

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Maximilian Staab, [maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de](mailto:maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de)

Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 02.02.2017



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

- 1 Automaten
  - Mealy-Automat
  - Moore-Automat
  - Endliche Akzeptoren

- 2 Reguläre Ausdrücke

- 3 Rechtslineare Grammatiken

## Mealy-Automat

Ein Mealy-Automat ist ein Tupel  $A = (Z, z_0, X, f, Y, h)$  mit...

- endliche Zustandsmenge  $Z$
- Anfangszustand  $z_0 \in Z$
- Eingabealphabet  $X$
- Zustandsübergangsfunktion  $f : Z \times X \rightarrow Z$
- Ausgabealphabet  $Y$
- Ausgabefunktion  $h : Z \times X \rightarrow Y^*$

## Darstellung als Graph

- Zustände  $\rightarrow$  Knoten
- Startzustand  $\rightarrow$  Pfeil an diesen Knoten (ohne Anfang)
- Zustandsüberföhrungsfunktion  $\rightarrow$  Kanten mit Beschriftung
- Ausgabefunktion  $\rightarrow$  zusätzliche Kantenbeschriftung

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni...  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.ed

Automaten

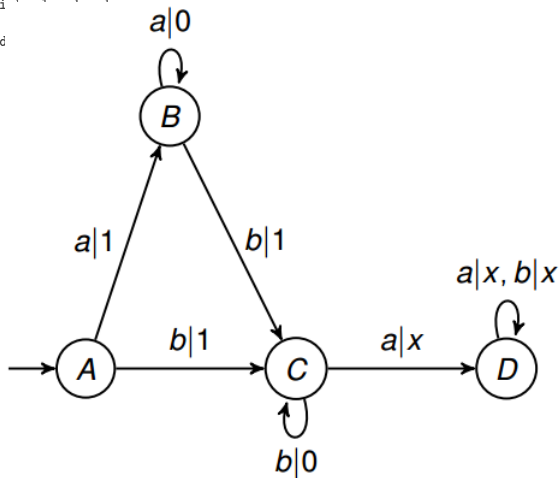
Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Moore-Automat

Ein Moore-Automat ist ein Tupel  $A = (Z, z_0, X, f, Y, h)$  mit...

- endliche Zustandsmenge  $Z$
- Anfangszustand  $z_0 \in Z$
- Eingabealphabet  $X$
- Zustandsübergangsfunktion  $f : Z \times X \rightarrow Z$
- Ausgabealphabet  $Y$

→ **Bis hierhin alles wie bei Mealy!**

- Ausgabefunktion  $h : Z \rightarrow Y^*$

### Bemerkung

Für jeden Mealy-Automaten kann man einen Moore-Automaten konstruieren, der genau die gleiche Aufgabe erfüllt, und umgekehrt.

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

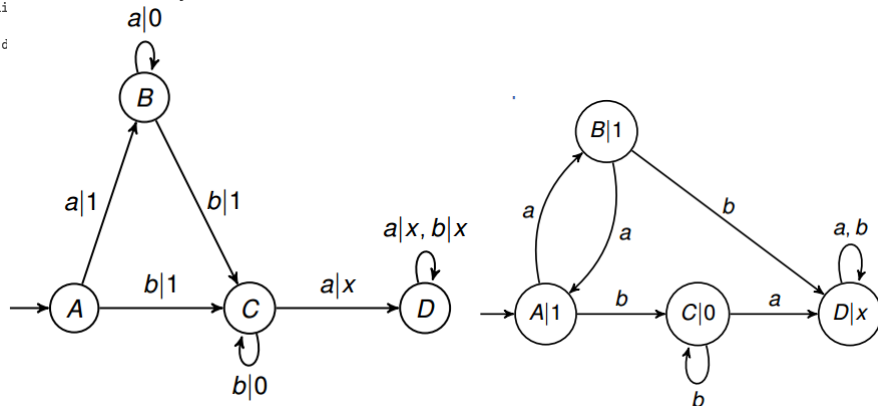
Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Links ein Mealy-, rechts ein Moore-Automat



## Aufgabe

Wie sieht der Mealy-Automat als äquivalenter Moore-Automat aus, wie sieht der Moore-Automat als äquivalenter Mealy-Automat aus?

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

- Sonderfall von Moore-Automaten
- Bei einem Akzeptor will man nur wissen, ob die Eingabe akzeptiert wurde oder nicht (also reicht ein Bit als Ausgabealphabet)
- Statt der Ausgabefunktion  $h$  schreibt man einfach die Menge der akzeptierenden Zustände  $F \subseteq Z$  auf
- Zustände, die nicht akzeptieren, heißen ablehnend
- Im Graphen werden akzeptierende Zustände einfach mit einem doppelten Kringel gekennzeichnet



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Akzeptierte Wörter

Ein Wort  $w \in X^*$  wird vom endlichen Akzeptor akzeptiert, wenn man ausgehend vom Anfangszustand bei Eingabe von  $w$  in einem akzeptierenden Zustand endet.

### Bemerkung

- Wird ein Wort nicht akzeptiert, dann wurde es abgelehnt

## Akzeptierte formale Sprache

Die von einem Akzeptor  $A$  akzeptierte formale Sprache  $L(A)$  ist die Menge aller von ihm akzeptierten Wörter.

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

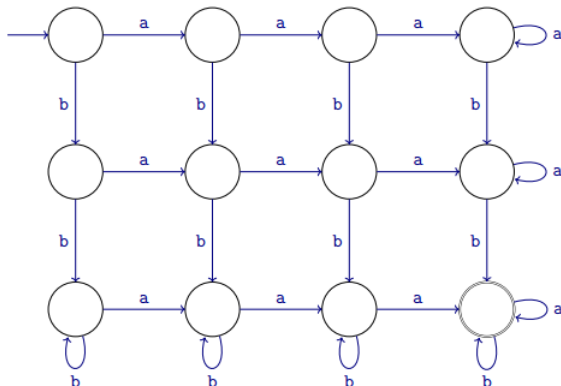


Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgabe zu endlichen Akzeptoren

Konstruiere einen endlichen Akzeptor, der die Sprache  
 $L_1(A) = \{w \in \{a, b\}^* : (N_a(w) \geq 3 \wedge N_b(w) \geq 2)\}$  erkennt.

## Lösung



Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

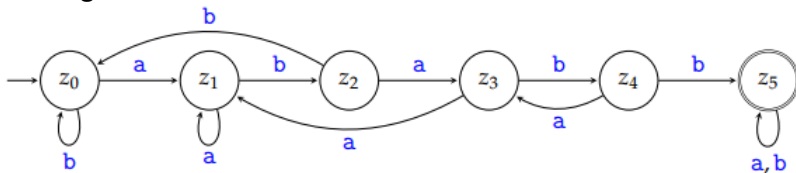
Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgabe zu endlichen Akzeptoren

Konstruiere einen endlichen Akzeptor, der die Sprache  
 $L_2(A) = \{w_1 ababbw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$  erkennt.

## Lösung



## Aufgabe

Konstruiere einen endlichen Akzeptor der die Sprache  
 $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \notin L_2\}$  akzeptiert.

## Lösung

Ablehnende Zustände werden zu akzeptierenden und andersrum.

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

## Aufgaben zu endlichen Akzeptoren

- Gebe für den unten stehenden Automaten an, welche Sprache dieser akzeptiert.
- Gebe für die folgende Sprache über dem Alphabet  $\{a, b\}$  einen endlichen Akzeptor an:  $L = \{w \in \Sigma^* \mid N_a(w) \bmod 3 > N_b(w) \bmod 2\}$

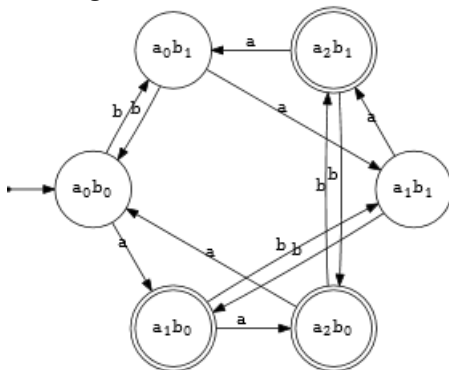


Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Lösung 1

$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 2 = 1\}$  (Worte ungerader Längen)

## Lösung 2



Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Wann wird das leere Wort  $\varepsilon$  von einem endlichen Akzeptor akzeptiert?  
 $\varepsilon \in L(A)$  gilt genau dann, wenn der Startzustand akzeptiert wird.

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Regulärer Ausdruck

- Alphabet  $Z = \{ |, (, ), *, \emptyset \}$  von "Hilfssymbolen"
- Alphabet  $A$  enthalten keine Zeichen aus  $Z$
- Ein **regulärer Ausdruck** (RA) über  $A$  ist eine Zeichenfolge über dem Alphabet  $A \cup Z$ , die gewissen Vorschriften genügt.
- Vorschriften
  - $\emptyset$  ist ein RA
  - Für jedes  $x \in A$  ist  $x$  ein RA
  - Wenn  $R_1$  und  $R_2$  RA sind, dann auch  $(R_1 | R_2)$  und  $(R_1 R_2)$
  - Wenn  $R$  ein RA ist, dann auch  $(R^*)$

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

- “Stern- vor Punktrechnung”

- “Punkt- vor Strichrechnung”

→  $R_1 | R_2 R_3 *$  Kurzform für  $(R_1 | (R_2 (R_3 *)))$

- Bei mehreren gleichen Operatoren ohne Klammern links geklammert

→  $R_1 | R_2 | R_3$  Kurzform für  $((R_1 | R_2) | R_3)$

## Aufgabe

Entferne so viele Klammern wie möglich, ohne die Bedeutung des RA zu verändern.

- $(((((ab)b)*)*)|(∅*)) → (abb) * *|∅*$

- $((a(a|b))|b) → a(a|b)|b$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Wir können die Syntax von regulären Ausdrücken auch über eine kontextfreie Grammatik definieren.

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

## Aufgabe

Vervollständigt die folgende Grammatik.

$$G = (\{R\}, \{[, (, ), *, \emptyset\} \cup A, R, P)$$

mit  $P = \{R \rightarrow \emptyset, R \rightarrow x \text{ (mit } x \in A),$   
 $R \rightarrow (R|R), R \rightarrow (RR),$   
 $R \rightarrow (R*)$   
 $R \rightarrow \varepsilon\}$

Wieso brauchen wir  $\varepsilon$ ?



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Notation

- Spitze Klammern  $\langle, \rangle$

## Regeln

- $\langle \emptyset \rangle = \{ \}$
- $\langle x \rangle = \{ x \}$  für jedes  $x \in A$
- $\langle R_1 | R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \cup \langle R_2 \rangle$
- $\langle R_1 R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \cdot \langle R_2 \rangle$
- $\langle R^* \rangle = \langle R \rangle^*$

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche  
Akzeptoren

Reguläre  
Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

## Satz

Für jede formale Sprache  $L$  sind äquivalent:

1.  $L$  kann von einem endlichen Akzeptor erkannt werden.
2.  $L$  kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden
3.  $L$  kann von einer rechtslinearen Grammatik erzeugt werden.

Solche Sprachen heißen regulär.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

Zum selbst probieren:

<http://regexr.com/>

**Achtung:** Reguläre Ausdrücke in praktischer Programmierung funktionieren zwar ähnlich, haben aber eine andere Syntax und können teils mehr!

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare  
Grammatiken

## Definition

Eine rechtslineare Grammatik ist eine reguläre Grammatik  $G = (N, T, S, P)$  mit der Einschränkung, dass alle Produktionen die folgende Form haben:

- $X \rightarrow w$  mit  $w \in T^*$  oder
- $x \rightarrow wY$  mit  $w \in T^*$ ,  $Y \in N$

## Aufgabe zu rechtslinearen Grammatiken

Gebe zu  $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \text{Num}_2(w) = 2^k + 1\}$  jeweils einen regulären Ausdruck  $R$  und eine rechtslineare Grammatik  $G$  an, sodass  $L = \langle R \rangle = L(G)$  gilt.

### Lösung

- $R = (0 * 10) | (0 * 1(0) * 1) = 0 * 10 | 0 * 10 * 1$
- $G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, S, \{S \rightarrow 0S | 10 | 1A, A \rightarrow 0A | 1\})$

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit

Automaten

Mealy-Automat

Moore-Automat

Endliche

Akzeptoren

Reguläre

Ausdrücke

Rechtslineare

Grammatiken

## Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - <http://gbi.lukasbach.com>
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

## Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - <http://gbi.ira.uka.de>
  - Altklausuren!

## Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden
  - Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

## Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul