

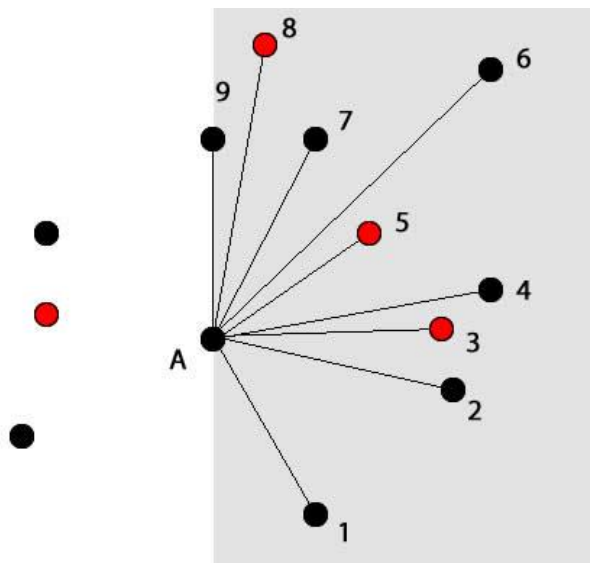
Space - Rješenje

Trivijalno je napraviti algoritam koji bi za svaku moguću trojku A, B i C od N tačaka prošao kroz svih M tačaka i provjerio da li se neka crna rupa nalazi u trouglu ABC . Ukupna složenost bi bila $O(N^3M)$, što nije dovoljno brzo za velike N i M .

Zvanično rješenje koristi sljedeći metod.

Sortiramo sve tačke po x koordinati, a ukoliko je za neke dvije tačke x koordinata ista, onda po y . Onda iterativno prolazimo kroz datih N tačaka koje predstavljaju planete po sortiranom poretku, tj. sa lijeva ka desno i odozdo prema gore.

Označimo trenutnu planetu sa A . Sada posmatramo samo tačke koje su direktno iznad ili desno od A (tj. koje dolaze iza nje u sortiranom poretku – sivi dio na slici). Sortiramo sve takve tačke prema uglu koji čini prava koja prolazi kroz njih i kroz A sa vertikalnom pravom provučenom kroz A (za sortiranje se



koristi osobina vektorskog proizvoda dva vektora u XoY ravni da je z koordinata vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ pozitivna ako je \vec{a} zakrenut desno u odnosu na \vec{b} , i onda iterativno prolazimo kroz sve planete u takvom poretku (na slici se vidi pomenuti poredak). Označimo trenutnu takvu planetu sa B . Duž AB čini jednu stranicu trougla i sada je potrebno naći koliko preostalih planeta mogu da zatvore sa AB trougao takav da ne sadrži nijednu crnu rupu.

Sada prolazimo redom, u datom poretku po uglovima, dalje od B kroz sve preostale tačke. Neka je trenutna takva tačka C .

Ukoliko je C planeta, gledamo da li se u trouglu ABC nalazi ijedna crna rupa. To radimo tako što pamtimo podatke o vektoru BD koji čini najveći ugao sa pravom AB a gdje je D crna rupa. Tj. držimo podatke o tome koliko mora biti najmanje zakrenuta duž BC u odnosu na AB da bi trougao bio bez crnih rupa. Ukoliko je ugao ABC manji od ugla ABD , onda smo našli jednu trojku koja zadovoljava uslove i povećavamo broj trojki za jedan. Na primjer, na slici je vektor koji spaja planete 1 i 4 desno od vektora koji spaja 1 i 3 (a 3 je crna rupa), pa kako je crna rupa 3 otkrivena prije planete 4 to trougao „A 1 4“ nije validan. Dok je recimo trougao „A 1 7“ validan jer su vektori „1 3“ i „1 5“ desno od vektora „1 7“.

Ukoliko je C crna rupa, poredimo uglove ABC i ABD i ukoliko je $ABC < ABD$, onda stavljamo da je ugao ABC novi ABD . Na početku, dok još nismo naišli na crnu rupu za date tačke A i B , ugao ABD ne postoji i sve planete na koje naiđemo zatvaraju validan trougao sa AB .

Zbog poretka po kojem obrađujemo tačke nikada nećemo ponavljati iste trojke.

Za svaku od N tačaka sortiranje po uglovima možemo obaviti u $(N + M)\log(N + M)$ vremenu. Dalje prolazimo kroz planete B u $O(N)$ vremenu i kroz sve preostale tačke u $O(N + M)$ vremenu. To sve ukupno daje složenost $O(N^2(N + M))$.