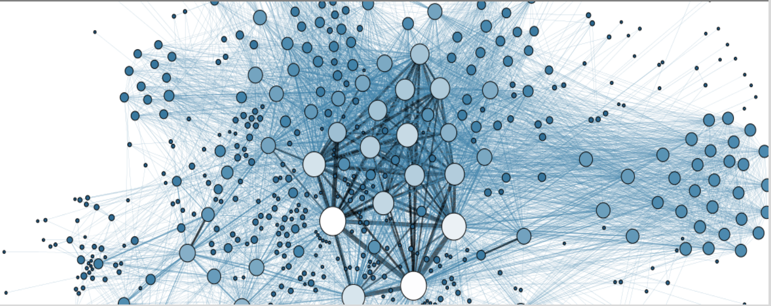
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 26.01.2017



Gliederung

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

1. Komplexitätstheorie
   - Mastertheorem
2. Automaten

Rückblick

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- Was ist $\Omega(f), \Theta(f), \mathcal{O}(f)$?
- Wieso messen wir nicht einfach Laufzeit in “Anzahl Operationen”?

Obere und untere Schranke

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

$$O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Untere Schranke (Best-Case Approximation)

$$\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

Average-Case Approximation

$$\Theta(f) = \{g | \exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n) \leq c' \cdot f(n)\}$$

Auf welche Weise wird hier approximiert?

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Gelten folgende Approximationen?

- $4n^2 + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Ja.
- $5n^2 + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Ja.
- $4n^{2,1} + \pi n + 2\sqrt{n} \in \Theta(n^2)$? Nein.

Es sind immer nur die höchsten Faktoren interessant!

- $4n^4 + 3c^6 \in \Theta(n^4)$? Ja, c ist eine Konstante, $3c^6 = (3c^6)n^0$ hat eine kleinere Potenz als n^4.
- $\log_{4213}(n) \in \Theta(\log_2(n)$ Ja, die Basis des Logarithmus ist im O-Kalkül egal.
  - Grund: $\mathcal{O}(\log_b n) = \mathcal{O}(\frac{\log_a n}{\log_a b}) = \mathcal{O}(\frac{1}{\log_a b}\log_a n) = \mathcal{O}(\log_a n)$.
- $n! \in \Theta(n^{\pi e 2000})$ Nein, Fakultät wächst asymptotisch schneller als fast alles andere.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Gelten folgende Approximationen?

- $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^5)$? Ja.
- $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^4)$? Ja.
- $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$? Ja.
- $4n^3 + 2n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$? Nein.
- $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^5)$? Nein.
- $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^4)$? Nein.
- $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^3)$? Ja.
- $4n^3 + 2n^2 \in \Omega(n^2)$? Ja.

Grundbegriffe der Informatik

Aufgabe

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.un
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Komplexitätstheorie
Mastertheorem
Automaten

Übungsaufgabe

Entscheide für jede Zelle, ob die Formel der Zeile in der Menge der Spalte liegt.

	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n)$	$\Theta(c!)$	$\Theta(n^\pi)$	$\Omega(n^6)$	$\Omega(n!)$
$2n^2+4n$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
π	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\log(n)$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$n\log(n)$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
n^π	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$12n^3+7000n^2$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
n^3	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$n!$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- $\mathcal{O}(n^2) \cap \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(?)$? $= \mathcal{O}(n)$.
- $\mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^3) = \emptyset$

Grundlegende Reihenfolge von Größen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

$$1 \preccurlyeq \log n \preccurlyeq n \log n \preccurlyeq n^2 \preccurlyeq n^3 \preccurlyeq n^{10000} \preccurlyeq n^2 \preccurlyeq 3^n \preccurlyeq 1000^n \preccurlyeq n! \preccurlyeq n^n$$

Mathematische Definitionen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \infty$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$$

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow 0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$$

Z

eige:

- $3n^2 + 14n + 159 \in \Theta(n^2)$
- $\log n^2 \in \Theta(\log n^3)$
- $\log^2 n \in \mathcal{O}(\log^3 n)$

Komplexität mit vollständiger Induktion beweisen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Z

eige mittels vollständiger Induktion:

- $2^n \in \Theta(n^3)$
- $(n+1)! \in \Theta(n! + 2^n)$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Größenordnung	Bezeichnung
$\mathcal{O}(1)$	konstante Laufzeit
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Laufzeit
$\mathcal{O}(\log^2 n)$	quadratisch logarithmische Laufzeit
$\mathcal{O}(n)$	lineare Laufzeit
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratische Laufzeit
$\mathcal{O}(n^3)$	kubische Laufzeit
$\mathcal{O}(n^k)$	polynomielle Laufzeit

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.ed


```
r ← 0
for i ← 0 to n/2 do
  s ← 0
  for j ← i to n – i do
    s ← s + j
  od
  r ← s + n * i
  r ← r + s
od
```

- Wie oft wird die innere Schleife durchlaufen? $n - 2i + 1$ mal.
- Wie kommen wir jetzt auf die Gesamtlaufzeit?
- $\sum_{i=0}^{n/2}(n-2i+1) = \frac{n}{2}n - 2\sum_{i=0}^{n/2} i + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 2\frac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} =$
  $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = \frac{1}{4}n^2$
- Kann man das einfacher machen?

Mastertheorem

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.u
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Komplexitätstheorie
Mastertheorem
Automaten

Formel für Mastertheorem

Rekursive Komplexitätsformeln der Form

$$T(n) = a \cdot T(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

lassen sich mit dem Mastertheorem Komplexitätsklassen zuordnen.

Auflösung des Mastertheorem

Fall 1: Wenn $f \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, dann ist $T \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Fall 2: Wenn $f \in \Theta(n^{\log_b a})$ ist, dann ist $T \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.

Fall 3: Wenn $f \in \mathcal{O}(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, und wenn es eine Konstante d gibt mit $0 < d < 1$, so dass für alle hinreichend großen n gilt $af(n/b) \leq df$, dann ist $T \in \Theta(f)$.

Aufgaben zum Mastertheorem

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- $T(n) := 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$, also $a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n}$, also zweiter Fall des Mastertheorems. $T \in \Theta(\sqrt{n}\log n)$
- $T(n) := 3T(\frac{n}{2}) + n\log n$, also $a = 3, b = 2, f(n) = n\log n$, also erster Fall des Mastertheorems, $T \in \Theta(n^{\log_2 3})$
- $T(n) := 4T(\frac{n}{2}) + n^2\sqrt{n}$, also $a = 4, b = 2, f(n) = n^2\sqrt{n}$, also dritter Fall des Mastertheorems, $T \in \Theta(n^2\sqrt{n})$.

Definition eines endlichen Automaten

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Endlicher Automat

Ein endlicher Automat ist ein Tupel $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit...

- endliche Zustandsmenge Z
- Anfangszustand $z_0 \in Z$
- Eingabealphabet X
- Zustandsübergangsfunktion $f : Z \times X \rightarrow Z$
- Ausgabealphabet Y
- Ausgabefunktion
  - Mealy-Automat: $g : Z \times X \rightarrow Y^*$
  - Moore-Automat: $h : Z \rightarrow Y^*$

Informationen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul