

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Maximilian Staab, [maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de](mailto:maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de)

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 22.12.2016



Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül



Algorithmen

- Pseudocode
- Das Hoare-Kalkül

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

- Es existiert eine **endliche** Beschreibung
- Es wird zu einer beliebig großen, aber **endlichen** Eingabe eine **endliche** Ausgabe berechnet
- Es finden **endlich** viele Schritte statt (der Algorithmus terminiert)
- Deterministisch (bei mehrmaliger Ausführung kommt immer das selbe raus)

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Algorithmen

### Pseudocode

#### Das Hoare-Kalkül

- Zuweisungssymbol  $\leftarrow$
- Schlüsselwörter für Verzweigungen **if, then, else, fi**
- Schlüsselwörter für Schleifen **while, do, od, for, to**
- Symbole für Konstanten, Funktionen und Relationen

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## Eine **if**-Verzweigung

```
1 if  $x < y$  then  
2    $s \leftarrow x$   
3 else  
4    $s \leftarrow y$   
5 fi
```

## Eine **while**-Schleife

```
1 while  $x > 0$  do  
2    $x \leftarrow x \text{ div } 2$   
3    $s \leftarrow s + x$   
4 od
```

## Eine **for**-Schleife

```
1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
2    $s \leftarrow s + i$   
3 od
```

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Algorithmen

### Pseudocode

### Das Hoare-Kalkül

- Komplexe Algorithmen mit Pseudocode definieren zu Sortierung, Graphen, Datenstrukturen, im Modul [Algorithmen I](#)
- Laufzeitanalyse von Algorithmen, später.
- Korrektheitsbeweise, jetzt.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Algorithmen

### Pseudocode

### Das Hoare-Kalkül

Wie findet man heraus, ob ein Algorithmus korrekt funktioniert?

- Durch den Beweis von Zusicherungen, die an bestimmten Stellen des Algorithmus gelten.

Was sind Zusicherungen?

- prädikatenlogische Formeln, die Aussagen über (Zusammenhänge zwischen) Variablen machen

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Definition

$\{P\}S\{Q\}$  heißt Hoare-Tripel. Dabei gilt:

- S ist ein Programmstück im Pseudocode
  - P und Q sind Zusicherungen
- 
- P nennt man Vorbedingung, Q Nachbedingung
  - Prädikatenlogische Formeln
  - Beispiel (Vorausblick):  $\{x \doteq 1\}x \leftarrow x + 1\{x \doteq 2\}$
  - Meistens in jeder Zeile nur eine Zeile Code oder ein Zusicherungsblock

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül



Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## Gültigkeit von Hoare-Tripeln

$\{P\}S\{Q\}$  ist gültig, wenn für jede gültige Interpretation  $(D, I)$  und Variablenbelegung  $\beta$  gilt:

Aus

- $val_{D,I,\beta}(P) = w$
- $\beta'$  ist Variablenbelegung nach Ausführung von  $S$

folgt  $val_{D,I,\beta'}(Q) = w$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## Axiom HT-A

- Sei  $x \leftarrow E$  eine Zuweisung
- $Q$  eine Nachbedingung von  $x \leftarrow E$  und
- $\sigma_{\{x/E\}}$  kollisionsfrei für  $Q$

Dann ist  $\sigma_{\{x/E\}}(Q)x \leftarrow E\{Q\}$  ein gültiges Hoare-Tripel

## Bemerkung

- $\sigma_{\{x/E\}}$  ist die Substitution von  $x$  mit  $E$
- Bei Anwendung der Regel rückwärts vorgehen

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Beispiel

Betrachte die Zuweisung

$x \leftarrow x + 1$

und die Nachbedingung

$\{x \doteq 1\}$

Nach HT-A gilt

$\{x + 1 \doteq 1\} \ x \leftarrow x + 1 \ \{x \doteq 1\}$  ist ein gültiges Hoare-Tripel.

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

- Verstärkung der Vorbedingung
- Abschwächung der Nachbedingung

## HT-E

Wenn  $\{P\}S\{Q\}$  ein gültiges Hoare-Tripel ist und  $P' \vdash P$  und  $Q \vdash Q'$  gelten, dann folgt:  
 $\{P'\}S\{Q'\}$  ist ein gültiges Hoare-Tripel.

### Bemerkung

$B \vdash A :\Leftrightarrow$  Aussage  $A$  ist syntaktisch aus Aussage  $B$  ableitbar

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Beispiel

Angenommen es sei  $\{y > 3\} x \leftarrow y - 1 \{x > 1\}$  ein gültiges Hoare-Tripel.

Es gilt  $\{(y > 4)\} \vdash \{(y > 3)\}$  und  $\{(x > 1)\} \vdash \{(x > 0)\}$ .

Also folgt nach HT-E:

$\{y > 4\} x \leftarrow y - 1 \{x > 0\}$  ist ein gültiges Hoare-Tripel.

## Bemerkung

Es müssen sich nicht unbedingt beide Bedingungen ändern!

Aus  $\{(y > 3)\} \vdash \{(y > 3)\}$  und  $\{(x > 1)\} \vdash \{(x > 0)\}$

folgt nach HT-E auch

$\{y > 3\} x \leftarrow y - 1 \{x > 0\}$  ist ein gültiges Hoare-Tripel.

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

Hintereinanderausführung von durch Hoare-Triple bewiesene Code  
Segmente sind selbst gültig.

## HT-S

Wenn  $\{P\}S_1\{Q\}$  und  $\{Q\}S_2\{R\}$  gültige Hoare-Tripel sind, dann  
folgt:  $\{P\}S_1; S_2\{R\}$  ist ein gültiges Hoare-Tripel.

### Bemerkung

";" trennt hier zwei Programmstücke

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Algorithmen

### Pseudocode

### Das Hoare-Kalkül

## Beispiel

Angenommen es seien  $\{y > 3\} x \leftarrow y - 1 \{x > 1\}$  und  
 $\{x > 1\} z \leftarrow x - 1 \{z > -1\}$  gültige Hoare-Tripel.

Dann folgt nach HT-S:

$\{y > 3\} x \leftarrow y - 1; z \leftarrow x - 1 \{z > -1\}$  ein gültiges Hoare-Tripel.

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## HT-I

Wenn  $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$  und  $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$  gültige Hoare-Tripel sind, dann folgt:

```
{P}
  if B then S1
  else S2
  fi
{Q}
```

ist ein gültiges Hoare-Tripel.



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Algorithmen

### Pseudocode

### Das Hoare-Kalkül

$\{ x = a \wedge y = b \}$

**if**  $x > y$

**then**

$\{ \dots \}$

$z \leftarrow x$

$\{ \dots \}$

**else**

$\{ \dots \}$

$z \leftarrow y$

$\{ \dots \}$

**fi**

$\{ z = \min(a, b) \}$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Algorithmen

### Pseudocode

### Das Hoare-Kalkül

$$\{ x = a \wedge y = b \}$$

**if**  $x > y$

**then**

$$\{ x = a \wedge y = b \wedge \neg(x > y) \}$$
$$\{ x = \min(a, b) \}$$
$$z \leftarrow x$$
$$\{ z = \min(a, b) \}$$

**else**

$$\{ x = a \wedge y = b \wedge x > y \}$$
$$\{ y = \min(a, b) \}$$
$$z \leftarrow y$$
$$\{ z = \min(a, b) \}$$

**fi**

$$\{ z = \min(a, b) \}$$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## HT-W

Wenn  $\{I \wedge B\} S \{I\}$  ein gültiges Hoare-Tripel ist, dann folgt:

$\{I\}$

**while**  $B$  **do**  $S$

**od**

$\{I \wedge \neg B\}$

ist ein gültiges Hoare-Tripel.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

- Eine spezielle Zusicherung
- Schleifeninvarianten müssen **vor**, **während** und **nach** jedem Schleifendurchlauf gelten
- Garantiert, dass die Schleife nicht während einem beliebigen Durchlauf “kaputt” geht.

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

$\{ x = a \wedge y = b \}$

$\{ \dots \}$

**while**  $y \neq 0$

**do**

$\{ \dots \}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{ \dots \}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{ \dots \}$

**od**

$\{ \dots \}$

$\{ x = a + b \}$

$$\{ x = a \wedge y = b \}$$

$$\{ x + y = a + b \}$$

**while**  $y \neq 0$

**do**

$$\{ x + y = a + b \wedge y \neq 0 \}$$

$$\{ x + 1 + y - 1 = a + b \}$$

$$y \leftarrow y - 1$$

$$\{ x + 1 + y = a + b \}$$

$$x \leftarrow x + 1$$

$$\{ x + y = a + b \}$$

**od**

$$\{ x + y = a + b \wedge \neg(y \neq 0) \}$$

$$\{ x = a + b \}$$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit

Algorithmen

Pseudocode

Das Hoare-Kalkül

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul