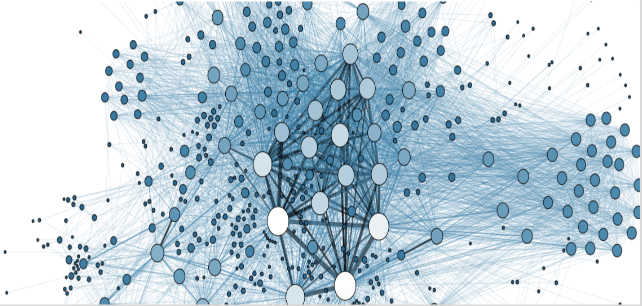
GBI

Tutorium 2^5

Wörter und Formale Sprachen

Jan Zwerschke upezu@student.kit.edu | 30.10.2019



Hinweise zur Abgabe

- Blätter vollständig nutzen, nicht ein Blatt pro Aufgabe
- Aufgabenblatt nicht mit abgeben
- Nur antworten, was gefragt wurde (keine falschen oder nicht gefragten Lösungswege)
- „geben Sie an“ erfordert keinen Beweis
- Lieber sprachlich erklären, wenn man Probleme mit formalen Beweisen hat (falls nicht explizit einer gefordert ist)
- Genau schreiben, warum die Behauptung aus dem folgt, was ihr gerade bewiesen habt
- Unterscheidet Element und Teilmenge: $x \in A$ oder $\{x\} \subset A$
- Vereinigung ist $\cup$ und nicht $+$

Typische Fehler

- Sprachlich: A oder B ist die leere Menge
- Formal: $A = \emptyset \vee B = \emptyset$ Nicht: $A \vee B = \emptyset$
- Leere Menge ist $\emptyset$ oder $\{\}$, nicht 0

Mengen

Seien $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, $C = \{5,6,7\}$. Bestimme

- $A \cup B$
- $A \cup C$
- $A \cap B$
- $A \cap C$

sowie die Kardinalität dieser Mengen.

Mengen

Lösung:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \}$ und $\mid A \cup B \mid = 7$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \}$ und $\mid A \cup C \mid = 7$
- $A \cap B = \{3, 4\}$ und $\mid A \cap B \mid = 2$
- $A \cap C = \emptyset$ und $\mid \emptyset \mid = 0$

Mengen

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe aus WS16/17

Es seinen A,B und C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Mengen

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe aus WS16/17

Es seinen A,B und C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Widerlegung durch Gegenbeispiel

Seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ und $C = \{3\}$. Dann ist
$\{1, 2, 3\} \setminus (\{3, 4, 5\} \setminus \{3\}) = \{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5\} = \{1, 2, 3\} \neq \{1, 2\} = \{1, 2\} \setminus \{3\} = (\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\}) \setminus \{3\}$

Mengenäquivalenz

Karlsruher Institut für Technologie

Zeigen Sie

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- "$\subseteq$": Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$
  - Falls $x \in A$, dann gilt auch $x \in (A \cup B)$ und $x \in (A \cup C)$. Also insbesondere $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - Falls $x \in (B \cap C)$, dann gilt auch $x \in (A \cup B)$ und $x \in (B \cup C)$. Also insbesondere $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- "$\supseteq$": $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann liegt x in $(A \cup B)$ und $(A \cup C)$. Also liegt x in A oder in (B und C). Folglich gilt $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Insgesamt ist also $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Mengen

Aufgabe aus WS16/17

Es sei M eine Menge und es seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$. Beweisen Sie:
$M \backslash (A \cap B) = (M \backslash A) \cup (M \backslash B)$

- "$\subseteq$": Sei $x \in M \backslash (A \cap B)$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A$ oder $x \notin B$. Somit ist
  - $x \in M$ und $x \notin A$ oder
  - $x \in M$ und $x \notin B$.

  Also ist $x \in (M \backslash A)$ oder $(M \backslash B)$, folglich also $x \in (M \backslash A) \cup (M \backslash B)$.
- "$\supseteq$": Sei $x \in (M \backslash A) \cup (M \backslash B)$. Dann ist $x \in (M \backslash A)$ oder $x \in (M \backslash B)$. Somit ist
  - $x \in M$ und $x \notin A$ oder
  - $x \in M$ und $x \notin B$.

  Also ist $x \in M$, und $x \notin A$ oder $x \notin B$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin (A \cap B)$, folglich also $x \in M \backslash (A \cap B)$.

Wörter

Karlsruher Institut für Technologie

Konkatenation

Durch Konkatenation werden einzelne Buchstaben aus einem Alphabet miteinander verbunden.

- Symbol: $\cdot$, also zwei Buchstaben a und b miteinander konkateniert: $a \cdot b$.
- Nicht kommutativ : $a \cdot b \neq b \cdot a$
- Aber assoziativ : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kurzschreibweise : Ohne Punkte , also $a \cdot b = ab$

Wörter

Karlsruher Institut für Technologie

Wörter: Intuitivere Definition

Ein Wort w entsteht durch die Konkatenation durch Buchstaben aus einem Alphabet.

$\rightarrow$ Also Abfolge von Zeichen über ein Alphabet A.
Sei $A := \{a, b, c\}$.

- Mögliche Worte: $w_1 := a \cdot b$, $w_2 = b \cdot c \cdot c$, $w_3 = a \cdot c \cdot c \cdot b \cdot a$.
- Keine möglichen Worte: d.

Karlsruher Institut für Technologie

Wörter: Abstraktere Definition

Ein Wort w über dem Alphabet A ist definiert als surjektive Abbildung $w : \mathbb{Z}_n \to A$. Dabei heißt n die Länge $|w|$ des Wortes.

- $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < n\}$
  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}, \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, \mathbb{Z}_0 = \emptyset$.
- Länge oder Kardinalität eines Wortes: $|w|$. $|abcde| = 5$.
- Wort $w = abdec$ als Relation aufgeschrieben:
  $w = \{(0, a), (1, b), (2, d), (3, e), (4, c)\}$. Also
  $w(0) = a, w(1) = b, w(2) = d, \ldots$
  Damit sieht man auch:
  $|w| = |\{(0, a), (1, b), (2, d), (3, e), (4, c)\}| = 5$.

- Wort der Kardinalität 0?

Das leere Wort

Das leere Wort ε ist definiert ein Wort mit Kardinalität 0 , also mit 0 Zeichen.

- Leere Wort wird interpretiert als “nicht sichtbar” und kann überall platziert werden: $aabc = a\varepsilon abc = \varepsilon\varepsilon a\varepsilon bc\varepsilon$.
- $|\{\varepsilon\}| = 1$, die Menge ist nicht leer! Das leere Wort ist nicht *nichts*! (Vergleiche leere Menge)
- $|\varepsilon| = 0$.
- Formale Definition:$\varepsilon : \emptyset \to \emptyset$

Mehr über Wörter

A^n

Zu einem Alphabet A ist A^n definiert als die Menge aller Wörter der Länge n über dem Alphabet A.

- Nicht mit Mengenpotenz verwechseln!
- $A := \{a, b, c\}$, $A^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.
  $A^1 = A$, $A^0 = \{\varepsilon\}$.

Die Menge aller Wörter *beliebiger* Länge:

- $A^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$
- $A := \{a, b, c\}$. $aa \in A^*$, $abcabcabc \in A^*$, $aaaa \in A^*$, $\varepsilon \in A^*$.

Mehr über Wörter

Wort Potenzen

Sich direkt wiederholende Teilworte kann man als Wortpotenz darstellen , daher $w_i^n = w_i \cdot w_i \cdots w_i$ (n $\times$ mal).

- $a^4 = aaaa$, $b^3 = bbb$, $c^0 = \varepsilon$, $d^1 = d$.
- $a^3 c^2 b^6 = aaaccbbbbbb$.
- $b \cdot a \cdot (n \cdot a)^2 = banana$.

Übung zu Wörter

Karlsruher Institut für Technologie

Sei A ein Alphabet.

Übung zu Wörter

1. Finde Abbildung $f : A^* \to A^*$, sodass für alle $w \in A^*$ gilt:
   $2 \cdot |w| = |f(w)|$.
2. Finde Abbildung $g : A^* \to A^*$, sodass für alle $w \in A^*$ gilt:
   $|w| + 1 = |g(w)|$.
3. Sind f, g injektiv und/oder surjektiv?

1. $f : A^* \to A^*, w \mapsto w \cdot w$.
2. $g : A^* \to A^*, w \mapsto w \cdot x, x \in A$.

Übung zu Wörter

1. $f : A^* \to A^*, w \mapsto w \cdot w$.
   - f ist injektiv, denn jedes w aus der Bildmenge wird von maximal einem Wort abgebildet.
   - f ist nicht surjektiv, denn z.B. bildet nichts auf $x \in A$ ab (oder auf andere Wörter mit ungerader Anzahl an Buchstaben).
2. $g : A^* \to A^*, w \mapsto w \cdot x, x \in A$.
   - g ist injektiv.
   - g ist nicht surjektiv, denn z.B. bildet nichts auf ε ab.

Formale Sprache

- Was war nochmal A^*? Menge aller Wörter *beliebiger* Länge über Alphabet A.

Formale Sprache

Eine Formale Sprache L über einem Alphabet A ist eine Teilmenge $L \subseteq A^*$.

- Zufälliges Beispiel: $A := \{b, n, a\}$.
  - $L_1 := \{ban, baan, nba, aa\}$ ist eine mögliche formale Sprache über A.
  - $L_2 := \{banana, bananana, banananana, ...\}$
    $= \{w : w = bana(na)^k, k \in \mathbb{N}\}$ auch.
  - $L_3 := \{ban, baan, baaan, ...\}$ auch. Andere Schreibweise?
    $L_3 = \{w : w = ba^k n, k \in \mathbb{N}\}$
- Formale Sprachen sind also nicht zwangsweise endliche Mengen.
- Praktischeres Beispiel: $A := \{w : w$ ist ein ASCII Symbol $\}$.
- $L_4 := \{w :$ w ist korrekt kompilierendes Java-Programm $\}$

Übung zu formalen Sprachen

$A := \{a, b\}$

- Sprache L aller Wörter über A, die nicht das Teilwort *ab* enthalten?
  - Was passiert wenn ein solches Wort ein a enthält? Dann keine b's mehr!
  - $L = \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in \{b\}^* \text{ und } w_2 \in \{a\}^*\}$
  - Andere Möglichkeit: Suche Wörter mit *ab* und nehme diese Weg.
  - $L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 \cdot ab \cdot w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$

Übung zu formalen Sprachen

Sei $A := \{a, b\}, B := \{0, 1\}$.

Aufgabe zu formalen Sprachen

1. Sprache $L_1 \subseteq A^*$ von Wörtern, die mindestens drei b's enthalten.
2. Sprache $L_2 \subseteq A^*$ von Wörtern, die gerade Zahl von a's enthält.
3. Sprache $L_3 \subseteq B^*$ von Wörtern, die, interpretiert als Binärzahl eine gerade Zahl sind.

1. $L_1 = \{w = w_1 b w_2 b w_3 b w_4 : w_1, w_2, w_3, w_4 \in A^*\}$
2. $L_2 = \{w = (w_1 a w_2 a w_3)^* : w_1, w_2, w_3 \in \{b\}^*\}$ (Ist da ε drin?)
3. $L_3 = \{w = w \cdot 0 : w \in B^*\}$

Aussagenlogik

- Das wars erst mal zu formalen Sprachen.
- Heute ist Donnerstag.
- Die Menge aller HM-Übungsblätter dieser Welt ist disjunkt zur Menge aller einfachen Übungsblätter dieser Welt.

Das sind alles Aussagen. Aussagen sind entweder *wahr* oder *falsch*.

Aussagenlogik

Wir kapseln Aussagen und verwendet Variablen dafür.

- $A :=$ “Die Straße ist nass.”
- $B :=$ “Es regnet.”

Aussagen lassen sich verknüpfen:

- Logisches Und: $A \land B = A$ und $B =$ Die Straße ist nass und es regnet.
- Logisches Oder: $A \lor B = A$ oder $B =$ Die Straße ist nass oder es regnet . Es kann auch beides wahr sein.
- Negierung: $\neg A =$ nicht $A =$ Die Straße ist nicht nass.
- Implikation: $A \rightarrow B =$ Aus A folgt $B =$ Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
- Äquivalenz:pause $A \leftrightarrow B = A$ und B sind äquivalent $=$ Die Straße ist *genau dann* nass, *wenn* es regnet.
  - $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$, also die Straße ist nass wenn es regnet *und* es regnet wenn die Straße nass ist.

Übung zu Aussagenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

- $A :=$ "Die Straße ist nass."
- $B :=$ "Es regnet."
- $C :=$ "π ist gleich 3."
- Was ist $B \rightarrow C$? "Wenn es regnet, ist π gleich 3."

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
w	w	f	w	w	w

Syntax der Aussagenlogik

Menge der Aussagevariablen:

$Var_{AL} \subseteq \{P_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ oder $\{P, Q, R, S, \dots\}$

Alphabet der Aussagenlogik:

$A_{AL} = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup Var_{AL}$

Boolesche Funktionen

Boolesche Funktionen

Eine boolsche Funktion ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{w, f\}$.

Typische Boolsche Funktionen: $b_\neg(x) = \neg x$, $b_\vee(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \ldots$

Interpretationen

Interpretation

Eine Interpretation ist eine Abbildung $I : V \to \mathbb{B}$, die einer Variablenmenge eine “Interpretation”, also wahr oder falsch zuordnet.

Weiter legt man $val_I(F)$ als Auswertung einer aussagenlogischer Formel F fest.

$$
\begin{aligned}
val_I(X) &= I(X) \\
val_I(\neg G) &= b_\neg(val_I(G)) \\
val_I(G \wedge H) &= b_\wedge(val_I(G), val_I(H)) \\
val_I(G \vee H) &= b_\vee(val_I(G) val_I(H)) \\
val_I(G \to H) &= b_\to(val_I(G), val_I(H))
\end{aligned}
$$

Übung zu Interpretationen

- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k = 1, 2, 3$ Variablen?
- Wie viele Interpretationen gibt es bei $k+1$ Variablen im Vergleich zu k Variablen?

Übung zur Aussagenlogik

Sei $A := w, B := w, C := f$.

- Ist $(A \land B) \lor \neg C$ wahr oder falsch?
  $(A \land B) \lor \neg C = (w \land w) \lor \neg f = w \lor \neg f = w \lor w = w$, die Aussage ist also wahr.
- Ist $\neg(A \lor A)$ wahr oder falsch? Falsch! Wann ist $\neg(A \lor A)$ im allgemeinen wahr? Genau dann, wenn $\neg A$ wahr ist.

Äquivalenz von Aussagen

Erinnerung: $A \leftrightarrow B$ heißt: $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$.
Wenn zwei Aussagen äquivalent sind, sind ihre Wahrheitswerte immer gleich, wenn die Wahrheitswerte, von denen sie abhängen, gleich sind.
Mann sagt und schreibt dann: A ist *genau dann* wahr, *wenn* B wahr ist.

- $\neg(A \lor A)$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A$ wahr ist, also gilt:
  $\neg(A \lor A) \leftrightarrow \neg A$.

Mehr zu Äquivalenz

Alternative Definition zu Äquivalenz

Zwei Formeln G und H heißen äquivalent, wenn für jede Interpretation gilt $val_I(G) = val_I(H)$.

Vorher Äquivalenz von Formeln unter gegebener Interpretation, diesmal Äquivalenz von Formeln unter beliebiger Interpretation.

Bemerkung

- Man schreibt $G \equiv H$
- $\mathbb{B}^V \to \mathbb{B} : I \mapsto val_I(G)$

Beispiele

$(\neg(\neg P))$ ist äquivalent zu P

$(\neg(P \land Q))$ ist äquivalent zu $((\neg P) \lor (\neg Q))$

Beispiele zu Äquivalenz

Karlsruher Institut für Technologie

- Ein Wort w hat die Länge $n \leftrightarrow |w| = n$.
- Die Vereinigung zweier Mengen A und B hat die Kardinalität $|A| + |B|$ $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset \leftrightarrow$ A und B sind disjunkt.
- p ist eine rationale Zahl $\leftrightarrow$ p lässt sich darstellen als $p = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \leftrightarrow p \in \mathbb{Q}$.

Wahrheitstabellen

- $(((P \wedge Q) \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q))$

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee Q$	$\rightarrow$	$(P \wedge \neg Q)$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	f	w	f

Übungen zu Aussagenlogik

Übungen zu Aussagenlogik

- Schreibe Wahrheitstabellen zu den Formeln um den Wahrheitsgehalt festzustellen.
- $\neg(P \land Q) \land \neg(Q \land P)$
- $(P \land Q \land R) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$
- $(A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$
- Welche dieser Aussagen sind wahr?
- $\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$
- $P \land P = P \lor P$
- $(P \lor Q) \land R = (P \land R) \lor (Q \land R)$

Wahrheitstabellen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der die Aussage “Entweder A oder B” repräsentiert

Wahrheitstabellen

Aufgabe

Finde einen logischen Ausdruck in A und B unter Verwendung von $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der die Aussage "Entweder A oder B" repräsentiert

Lösung

A	B	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Weitere Begriffe

Tautologie

Die Formel G ist eine Tautologie (oder allgemeingültig), wenn G für alle Interpretationen wahr ist.

Erfüllbarkeit

Eine Formel G ist erfüllbar, wenn sie für mindestens eine Interpretation wahr ist.

Lemma

Wenn $G \equiv H$ ist, dann ist $G \leftrightarrow H$ eine Tautologie.

Übung zu Tautologien

Sind das Tautologien?

- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$
- $(\neg P \rightarrow Q) \wedge R \vee P$
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$
- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$

Übung zu Tautologien Lösung

Sind das Tautologien?

- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$ Ja
- $(\neg P \rightarrow Q) \wedge R \vee P$ Nein
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$ Ja
- $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$ Ja

Übung zu Erfüllbarkeit

Sind die folgenden Ausdrücke erfüllbar?

- $\neg(A \lor \neg A)$
- $(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land R)$

Übung zu Erfüllbarkeit Lösung

Sind die folgenden Ausdrücke erfüllbar?

- $\neg(A \vee \neg A)$ nein
- $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ Ja


That's all Folks!