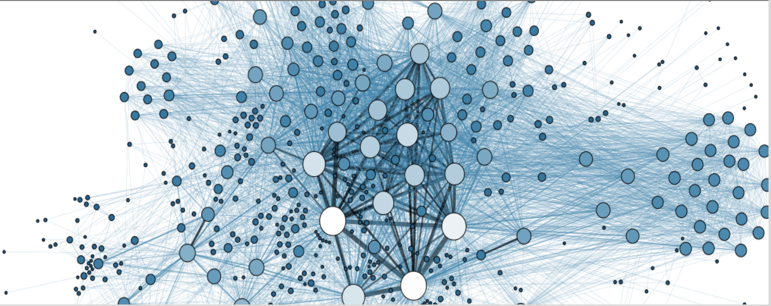
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 19.01.2017



Gliederung

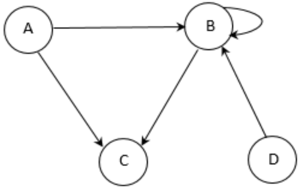
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

1. Repräsentation von Graphen
   - Adjazenzlisten
2. Erreichbarkeit
   - Zwei-Erreichbarkeit
   - Erreichbarkeit
   - Algorithmus
3. Komplexitätstheorie
   - O-Notation

Repräsentation von Graphen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Wie stellen wir Graphen da?



Anschaulich ja, aber wie können wir Graphen z.B. mit Java realisieren?

Objektorientierte Repräsentation von Graphen

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de, Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu

Klassenmodell?

```
class Vertex {
   String name; //Genauer Inhalt interessiert uns nicht
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Objektorientierte Repräsentation von Graphen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- \+ Intuitiv
- – Es lassen sich nur schwer Algorithmen hierfür entwerfen (z.B. gilt $(x, y) \in E$?)

Repräsentation mit Adjazenzlisten

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Jeder Knoten speichert seine Nachbarn:

```
class Vertex {
    String name; //Genauer Inhalt interessiert uns nicht
    Vertex[] neighbours; //Alle Nachbarknoten
}

class Graph {
    Vertex[] vertices;
    Edge[] edges;
}
```

Repräsentation mit Adjazenzlisten

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- + Speicherplatzeffizient bei wenigen Kanten im Vergleich zur Knotenanzahl ($|E| << |V|^2$)
- + Flexibel mit verketteten Listen statt Arrays (Leichtes Hinzufügen und Entfernen)

Repräsentation mit Adjazenzmatrix

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- Was ist eine Adjazenzmatrix?
- Zu allen Paaren (i, j) mit $i, j \in V$ wird gespeichert, ob $(i, j) \in E$ gilt
- Zweidimensionales Array

```
class Graph {
    boolean[][] edges; //Größe |V| × |V|
}
```

Repräsentation mit Adjazenzmatrix

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

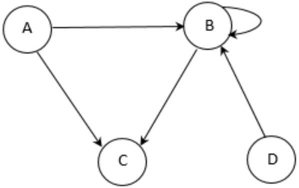
+ Speicherplatzeffizient bei annähernd maximaler Anzahl von Kanten ($|E| \approx |V|^2$)
+ Algorithmen aus linearer Algebra können verwendet werden (Matrizenrechnung)
– nicht flexibel

Grundbegriffe
der Informatik

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe

Gebe alle Adjazenlisten und die Adjazenzmatrix für diesen Graphen an:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Repräsentation von zweistelligen Relationen durch Matrizen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Wir können jede endliche zweistellige Relation durch eine Matrix darstellen!

Aufgabe

Stelle die Kleiner-Gleich-Relation auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ dar!

$$R_{\leq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wege-Problem

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- Algorithmisches Problem
- Intuitiv: Gibt es einen Weg von i nach j?

Wege-Problem

Gegeben einem Graphen $G = (V, E)$. Ist für $i, j \in V$ auch $(i, j) \in E^*$?

Ziel

- Gegeben: Adjazenzmatrix
- Gesucht: Zugehörige **Wegematrix**, für die gilt:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls ein Weg von i nach j existiert} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Einschub Matrizen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Was wisst ihr zu folgenden Begriffen?

- Matrizenmultiplikation
- Matrizenaddition
- Potenzieren
- Einheitsmatrix
- Nullmatrix

Quadrierte Adjazenzmatrix

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe

Quadriere die Adjazenzmatrix von vorhin: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

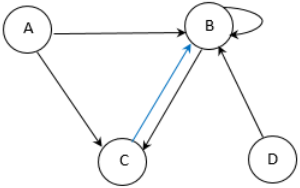
Ergebnis

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe

Bilde und quadriere die Adjazenzmatrix des veränderten Graphen:

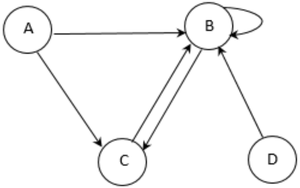


$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

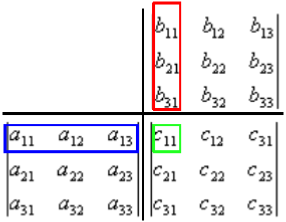
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe

Was fällt euch auf? Wann steht in A'^2 eine 1, wann eine 2 und was bedeutet das für unseren Graphen?



$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Tipp: $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Lösung

In der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A^2 steht die Anzahl der Wege von i nach j der Länge zwei.

$\rightarrow$ $(A^2)_{ij}$ = Anzahl der Pfade von i nach j der Länge zwei.

Aufgabe

Habt ihr Ideen, wie man herausfindet, zwischen welchen Knoten Pfade der Länge n existieren?

Lösung

Betrachte A^n!

Zwei-Erreichbarkeit

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Eigentlich interessiert uns nur, ob ein Pfad der Länge zwei existiert und nicht wie viele...

Definition Signum-Funktion

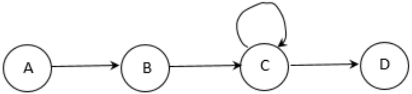
$sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

$sgn(A^2)$ liefert uns die Zwei-Erreichbarkeitsmatrix

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe



Gebe A^0, A^2 und die Wegematrix W an!

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erreichbarkeit

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Für Pfade beliebiger Länge erhalten wir:

$$W = sgn(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + ...) = sgn(\sum_{i=0}^{\infty} A^i)$$

Wir können nicht unendlich lange addieren... Ist das ein **Problem**?

Erreichbarkeit- unendlich addieren?

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Wenn ein Pfad p der Länge $\geq n := |V|$ zwischen $i \neq j$ existiert, muss mindestens ein Knoten doppelt vorgekommen sein! Der Pfad p enthält also einen Zyklus, den wir raus kürzen können.

Ergebnis

Wenn ein Pfad p der Länge $\geq n := |V|$ zwischen $i \neq j$ existiert, existiert auch ein Pfad p' der Länge $< n$.

Für Pfade beliebiger Länge erhalten wir:

$$W = sgn(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \ldots) = sgn(\sum_{i=0}^{\infty} A^i) = sgn(\sum_{i=0}^{n-1} A^i)$$

Einfacher Algorithmus zu Berechnung der Wegematrix

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.ed

⟨*Matrix A sei die Adjazenzmatrix*⟩
$W \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow I$
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)$

⟨*Matrix A sei die Adjazenzmatrix*⟩
$W \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow I$
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $\{ M = A^i \}$
  $W \leftarrow W + M$
  $\{ W = \sum_{k=0}^{i} A^k \}$
od
$W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)$
$\{ W$ ist die Wegematrix $\}$

Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot$$

Wie könnte man diesen Algorithmus schneller machen?

für A^i kann man A^{i-1} wiederverwenden

$W \leftarrow 0$
$M \leftarrow I$

Komplexitätstheorie

Karlsruher Institut für Technologie

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Wichtige Komplexitätsmaße:

- Speicherplatzbedarf
- Rechen- bzw. Laufzeit

Unterscheidung in

- Best Case (oft uninteressant)
- Average Case (schwierig zu finden, deswegen selten angegeben)
- Worst Case (meistens angegeben)

Ignorieren konstanter Faktoren

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Definition

Seien $g, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ Funktionen. Dann wächst g asymptotisch genauso schnell wie f genau dann, wenn gilt:
$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n) \leq c' \cdot f(n)$

Notation

$f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$ (äsymptotisch gleich")

Bemerkung

$\asymp$ ist eine Äquivalenzrelation

Theta

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Definition

$\Theta(f) = \{g | g \asymp f\}$

Satz

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : \Theta(a \cdot f) = \Theta(b \cdot f)$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.ur
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Obere und untere Schranke

Karlsruher Institut für Technologie

Obere Schranke (Worst-Case Approximation)

$$O(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Untere Schranke (Best-Case Approximation)

$$\Omega(f) = \{g | \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

Notation

- $g \preceq f$ falls $g \in O(f)$ bzw. g wächst asymptotisch höchstens so schnell wie f
- $g \succeq f$ falls $g \in \Omega(f)$ bzw. g wächst asymptotisch mindestens so schnell wie f

Bemerkung

Es gilt $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Lemma

$$log_a n \in \Theta(log_b n)$$

Beispiel

$$log_2 n \in \Theta(log_8 n)$$

Beweis

$$\frac{1}{3} log_2 n = \frac{1}{log_2 8} log_2 n = \frac{log_2 n}{log_2 8} = log_8 n \leq log_2 n$$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgabe

Gilt $log_2(n^{20}) \in \Theta(logn)$

Lösung

Ja, denn $log_2(n^{20}) = 20 \cdot log_2 n$

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Probeklausur

Informationen

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de, Lukas Bach, lukas.bach@student.kit

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul