

Grundbegriffe der Informatik

Tutorium 38

Kontextfreie Grammatiken, Relationen

Patrick Fetzer, uxkln@student.kit.edu | 29.11.2018



Grundbegriffe der Informatik

Patrick Fetzner,
urkln@student.kit.edu

Hinweise

Kontextfreie
Grammatiken

Relationen vol. 2

**Erinnerung: Anmeldung für Klausur und Übungsschein im Campus System
nicht vergessen!**

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

- $w \in \{0, 1\}^*$
- nicht $w \geq 0$, sondern $\text{Num}_2(w) \geq 0$ oder $w(0) = 0$
- $f : A \rightarrow A^*$ induziert den Homomorphismus $f^{**} : A^* \rightarrow A^*$, ist aber selbst keiner
- $h : A^* \rightarrow A^*$ mit $\forall w \in A^* : h(w) = 0$ ist kein Homomorphismus.
Warum nicht?

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Wie kann man diese Sprache darstellen?

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel $G = (N, T, S, P)$ mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
 - T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
 - $S \in N$ (Startsymbol)
 - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$
-
- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $T := \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$:
 $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAbc), (A, SSS), (B, BSabc), \dots\}$.
 - Andere Schreibweise: $P : N \rightarrow (N \cup T)^*$.
 - Für $(X, w) \in P$ schreibt man $X \rightarrow w$
 - Statt $\{X \rightarrow w_1, X \rightarrow w_2\}$ schreibt man auch $\{X \rightarrow w_1 | w_2\}$

Erinnerung: N = Nichtterminalsymbole, T = Terminalsymbole.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \rightarrow w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa$!
- “ \Rightarrow ” heißt **eine** Ableitung!

Hinweise

Kontextfreie
Grammatiken

Relationen vol. 2

Ableitungsfolge

Wir definieren \Rightarrow^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man “**v ist aus u in i Schritten ableitbar.**”

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

und $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann “ v ist aus u ableitbar”.

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

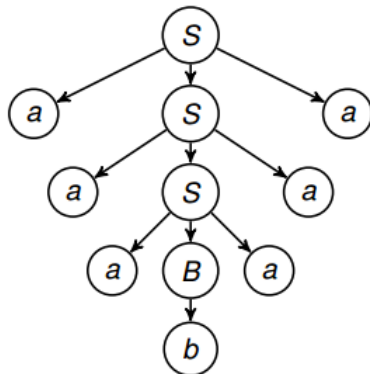
aber $aSa \not\Rightarrow abba$.

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaabaaa$



Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik (N, T, S, P) mit:

- Nichtterminalsymbolen $N := \{A, B, S\}$.
- Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol S
- Produktionen $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a|b|c|\varepsilon\}$.

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- *ccbbcbbbbcbbaaaa?*
- *aabbaabbaabb?*
- *c?*

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache L heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik G existiert, mit $L(G) = L$.

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$$

$$\text{Dann ist } L(G) = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

■ $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$

■ Welche Wörter lassen sich in genau drei Schritten ableiten?

→ $\{aa, ab, ba, bb\}$

■ Was ist $L(G)$?

→ $L(G) = \{a, b\}^*$

■ Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

→ $G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

■ Wahr oder falsch? Wenn $w_1 \Rightarrow w_2$ gilt, dann gilt auch $w_1 \rightarrow w_2$

■ Was ist der Unterschied von \Rightarrow und \Rightarrow^* ?

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

→ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon\})$.

- Welche Sprache erzeugt $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$ mit $P_2 = \{S \rightarrow X \mid Y, X \rightarrow aaXb \mid aab, Y \rightarrow aYbb \mid abb\}$?

→ $L(G_2) = \{a^{2k}b^k \mid k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_+\}$

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

$$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX|(X)|\varepsilon\})$$

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ “wohlgeformte Klammerausdrücke”

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→ $N_{(}(w) = N_{)}(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

→ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe v von w gilt $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

→ $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow (X)X|\varepsilon\})$

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:

$$L_{vv} = \{vcv \mid v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$$

Patrick Fetzer,
urkln@student.kit.edu

Hinweise

Kontextfreie
Grammatiken

Relationen vol. 2

Erinnerung Relationen

Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt Relation.

Definition Produkt von Relationen

Es seien A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen R und S .

Bemerkung

$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C , bildet also von A nach C ab.

Assoziativität des Produktes

Es seien A, B, C und D Mengen und $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ sowie

$T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} := R^i \circ R$

Also $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$.

Hinweise

Kontextfreie
Grammatiken

Relationen vol. 2

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt:
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man R reflexiv.

Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann reflexiv, wenn $I_M \subseteq R$ gilt.

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.

R heißt transitiv, wenn:

$$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!
- Ist S transitiv? Ja!
- Wie müsste S aussehen, um reflexiv zu sein?

Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R .

Satz

- R^* ist reflexiv
- R^* ist transitiv
- R^* ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und $R \subseteq R^*$ erfüllt.

Bemerkung

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt $R^* = R$.

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^* ?

→ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

→ $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv? Nein und nein!

Hinweise

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Die Relationen R und S über \mathbb{N}_0 seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$: $aRb \Leftrightarrow a|b$ (a ist Teiler von b)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$: $aSb \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

→ R ist transitiv, aber nicht reflexiv.

→ S ist reflexiv, aber nicht transitiv.

Grundbegriffe der Informatik

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Hinweise

Kontextfreie
Grammatiken

Relationen vol. 2



That's all Folks!