

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 33

Maximilian Staab, [maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de](mailto:maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de)  
Lukas Bach, [lukas.bach@student.kit.edu](mailto:lukas.bach@student.kit.edu) | 8.12.2016



Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Zur Rekapitulation...

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Zur Rekapitulation...

Relationen vol. 2

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Zur Rekapitulation...

Relationen vol. 2

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Zur Rekapitulation...

Relationen vol. 2

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte  $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Zur Rekapitulation...

#### Relationen vol. 2

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte  $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Wie kann man diese Sprache darstellen?

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
- $S \in N$  (Startsymbol)

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
- $S \in N$  (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
  - $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
  - $S \in N$  (Startsymbol)
  - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$
- 
- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
  - $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
  - $S \in N$  (Startsymbol)
  - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$
- 
- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $T := \{a, b, c\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
  - $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
  - $S \in N$  (Startsymbol)
  - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$
- 
- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $T := \{a, b, c\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$ :  
 $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAcB), (A, SSS), (B, BSabc), \dots\}$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
- $S \in N$  (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $T := \{a, b, c\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$ :  
 $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAcB), (A, SSS), (B, BSabc), \dots\}$ .
- Andere Schreibweise:  $P : N \rightarrow (N \cup T)^*$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
- $S \in N$  (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $T := \{a, b, c\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$ :  
 $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAcB), (A, SSS), (B, BSabc), \dots\}$ .
- Andere Schreibweise:  $P : N \rightarrow (N \cup T)^*$ .
- Für  $(X, w) \in P$  schreibt man  $X \rightarrow w$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel  $G = (N, T, S, P)$  mit

- $N$  Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- $T$  Alphabet mit  $N \cap T = \emptyset$  (Terminalsymbole)
- $S \in N$  (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$  mit  $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist  $N \times (N \cup T)^*$ ? Bei  $T := \{a, b, c\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$ :  
 $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAcB), (A, SSS), (B, BSabc), \dots\}$ .
- Andere Schreibweise:  $P : N \rightarrow (N \cup T)^*$ .
- Für  $(X, w) \in P$  schreibt man  $X \rightarrow w$
- Statt  $\{X \rightarrow w_1, X \rightarrow w_2\}$  schreibt man auch  $\{X \rightarrow w_1 | w_2\}$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$$v \in (N \cup T)^*$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$ . Fertig.

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$ . Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa$ !

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung:  $N = \text{Nichtterminalsymbole}$ ,  $T = \text{Terminalsymbole}$ .

## Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$  ist in einem Schritt aus  $u \in (N \cup T)^*$  ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$  und  $v = w_1 w_X w_2$  für  $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und  $X \rightarrow w_X$  in  $P$

## Notation

$u \Rightarrow v$

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$ . Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa! \Rightarrow$  heißt **eine** Ableitung!

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$  genau dann, wenn ein  $w \in (N \cup T)^*$  existiert, für das  $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$  gilt. Für  $u \Rightarrow^i v$  sagt man "**v ist aus u in i Schritten ableitbar**".

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$  genau dann, wenn ein  $w \in (N \cup T)^*$  existiert, für das  $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$  gilt. Für  $u \Rightarrow^i v$  sagt man "**v ist aus u in i Schritten ableitbar**".

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$  genau dann, wenn ein  $w \in (N \cup T)^*$  existiert, für das  $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$  gilt. Für  $u \Rightarrow^i v$  sagt man "**v ist aus u in i Schritten ableitbar**".

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitungsfolge

Wir definieren  $\Rightarrow^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

Für  $u, v \in (N \cap T)^*$  gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$  genau dann, wenn  $u = v$  gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$  genau dann, wenn ein  $w \in (N \cup T)^*$  existiert, für das  $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$  gilt. Für  $u \Rightarrow^i v$  sagt man "**v ist aus u in i Schritten ableitbar**".

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

und  $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und  $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

## Ableitbarkeit

Für  $u, v \in (N \cup T)^*$  gelte  $u \Rightarrow^* v$  genau dann, wenn ein  $i \in \mathbb{N}_0$  existiert, mit  $u \Rightarrow^i v$ . Man sagt dann "**v ist aus u ableitbar**".

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

### Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und  $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

aber  $aSa \not\Rightarrow abba$ .

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für  $X \Rightarrow w$  sind die Zeichen von  $w$  die Kinder von  $X$



Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für  $X \Rightarrow w$  sind die Zeichen von  $w$  die Kinder von  $X$
- Terminale sind die Blätter

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für  $X \Rightarrow w$  sind die Zeichen von  $w$  die Kinder von  $X$
- Terminale sind die Blätter

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

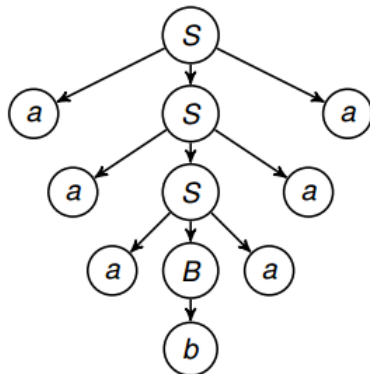
Relationen vol. 2

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für  $X \Rightarrow w$  sind die Zeichen von  $w$  die Kinder von  $X$
- Terminale sind die Blätter

## Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt  $S \Rightarrow^* aaabaaa$



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik  $(N, T, S, P)$  mit:

- Nichtterminalsymbolen  $N := \{A, B, S\}$ .
- Terminalsymbolen  $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol  $S$
- Produktionen  $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a, b, c, \varepsilon\}$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik  $(N, T, S, P)$  mit:

- Nichtterminalsymbolen  $N := \{A, B, S\}$ .
- Terminalsymbolen  $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol  $S$
- Produktionen  $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a, b, c, \varepsilon\}$ .

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- $ccbbcbbbbcbbaaaa?$
- $aabbaabbaabb?$
- $c?$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik.

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir  $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache.

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir  $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache.

## Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache  $L$  heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik  $G$  existiert, mit  $L(G) = L$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir  $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache.

## Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache  $L$  heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik  $G$  existiert, mit  $L(G) = L$ .

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Erzeugte Sprache

Sei  $G = (N, T, S, P)$  eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir  $L(G) := \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache.

## Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache  $L$  heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik  $G$  existiert, mit  $L(G) = L$ .

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa \mid aSa, B \rightarrow b\})$$

$$\text{Dann ist } L(G) = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?  
 $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?  
 $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{\}$ ?



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?  
 $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{\}$ ?  
 $\rightarrow G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$  oder  $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?  
 $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{\}$ ?  
 $\rightarrow G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$  oder  $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$
- Wahr oder falsch? Wenn  $w_1 \Rightarrow w_2$  gilt, dann gilt auch  $w_1 \rightarrow w_2$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon | aX | bX\})$ 
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?  
 $\rightarrow \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist  $L(G)$ ?  
 $\rightarrow L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{\}$ ?  
 $\rightarrow G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow X\})$  oder  $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$
- Wahr oder falsch? Wenn  $w_1 \Rightarrow w_2$  gilt, dann gilt auch  $w_1 \rightarrow w_2$
- Was ist der Unterschied von  $\Rightarrow$  und  $\Rightarrow^*$  ?

## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei  $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$ . Konstruiere eine Grammatik  $G_1$  mit  $L(G_1) = L_1$ .

## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei  $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$ . Konstruiere eine Grammatik  $G_1$  mit  $L(G_1) = L_1$ .

→  $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon\})$ .

## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei  $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$ . Konstruiere eine Grammatik  $G_1$  mit  $L(G_1) = L_1$ .

→  $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon\})$ .

- Welche Sprache erzeugt  $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$  mit  $P_2 = \{S \rightarrow X \mid Y, X \rightarrow aaXb \mid aab, Y \rightarrow aYbb \mid abb\}$ ?

## Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei  $L_1 := \{wbaaw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*\}$ . Konstruiere eine Grammatik  $G_1$  mit  $L(G_1) = L_1$ .

→  $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon\})$ .

- Welche Sprache erzeugt  $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$  mit  $P_2 = \{S \rightarrow X \mid Y, X \rightarrow aaXb \mid aab, Y \rightarrow aYbb \mid abb\}$ ?

→  $L(G_2) = \{a^{2k}b^k \mid k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} \mid k \in \mathbb{N}_+\}$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

- Welche Wörter sind ableitbar?

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

■ Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?  
→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"
- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$  Ist diese Eigenschaft hinreichend?

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$  Ist diese Eigenschaft hinreichend?

→ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe  $v$  von  $w$  gilt  $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{ (, ) \}, X, \{ X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon \})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$  Ist diese Eigenschaft hinreichend?

→ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe  $v$  von  $w$  gilt  $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

$$G = (\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Welche Wörter sind ableitbar?

→ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

→  $N_{(}(w) = N_{)}(w)$  Ist diese Eigenschaft hinreichend?

→ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe  $v$  von  $w$  gilt  $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

→  $G = (\{X\}, \{(, )\}, X, \{X \rightarrow (X)X | \varepsilon\})$



Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

## Kontextfreie Grammatiken

### Relationen vol. 2

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:

$$L_{vv} = \{vcv \mid v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$$

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Erinnerung Relationen

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Erinnerung Relationen

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine Teilmenge  $R \subseteq A \times B$  heißt Relation.

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

## Bemerkung



## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### Bemerkung

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### **Bemerkung**

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$ , bildet also von  $A$  nach  $C$  ab.

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### Bemerkung

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$ , bildet also von  $A$  nach  $C$  ab.

## Assoziativität des Produktes

Es seien  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  sowie  $T \subseteq C \times D$  Relationen.

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### Bemerkung

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$ , bildet also von  $A$  nach  $C$  ab.

## Assoziativität des Produktes

Es seien  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  sowie  $T \subseteq C \times D$  Relationen. Dann gilt

## Definition Produkt von Relationen

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  Relationen.

Dann ist

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

das Produkt der Relationen  $R$  und  $S$ .

### Bemerkung

$S \circ R$  ist eine Relation auf  $A$  und  $C$ , bildet also von  $A$  nach  $C$  ab.

## Assoziativität des Produktes

Es seien  $A, B, C$  und  $D$  Mengen und  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$  sowie

$T \subseteq C \times D$  Relationen. Dann gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.



## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Dann definieren wir  $R^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Dann definieren wir  $R^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Dann definieren wir  $R^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  :  $R^{i+1} := R^i \circ R$

## Homogene Relation

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation.  $R$  heißt homogen, wenn  $A = B$  und heterogen, wenn  $A \neq B$  gilt.

## Identität

Sei  $M$  eine Menge.  $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

## Potenz von Relationen

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Dann definieren wir  $R^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$  folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  :  $R^{i+1} := R^i \circ R$

Also  $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$ .

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Satz über das neutrale Element

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation. Dann gilt:  
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R.$

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Satz über das neutrale Element

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation. Dann gilt:  
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R$ .

## Reflexivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Wenn für alle  $x \in M : (x, x) \in R$ , nennt man  $R$  reflexiv.

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Satz über das neutrale Element

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation. Dann gilt:  
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Reflexivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Wenn für alle  $x \in M : (x, x) \in R$ , nennt man  $R$  reflexiv.

Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Satz über das neutrale Element

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  eine Relation. Dann gilt:  
 $R \circ I_B = R = I_A \circ R$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Reflexivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Wenn für alle  $x \in M : (x, x) \in R$ , nennt man  $R$  reflexiv.

Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

## Lemma

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  $R$  ist genau dann reflexiv, wenn  $I_M \subseteq R$  gilt.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Transitivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Transitivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  
 $R$  heißt transitiv, wenn:

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Transitivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.

$R$  heißt transitiv, wenn:

$$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Transitivität

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.

$R$  heißt transitiv, wenn:

$$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

## Lemma

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  $R$  ist genau dann transitiv, wenn  $R \circ R \subseteq R$ .



# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist  $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$  reflexiv?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist  $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$  reflexiv? Nein!

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist  $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$  reflexiv? Nein!
- Ist  $S$  transitiv?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ .

- Ist  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  transitiv? Nein!
- Ist  $R$  reflexiv? Nein!
- Wie müsste  $R$  aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist  $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$  reflexiv? Nein!
- Ist  $S$  transitiv? Ja!
- Wie müsste  $S$  aussehen, um reflexiv zu sein?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
`maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de`,  
Lukas Bach,  
`lukas.bach@student.kit.edu`

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Definition

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  
Dann nennt man  $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$  die reflexiv-transitive Hülle von  $R$ .

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Definition

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  
Dann nennt man  $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$  die reflexiv-transitive Hülle von  $R$ .

## Satz

- $R^*$  ist reflexiv
- $R^*$  ist transitiv
- $R^*$  ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und  $R \subseteq R^*$  erfüllt.

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Definition

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation.  
Dann nennt man  $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$  die reflexiv-transitive Hülle von  $R$ .

## Satz

- $R^*$  ist reflexiv
- $R^*$  ist transitiv
- $R^*$  ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und  $R \subseteq R^*$  erfüllt.

## Bemerkung

- Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt  $R^* = R$ .

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

## Aufgaben

- Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

## Aufgaben

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?
- $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

## Aufgaben

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

■ Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

→  $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

■ Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Was ist  $(R^*)^*$  ?



## Aufgaben

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

■ Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

→  $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

■ Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Was ist  $(R^*)^*$  ?

→  $(R^*)^* = R^*$

## Aufgaben

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

■ Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

→  $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

■ Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Was ist  $(R^*)^*$  ?

→  $(R^*)^* = R^*$

■  $M := \{1, 2, 3, 4\}$  und  $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$ . Ist  $R$  reflexiv? Ist  $R$  transitiv?

## Aufgaben

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

- Sei  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  Was ist  $R^*$ ?

$$\rightarrow R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

- Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine homogene Relation. Was ist  $(R^*)^*$  ?

$$\rightarrow (R^*)^* = R^*$$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$  und  $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$ . Ist  $R$  reflexiv? Ist  $R$  transitiv?    Nein und nein!

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Die Relationen  $R$  und  $S$  über  $\mathbb{N}_0$  seien gegeben durch:

- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$  ( $a$  ist Teiler von  $b$ )
- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Die Relationen  $R$  und  $S$  über  $\mathbb{N}_0$  seien gegeben durch:

- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$  ( $a$  ist Teiler von  $b$ )
- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

→  $R$  ist transitiv, aber nicht reflexiv.

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2

Die Relationen  $R$  und  $S$  über  $\mathbb{N}_0$  seien gegeben durch:

- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$  ( $a$  ist Teiler von  $b$ )
- Für alle  $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

→  $R$  ist transitiv, aber nicht reflexiv.

→  $S$  ist reflexiv, aber nicht transitiv. [TODO]

# Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,  
maximilian.staab@fsmi.uni  
Lukas Bach,  
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie  
Grammatiken

Relationen vol. 2



*That's all Folks!*