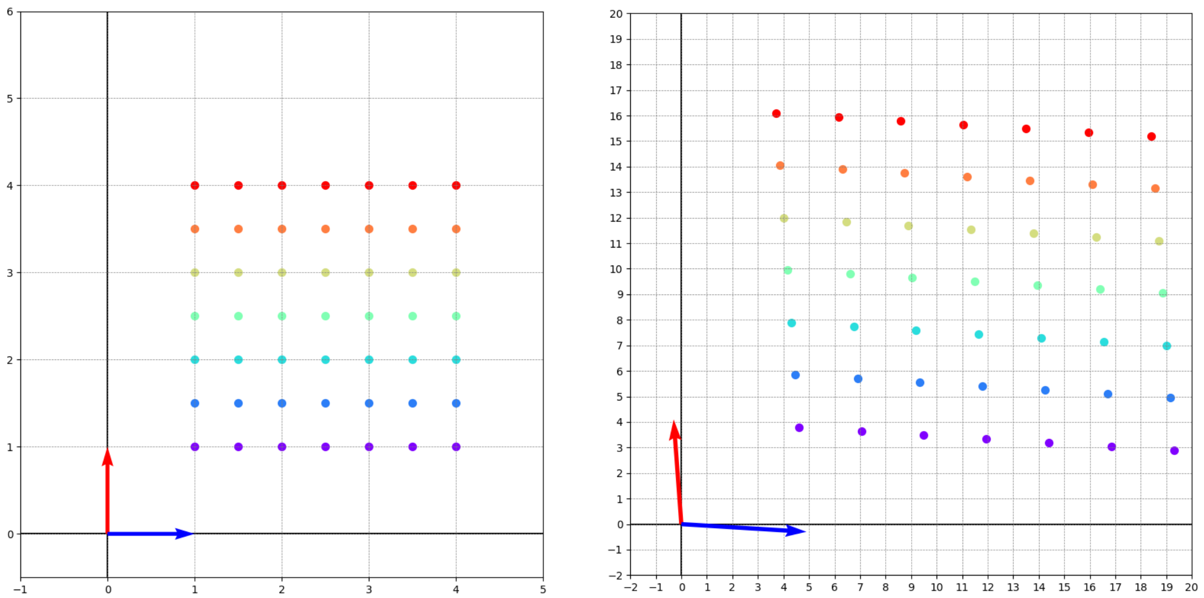

Рис. 11: Отображение 11

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{265}+16}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{265}+16}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{265}+25}{10}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{265}+25}{10}$$

Отображение 12

Задание: Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Из условия понятно, что у матрицы будет только один собственный вектор, а второй — обобщённый собственный вектор. Пусть это будут такие векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Пусть собственное число $\lambda_{1,2} = 3$. То есть $Geom(3) = 1 \leq Alg(3) = 2$. Тогда Жорданово разложение матрицы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

где $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ — Жорданова клетка.

Визуализируем её влияние на плоскость:

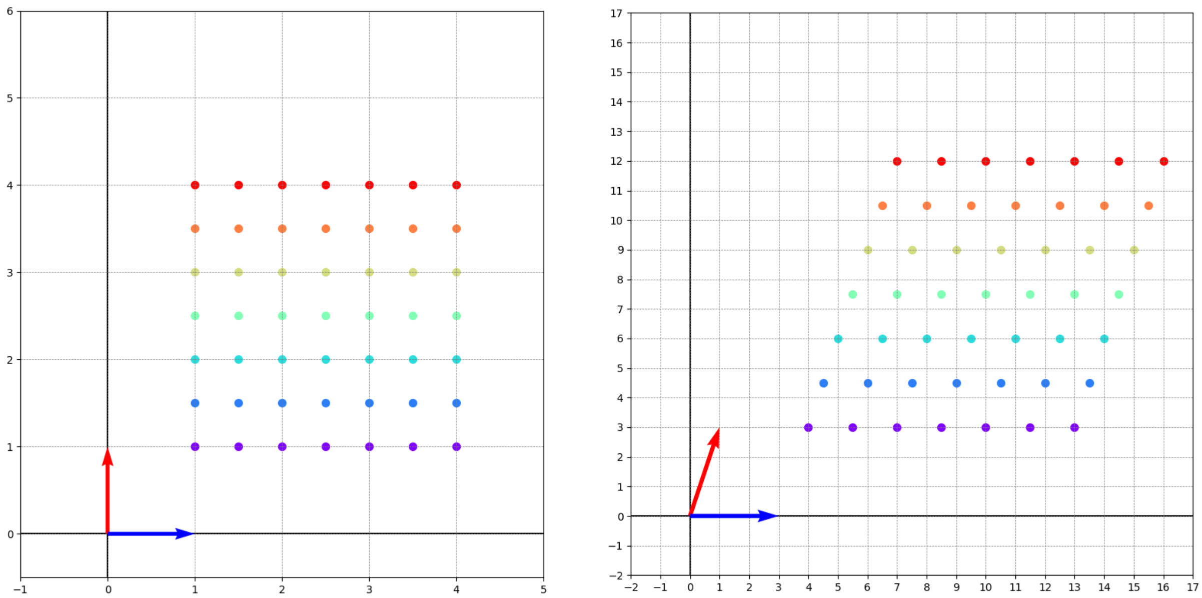

Рис. 12: Отображение 12

Собственный вектор:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Собственное число:

$$\lambda = 3$$

Отображение 13

Задание: Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).

Характеристический полином матрицы преобразований, которую нам нужно составить, не должен иметь вещественных корней. К примеру:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен матрицы:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \\ -1 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{4}{3}$$

Собсвтенные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pm i$$

Получается, матрица не имеет вещественных корней, и, следовательно, подходит нам. Вот как она влияет на плоскость:

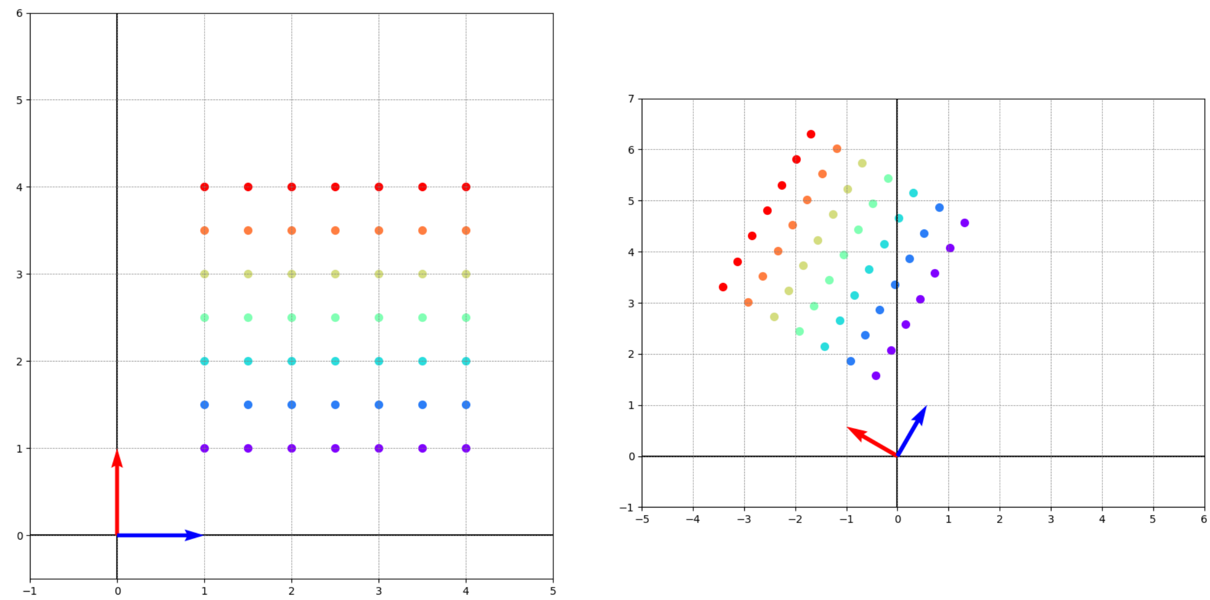

Рис. 13: Отображение 13

Range: Span $\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \right)$

Null space: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - i, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$$

Отображение 14

Задание: Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

Таким преобразованием может быть любое расширение или сжатие плоскости, при котором базисные вектора увеличиваются или уменьшаются в одинаковое число раз. Его собственные вектора $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ образуют базис пространства. Следовательно, любой вектор пространства является линейной комбинацией собственных векторов этого преобразования. Возьмём к примеру матрицу расширения пространства в 2 раза по обеим осям:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

В этом задании матрица преобразования будет симметричной всегда, так как мы растягиваем пространство по обеим осям в одинаковое число раз.

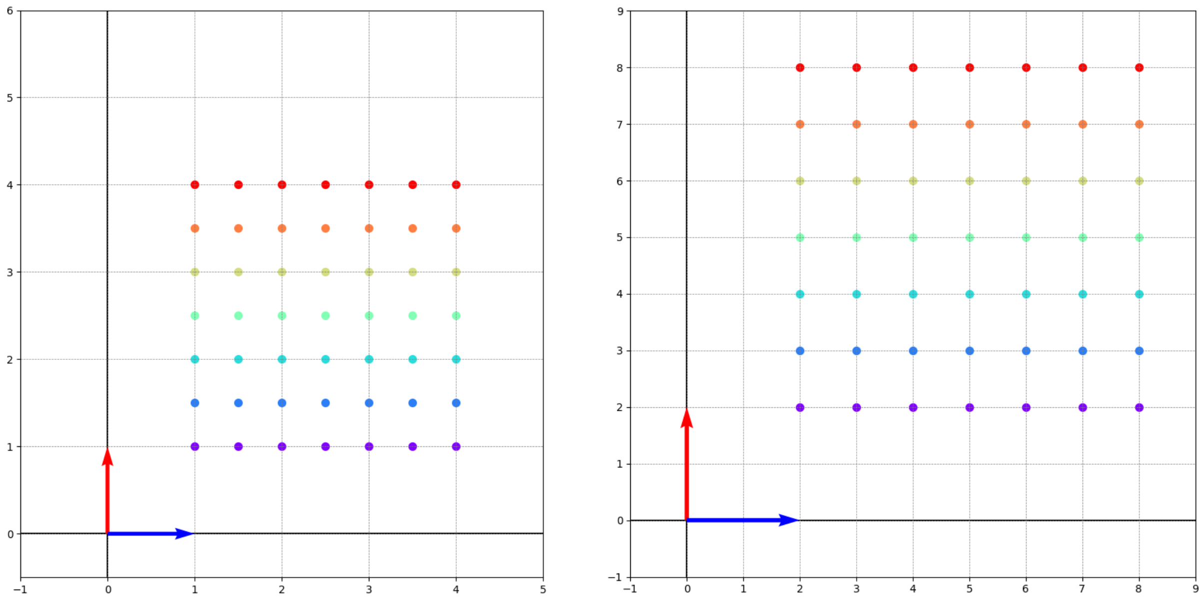

Рис. 14: Отображение 14

Range: Span $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

Null space: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Собственные векторы:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Отображение 15

Задание: Пара отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$. Сделайте визуализацию всех рассматриваемых отображений, а именно: A, B, AB и BA.

Для того чтобы преобразование пространства матрицей AB не было аналогичным преобразованию матрицей BA нужно, чтобы их произведение было некоммутативно. Для этого матрицы A и B должны обладать следующими свойствами:

- Матрицы имеют одинаковый размер $n \times n$
- Хотя бы одна из матриц несимметрична
- Обе матрицы ненулевые
- Ни одна из матриц не является единичной
- Матрицы различны между собой
- Обе матрицы не диагональны
- Обе не скалярны
- Не пропорциональны друг другу (то есть $\nexists k : B = kA$, где k — скаляр)

И всё равно нельзя будет гарантировать, что произведение этих матриц будет ненекоммутативным. Попробуем подобрать две матрицы наугад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Проверим их некоммутативность:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Таким образом $AB \neq BA$. Теперь реализуем преобразования на плоскости:

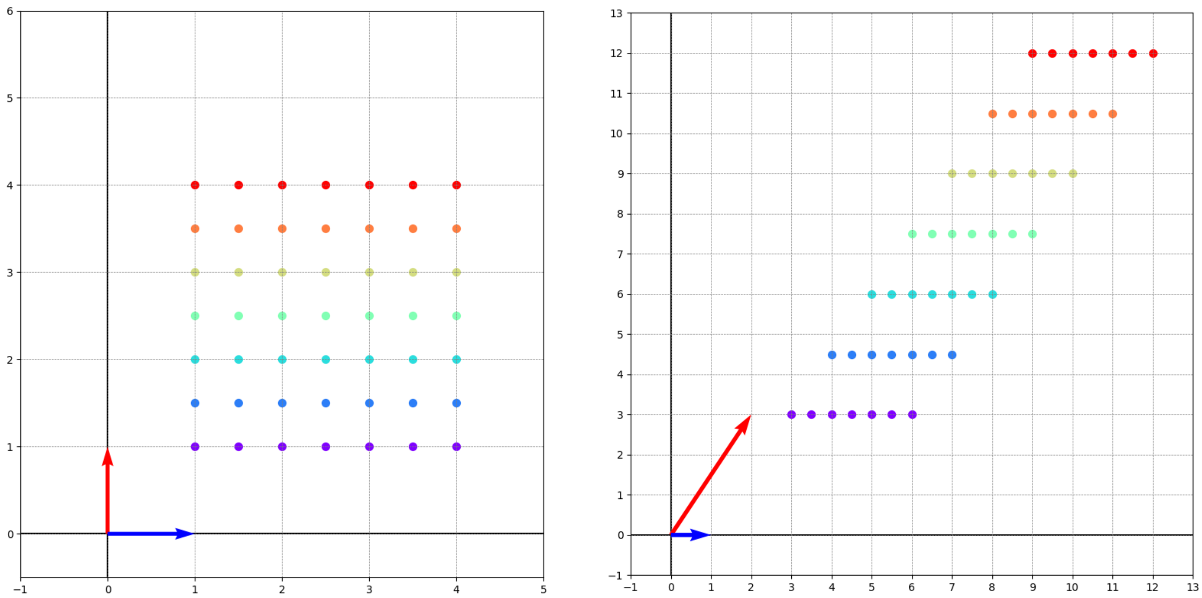

Рис. 15: Отображение 15. Влияние матрицы A

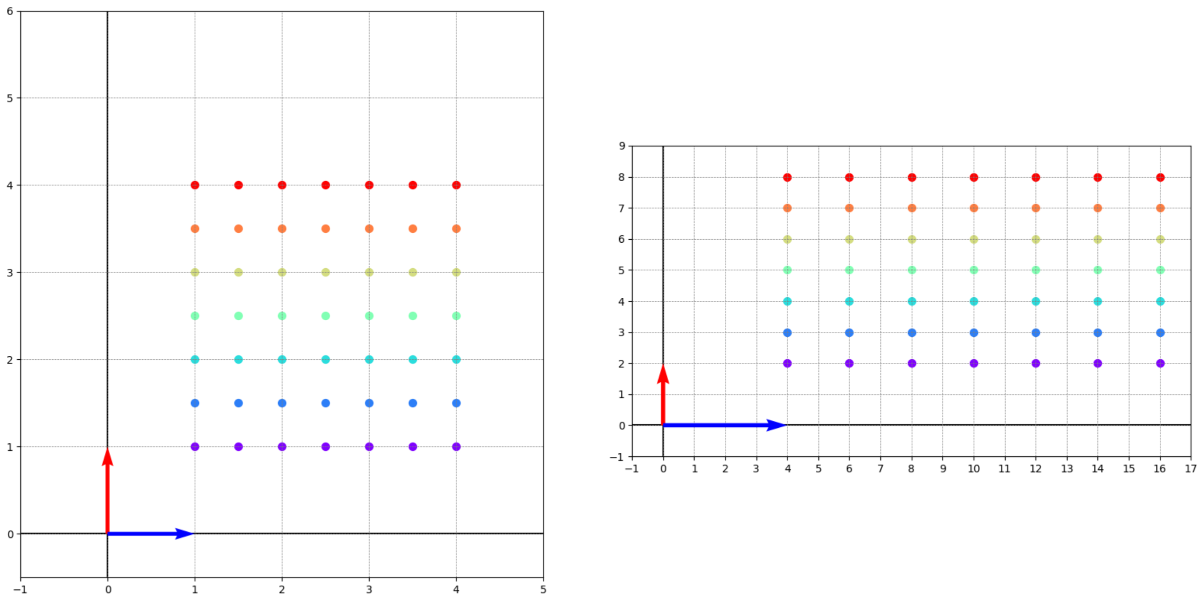

Рис. 16: Отображение 15. Влияние матрицы B

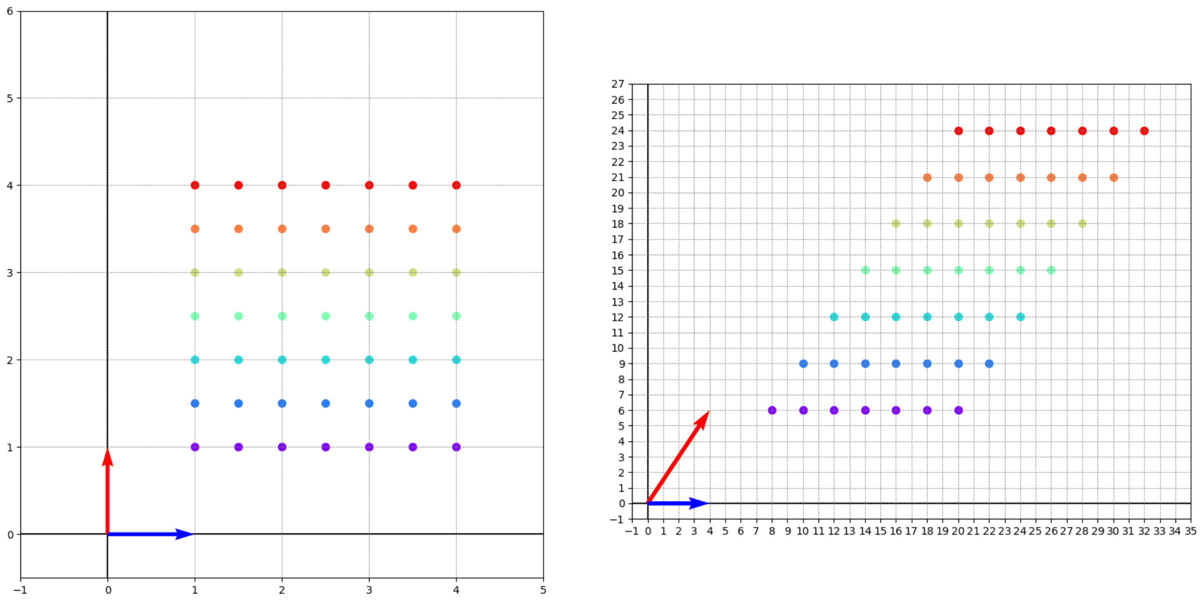

Рис. 17: Отображение 15. Влияние матрицы AB

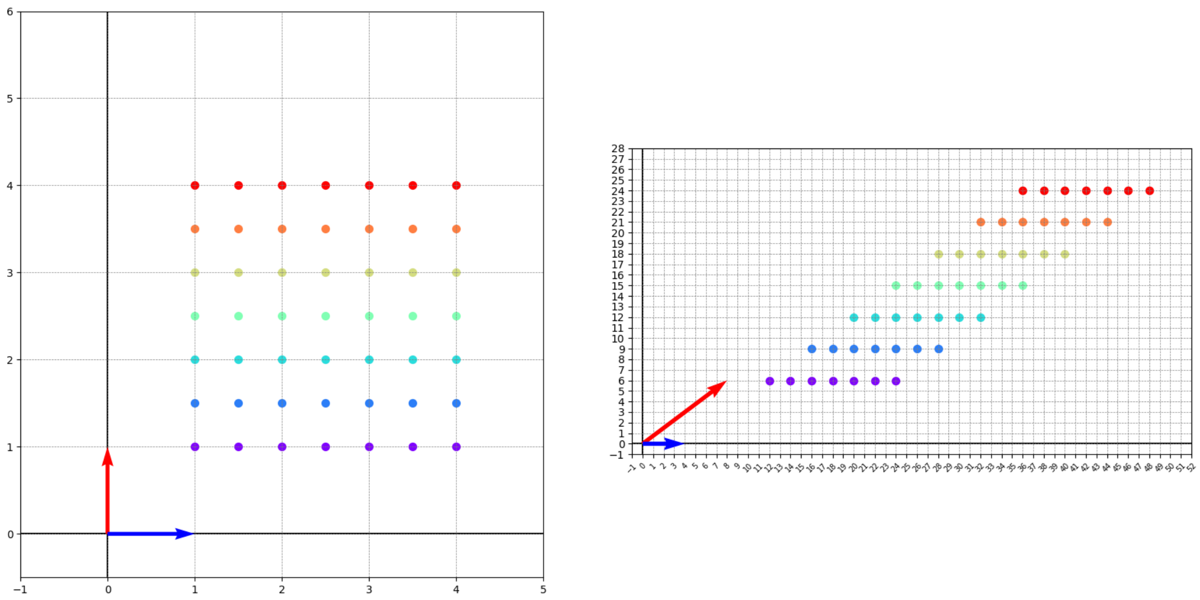

Рис. 18: Отображение 15. Влияние матрицы BA

Собственные векторы матрицы A:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

Собственные векторы матрицы B:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы B:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

Собственные векторы матрицы AB:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы AB:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

Собственные векторы матрицы BA:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы BA:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$$

Отображение 16

Задание: Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга. Сделайте визуализацию, аналогичную передыдущему пункту.

Проще всего для этого задания было бы подобрать диагональные матрицы. Но мы не ищем лёгких путей, поэтому напишем скрипт, который переберёт 100500 матриц размера 2×2, отберёт среди них коммутативные относительно умножения, и среди них мы уже вручную отберём максимально непохожие друг на друга две матрицы. В итоге мы отобрали такие:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Проверим их коммутативность:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -70 & 64 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -70 & 64 \end{bmatrix}$$

Теперь покажем их, а также их произведений влияние на плоскость:

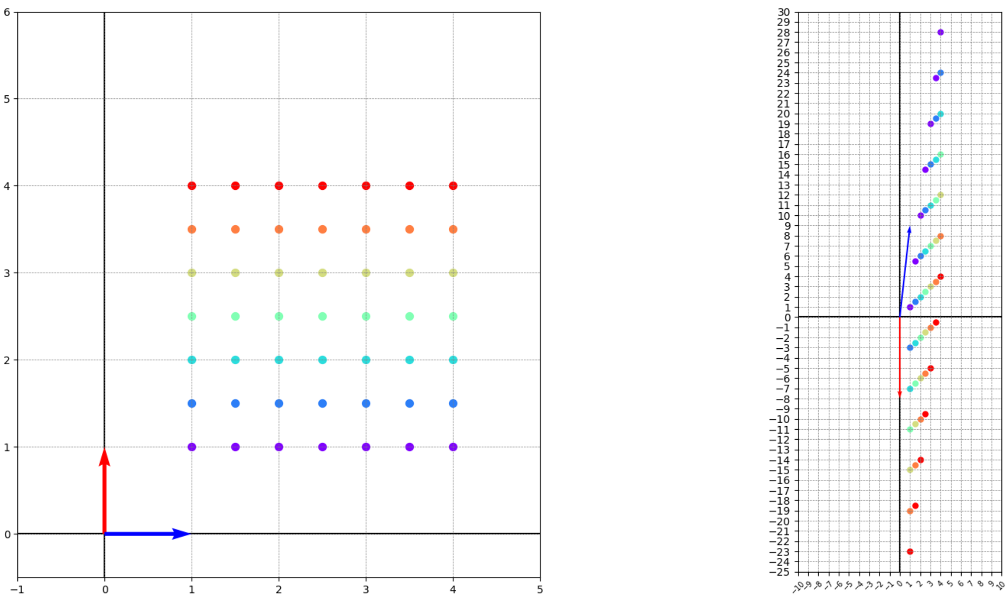

Рис. 19: Отображение 16. Влияние матрицы A

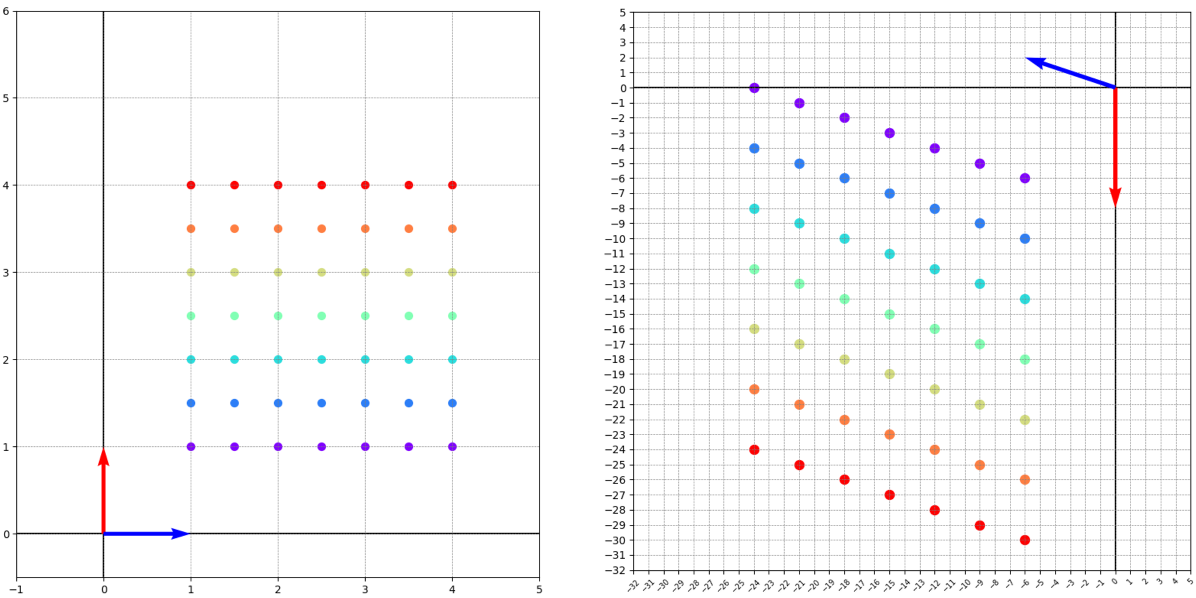

Рис. 20: Отображение 16. Влияние матрицы B

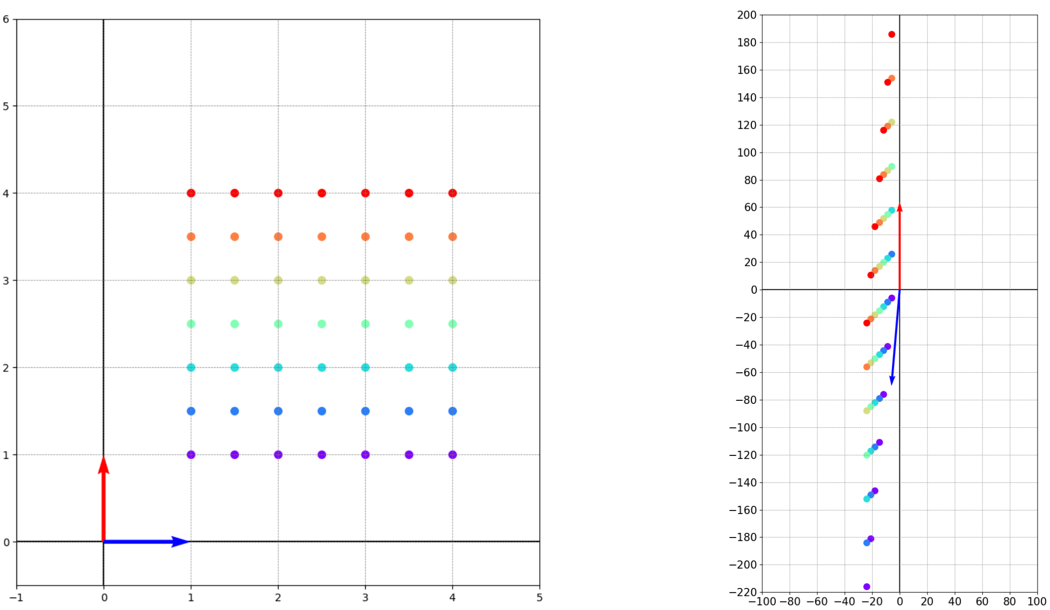

Рис. 21: Отображение 16. Влияние матрицы AB

Собственные векторы матрицы A:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -8, \lambda_2 = 1$$

Собственные векторы матрицы B:

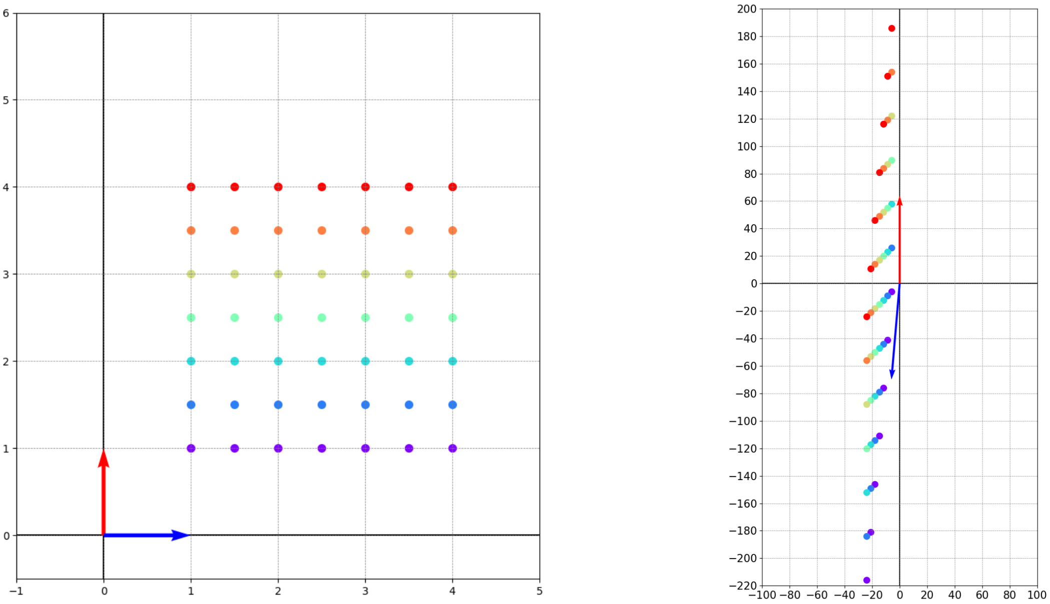

Рис. 22: Отображение 16. Влияние матрицы BA

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы B:

$$\lambda_1 = -8, \lambda_2 = -6$$

Собственные векторы матрицы AB:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы AB:

$$\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 64$$

Вывод

Во время этой лабораторной работы наша команда лучше поняла, как матрицы влияют на двумерное пространство. Мы увидели, как работают такие преобразования, как повороты, отражения, и как их можно визуализировать.

Мы узнали, что порядок применения матриц важен и может изменить результат. Это помогло нам понять, что в линейной алгебре последовательность действий имеет значение.

Также мы научились выбирать матрицы с нужными свойствами для достижения определенных эффектов. А самое главное видеть по матрице какое влияние она окажет на координатную плоскость. Теперь мы это можем не просто понять, но и представить в голове.

В целом, эта работа помогла нам лучше понять линейную алгебру и улучшить навыки работы с LaTeX для оформления расчетов и графиков.