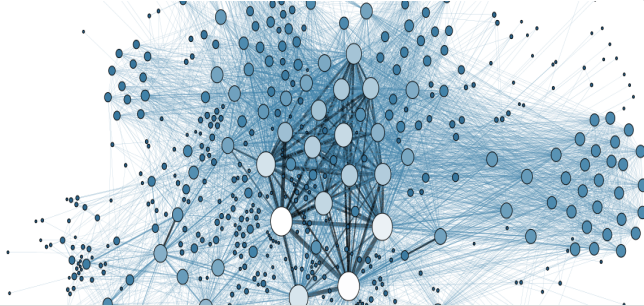


Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 38

Vollständige Induktion, Formale Sprachen, Übersetzungen/Kodierungen

Patrick Fetzer, uxkln@student.kit.edu | 08.11.2018



- Set comprehension: $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ mit A eine Menge und P eine Aussage
- Beispiel: $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$
- Sei A ein Alphabet; $x, y \in A$; $v \in A^*$
- Warum ist $f(xvy) = xf(v)$ wohldefiniert, auch für $f(xy)$?

Wahrheitsgehalt von unendlich Aussagen

Beispielsituation: Wir haben unendlich viele Dominosteine. Behauptung: Alle Dominosteine fallen um.

- Wir haben Aussagen: {"1. Stein fällt um", "2. Stein fällt um", ...}
- Wie zeigen wir unendlich viele Aussagen?
- Stelle Aussagen in Abhängigkeit einer Laufvariable n dar:
 - $A(n) := \text{"}n\text{-ter Stein fällt um" } \forall n \in \mathbb{N}.$
- Aussage $A := \text{"Alle Steine fallen um"} \equiv A(i)$ ist wahr $\forall i \in \mathbb{N}.$

Wir haben immernoch unendlich viele Aussagen...

- Zeige: $A(1)$ ist wahr, sowie $A(i)$ gilt $\rightarrow A(i+1)$ gilt für beliebiges $i \in \mathbb{N}.$
- Also: Der erste Stein fällt, sowie: falls der i -te Stein fällt, so fällt auch der $i+1$ -te Stein.
- Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion fallen dann alle Steine um.

- Beweisverfahren
- In der Regel zu zeigen: Eine Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}_+$, manchmal auch für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- Man schließt “induktiv” von einem n auf $n+1$
- Idee: Wenn die Behauptung für ein beliebiges **festes** n gilt, dann gilt sie auch für den Nachfolger $n+1$ (und somit auch für dessen Nachfolger und schließlich für alle n)

Behauptung: (*kurz Beh.:*)

Beweis: (*kurz Bew.:*)

- Induktionsanfang: (*kurz IA:*)
 - Zeigen, dass Behauptung für Anfangswert gilt (oft $n = 1$)
 - Auch mehrere (z.B. zwei) Anfangswerte möglich
- Induktionsvoraussetzung: (*kurz IV:*)
 - Sei $n \in \mathbb{N}_+$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$) fest aber beliebig und es gelte [Behauptung einsetzen]
- Induktionsschritt: (*kurz IS:*)
 - Behauptung für $n+1$ auf n zurückführen
 - Wenn induktive Definition gegeben: verwenden!
 - Sonst: Versuche Ausdruck, in dem $(n+1)$ vorkommt umzuformen in einen Ausdruck, in dem nur n vorkommt

Vorhin:

$\underbrace{A(1) \text{ ist wahr}}_{IA}, \text{ sowie } \underbrace{A(i) \text{ gilt}}_{IV} \rightarrow \underbrace{A(i+1) \text{ gilt}}_{IS} \text{ für beliebiges } i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

$$x_0 := 0$$

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := x_n + 2n + 1$$

Zeige mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_n = n^2$$

gilt.

Übungsaufgaben

Zeige die Wahrheit folgender Aussagen mit vollständiger Induktion:

■ $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

■ $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Was war nochmal A^* ? Menge aller Wörter *beliebiger* Länge über Alphabet A .
- Was war nochmal eine formale Sprache?

Formale Sprache

Eine Formale Sprache L über einem Alphabet A ist eine Teilmenge $L \subseteq A^*$.

Als Beispiel von vorigen Folien:

- $A := \{b, n, a\}$.
 - $L_1 := \{ban, baan, nba, aa\}$ ist eine mögliche formale Sprache über A .
 - $L_2 := \{banana, bananana, banananana, \dots\}$
 $= \{w : w = bana(na)^k, k \in \mathbb{N}\}$ auch.
 - $L_3 := \{ban, baan, baaan, \dots\}$ auch. Andere Schreibweise?
 $L_3 = \{w : w = ba^k n, k \in \mathbb{N}\}$

Produkt von formalen Sprachen

Von zwei formalen Sprachen L_1, L_2 lässt sich das Produkt $L_1 \cdot L_2$ bilden mit $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$.

Sei $A := \{a, b\}, B := \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \delta\}$.

- Sprache $L_1 \subseteq A^*$, die zuerst drei a 's enthält und dann entweder zwei b 's oder vier a 's? $L_1 = \{aaa\} \cdot \{bb, aaaa\}$.
- Sprache $L_2 \subseteq A^*$, die alle Wörter über A enthält außer ε ?
 $L_2 = A \cdot A^* = A^* \setminus \{\varepsilon\}$.
- Sprache $L_3 \subseteq B^*$, die alle Wörter über B enthält, mit:
 - Zwei beliebigen Zeichen aus B .
 - Dann einem ε oder zwei δ 's.
 - Dann vier Zeichen aus A .
- $L_3 = B \cdot B \cdot \{\varepsilon, \delta\delta\} \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$.

Übung zu Produkt von formalen Sprachen

Sei A ein beliebiges Alphabet und $M := \{L : L \text{ ist formale Sprache über } A\} = 2^A$. Produkt von Sprachen lässt sich auch als Abbildung bzw. Verknüpfung $\cdot : M \times M \rightarrow M$ darstellen.

Zeige:

- Die Verknüpfung \cdot ist assoziativ.
- Es gibt (mindestens) ein Element $e \in M$, sodass für alle $x \in M$ gilt:
 $x \cdot e = e \cdot x = x$. (Neutrales Element)
- Es gibt ein Element $o \in M$, sodass für alle $x \in M$ gilt:
 $x \cdot o = o = o \cdot x$. (Absorbierendes Element)

Seien $L_1, L_2, L_3 \in M$.

- Die Verknüpfung \cdot ist assoziativ:
 - $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = (\{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}) \cdot L_3 = \{w_1 w_2 w_3 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, w_3 \in L_3\} = L_1 \cdot (\{w_2 w_3 : w_2 \in L_2, w_3 \in L_3\}) = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$.
- Es gibt (mindestens) ein Element $e \in M$, sodass für alle $x \in M$ gilt:
 $x \cdot e = e \cdot x = x$. (neutrales Element)
 - $e := \{\varepsilon\}$.
 - $L_1 \cdot \{\varepsilon\} = L_1 = \{\varepsilon\} \cdot L_1$
- Es gibt ein Element $o \in M$, sodass für alle $x \in M$ gilt:
 $x \cdot o = o = o \cdot x$. (Absorbierendes Element)
 - $o := \emptyset$
 - $L_1 \cdot \emptyset = \emptyset = \emptyset \cdot L_1$

(M, \cdot) ist damit trotzdem keine Gruppe, denn es existieren keine Invers-Elemente.

Potenz von Sprachen

Potenz von formellen Sprachen ist wie folgt definiert:

- $L^0 := \{\varepsilon\}$
- $L^{i+1} := L^i \cdot L$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

- $L_1 := \{a\}$.
 - $L_1^0 = \{\varepsilon\}$. $L_1^1 = \{\varepsilon\} \cdot L_1 = L_1$.
 - $L_1^2 = (\{\varepsilon\} \cdot L_1) \cdot L_1 = \{aa\}$.
- $L_2 := \{ab\}^3\{c\}^4$
 - $L_2^0 = \{\varepsilon\}$, $L_2^1 = \dots$
 - $L_2^2 = (\{ab\}^3\{c\}^4)^2 = (\{ab\}^3\{cccc\})^2 = \{abababcccc\}^2 = \{abababccccabababcccc\}$.
- $L_3 := (\{a\} \cup \{b\})^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

Konkatenationsabschluss bei formalen Sprachen

Konkatenationsabschluss

Zu einer formalen Sprache L ist der Konkatenationsabschluss L^* definiert als $L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} L^i$.

ε -freie Konkatenationsabschluss

Zu einer formalen Sprache L ist der ε -freie Konkatenationsabschluss L^+ definiert als $L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$.

- Warum gilt $\varepsilon \notin L^+$ bei formalen Sprache $L \subseteq A^* \setminus \{\varepsilon\}$?
- $L := \{a, b, c\}.L^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, ac, aaa, aab, \dots, b, ba, bb, \dots\}$
- $L := \{aa, bc\}.L^* = \{\varepsilon, aa, bc, aa \cdot aa, aa \cdot bc, bc \cdot aa, bc \cdot bc, aa \cdot aa \cdot aa, \dots\}$

Sei $A := \{a, b\}$, $B := \{A, B, C, D, E, F\}$.

- Sprache $L_1 \subseteq A^*$, die das Teilwort ab nicht enthält? $L_1 = \{b\}^* \{a\}^*$.
- Sprache $L_2 \subseteq B^*$, die alle erlaubten Java Variablennamen enthält.
 - $B := \{_, a, b, \dots, z, A, B, \dots, Z\}$
 - $C := B \cup \mathbb{Z}_9$
 - $L_2 \subseteq C = (B \cdot C^*) \setminus \{if, class, while, \dots\}$

Sei $L := \{a\}^*\{b\}^*$.

- Was ist alles in L drin?
 - *aaabbabbbaaabba*? Nein.
 - *aaabb*, *abb*, *aaabba*, *a*? Ja, ja, nein, ja.
- Was ist alles in L^* drin?
 - *aaabbabbbaaabba*? Ja.
 - *aaabb*, *abbaaabba*? Ja.
 - *abb*, *aaabba*, *a*? Ja.
 - Alle Wörter aus $\{a, b\}^* \rightarrow L^* = \{a, b\}^*$.

- $L_1 = \{a^k | k \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{b^k | k \in \mathbb{N}\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? $\{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}\}$

- $L_1 = \{a\} * \{b\}^*$
- $L_2 = \{a, b\}^*$
- $L_3 = \{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $L_4 = (\{a\} \cup \{b\})^*$
- Welche Sprachen sind identisch? L_2 und L_4

L_1, L_2 seien formale Sprachen.

- Wie sieht $L_1 \cdot L_2$ aus?
- Wie sieht L_1^3 aus?
- Wie sieht $L_1^2 \cdot L_2 \cdot L_2^0 \cdot L_1^*$ aus?
- Wie sieht $(L_1^*)^0 \cdot L_2^+$ aus?

Wir betrachten die Alphabete $A_{dez} := \mathbb{Z}_{10}$, $A_{bin} := \{0, 1\}$, $A_{oct} := \mathbb{Z}_8$.

- Was können wir daraus machen?
- $A_{dez}^* \supset \{42, 1337, 999\}$.
- $A_{bin}^* \supset \{101010, 10100111001, 1111100111\}$.
- $A_{oct}^* \supset \{52, 2471, 1747\}$.
- Wir suchen eine Möglichkeit, diese Zahlen zu deuten.
- Aber irgendwie so, dass $42_{\in A_{dez}} \stackrel{\text{Deutung}}{=} 101010_{\in A_{bin}} \stackrel{\text{Deutung}}{=} 52_{\in A_{oct}}$.

Num_k

Einer Zeichenkette Z_k aus Ziffern wird mit Num_k eine eindeutige Zahl zugeordnet:

$$Num_k(\varepsilon) = 0$$

$$Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

num_k

Einer einzelnen Ziffer $x \in Z_k$ aus einem Alphabet von Ziffern Z_k wird mit $num_k(x)$ der Wert der Zahl zugewiesen.

- Wichtig: $Num_k(w) \neq num_k(w)$!
- Was ist: $num_{10}(3) = 3$, $num_{10}(7) = 7$, $num_{10}(11) =$ nicht definiert.
- Für Zahlen $\geq k$: Benutze Num_k !

Beispiel zu Zahlendarstellungen

$$Num_k(\varepsilon) = 0.$$

$$Num_k(wx) = k \cdot Num_k(w) + num_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

Was ist $Num_{10}(123)$?

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & Num_{10}(123) = 10 \cdot Num_{10}(12) + num_{10}(3) = \\ & 10 \cdot (Num_{10}(1) + num_{10}(2)) + num_{10}(3) = \\ & 10 \cdot (num_{10}(1) + 10 \cdot num_{10}(2)) + num_{10}(3) = 10 \cdot (1 + 10 \cdot 2) + 3 = 123. \end{aligned}$$

Yay?

Was ist der dezimale Zahlenwert der Binärzahl 1010? Diesmal Basis

$k = 2$.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & Num_2(1010) = 2 \cdot Num_2(101) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot Num_2(10) + num_2(1) + num_2(0)) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot Num_2(1) + num_2(0)) + num_2(1)) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot num_2(1) + num_2(0)) + num_2(1)) + num_2(0) = \\ & 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0 = 10. \end{aligned}$$

Yay!

$$\text{Num}_k(\varepsilon) = 0.$$

$$\text{Num}_k(wx) = k \cdot \text{Num}_k(w) + \text{num}_k(x) \text{ mit } w \in Z_k^* \text{ und } x \in Z_k.$$

Übungen zu Zahlendarstellungen

Berechne den numerischen Wert der folgenden Zahlen anderer Zahlensysteme nach dem vorgestellten Schema:

- $\text{Num}_8(345)$.
- $\text{Num}_2(11001)$.
- $\text{Num}_2(1000)$.
- $\text{Num}_4(123)$.
- $\text{Num}_{16}(4DF)$. (Zusatz)

Anmerkung: Hexadezimalzahlen sind zur Basis 16 und verwenden als Ziffern (in aufsteigender Reihenfolge):
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Lösungen:

- $Num_8(345) = 229.$
- $Num_2(11001) = 25.$
- $Num_2(1000) = 8.$
- $Num_4(123) = 27.$
- $Num_{16}(4DF) = 1247.$

Einfachere Umrechnung von Zahlendarstellungen

Es gilt:

$$2(2(2(2(2 \cdot 1 + 0) + 1) + 0) + 1) + 0 = 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0.$$

Daher, einfachere Rechenweise:

$$\text{Num}_k(w) = k^0 \cdot w(0) + k^1 \cdot w(1) + k^2 \cdot w(2) + \dots$$

Was sind folgende Zahlen in Dezimal im Kopf gerechnet?

- $\text{Num}_2(10101) = 21.$
- $\text{Num}_2(11101) = 29.$
- $\text{Num}_2(1111111111) = 1023.$

Einfachere Umrechnung von Zahlendarstellungen

$$Num_k(w) = k^0 \cdot w(0) + k^1 \cdot w(1) + k^2 \cdot w(2) + \dots$$

Was sind folgende Zahlen in Dezimal im Kopf gerechnet?

- $Num_{16}(A1) = 161.$
- $Num_{16}(BC) = 188.$
- $Num_{16}(14) = 20.$



That's all Folks!