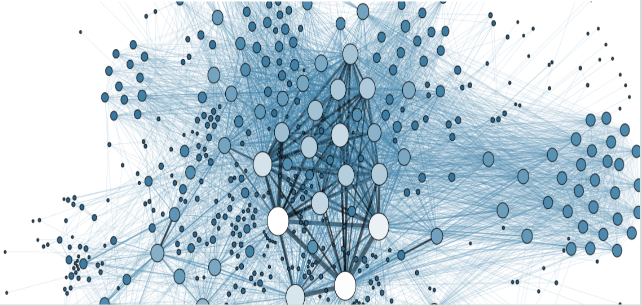
GBI

Tutorium 2^5

Organisatorisches/Grundlagen

Jan Zwerschke upezu@student.kit.edu | 23.10.2019



Termine

- Vorlesung und Übung
  - Mittwoch 9:45 - 11:15 Vorlesung
  - Freitag 9:45 - 11:15 Vorlesung/Übung
- Tutorium
  - Mittwoch, 17:30 - 19:00
  - 50.34 Informatikbau, -107
- Übungsblätter
  - Jede Woche
  - 2 Wochen Bearbeitungszeit
  - Abgabe Dienstag bis 12:30
- Klausur
  - Termin am 18.03.2020 um 14 Uhr
  - Anmeldung im Campus-System, wird erst später freigeschaltet

Übungsschein

- jeweils 50% der Punkte auf Blätter 1-6 und auf Blätter 7-12
- Abgabekasten unten im Infobau gegenüber der Toilette
- Rückgabe im Tutorium
- Bestehen ist *keine* Voraussetzung für die Klausur, *aber* fürs Modul!
- Verpflichtend nur für Winfos, Infos und Info Lehramtd
- Übungsschein nur im WS angeboten, Klausur auch im SS
- Blätter 1-6 Abgabe in 2er Gruppen möglich, Blätter 7-12 Einzelabgabe
- Abschreiben verboten!
- Übungsblätter und später auch Musterlösungen im ILIAS

Tutorium

- Alle Tutorienfolien im Ilias (nach dem Tutorium)
- Bei Fragen: upezu@student.kit.edu
- Oder einfach hier
- Keine Anwesenheitspflicht!
- Möglichkeit andere Tutorien zu besuchen

Signale und Nachrichten

- Objekt: 101
  - Eins null eins oder 101 als Zahl oder 5 in binär oder zwei merkwürdige Striche mit einem Kreis dazwischen?
  - Vom Kontext abhängig.
  - Zunächst einfach ein konkretes Objekt.

Signale und Nachrichten

- Signal
  - Physikalische Veränderung
  - Lässt sich verschieden interpretieren.
  - Beispiele:
    - Notfallalarm in Serverraum

      
    - Für Besucher nur schönes Leuchten
    - Für Security die Information, zu kommen
    - Für Techniker die Information, Ausrüstung zu holen
- Nachricht : Objekt wie oben, das von Signal unabhängig ist
  - Roter Notfallalarm ist ein anderes Signal als ein blauer Notfallalarm, aber vielleicht dieselbe Nachricht.

Signale und Nachrichten

- Der interessante Teil: Informationen
- Bedeutung einer Nachricht
- Der vorher fehlende Kontext.
- Im obigen Beispiel:
  - Rote Alarmleuchte ist ein Signal (blaue Signalleuchte in Raum nebendran vielleicht auch)
  - “Alarm”: Nachricht
  - Information: Security soll herkommen, Techniker sollen das Werkzeug bereit halten, Besucher sollten Platz machen.

Mengen

- Erster wirklich wichtiger Teil.

Mengen

Definition: Mengen

"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente dieser Menge genannt werden) zu einem Ganzen."

- Beispiel: $\{a, b, c, d\} =: A$, $\{a, c, 4\} =: B$, $\{10, 11\} =: C$
- Das Objekt c ist in A enthalten : $c \in A$, $c \in B$, $c \notin C$
- Reihenfolge gleich : $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Elemente doppelt? $\{a, a, b, a\} = \{a, b\}$

Mehr über Mengen

Karlsruher Institut für Technologie

- Kardinalität oder Größe : Die Anzahl der Elemente der Menge
  - $A := \{a, b, c\}$. $|A| = 3$
  - $B := \{c, d\}$. $|B| = 2$
  - Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$?

Mehr über Mengen

- Kardinalität oder Größe : Die Anzahl der Elemente der Menge
  - $A := \{a, b, c\}$. $|A| = 3$
  - $B := \{c, d\}$. $|B| = 2$
  - Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$? 3!
  - Was ist $|\emptyset|$?

Mehr über Mengen

- Kardinalität oder Größe : Die Anzahl der Elemente der Menge
  - $A := \{a, b, c\}$. $|A| = 3$
  - $B := \{c, d\}$. $|B| = 2$
  - Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$? 3!
  - Was ist $|\emptyset|$? 0

Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge , und schreiben sie als $\{\}$ oder $\emptyset$.

Was ist $|\{\emptyset\}|$?

Mehr über Mengen

- Kardinalität oder Größe : Die Anzahl der Elemente der Menge
  - $A := \{a, b, c\}$. $|A| = 3$
  - $B := \{c, d\}$. $|B| = 2$
  - Was ist $|\{1, 2, 3, 2\}|$? 3!
  - Was ist $|\emptyset|$? 0

Leere Menge

Die Menge, die nichts enthält, nennen wir die leere Menge , und schreiben sie als $\{\}$ oder $\emptyset$.

Was ist $|\{\emptyset\}|$? 1! $\{\emptyset\}$ enthält eine leere Menge, die selbst ein Element ist.

Mehr über Mengen

Seien $A := \{a, b, c\}, B := \{b, c\}, C := \{c, b\}, D := \{b, c, d\}$.

- Teilmenge : $A \subseteq B$, also A ist Teilmenge von B genau dann, wenn alle Elemente aus A auch in B sind.
- Echte Teilmenge : $A \subset B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ *und* $A \neq B$.
  - Beispiele: $B \subseteq A$, sogar $B \subset A$.
    $C \subseteq B$ und $B \subseteq C$, aber $C \not\subset B$ und $B \not\subset C$.
- Schnittmenge : $A \cap B = \{b, c\}$.
  $A \cap B$ enthält *genau* die Elemente, die in A *und* in B sind.
- Vereinigungsmenge : $A \cup D = \{a, b, c, d\}$.
  $A \cup B$ enthält *genau* die Elemente, die in A *oder* in B sind.
- Mengendifferenz: $A \setminus B = \{a\}$, also alle Elemente in A, die nicht in B sind.

Rechenregeln für Mengen

- $A \setminus B = \emptyset$ bedeutet das gleiche wie $A \subseteq B$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $M \cup \emptyset = M$
- $M \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (analog für Durchschnitt)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (analog Vertauschen von $\cup$ und $\cap$)
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Aufgabe Mengen

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- $A \backslash B = \{\}$
- $A \subseteq B$

Potenzmenge

Karlsruher Institut für Technologie

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?

Potenzmenge

Karlsruher Institut für Technologie

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?
  - Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $\{0, 1\} \in 2^M$.

Potenzmenge

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?
  - Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $\{0, 1\} \in 2^M$.
  - $\{0\} \in 2^M$ und $\{1\} \in 2^M$.
  - Weitere?

Potenzmenge

Potenzmenge

Die Potenzmenge 2^M einer Menge M enthält genau alle Mengen, die Teilmenge von M sind.

Was bedeutet das allgemein?

- $M \in 2^M$
- $\emptyset \in 2^M$
- Konkretes Beispiel: Was ist 2^M mit $M = \{0, 1\}$?
  - Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $\{0, 1\} \in 2^M$.
  - $\{0\} \in 2^M$ und $\{1\} \in 2^M$.
  - Weitere? Nein, diese vier Mengen sind alle möglichen Teilmengen.
  - $\Rightarrow 2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Potenzmenge

Karlsruher Institut für Technologie

$M = \{0, 1\}$, $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
Was ist 2^{2^M}?

Potenzmenge

$M = \{0, 1\}$, $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Was ist 2^{2^M}?

- Also $2^{\{\{\},\{0\},\{1\},\{0,1\}\}}$.

Potenzmenge

Karlsruher Institut für Technologie

$M = \{0,1\}$, $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
Was ist 2^{2^M}?

- Also $2^{\{\{\},\{0\},\{1\},\{0,1\}\}}$.
- Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \in 2^{2^M}$.

Potenzmenge

$M = \{0, 1\}$, $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
Was ist 2^{2^M}?

- Also $2^{\{\{\},\{0\},\{1\},\{0,1\}\}}$.
- Natürlich $\emptyset \in 2^M$ und $2^M = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \in 2^{2^M}$.

$$
\begin{aligned}
2^{2^M} = \{& \\
& \{\}, \\
& \{\{\}\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0, 1\}\}, \\
& \{\{\}, \{0\}\}, \{\{\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \\
& \quad \{\{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1\}, \{0, 1\}, \\
& \{\{\}, \{0\}, \{1\}\}, \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, \\
& \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\
\}&
\end{aligned}
$$

Alphabete

Alphabet

Ein Alphabet ist eine *endliche*, *nichtleere* Menge von Zeichen.

Was davon sind Alphabete? $\{d, 34, \pi, \%\}$, $\{a, b, c, \ldots, y, z\}$, $\emptyset$, $\mathbb{N}$.

- $\{d, 34, \pi, \%\}$ und $\{a, b, c, \ldots, y, z\}$ sind Alphabete.
- $\emptyset$ ist leer und damit kein Alphabet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ enthält alle natürlichen Zahlen und ist damit nicht endlich, also kein Alphabet.
- $\{0, 1\}$ ist das Alphabet, das alle Binärzahlen enthält.
- $\{\cdot, +, -, /\} =: R$ ist ein Alphabet von Rechenzeichen.
  $R \cup \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist ein Alphabet, das ein Taschenrechner als Eingabealphabet benutzen könnte.

Paare und Tupel

Paar

Ein Paar ist eine geordnete Menge der Kardinalität 2.

Schreibweise mit runden Klammern ().

- Beispiel: $(a, 4) \neq (4, a)$
- Beispiel für eine Menge aus Tupeln: $\{(StarWars, Sci - Fi),$ $(HarryPotter, Fantasy), (FightClub, Thriller)\}$

Tupel

Tupel

Ein Tupel ist eine geordnete Menge. Konkret ist ein n-Tupel ein Tupel der Kardinalität n.

Also wie ein Paar, nur mit beliebiger Kardinalität. Ein Paar ist spezifisch ein 2-Tupel.
Beispiel: $(4tb, 512gb, 128gb, 4mb) \neq (512gb, 4mb, 4tb, 128gb)$.

Kartesisches Produkt

Zwei Mengen: $A := \{a, b, c\}$ und $B := \{1, 2, 3\}$.
Wir wollen alle Tupel mit erstem Element aus A und zweiten Element aus B.

$$\{ \quad (a,1),(a,2),(a,3), \qquad (b,1),(b,2),(b,3), \qquad (c,1),(c,2),(c,3) \quad \}$$
$$= A \times B$$

Kartesisches Produkt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Kartesisches Produkt

Kartesisches Produkt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Kartesisches Produkt von n Mengen

Zu n Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist das Kreuzprodukt $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ definiert als Menge aller n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2$, $\ldots$, $e_n \in M_n$.

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \times mal} = A^n.$$

Kartesisches Produkt: Beispiele

Karlsruher Institut für Technologie

Kartesisches Produkt von zwei Mengen

Zu zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt $A \times B$ definiert als Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$

Kartesisches Produkt: Beispiele

Kartesisches Produkt von n Mengen

Zu n Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ definiert als Menge aller n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2$, $\ldots$, $e_n \in M_n$.

$A := \{a, b\}, B := \{1, 2\}, C := \{\omega\}$. $A \times B \times C$
$= \{(a, 1, \omega), (a, 2, \omega), (b, 1, \omega), (b, 2, \omega)\}$.

Kartesisches Produkt: Beispiele

Mengenpotenz

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n mal} = A^n.$$

- $A := \{a, b\}$. $A^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$
  $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, b), \ldots\}$.
- A beliebige Menge. $A^0? = \emptyset$
- Achtung! $2^M \neq M^2$. Potenzmengen nicht mit Mengenpotenz verwechseln!

Relation

Karlsruher Institut für Technologie

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

- Für die Mengen $M_{Filme} = \{StarWars, HarryPotter, FightClub\}$, $M_{Genre} = \{Sci-Fi, Fantasy, Thriller\}$ sind folgendes mögliche Relationen:
  - $\{(StarWars, Sci-Fi), (HarryPotter, Fantasy), (FightClub, Thriller)\}$
  - $\{(StarWars, Sci-Fi), (FightClub, Thriller)$
  - $\emptyset$
- "Kleinergleichrelation" auf $M = \{1, 2, 3\}$:
  $R_{\leq} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\} \subseteq M \times M$

Relation

Binäre Relation

Eine binäre Relation auf zwei Mengen A und B ist eine Menge $R \subseteq A \times B$.

Ternäre Relation

Eine ternäre Relation auf drei Mengen A, B und C ist eine Menge $R \subseteq A \times B \times C$.

n-äre Relation

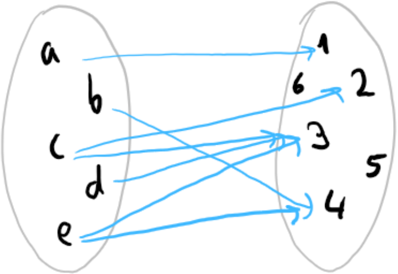
Eine n-äre Relation auf n Mengen M_1, M_2 ... M_n ist eine Menge $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.

Linkstotalität

Linkstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal , wenn für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die linke Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.



Rechtstotalität

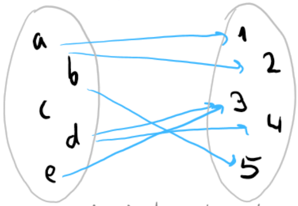
Rechtstotale Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtstotal, wenn für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $(a, b) \in R$.

Die rechte Seite der Relation ist also “total” aufgefüllt.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann surjektiv.

Rechtstotalität



„jedes b hat min. einen Partner a“

Linkseindeutigkeit

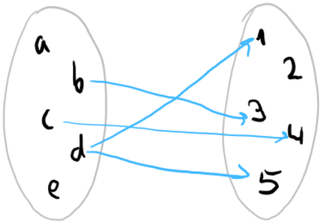
Linkseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $a \neq b$, dann gilt auch $\alpha \neq \beta$.

Also: Keine zwei Elemente der linken Seite der Relation haben dasselbe rechte Element.

Angenommen, $a \neq b$ und $\alpha = \beta$. $\Rightarrow$ offenbar nicht linkseindeutig.

Wenn die Relation zusätzlich eine Abbildung ist, heißt diese dann injektiv.



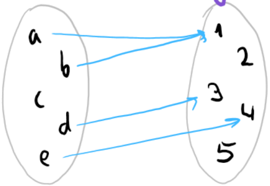
Rechtseindeutig

Rechtseindeutige Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig , wenn für zwei beliebige Elemente $(a, \alpha) \in R, (b, \beta) \in R$ aus der Relation R gilt: wenn $\alpha \neq \beta$, dann gilt auch $a \neq b$.

Also: Keine zwei Elemente der rechten Seite der Relation haben dasselbe linke Element.

Rechtseindeutigkeit



„jedes a hat max einen Partner b"

Abbildung

Abbildung

Eine Relation R heißt eine Abbildung, wenn sie linkstotal *und* rechtseindeutig sind.

- Injektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, linkseindeutig
- Surjektive Funktion: linkstotal, rechtseindeutig, rechtstotal

Bijektivität

Eine Relation heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Damit ist sie linkstotal und rechtseindeutig (weil es eine Abbildung ist) und linkseindeutig (injektiv) und rechtstotal (surjektiv).
Tolle Eigenschaft: Für jedes Element $(a, b) \in R$ der bijektiven Relation R ist *jedem a genau ein b* zugeordnet.

Abbildungen Schreibweise

Seien $A = B = \mathbb{R}$, $f \subseteq A \times B$. Wir suchen Relation, die für jedes $a \in A$ ein Element $(a, b) \in f$ enthält mit $b = a^2$.

$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \ldots\}$

Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.

(Mathematischere) Schreibweise für Abbildungen:

$f : A \to B, a \mapsto a^2$, also Quadratfunktion.

Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

Abbildungen Schreibweise

Seien $A = B = \mathbb{R}$, $f \subseteq A \times B$. Wir suchen Relation, die für jedes $a \in A$ ein Element $(a, b) \in f$ enthält mit $b = a^2$.

$f = \{(0, 0), (0.1, 0.01), (2, 4), \dots\}$

Unendlich viele Elemente, und unmöglich alle zu nennen.

(Mathematischere) Schreibweise für Abbildungen:

$f : A \to B, a \mapsto a^2$, also Quadratfunktion.

Ist diese Funktion injektiv oder surjektiv?

- Nicht injektiv, da z.B. $f(1) = f(-1)$, also $(1, 1) \in f$ und $(-1, 1) \in f$.
- Nicht surjektiv, da z.B. -1 nie als Funktionswert angenommen wird , daher $(a, -1) \notin f$ für beliebige $a \in A$.

Aufgabe Funktionen

Betrachte $f : A \to A$ mit $|A| < \infty$. Zeige:

- f injektiv $\iff$ f surjektiv

Stimmt das immer noch, wenn $|A|$ nicht mehr endlich?


That's all Folks!