

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 33

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 09.02.2017



Maximilian Staab,
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,
Lukas Bach,
`lukas.bach@student.kit.edu`

Turingmaschinen

1 Turingmaschinen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Was sind Turingmaschinen?

Turingmaschinen

- Sehr mächtige Erweiterung Automat
 - Was heißt mächtig?
 - Turingmaschinen können eine große Vielfalt von Problemen lösen, einschließlich vieler in GBI besprochener Probleme
- Gesteuert durch einen endlichen Automaten, aber mit einem **unendlichen Arbeitsband** zum Zwischenspeichern von Informationen
- Besitzen einen Kopf um auf dem Band zu lesen und zu schreiben
- Turingmaschinen sind sozusagen genauso mächtig wie Computer
 - können also benutzt werden, um für Probleme zu entscheiden, **ob sie gelöst werden können oder nicht**

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Definition von Turingmaschinen

Eine Turingmaschine $T = (Z, z_0, X, f, g, m)$ besteht aus:

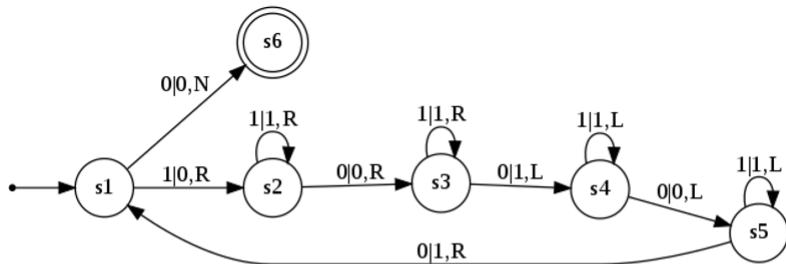
- Z Zustandsmenge
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- X Bandalphabet
- \square Blanksymbol (sozusagen Markierung für Leerzeichen)
- $f : Z \times X \rightarrow Z$ partielle Zustandsübergangsfunktion
- $g : Z \times X \rightarrow X$ partielle Ausgabefunktion
- $m : Z \times X \rightarrow \{L, N, R\}$ partielle Bewegungsfunktion

Anmerkung: partielle Funktionen sind **nicht linkstotal**, also manche Elemente des Definitionsbereichs werden nicht abgebildet.

Turingmaschinen

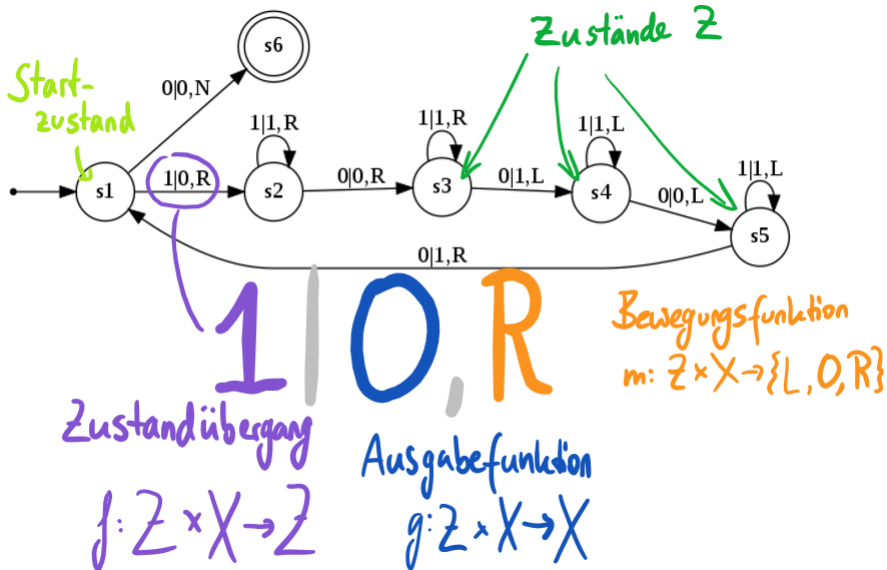
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen



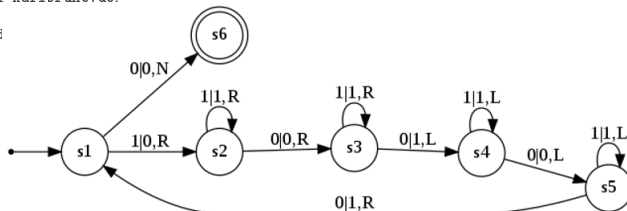
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen



Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de.
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen



Wie sehen die konkreten Abbildungsvorschriften der linken vier Pfeile aus?

■ $f : Z \times X \rightarrow Z$

■ $g : Z \times X \rightarrow X$

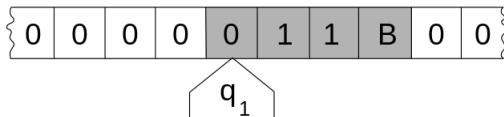
■ $m : Z \times X \rightarrow$
 $\{L, N, R\}$

	f	g	m
0 0, N	$(s1, 0) \mapsto s6$	$(s1, 0) \mapsto 0$	$(s1, 0) \mapsto N$
1 0, R	$(s1, 1) \mapsto s2$	$(s1, 1) \mapsto 0$	$(s1, 1) \mapsto R$
1 1, R	$(s2, 1) \mapsto s2$	$(s2, 1) \mapsto 1$	$(s2, 1) \mapsto R$
0 0, R	$(s2, 1) \mapsto s3$	$(s2, 1) \mapsto 0$	$(s2, 1) \mapsto R$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

- Unendliche Anreihung von Zeichen, die nach links und rechts unbegrenzt weiter geht



- Die Turingmaschine hat einen Kopf, mit dem sie das aktuelle Zeichen lesen oder überschreiben kann, oder kann ihn nach links oder rechts bewegen.
- Das Band einer Turingmaschine wird benutzt als...
 - Erhalten der Eingabe: Bevor die Turingmaschine startet, steht das Eingabewort auf dem Band, der Kopf steht auf dem ersten Zeichen der Eingabe.
 - Rückgabe der Ausgabe: Nach Beenden steht auf dem Band die Ausgabe (und der Kopf irgendwo).
 - Zwischenspeicher: Die Turingmaschine kann überall Informationen zwischenspeichern, diese müssen von der TM am Ende aber gelöscht werden.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

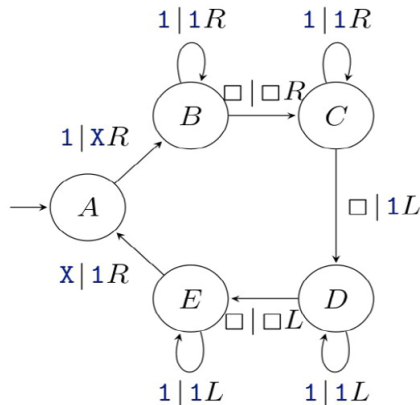
Gemeinsame Übung

Arbeite folgende Wörter mit der
Turingmaschine ab:

- 0
- 1
- 11
- 111

Was macht die Turingmaschine?

Die Turingmaschine macht aus 1^k die Ausgabe $1^k \square 1^k$.



Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

Halten einer Turingmaschine

Wenn eine Turingmaschine in einem Zustand ist, für den das nächste Eingabezeichen durch die Übergangsfunktion f nicht definiert ist, **hält** die Maschine.

Wann hält also eine Turingmaschine **nicht**?

Nicht-Halten einer Turingmaschine

Wenn eine Turingmaschine in eine endlose Schleife gerät, so **hält sie nicht**.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

Durch Turingmaschine akzeptierte Sprache

Eine Turingmaschine **akzeptiert** eine formale Sprache L , wenn sie für jedes Wort $w \in L$ in einem akzeptierenden Zustand hält.

Entscheidbare Sprache

Eine formale Sprache L heißt **entscheidbar**, wenn es eine Turingmaschine gibt, die **immer hält** und L akzeptiert.

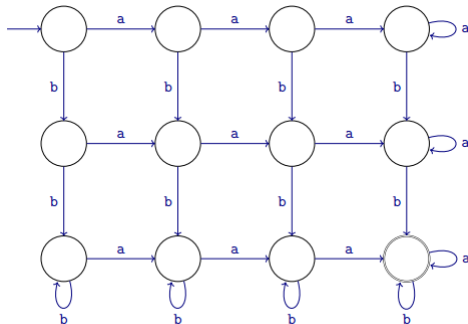
Aufzählbare Sprache

Eine formale Sprache L heißt **aufzählbar**, wenn es eine Turingmaschine gibt, die L akzeptiert.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Akzeptieren von Turingmaschinen

Wie kann man aus dem gegebenen endlichen Akzeptor eine Turingmaschine machen, die dieselbe Sprache akzeptiert?



Turingmaschinen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Einfach gesagt: mache aus jedem Übergang a einen Turingmaschinen-Übergang der Art $a|a, R$, also bei jedem Zeichen mache den Zustandsübergang, überschreibe aber das Zeichen nicht und gehe zum nächsten Zeichen.

Turingmaschinen

Formaler ausgedrückt?

- Für allgemeinen endlichen Akzeptor (Z, z_0, X, f, Y, h) , definiere eine Turingmaschine $T := (Z, z_0, X \cup Y, f, g, h)$, also Z, z_0, f gleich und mit Bandalphabet = Eingabealphabet \cup Ausgabealphabet
- $g(z, x) := x \quad \forall (z, x) \text{ in } f \text{ definiert}$
- $m(z, x) := R \quad \forall (z, y) \text{ in } f \text{ definiert}$

Jeder endliche Akzeptor kann so zu einer Turingmaschine umgeformt werden, die dieselbe Sprache akzeptiert.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

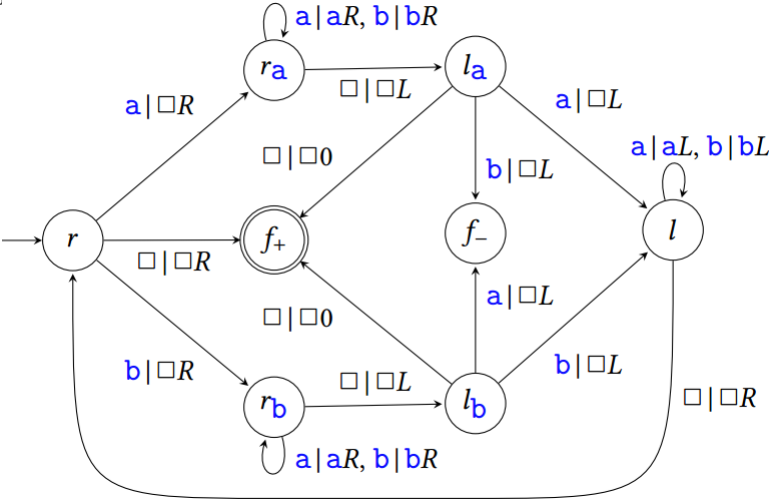
Sei L die Sprache von Palindromen über $\{a, b\}$
($L = \{aaba, bbababb, aa, \varepsilon\}$).

- Ist die Sprache regulär, also gibt es einen endlichen Akzeptor, der diese akzeptiert? Nein.
- Ist die Sprache entscheidbar, also gibt es eine stets haltende Turingmaschine, die L akzeptiert?

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Ja, nämlich:

Turingmaschinen



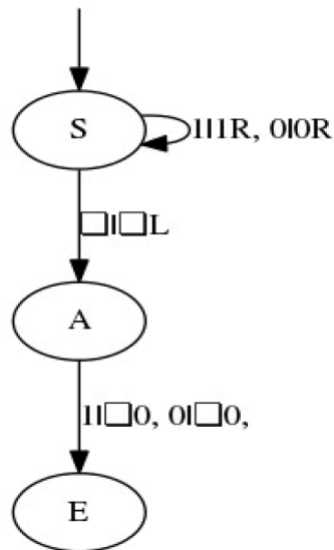
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

Turingmaschine Entwurf

Entwerfe eine Turingmaschine, die...

- als Eingabe eine Binärzahl auf dem Band erhält
- als Ausgabe diese Zahl restlos durch zwei teilt und auf dem Band stehen lässt



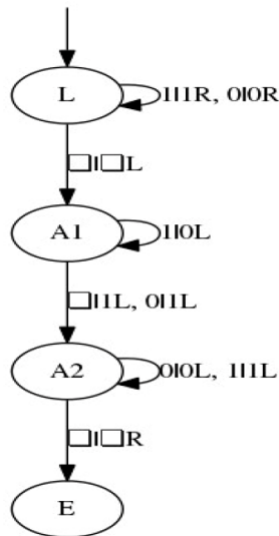
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen

Turingmaschine Entwurf

Entwerfe eine Turingmaschine, die...

- als Eingabe eine Binärzahl auf dem Band erhält
- als Ausgabe diese Zahl um eins erhöht auf dem Band stehen lässt
- den Kopf der Turingmaschine auf dem ersten Zeichen der Ausgabe stehen hat.

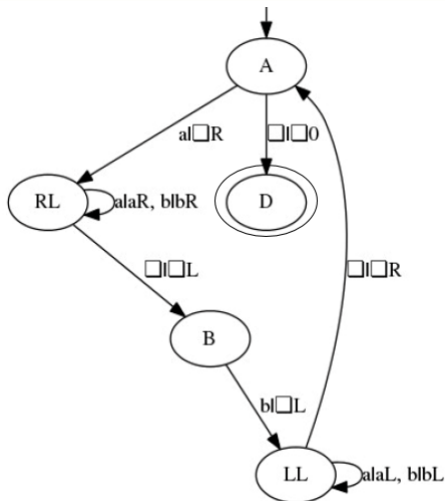


Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschine Entwurf

Entwerfe eine Turingmaschine, die die Sprache $\{a^k b^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Turingmaschinen



Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Angenommen, man kennt eine Turingmaschine, hat mit der Abarbeitung eines Wortes angefangen, will aber pausieren, um später weiterzumachen...

Turingmaschinen

Was muss man sich alles merken, um später weiter zu machen?

- Derzeitiger Zustand, in dem die Turingmaschine steht
- Inhalt des Bandes

Konfiguration von Turingmaschinen

Wenn während dem Arbeiten einer Turingmaschine auf dem Band das Wort $w_1 a w_2$ mit $w_1, w_2 \in X^*$, $a \in X$ steht, der Kopf der Turingmaschine auf das Zeichen a zeigt und die Turingmaschine im Zustand z ist, so schreibt man die **Konfiguration der Turingmaschine** als $\square w_1(z) a w_2 \square$.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Beispiel:

Turingmaschinen

□□□□□□□□ *abcbabb**d**aabc*□□□□□



KOPF

...sei das Band der Turingmaschine während Abarbeitung der Eingabe,
dazu steht sie im Zustand z_4 .

Dann sieht sieht die Konfiguration der Turingmaschine so aus:

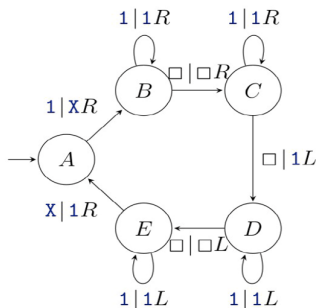
□ *abcbabb*(z_4) *daabc*□

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe zu Konfigurationen

Turingmaschinen

Gebe alle Konfigurationen der Turingmaschine bei Abarbeitung des Wortes 11 an.



$\square(A)11\square$

$\rightarrow \square X(B)1\square$

$\rightarrow \square X1(B)\square$

$\rightarrow \square X1\square(C)\square$

$\rightarrow \square X1(D)\square1\square$

$\rightarrow \square X(E)1\square1\square$

$\rightarrow \square(E)X1\square1\square$

$\rightarrow \square1(A)1\square1\square$

$\rightarrow \square1X(B)\square1\square$

$\rightarrow \square1X\square(C)1\square$

$\rightarrow \square1X\square1(C)\square$

$\rightarrow \square1X\square(D)11\square$

$\rightarrow \square1X(D)\square11\square$

$\rightarrow \square1(E)X\square11\square$

$\rightarrow \square11(A)\square11\square$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Halteproblem: Für einen gegebenen Algorithmus, gelingt dieser bei seiner Abarbeitung zu einem Ende und hält?

Turingmaschinen

- Algorithmen können durch Turingmaschinen durchgeführt werden
- Turingmaschinen können durch sogenannte universelle Turingmaschinen simuliert werden
 - Wenn eine Turingmaschine T kodiert ist mit dem Wort w , dann ist $T_w : X \rightarrow X$ eine Funktion, die Eingaben auf die Ausgabe der Turingmaschine T mappt.
 - Also mit $X = \{1, 0\}$ gibt z.B. $T_w(100101) = 001$ genau dann zurück, wenn, sofern man 100101 als Eingabe an die Turingmaschine mit der Kodierung w gibt, diese hält und als Ausgabe 001 erzeugt.

Dann lässt sich das Halteproblem auch als Sprache formulieren:

$$H = \{w \in A^* : w \text{ ist eine TM-Codierung und } T_w(w) \text{ hält.}\}$$

bzw. als allgemeinerer Fall:

$$\hat{H} = \{(w, x) \in A^* \times A^* : w \text{ ist eine TM-Codierung und } T_w(x) \text{ hält.}\}$$

Maximilian Staab,
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,
Lukas Bach,
`lukas.bach@student.kit.edu`

Turingmaschinen

Das Halteproblem ist unentscheidbar, dh. es gibt keine Turingmaschine, die H entscheidet.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Busy Beaver TM ist eine Turingmaschine mit n Zuständen, die möglichst viele Einsen auf das Band schreibt **und hält**.

Turingmaschinen

- Also nicht einfach ewig Einsen aufschreibt und nie aufhört.

Busy Beaver Problem: Für eine gegebene Turingmaschine mit n Zuständen, die Einsen aufschreibt und hält: Schreibt sie auch maximal viele Einsen auf?

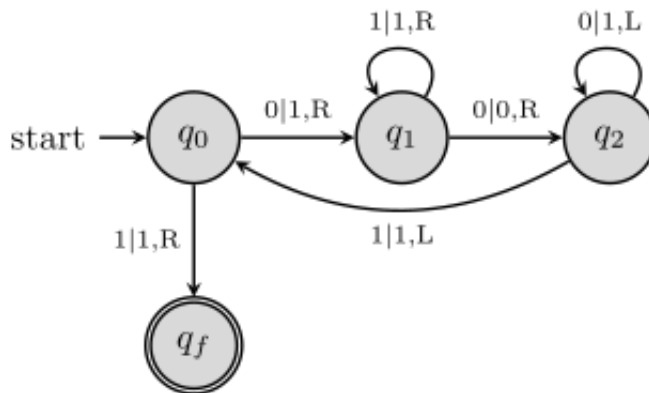
Das Busy Beaver Problem ist nicht entscheidbar, bzw. die Busy Beaver Funktion $bb(n)$, die definiert, wieviele Einsen von einer Busy Beaver TM maximal geschrieben werden können, ist nicht berechenbar.

Beispielwerte von bb :

$$bb(1) = 1, bb(2) = 4, bb(5) \geq 4098, bb(6) > 10^{18276}.$$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Turingmaschinen



Maximilian Staab,
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,
Lukas Bach,
`lukas.bach@student.kit.edu`

Turingmaschinen

- Alle Folien und Folienpaket jetzt online.
- Fragen zur Klausur oder zur Vorbereitung?

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit

Turingmaschinen

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
 - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
 - Donnerstags, 14:00 - 15:30
 - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
 - <http://gbi.ira.uka.de>
 - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
 - 06.03.2017, 11:00
 - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
 - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul