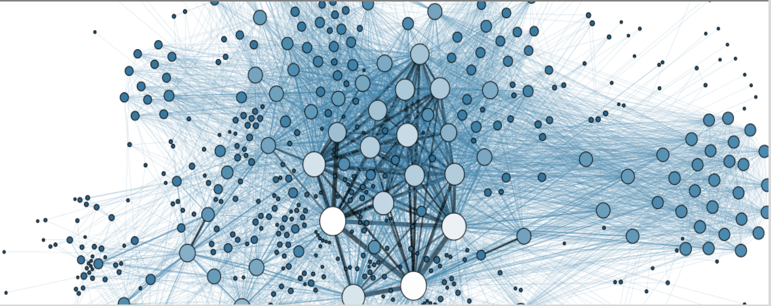
Karlsruher Institut für Technologie

Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 38

Prädikatenlogik

Patrick Fetzer, uxkln@student.kit.edu | 06.12.2018



Patrick Fetzer,
`uxkln@student.kit.edu`

MIMA-Simulator

https://github.com/weisJ/Mima

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Grundlagen zu Prädikatenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

Prädikatenlogik (PL) erweitert Aussagenlogik durch Ergänzen von "Prädikaten", einer Art von Funktionen, die Wahrheitswerte zurückgeben.
Alphabet der Prädikatenlogik:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$, also Alphabet der Aussagenlogik.
- $\forall$ Allquantor ($\forall x$ heißt "für alle x gilt...")
- $\exists$ Existenzquantor ($\exists x$ heißt "es existiert min. ein x... für das gilt...")
- $x, y, z, x_i \in Var_{PL}$ Variablen
- $c, d, c_i \in Const_{PL}$ Konstanten
- $f, g, h, f_i \in Fun_{PL}$ Funktionen
- $R, S, R_i \in Rel_{PL}$ Relationen (funktionieren ähnlich wie Funktionen)
- $\doteq$ Objektgleichheit
- $,$ Komma

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Gliederung der Prädikatenlogik

Terme

Ein Term ist ein Element aus der Sprache über
$A_{Ter} := \{(,), ,\} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}$.

Atomare Formeln

Atomare Formeln sind zum Beispiel

- Objektgleichheiten $f_1 \doteq f_2$
- Relation von Termen $R(t_1, t_2, ...)$

Stelligkeit einer Funktion

Die Stelligkeit $ar(f) \in \mathbb{N}_+$ einer Funktion gibt die Anzahl der Parameter von f an. (Analog Stelligkeit von Relationen $ar(R)$)

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Verständnis von Termen, Atomaren Formeln, Stelligkeit

- Woraus kann ein Term bestehen?

$\longrightarrow$ Aus Klammern $($, $)$, Kommas $,$, Variablen, Konstanten, Funktionen.

- Was davon sind atomare Formeln: $R(x) \wedge S(f(x, c))$, $R(x, g(c, f(y, x)))$?

$\longrightarrow$ Nein, ja.

- Was sind die Stelligkeiten folgender Funktionen: $f(a, b, c), g(a), h(a, b)$?

$\longrightarrow$ $3, 1, 2$.

Grammatik der Prädikatenlogik

Prädikatenlogische Formeln werden durch die Grammatik $G := (N_{Ter}, A_{Ter}, T, P_{Ter})$ erzeugt mit:

- $m + 1$ Nichtterminalsymbolen $N_{Ter} := \{T\} \cup \{L_i | i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m\}$ (m = Maximale Stelligkeit von Funktionen)
- Terminalsymbolen: Alphabet, aus dem Terme erzeugbar sind
- Produktionen

$$
\begin{aligned}
L_{i+1} &\to L_i, T && \text{für jedes } i \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } i < m \\
L_1 &\to T && \\
T &\to c_i && \text{für jedes } c_i \in Const_{PL} \\
T &\to x_i && \text{für jedes } x_i \in Var_{PL} \\
T &\to f_i(L_{ar(f_i)}) && \text{für jedes } f_i \in Fun_{PL}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2$, $ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Grammatik der Prädikatenlogik

Beispiel: Seien Funktionen f, g mit $ar(f) = 2, ar(g) = 1$, Konstante c und Variablen x, y gegeben. Was kann man damit machen?

Dann:

- $N_{Ter} = \{T, L_1, L_2\}$
- $P_{Ter} = \{L_2 \to L_1, T$
  $L_1 \to T$
  $T \to c$
  $T \to x$
  $T \to y$
  $T \to g(L_1)$
  $T \to f(L_2)\}$

Aufgabe zu Grammatiken und Prädikatenlogik

Welche dieser Formeln entsprechen dieser Grammatik?

- $f(c, g(x))$
- $f(x, y, c)$
- $g(f(c, c))$
- $g(g(f(g(x), g(f(c, c)))))$
- $g(c, f)c)$

Bilde die Ableitungsbäume zu den korrekten Formeln.

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Bindungsstärken

Bindungsstärke

Verschiedene Operanden “binden” stärker als andere. Wenn ein Operand stärker als die umliegenden Operanden bindet, tritt derselbe Effekt auf, wie wenn Klammerung geschehen würde.

Bindungsstärken absteigend:

- $\forall/\exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow / \leftarrow , \leftrightarrow$

Finde äquivalente Formeln, die mit möglichst wenig Klammern auskommen:

- $\exists x \forall y (R(f(x), g(x)) \vee \forall z R(c, x))$

Quantoren

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

- $\forall x p(x)$ heißt: für alle $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- $\exists x p(x)$ heißt: für (mindestens) ein $x \in D$ gilt die Aussage $p(x)$.
- Gilt $\forall x \exists y \quad p(x,y) = \exists y \forall x \quad p(x,y)$?
  - Zum Beispiel $p(x,y)$:="Person x ist mit Person y verheiratet."
  - Also:
    - $\forall x \exists y \quad p(x,y) =$ Für jede Person x gibt es eine Person y, mit der x verheiratet ist.
    - $\exists y \forall x \quad p(x,y) =$ Es gibt eine Person y, sodass für alle Personen x gilt, dass x mit y verheiratet ist.
  - Eher nicht. Reihenfolge ist also wichtig!

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Bindungsbereich von Quantoren

Quantoren binden Variablen nur zu der zugehörigen Teilformel.

- Zum Beispiel: $p(x) \wedge \forall x \exists y (p(x) \wedge q(x, y, z)) \rightarrow r(x)$
- Welcher Teil der Formel muss für alle x gelten? Welcher für y?
- Variablen, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegen, nennt man frei.

Überschattung ist möglich, durch Quantoren definierte Variablen beziehen sich immer auf den nächsten Quantor.

- Ist $\forall x (p(x) \wedge \forall x (\neg p(x)))$ erfüllbar?
- Ja: $\forall x (p(x) \wedge \forall \hat{x} (\neg p(\hat{x})))$

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Bindungsbereich von Quantoren

Substitution ist möglich. Dabei wird eine freie Variable durch einen Term ersetzt, die Substitution wird mit $\sigma[a/b]$ bezeichnet, wobei a durch b ersetzt wird.

Führe die folgenden Substitutionen durch:

- $\sigma[x/5](p(x) \vee q(x,y))$
- $= p(5) \vee q(5,y)$
- $\sigma[x/5](p(x) \vee \forall x(q(x,y))$
- $= p(5) \vee \forall x(q(x,y))$
- $\sigma[x/y, y/x, z/f(z)](p(z) \wedge q(x,y))$
- $= p(f(z)) \wedge q(y,x)$

Welche der Variablen sind gebunden (und durch welche Quantoren), welche sind frei?

- $p(x) \to \forall x \exists y(p(x) \wedge q(y,z) \leftrightarrow \forall z(q(x,z)))$
- $\forall y(p(f(x,y))) \vee \exists z(q(z, f(y,z)))$

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Kollision

Eine Kollision liegt vor, wenn eine freie Variable durch eine Substitution gebunden wird.

Beispiel: $\sigma[z/x](\forall x(p(x,z)))$

Sind folgende Substitutionen kollisionsfrei?

- $\sigma[x/y, y/f(x,z)](\forall x(p(x) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow p(x))$
- $\sigma[x/g(z), y/x, z/y](\forall z(p(z) \wedge \forall x(q(x,y) \wedge \exists y(p(y)))))$
- $\sigma[y/z, z/f(z)](q(y,z) \leftrightarrow \exists y(p(y)))$
- Nur 3 ist kollisionsfrei

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Semantik von prädikatenlogischen Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

Um prädikatenlogische Formeln zu interpretieren, brauchen wir einige neue Mengen:

- Interpretation (D, I), bestehend aus...
  - Universum $D \neq \emptyset$ mit...
    - $I(c_i) \in D$ für $c_i \in Const_{PL}$
    - $I(f_i) : D^{ar(f_i)} \longrightarrow D$ für $f_i \in Fun_{PL}$
    - $I(R_i) \subseteq D^{ar(R_i)}$ für $R_i \in Rel_{PL}$
    - I weißt also den Komponenten Bedeutungen zu, "definiert diese"
  - Variablenbelegung $\sigma : Var_{PL} \rightarrow D$, z.B. $\sigma(x) := 3, \sigma(y) := 11$
    - σ definiert also Variablenwerte
- Damit können wir prädikatenlogische Formeln definieren!

$val_{D,I,\beta}$

Die Funktion $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \rightarrow D \cup \mathbb{B}$ weißt einer prädikatenlogischen Formel eine Bedeutung (Wahrheitsgehalt für Formeln und Element des Universums für Terme) zu.

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Beispiel zur Semantik

Karlsruher Institut für Technologie

Unterschied zwischen $val_{D,I,\beta}$ und I? I weist Einzelteilen (Konstanten, Funktionen, Relationen) eine Bedeutung zu und $val_{D,I,\beta}$ einer ganzen Formel.

Beispiel:

Sei $D := \mathbb{N}_0, I(c) := 10, ar(f) := 2, ar(p) := 1, ar(q) := 2, \sigma(x) := 7$.
Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto x - y$.
Sei $ar(R) := 2, I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.
Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5, I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Beispiel zur Semantik

Sei $D := \mathbb{N}_0, I(c) := 10, ar(f) := 2, ar(p) := 1, ar(q) := 2, \sigma(x) := 7$.
Sei $I(f) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto x - y$.
Sei $ar(R) := 2, I(R) := \{(x, y) | x \leq y\}$.
Sei $I(p(x)) = w :\Leftrightarrow x \geq 5, I(q(x, y)) = w :\Leftrightarrow x \geq y$.

- $T_1 := p(x) \to \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_1)$?
  - Wähle $y = 8 \in \mathbb{N}_0$. Dann: $I(q(8, 7)) = w, I(p(8)) = w$, also $val_{D,I,\beta}(\exists y(q(y, x) \wedge p(y))) = w$, und $val_{D,I,\beta}(T_1) = w$.
- $T_2 := p(x) \to \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$, was ist $val_{D,I,\beta}(T_2)$?
  - $val_{D,I,\beta}(p(x)) = w$
  - $val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(f(10, y), x)) = val_{D,I,\beta}(q(10 - y, 7)) = w$ für $y \in \{0, 1, 2, 3\}$.
  - $val_{D,I,\beta}(p(y)) = w$ für $y \geq 5$.
  - Also: $val_{D,I,\beta}(T_2) = f$.

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $\mathit{Vater}(x, y) :=$ wahr, gdw. x Vater von y ist, analog $\mathit{Mutter}(x, y)$.
- $\mathit{M\ddot{a}nnlich}(x) :=$ wahr, gdw. x männlich ist, analog $\mathit{Weiblich}(x)$.
- $\mathit{Verheiratet}(x, y) :=$ wahr, gdw. x und y verheiratet sind.

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede männliche Person hat eine Mutter.
  - $\forall x \exists y (\mathit{M\ddot{a}nnlich}(x) \rightarrow \mathit{Mutter}(y, x))$
  - Kann eine Person jetzt auch mehr als eine Mutter haben? Widerspricht das der ursprünglichen Aussage?
- Jeder Mann hat Kinder (plural!).
  - $\forall x \exists y \exists z (\mathit{M\ddot{a}nnlich}(x) \rightarrow (\mathit{Vater}(x, y) \wedge \mathit{Vater}(x, z) \wedge \neg(y \doteq z)))$

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu

Aufgaben zu Prädikatenlogik

Gegeben sind folgende Prädikate:

- $\mathit{Vater}(x, y)$:= wahr, gdw. x Vater von y ist, analog $\mathit{Mutter}(x, y)$.
- $\mathit{Männlich}(x)$:= wahr, gdw. x männlich ist, analog $\mathit{Weiblich}(x)$.
- $\mathit{Verheiratet}(x, y)$:= wahr, gdw. x und y verheiratet sind.

Drücke die folgenden Aussagen mit prädikatenlogischen Formeln aus:

- Jede Frau ist mit höchstens einem Mann verheiratet.
  - $\forall x \forall y \forall z(\mathit{Weiblich}(x) \wedge ((\mathit{Männlich}(y) \wedge \mathit{Männlich}(z) \wedge \neg(y \doteq z) \wedge \mathit{Verheiratet}(x, y)) \to \neg \mathit{Verheiratet}(x, z)))$
- Wer männlich ist, ist nicht weiblich und umgekehrt.
  - $\forall x(\mathit{Männlich}(x) \to \neg \mathit{Weiblich}(x) \wedge \mathit{Weiblich}(x) \to \neg \mathit{Männlich}(x))$

Grundbegriffe der Informatik

Patrick Fetzer,
uxkln@student.kit.edu