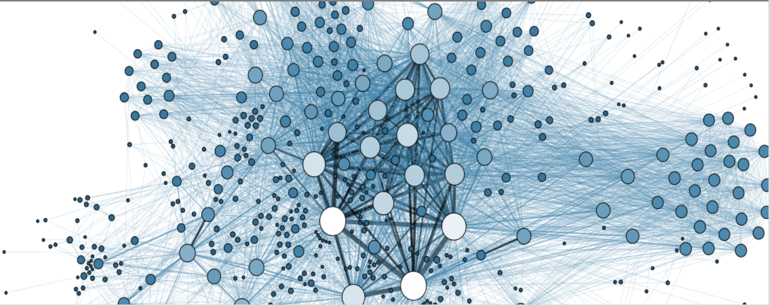
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 33

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.edu | 8.12.2016



Gliederung

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Kontextfreie Grammatiken

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Zur Rekapitulation...

- Was ist ein Alphabet, was eine formale Sprache?
- Was kennen wir für Operationen auf formalen Sprachen?

Betrachte $L := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Wie kann man diese Sprache darstellen?

Kontextfreie Grammatiken

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.un
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Kontextfreie Grammatik

Ein Tupel G = (N, T, S, P) mit

- N Alphabet (Nichtterminalsymbole)
- T Alphabet mit $N \cap T = \emptyset$ (Terminalsymbole)
- $S \in N$ (Startsymbol)
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mit $|P| \in \mathbb{N}_0$

- Was ist $N \times (N \cup T)^*$? Bei $T := \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$: $N \times (N \cup T)^* = \{(S, abSAcB), (A, SSS), (B, BSabc), \ldots\}$.
- Andere Schreibweise: $P : N \to (N \cup T)^*$.
- Für $(X, w) \in P$ schreibt man $X \to w$
- Statt $\{X \to w_1, X \to w_2\}$ schreibt man auch $\{X \to w_1 | w_2\}$

Ableitungsschritt

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung: N = *Nichtterminalsymbole*, T = *Terminalsymbole*.

Ableitungsschritt

$v \in (N \cup T)^*$ ist in einem Schritt aus $u \in (N \cup T)^*$ ableitbar, wenn

- $u = w_1 X w_2$ und $v = w_1 w_X w_2$ für $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$
- und $X \to w_X$ in P

Notation

$u \Rightarrow v$

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa|aSa, B \to b\})$

- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aaaBaaa \Rightarrow aaabaaa$. Fertig.
- $aaaSaaa \not\Rightarrow aaaabaaaa$! $\Rightarrow$ heißt eine Ableitung!

Ableitungsfolge

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Ableitungsfolge

Wir definieren $\Rightarrow^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

Für $u, v \in (N \cap T)^*$ gelte:

- $u \Rightarrow^0 v$ genau dann, wenn $u = v$ gilt.
- $u \Rightarrow^{i+1} v$ genau dann, wenn ein $w \in (N \cup T)^*$ existiert, für das $u \Rightarrow w \Rightarrow^i v$ gilt. Für $u \Rightarrow^i v$ sagt man "v ist aus u in i Schritten ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $aaaSaaa \Rightarrow^0 aaaSaaa$

und $aaaSaaa \Rightarrow^2 aaaabaaaa$

Grundbegriffe der Informatik

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Kontextfreie Grammatiken

Relationen vol. 2

Ableitbarkeit

Für $u, v \in (N \cup T)^*$ gelte $u \Rightarrow^* v$ genau dann, wenn ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $u \Rightarrow^i v$. Man sagt dann "v ist aus u ableitbar".

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaaSaaa$

und $aSa \Rightarrow^* aaaabaaaa$

aber $aSa \not\Rightarrow abba$.

Ableitungsbaum

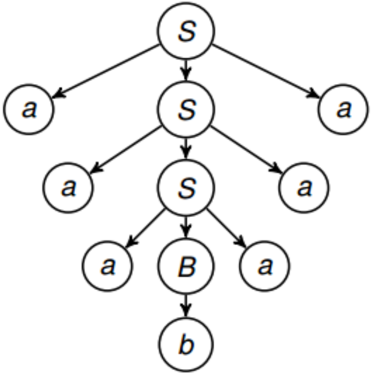
Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- Startsymbol ist Wurzel
- Nichtterminale sind innere Knoten
- Für $X \Rightarrow w$ sind die Zeichen von w die Kinder von X
- Terminale sind die Blätter

Beispiel

$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \to aBa | aSa, B \to b\})$

Dann gilt $S \Rightarrow^* aaabaaa$



Übung zu Kontextfreien Grammatiken

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Übung

Gegeben ist die Kontextfreie Grammatik (N, T, S, P) mit:

- Nichtterminalsymbolen $N := \{A, B, S\}$.
- Terminalsymbolen $T := \{a, b, c\}$
- Startsymbol S
- Produktionen $P := \{S \rightarrow aaS|bbS|SAS|\varepsilon, A \rightarrow cB, B \rightarrow a, b, c, \varepsilon\}$.

Aufgabe: Welche der folgenden Wörter sind ableitbar? Konstruiere den Ableitungsbaum und zeige, wie sie abgeleitet werden.

- $ccbbcbbbcbbaaaa$?
- $aabbaabbaabb$?
- c?

Formale Sprachen erzeugen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann nennen wir $L(G) := \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$ die von G erzeugte Sprache.

Kontextfreie Sprache

Eine formale Sprache L heißt genau dann kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik G existiert, mit $L(G) = L$.

$$G := (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aBa | aSa, B \rightarrow b\})$$

Dann ist $L(G) = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_+\}$

Verständnisfragen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \varepsilon | aX | bX\})$
  - Welche Wörter lassen sich in drei Schritten ableiten?

  $\to \{aa, ab, ba, bb\}$
  - Was ist $L(G)$?

  $\to L(G) = \{a, b\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

$\to G_1 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to X\})$ oder $G_2 := (\{X\}, \{a, b\}, X, \{\})$

- Wahr oder falsch? Wenn $w_1 \Rightarrow w_2$ gilt, dann gilt auch $w_1 \to w_2$
- Was ist der Unterschied von $\Rightarrow$ und $\Rightarrow^*$?

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben zu kontextfreien Grammatiken

- Sei $L_1 := \{wbaaw' | w, w' \in \{a, b\}^*\}$. Konstruiere eine Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$.

$\rightarrow$ $G_1 := (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow YbaaY, Y \rightarrow aY | bY | \varepsilon\})$.

- Welche Sprache erzeugt $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P_2)$ mit $P_2 = \{S \rightarrow X | Y, X \rightarrow aaXb | aab, Y \rightarrow aYbb | abb\}$?

$\rightarrow$ $L(G_2) = \{a^{2k} b^k | k \in \mathbb{N}_+\} \cup \{a^k b^{2k} | k \in \mathbb{N}_+\}$

Beispiel zu kontextfreien Grammatiken

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

$G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX | (X) | \varepsilon\})$

- Welche Wörter sind ableitbar?

$\rightarrow$ "wohlgeformte Klammerausdrücke"

- Welche Eigenschaften besitzen diese Wörter?

$\rightarrow$ $N_{(}(w) = N_{)}(w)$ Ist diese Eigenschaft hinreichend?

$\rightarrow$ Nein, es muss gelten: Für alle Präfixe v von w gilt $N_{(}(v) \geq N_{)}(v)$

- Andere Grammatik möglich, die alle wohlgeformten Klammerausdrücke erzeugt?

$\rightarrow$ $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow (X)X | \varepsilon\})$

Grenze kontextfreier Grammatiken

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Es gibt auch Sprachen, die wir nicht mit einer kontextfreien Grammatik erzeugen können!

Beispiel aus der Vorlesung:
$L_{vv} = \{vcv | v \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

Relationen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Erinnerung Relationen

Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt Relation.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.un
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Definition Produkt von Relationen

Es seinen A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ Relationen.
Dann ist
$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C | \; \exists b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$
das Produkt der Relationen R und S.

Bemerkung

$S \circ R$ ist eine Relation auf A und C, bildet also von A nach C ab.

Assoziativität des Produktes

Es seien A, B, C und D Mengen und $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ sowie $T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt
$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Maximilian Staab, maximilian.staab@fsmi.ur
Lukas Bach, lukas.bach@student.kit.e

Homogene Relation

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt homogen, wenn $A = B$ und heterogen, wenn $A \neq B$ gilt.

Identität

Sei M eine Menge. $I_M := \{(x, x) | x \in M\}$

Potenz von Relationen

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Dann definieren wir R^i für $i \in \mathbb{N}_0$ folgendermaßen:

- $R^0 := I_M$
- Für alle $i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} := R^i \circ R$

Also $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$.

Reflexivität

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Satz über das neutrale Element

Es seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt:
$R \circ I_B = R = I_A \circ R$.

Reflexivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Wenn für alle $x \in M : (x, x) \in R$, nennt man R reflexiv.
Also jedes Element der Definitionsmenge der Relation wird auf sich selbst abgebildet (und vielleicht auch auf andere Elemente abgebildet).

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann reflexiv, wenn $I_M \subseteq R$ gilt.

Transitivität

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Transitivität

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
R heißt transitiv, wenn:
$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Lemma

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

Sei $M := \{1, 2, 3\}$.

- Ist $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ transitiv? Nein!
- Ist R reflexiv? Nein!
- Wie müsste R aussehen, um transitiv zu sein?
- Ist $S := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ reflexiv? Nein!
- Ist S transitiv? Ja!
- Wie müsste S aussehen, um reflexiv zu sein?

Reflexiv-transitive Hülle

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.un
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.e

Definition

Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation.
Dann nennt man $R^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ die reflexiv-transitive Hülle von R.

Satz

- R^* ist reflexiv
- R^* ist transitiv
- R^* ist die kleinste Relation, die reflexiv und transitiv ist und $R \subseteq R^*$ erfüllt.

Bemerkung

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene, reflexive und transitive Relation. Dann gilt $R^* = R$.

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Aufgaben

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ Was ist R^*?

$\rightarrow$ $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

- Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine homogene Relation. Was ist $(R^*)^*$?

$\rightarrow$ $(R^*)^* = R^*$

- $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \subseteq M \times M$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv? Nein und nein!

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit.edu

Die Relationen R und S über $\mathbb{N}_0$ seien gegeben durch:

- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aRb \Leftrightarrow a|b$ (a ist Teiler von b)
- Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0 : aSb \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Prüfe auf Reflexivität und Transitivität!

$\rightarrow$ R ist transitiv, aber nicht reflexiv.

$\rightarrow$ S ist reflexiv, aber nicht transitiv. [TODO]

Informationen

Maximilian Staab,
maximilian.staab@fsmi.uni-karlsruhe.de,
Lukas Bach,
lukas.bach@student.kit

Zum Tutorium

- Lukas Bach
- Tutorienfolien auf:
  - `http://gbi.lukasbach.com`
- Tutorium findet statt:
  - Donnerstags, 14:00 - 15:30
  - 50.34 Informatikbau, -107

Mehr Material

- Ehemalige GBI Webseite:
  - `http://gbi.ira.uka.de`
  - Altklausuren!

Zur Veranstaltung

- Grundbegriffe der Informatik
- Klausurtermin:
  - 06.03.2017, 11:00
  - Zwei Stunden Bearbeitungszeit
  - 6 ECTS für Informatiker und Informationswirte, 4 ECTS für Mathematiker und Physiker

Zum Übungsschein

- Übungsblatt jede Woche
- Ab 50% insgesamt hat man den Übungsschein
- Keine Voraussetzung für die Klausur, aber für das Modul