

Aproksymacja profilu wysokościowego terenu

1. Wstęp – opis analizowanych algorytmów

W projekcie przeanalizowano dwie klasyczne metody interpolacji funkcji jednej zmiennej:

- Interpolację wielomianową Lagrange’a
- Interpolację funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia (Cubic Spline)

Celem było przybliżenie rzeczywistych profili wysokościowych na podstawie dyskretnych pomiarów, zbadanie wpływu liczby oraz rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych, a także porównanie dokładności i stabilności obu podejść.

Interpolacja Lagrange’a

Interpolacja Lagrange’a opiera się na skonstruowaniu wielomianu $P(x)$ stopnia n , który przechodzi przez $n+1$ punktów (x_i, y_i) . Wielomian ten ma postać:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$$

gdzie funkcje bazowe $L_i(x)$ (wielomiany Lagrange’a) zdefiniowane są jako:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Aby poprawić stabilność numeryczną oraz ograniczyć efekt Rungego, rozważono również interpolację w **węzłach Czebyszewa**, wyznaczanych w przedziale $[a, b]$ według wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Interpolacja funkcjami sklejanymi polega na dopasowaniu ciągłych wielomianów trzeciego stopnia $S_i(x)$ w kolejnych przedziałach $[x_i, x_{i+1}]$. Każdy taki wielomian ma postać:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i wyznaczane tak, aby zapewnić:

- ciągłość funkcji $S(x)$,
- ciągłość pochodnych pierwszego i drugiego rzędu,
- zerowanie drugiej pochodnej na krańcach przedziału (warunki naturalne):

$$S_0''(x_0) = 0, \quad S_{n-1}''(x_n) = 0$$

Metoda funkcji sklejanych, mimo większej złożoności obliczeniowej, zapewnia większą dokładność i odporność na lokalne oscylacje danych (brak efektu Rungego).

2. Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej metodą Lagrange'a dla równomiernie oddalonych węzłów

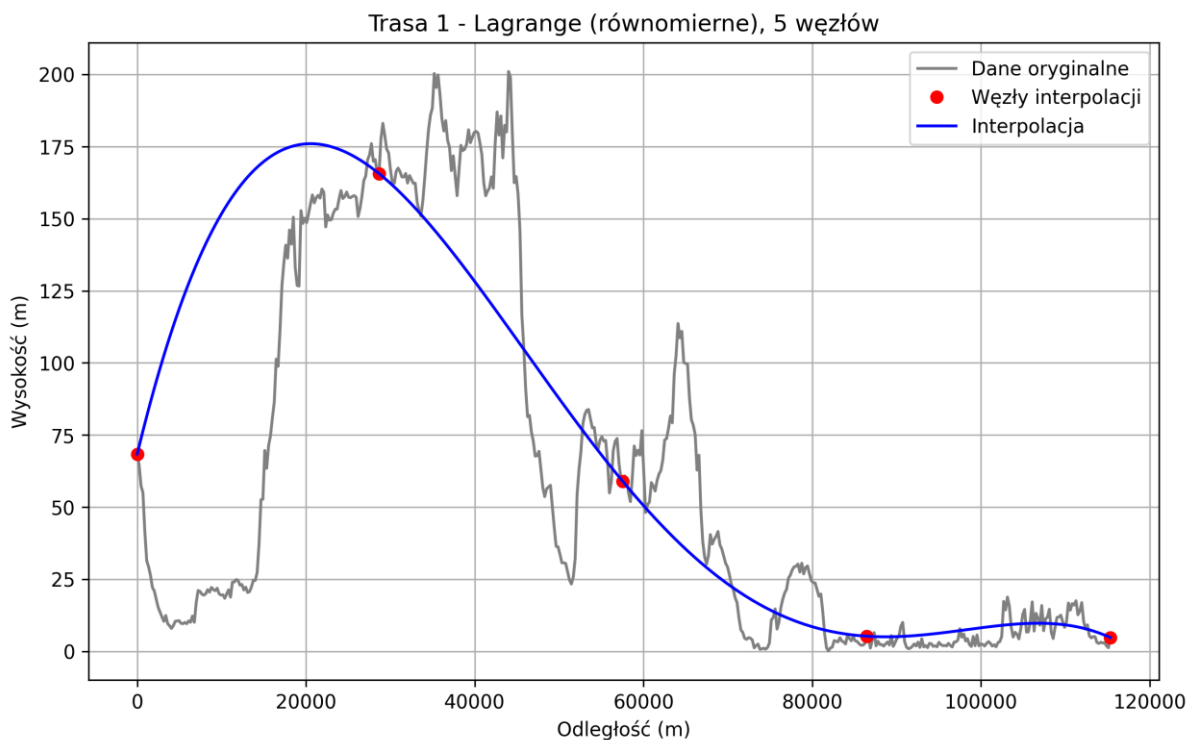
W ramach podstawowej analizy interpolacji wielomianowej metodą Lagrange'a przeprowadzono eksperymenty dla pierwszej trasy, zmieniając liczbę węzłów interpolacji. Celem analizy było zbadanie wpływu liczby węzłów na jakość interpolacji.

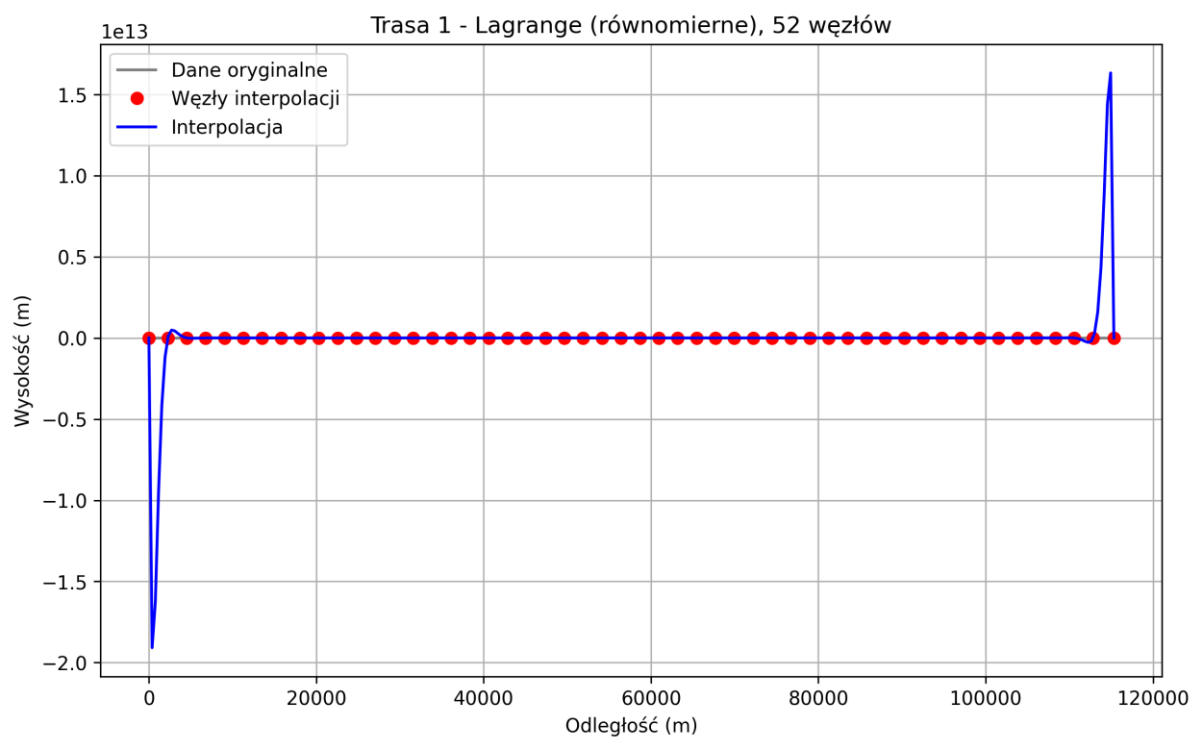
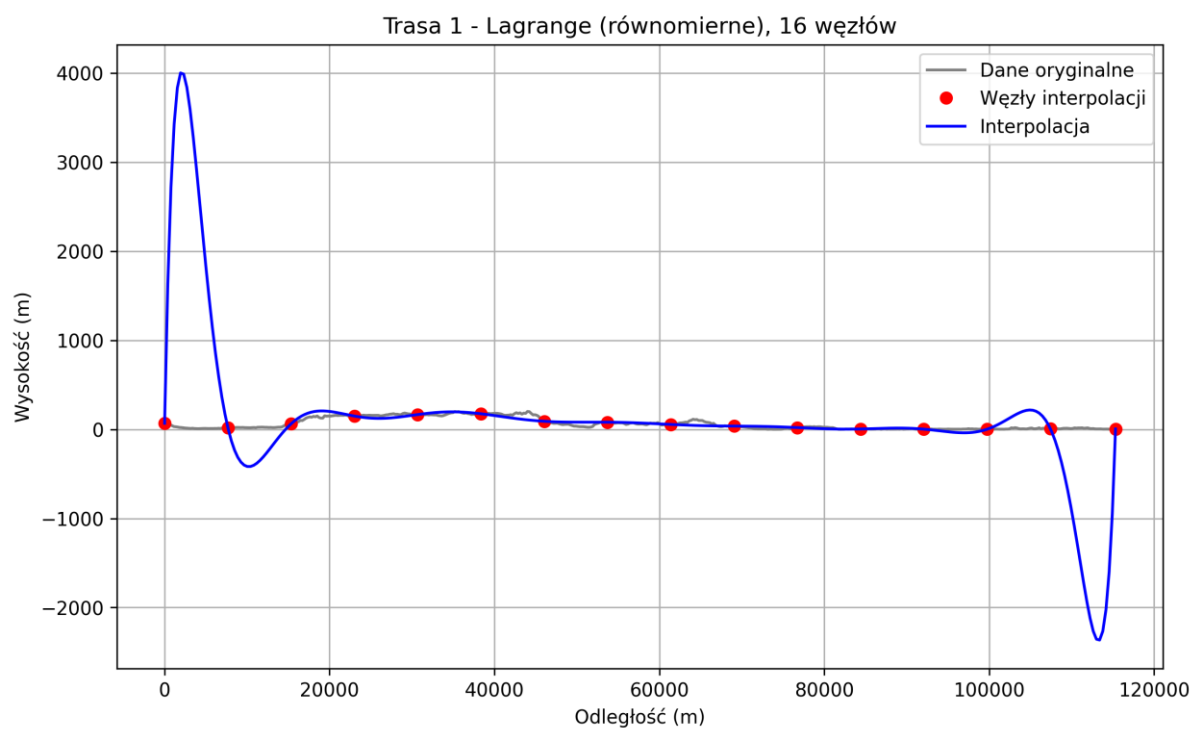
Do analizy wykorzystano dane wysokościowe z trasy 1. Wybrano zestawy po **5, 16, 52 i 103 węzłów** równoodległych. Dla każdego zestawu wykonano interpolację wielomianową oraz wygenerowano wykres przedstawiający:

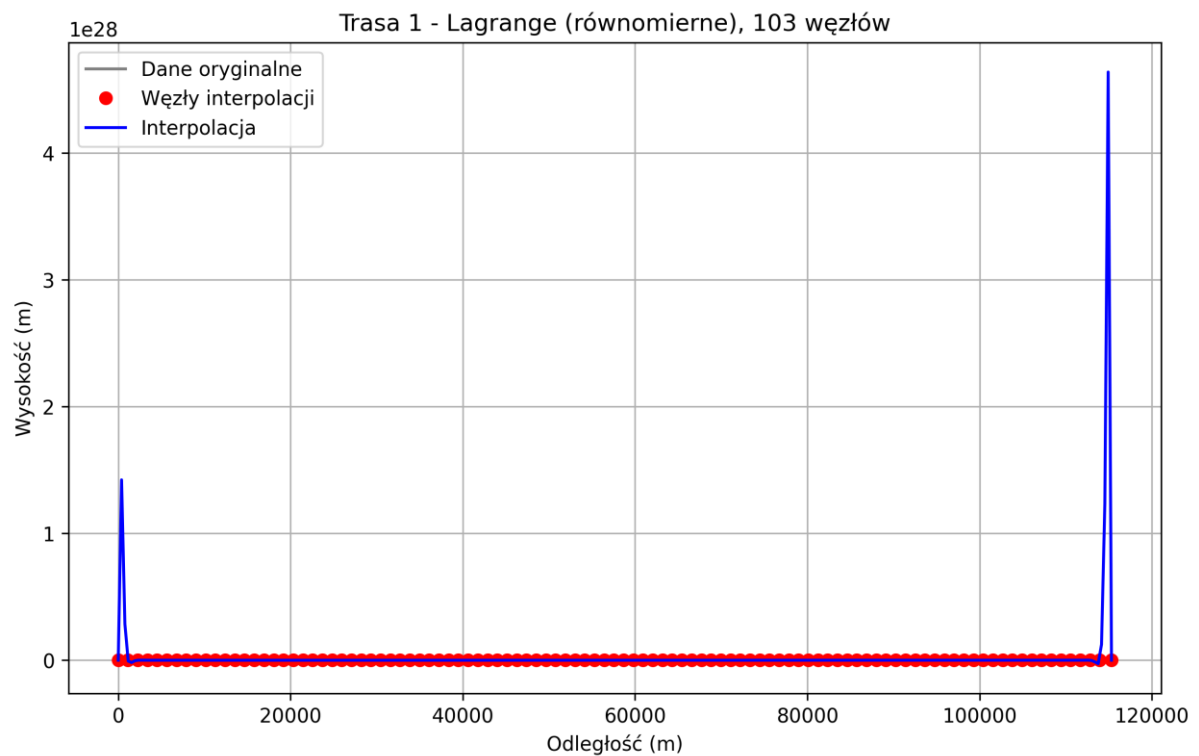
- oryginalne dane wysokościowe (linia szara),
- wybrane węzły interpolacji (punkty czerwone),
- wynik interpolacji wielomianowej (linia niebieska).

Wszystkie wykresy zawierają legendę, opis osi oraz tytuł informujący o liczbie węzłów i metodzie interpolacji.

2.1 Trasa 1 – hel_yeah.csv

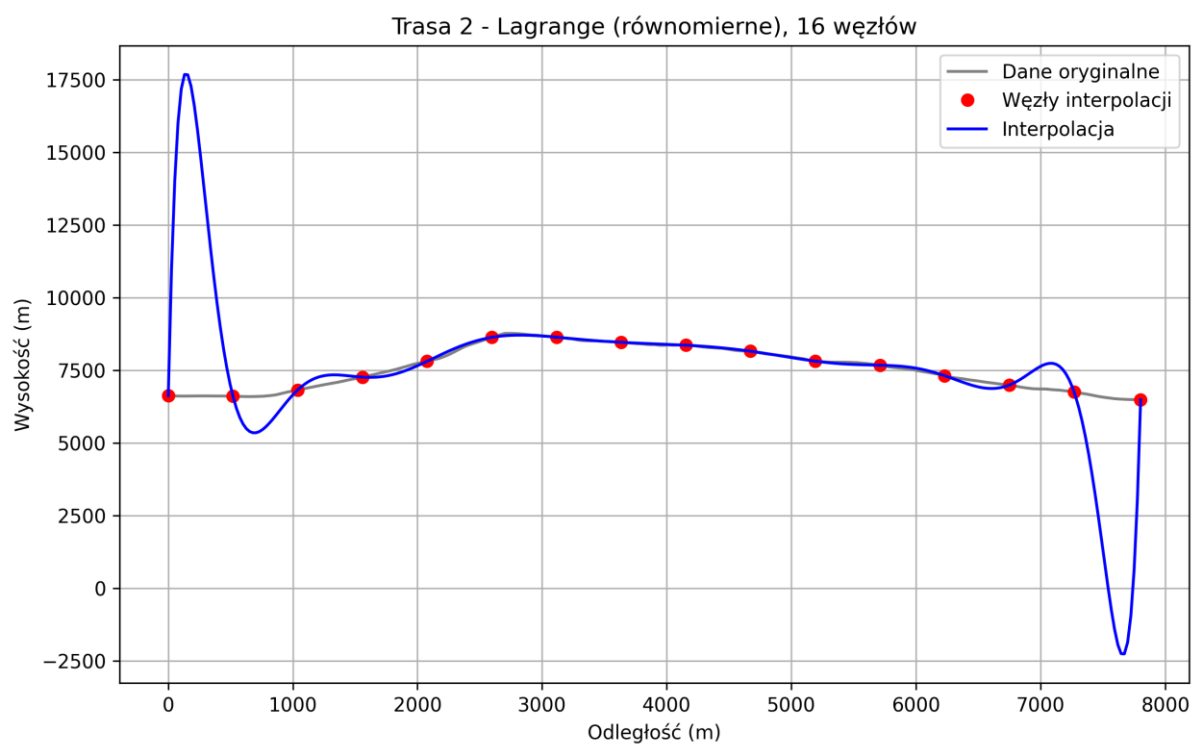
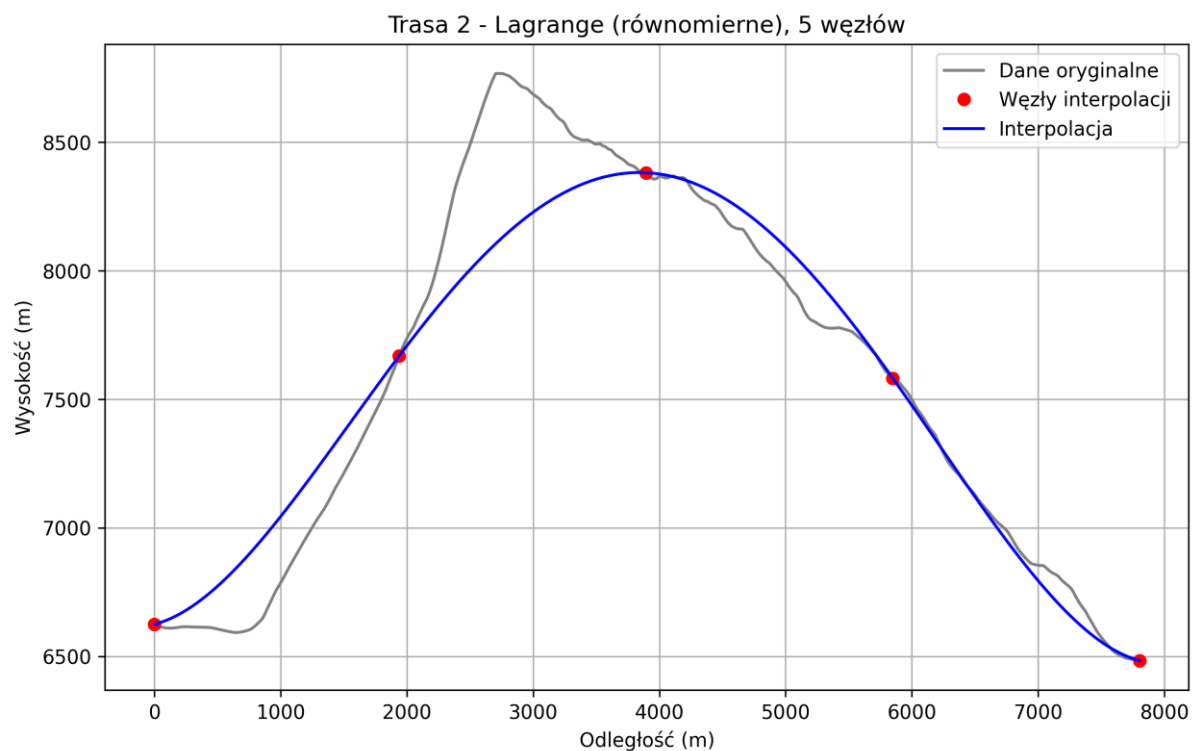


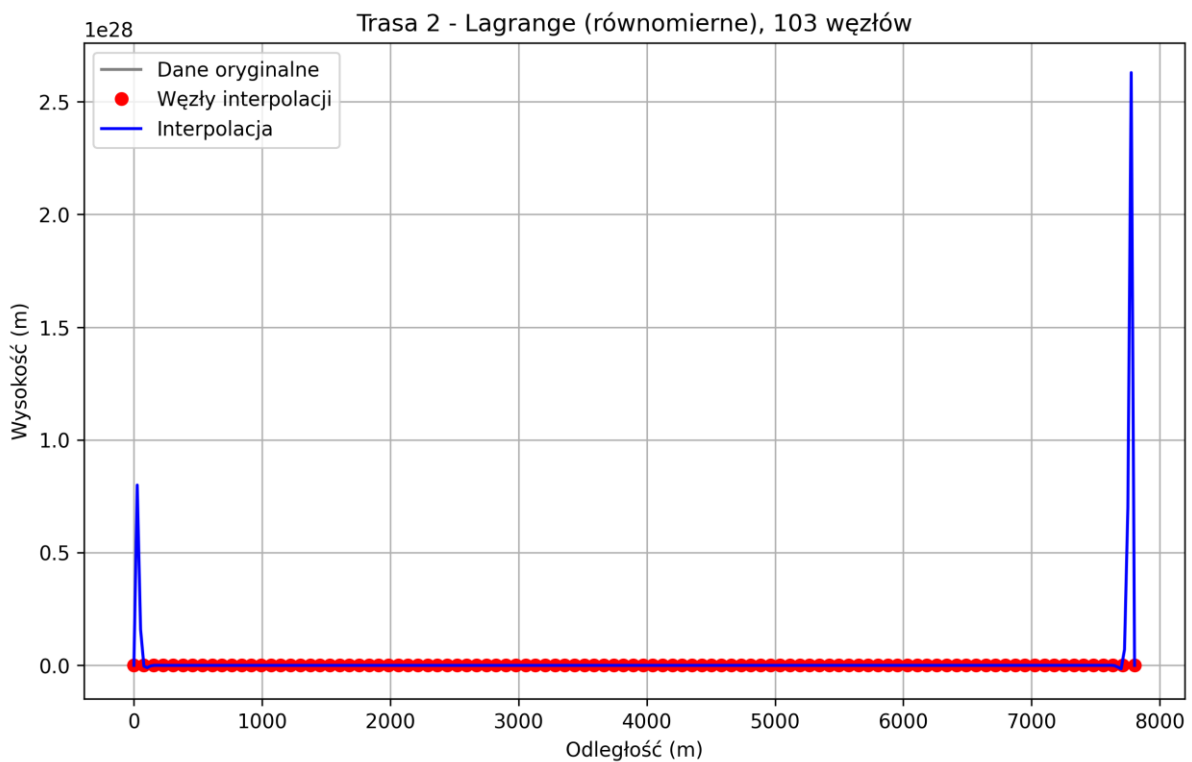
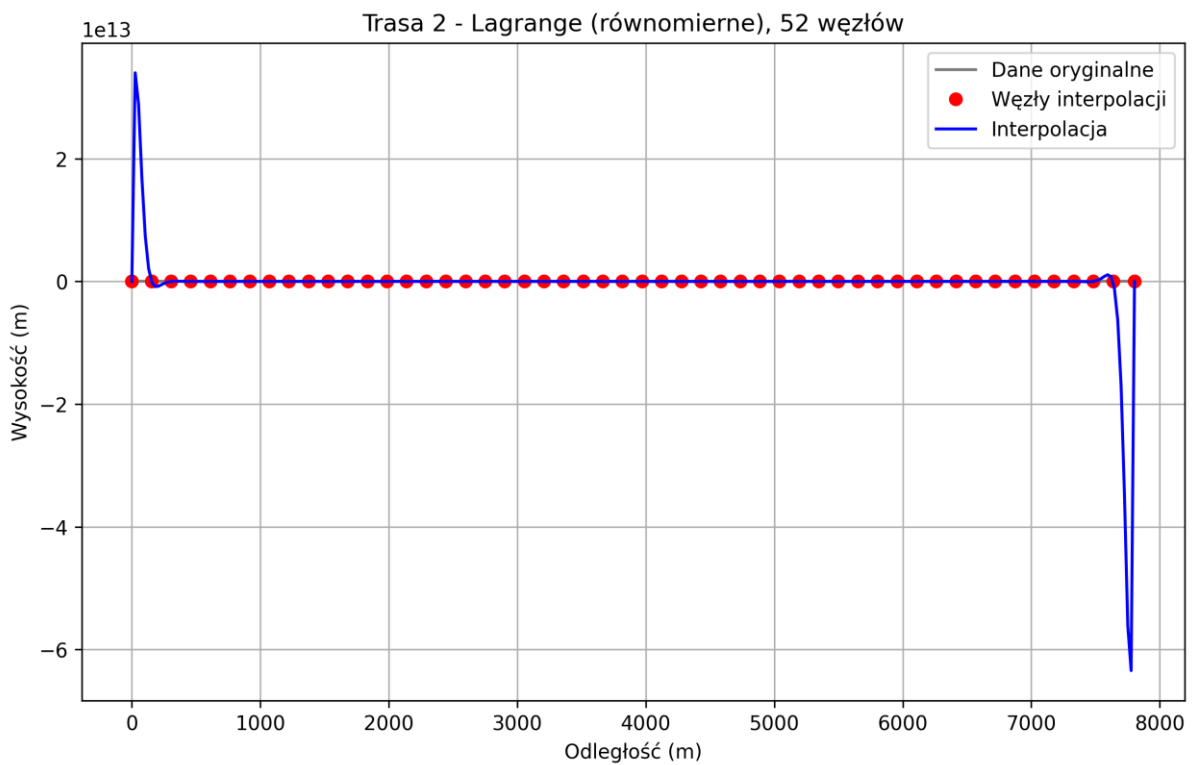




Dla 5 węzłów interpolacja wielomianowa nie jest w stanie wiernie odwzorować kształtu profilu – uzyskane przybliżenie jest zbyt uproszczone i odbiega od danych oryginalnych. Przy 16 węzłach pojawia się już zauważalny efekt Rungego, który nasila się wraz ze wzrostem liczby węzłów (52 i 103), prowadząc do wyraźnych oscylacji szczególnie na krańcach przedziału.

2.2 Trasa 2 – MountEverest.csv

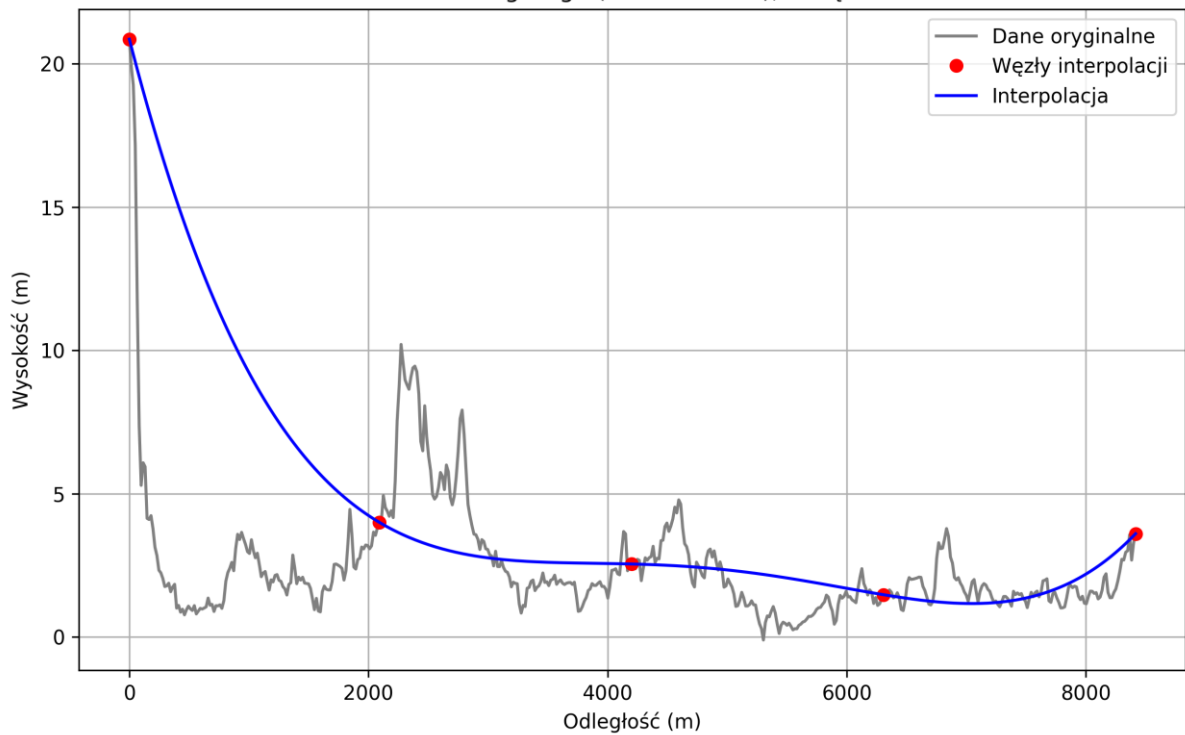




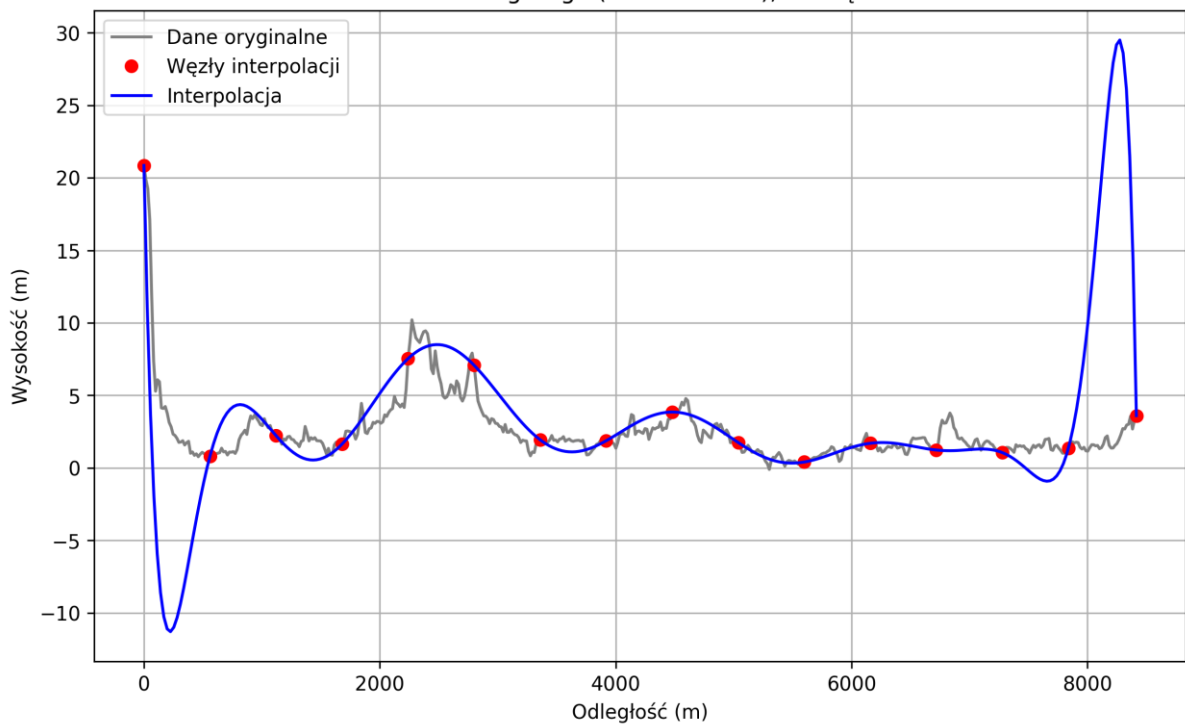
Dla 5 węzłów interpolacja oddaje ogólny trend, ale nie odwzorowuje lokalnych zmian, mimo że profil ma jeden dominujący szczyt. Już przy 16 węzłach pojawia się efekt Rungego, który pogłębia się przy większej liczbie węzłów, prowadząc do niestabilności na krańcach przedziału.

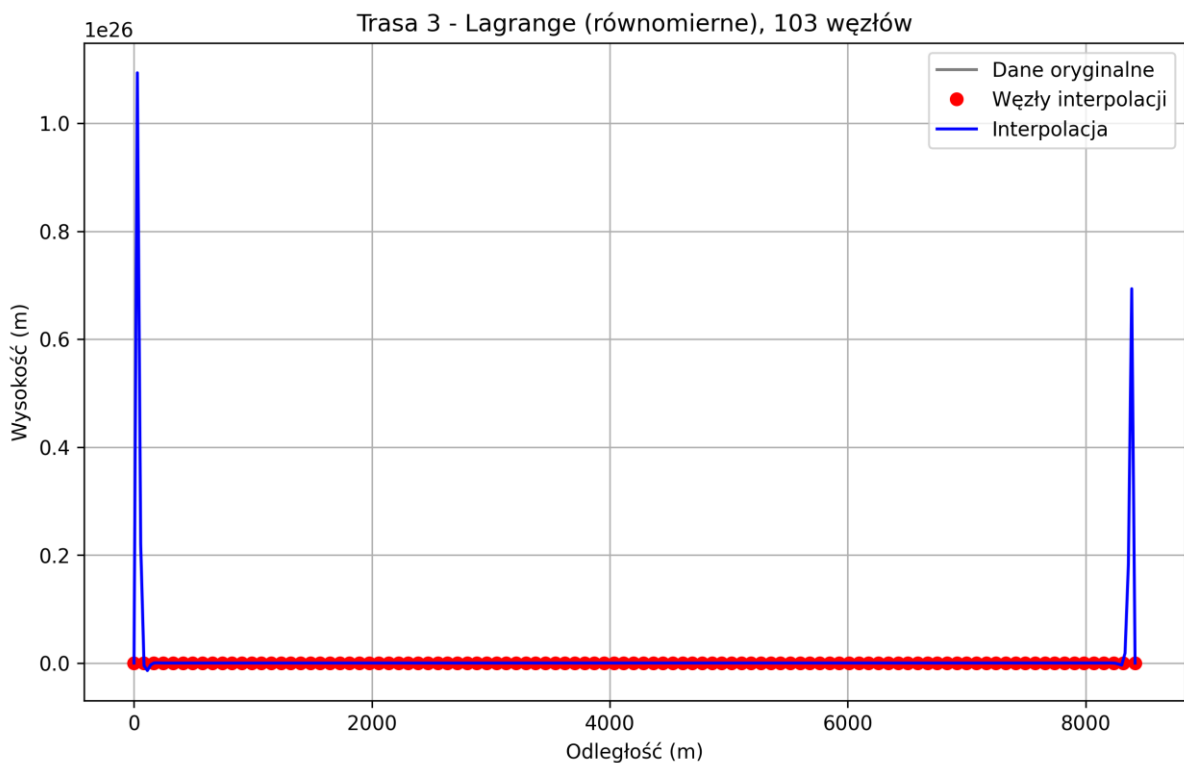
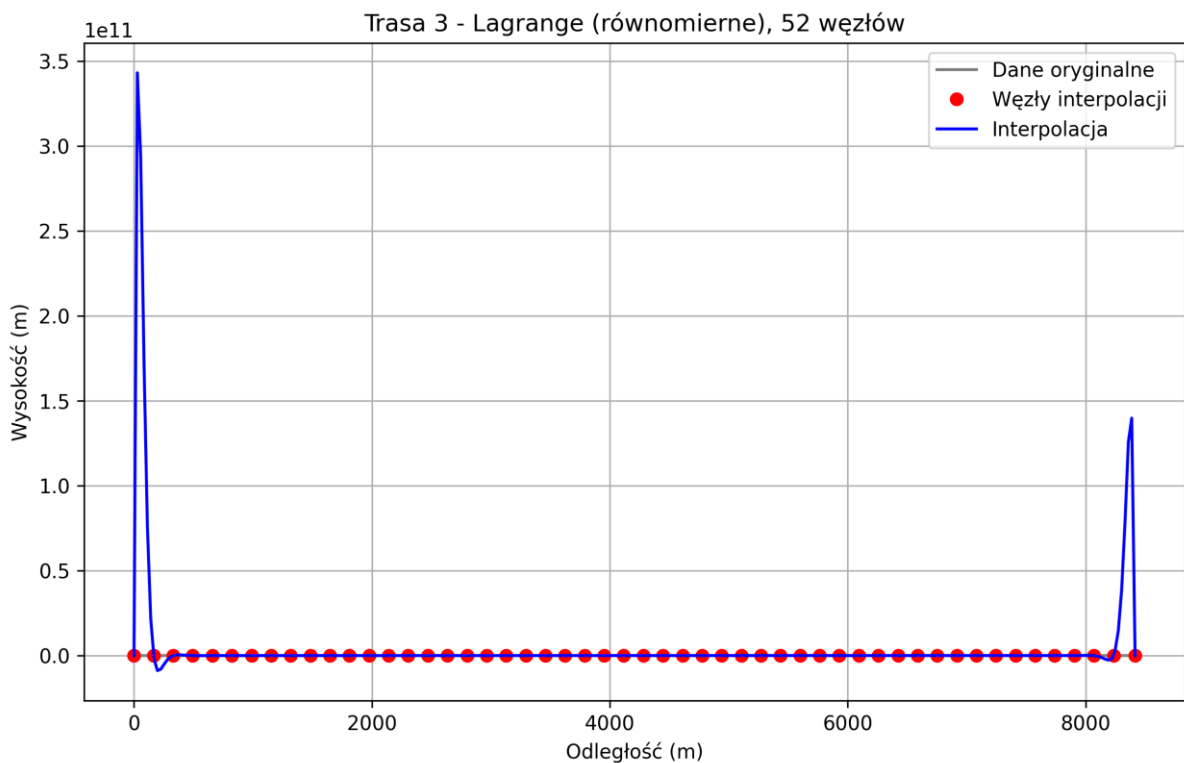
2.3 trasa 3 – SpacerniakGdansk.csv

Trasa 3 - Lagrange (równomierne), 5 węzłów



Trasa 3 - Lagrange (równomierne), 16 węzłów





Interpolacja dla 5 węzłów nie oddaje lokalnych zmian wysokości, a kształt wielomianu jest zbyt uproszczony względem oryginalnych danych. Przy większej liczbie węzłów ponownie pojawia się efekt Rungego, powodując znaczne oscylacje na krańcach przedziału.

2.4 Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Analiza wyników interpolacji metodą Lagrange'a dla różnych liczby węzłów wskazuje na istotne ograniczenia tej metody przy równoodległych węzłach.

Dla **5 węzłów** interpolacja nie jest w stanie wiernie odwzorować kształtu profilu – uzyskane przybliżenie jest zbyt uproszczone i odbiega od danych oryginalnych. Interpolacja oddaje jedynie ogólny trend, ale nie odwzorowuje lokalnych zmian, mimo że profil zawiera jeden dominujący szczyt.

W przypadku **16 węzłów** pojawia się już zauważalny efekt Rungego, który objawia się oscylacjami wielomianu interpolacyjnego, szczególnie w okolicach krańców przedziału. Efekt ten nasila się wraz ze wzrostem liczby węzłów.

Dla większej liczby węzłów, tj. **52 i 103**, efekt Rungego staje się bardzo wyraźny. Powoduje to silne oscylacje wielomianu, szczególnie na krańcach przedziału, co prowadzi do znacznego pogorszenia jakości interpolacji oraz niestabilności uzyskanych wyników.

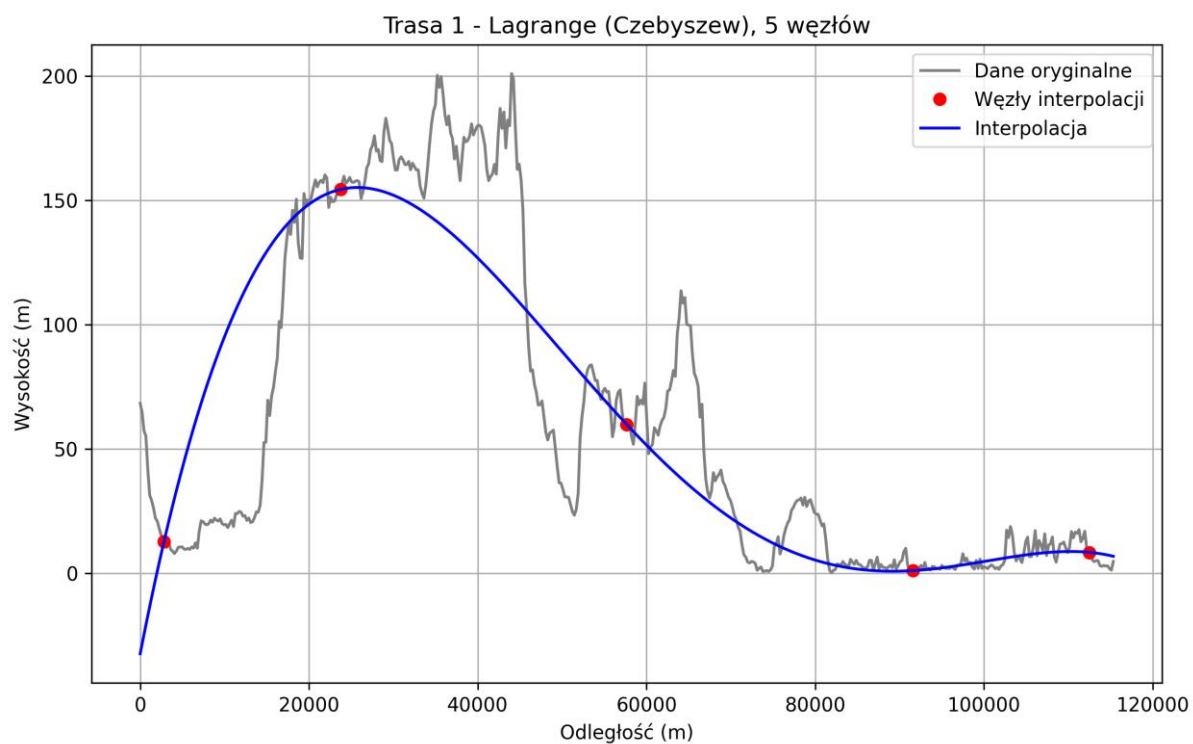
Podsumowując, metoda Lagrange'a przy równoodległych węzłach dobrze oddaje jedynie ogólny kształt funkcji przy małej liczbie węzłów, ale nie radzi sobie z lokalnymi zmianami oraz jest podatna na efekt Rungego przy większej liczbie punktów, co znacząco obniża jakość interpolacji.

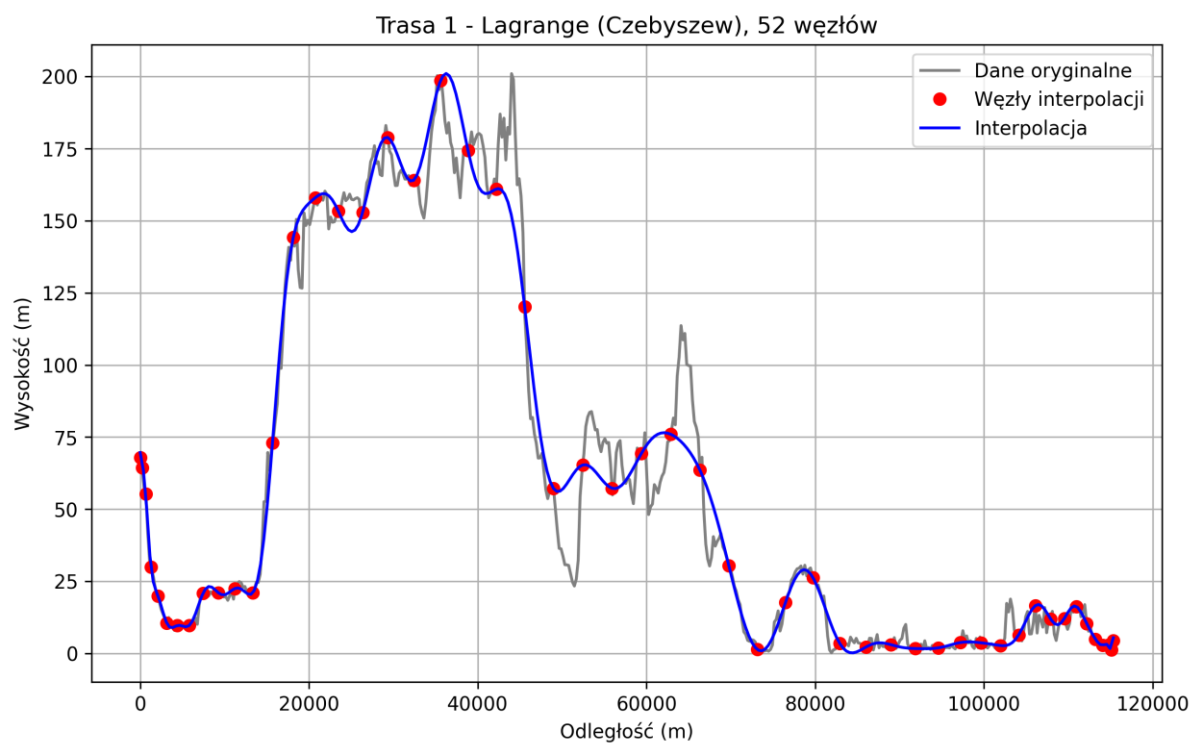
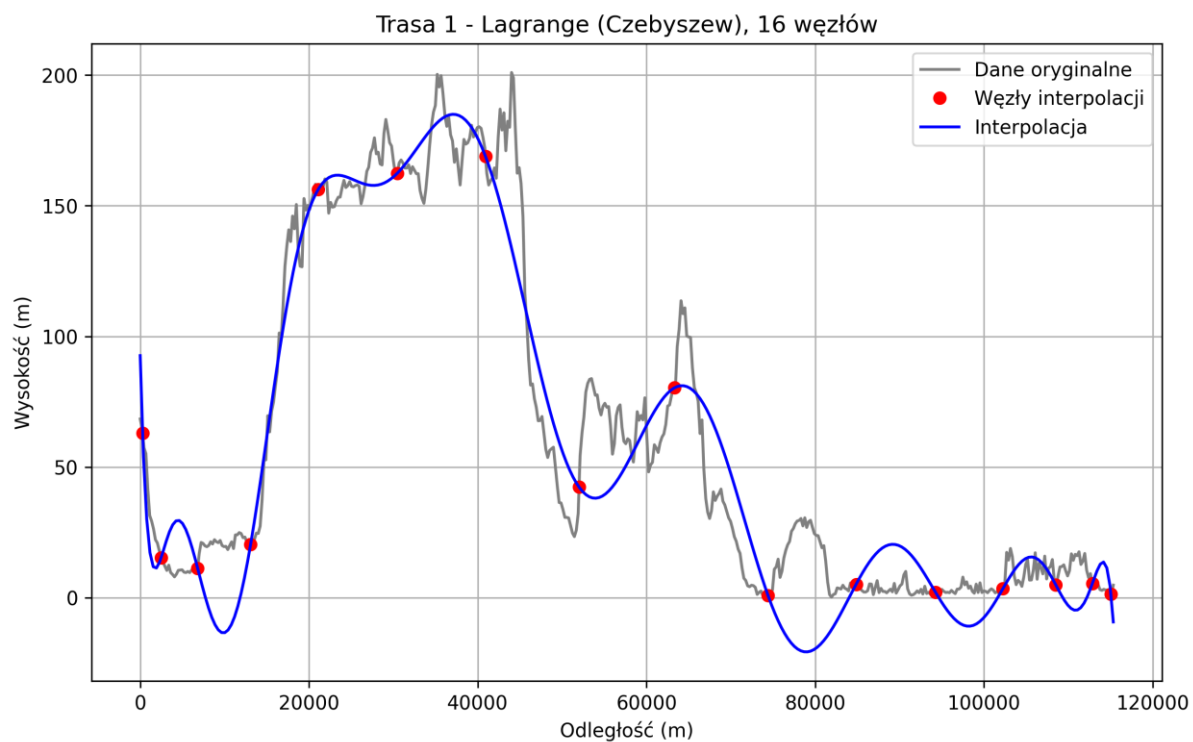
3 Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

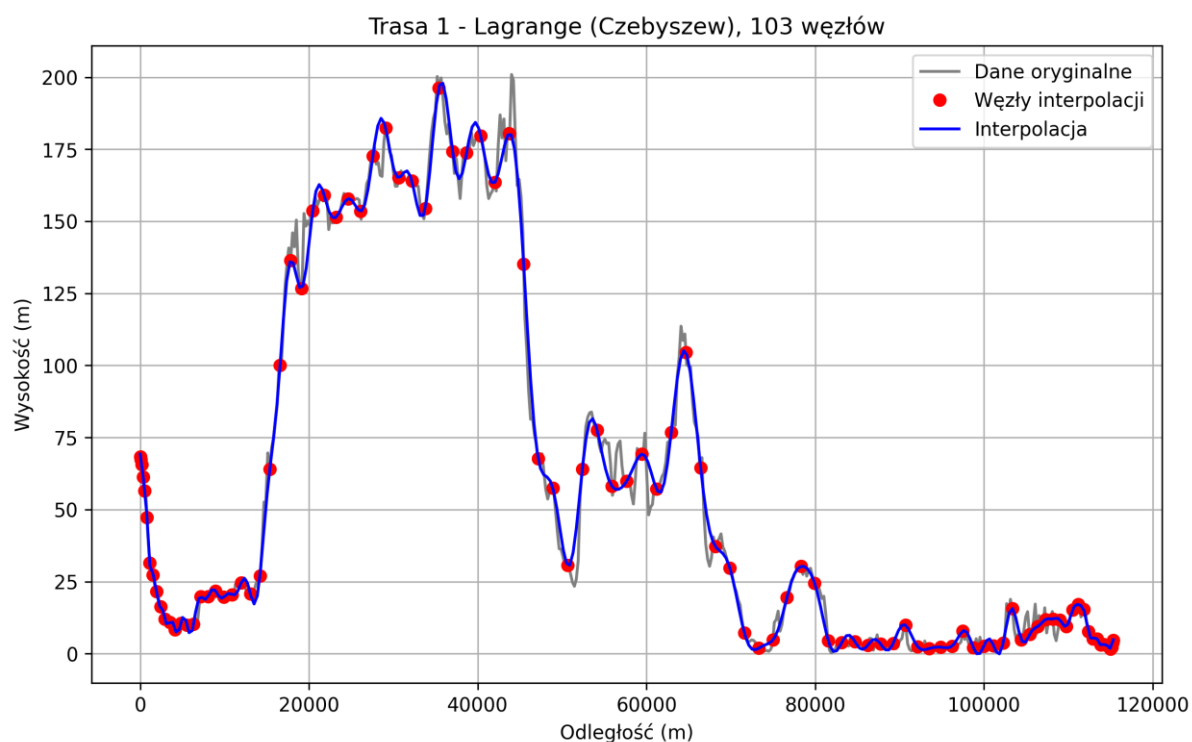
W celu zminimalizowania efektu Rungego zastosowano interpolację metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa. Z racji tego, że nie znamy danych wejściowych, nie jesteśmy w stanie idealnie dobrać węzłów

Czebyszewa. W projekcie wybrano z węzłów wejściowych bez powtórzeń te, które są najbliższe węzłów Czebyszewa.

3.1 Trasa 1 – hel_yeah.csv



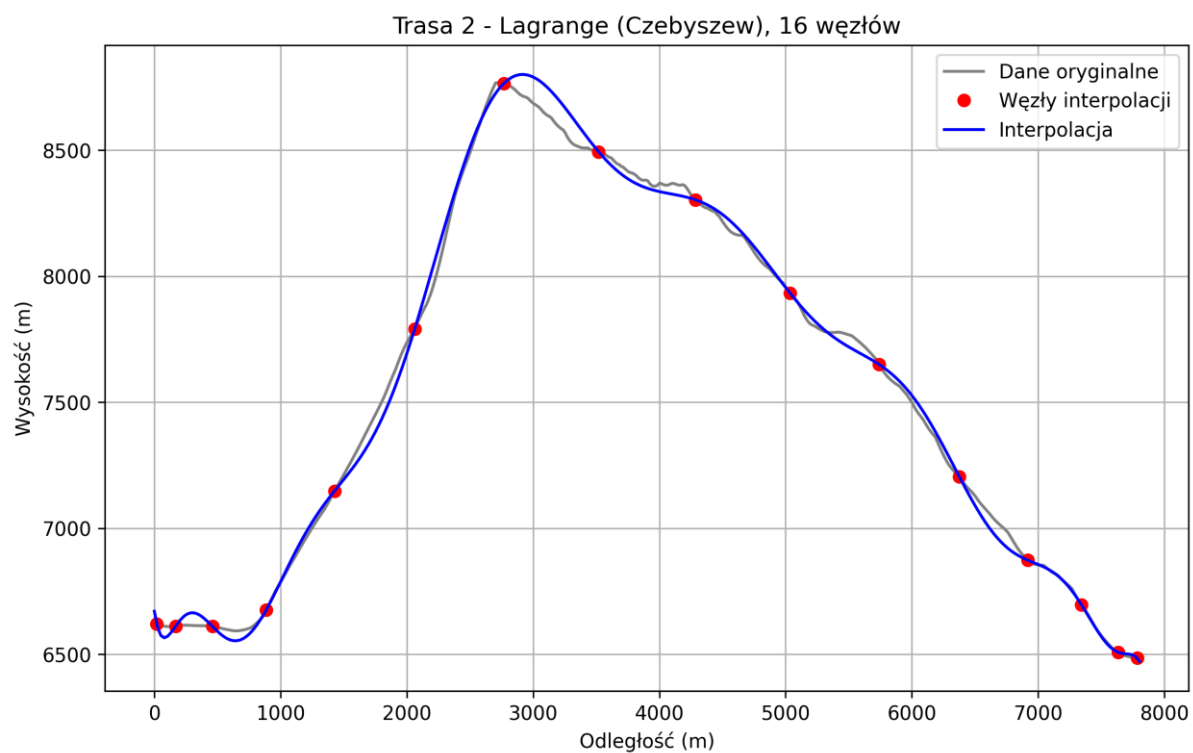
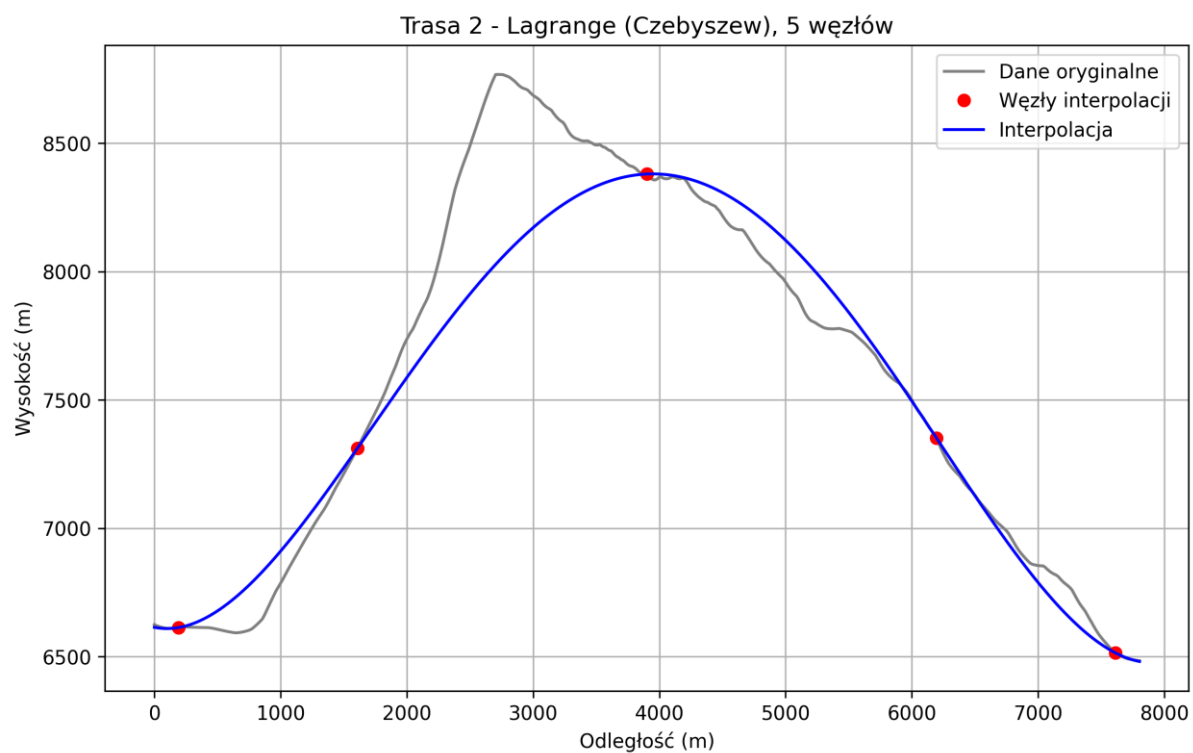


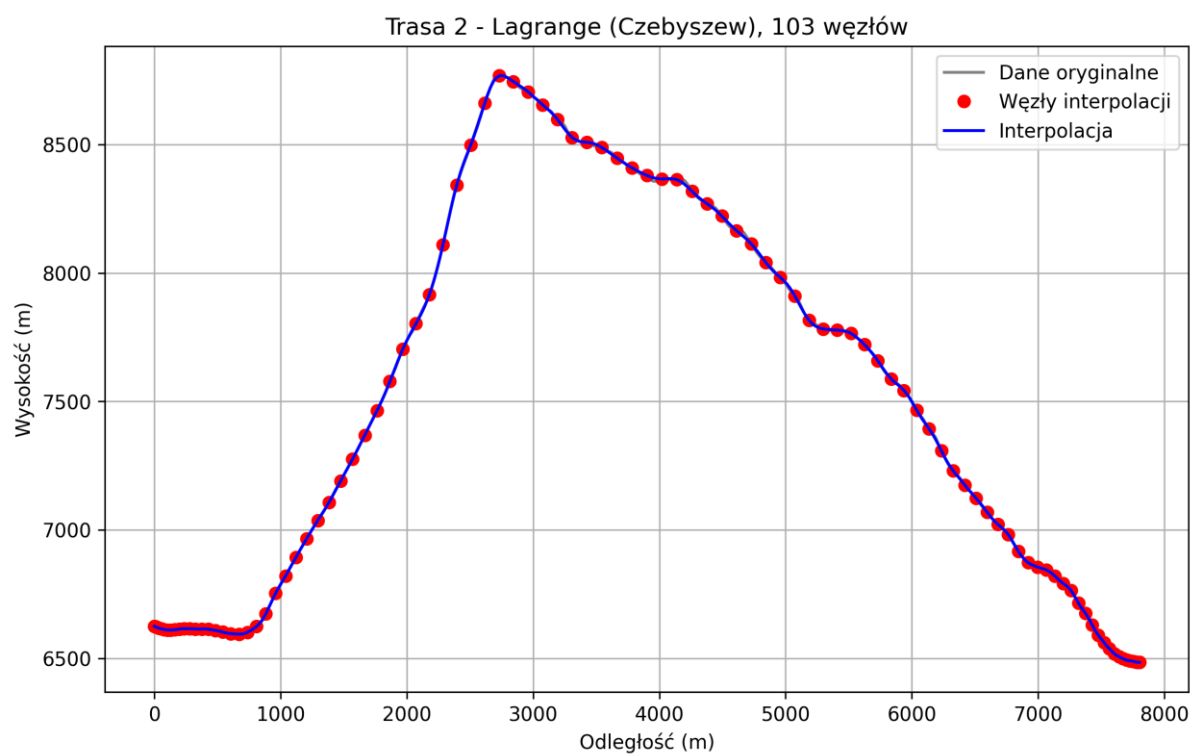
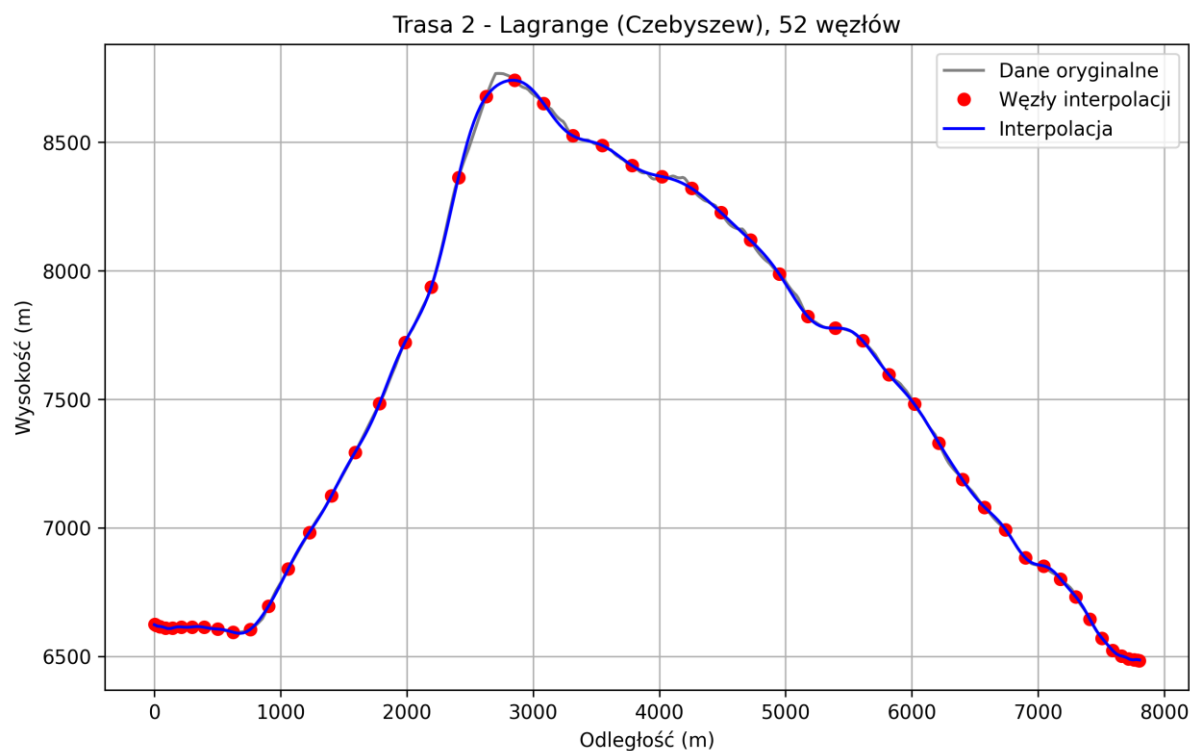


Zastosowanie węzłów Czebyszewa znacząco poprawia jakość interpolacji w porównaniu do węzłów równoodległych, skutecznie ograniczając efekt Rungego. Dla 5 i 16 węzłów uzyskujemy wyraźnie lepsze przybliżenia – są one bardziej stabilne i lepiej oddają ogólny kształt profilu, choć nadal brakuje im precyzji w odwzorowaniu lokalnych ekstremów.

Przy 52 węzłach interpolacja pozostaje stabilna, jednak wciąż widoczne są pominięcia niektórych lokalnych minimów i maksimów, co wpływa na szczegółowość odwzorowania. Dopiero przy 103 węzłach uzyskujemy przybliżenie o wysokiej dokładności – przebieg profilu jest wiernie odtworzony, a ewentualne odstępstwa dotyczą jedynie drobnych, lokalnych fluktuacji.

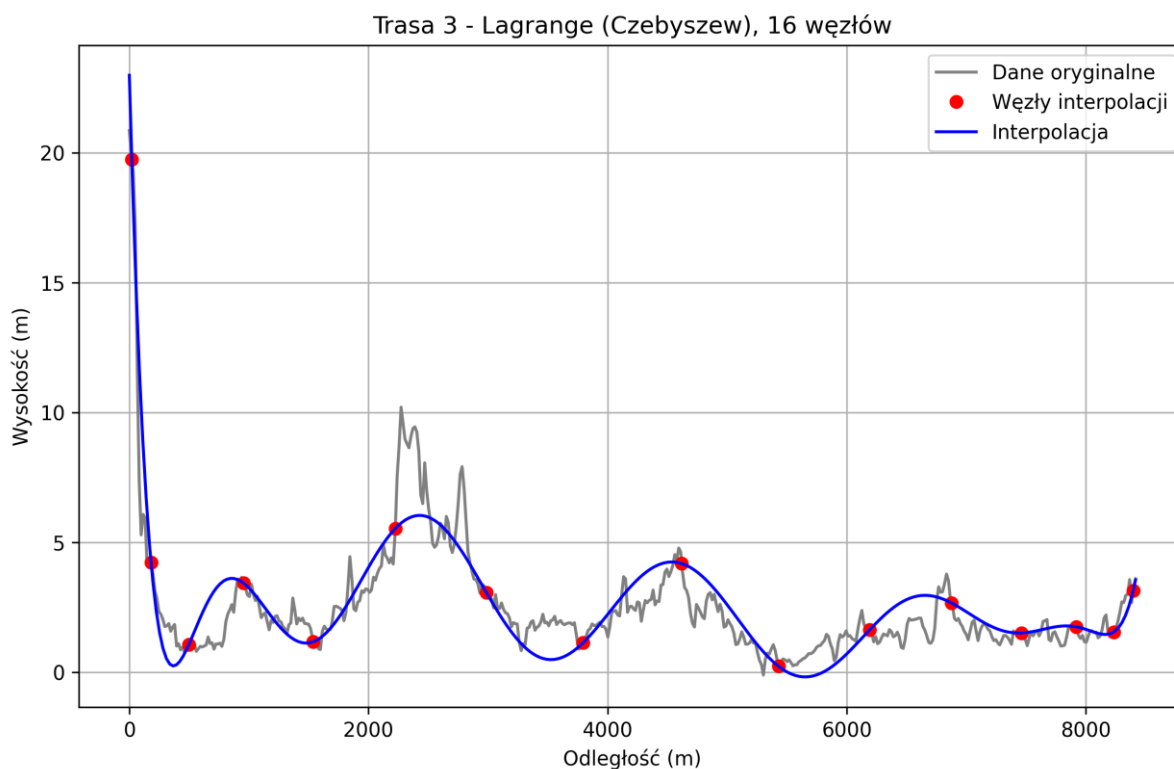
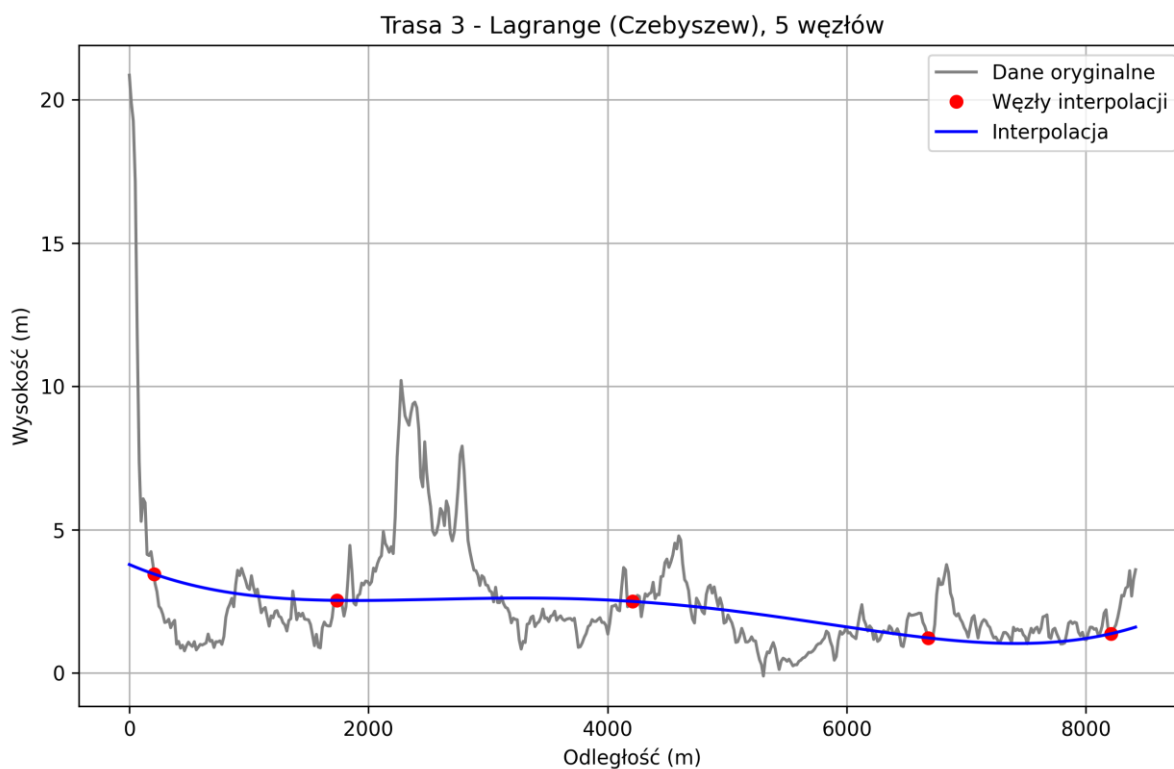
3.2 Trasa 2 – MountEverest.csv

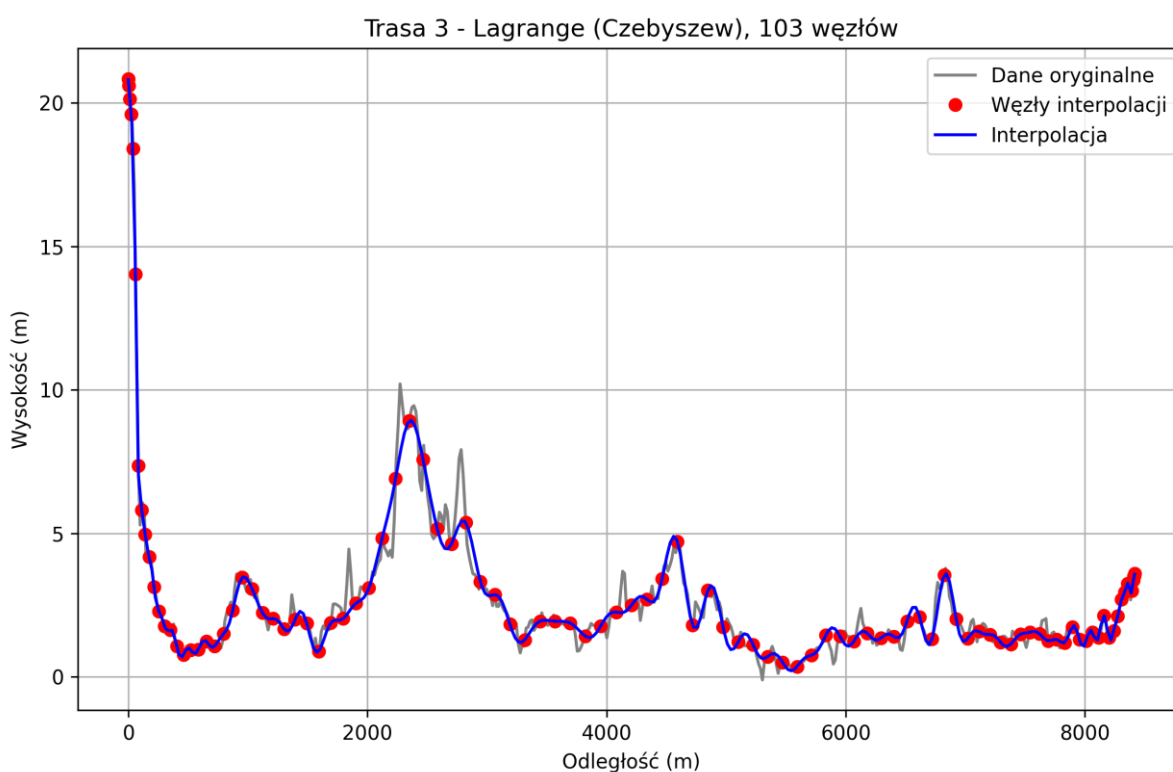
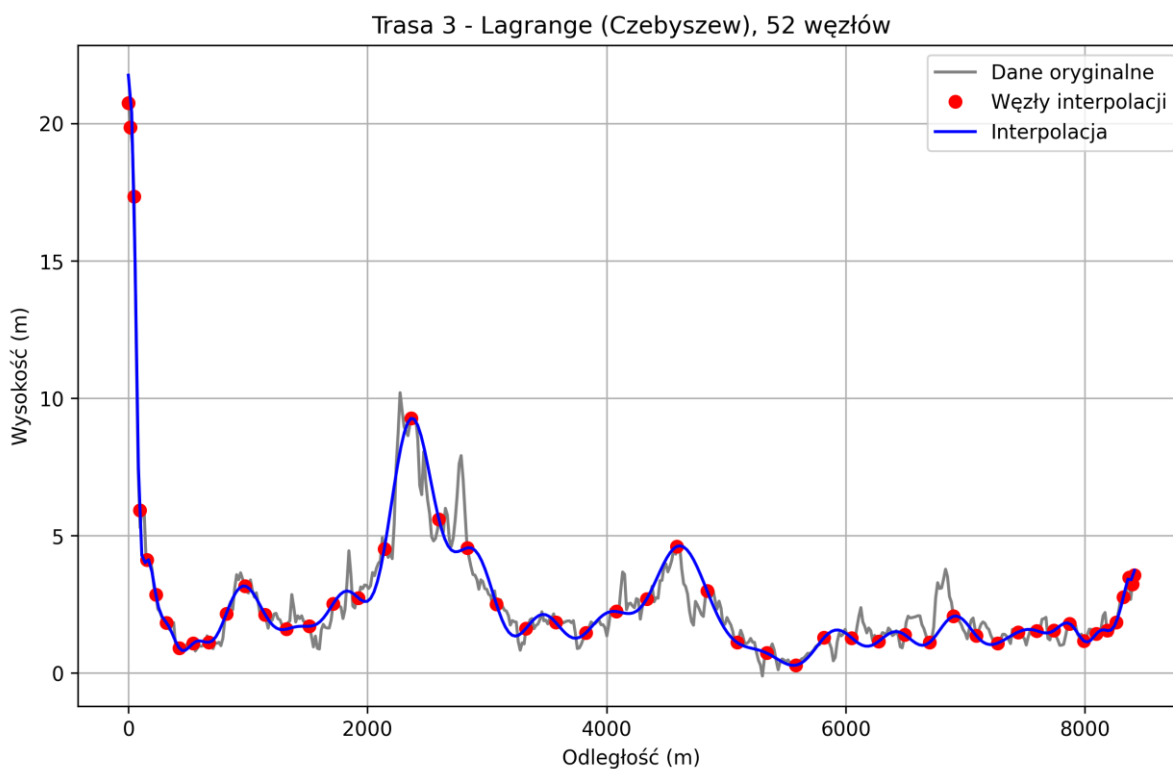




Zastosowanie węzłów Czebyszewa skutecznie ogranicza, a w wielu przypadkach całkowicie eliminuje efekt Rungego, który jest wyraźnie widoczny przy interpolacji z użyciem węzłów równoodległych. Dla profilu Mount Everest uzyskujemy dość dokładne przybliżenie już przy 16 węzłach, natomiast przy 52 i 103 węzłach interpolacja daje niemal idealne odwzorowanie przebiegu profilu, zarówno w zakresie ogólnego kształtu, jak i lokalnych zmian wysokości.

3.3 Trasa 3 – SpacerniakGdansk





Dla profilu Spacerniak Gdańsk, interpolacja z użyciem węzłów Czebyszewa daje **znacznie lepsze wyniki** niż w przypadku węzłów równoodległych, szczególnie przy mniejszej liczbie węzłów (5 i 16). Mimo że przybliżenia nie odwzorowują jeszcze wszystkich drobnych szczegółów, zachowany jest ogólny przebieg profilu, a efekt Rungego nie występuje. W przypadku większej liczby węzłów (52 i 103), interpolacja

nadal pozostaje **stabilna i dokładna**, a odchylenia – jeśli występują – są minimalne i nie zaburzają interpretacji wyników. W przeciwieństwie do wcześniejszych obserwacji, **zniekształcenia nie mają znaczącego wpływu na jakość przybliżenia**, dzięki poprawionej implementacji.

3.4 Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange’a dla węzłów Czebyszewa

Analiza wyników interpolacji metodą Lagrange’a z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa po poprawionej implementacji pokazuje, że jest to **stabilna i skuteczna metoda**, zwłaszcza w porównaniu do klasycznego podejścia z węzłami równoodległymi. Dla większości analizowanych profili (w tym Hel_yeah, MountEverest i Spacerniak Gdańsk) uzyskano **wysoką dokładność przybliżeń**, bez występowania efektu Rungego – nawet przy dużej liczbie węzłów (103).

Metoda z węzłami Czebyszewa **pozwala na dokładne odwzorowanie zarówno ogólnego trendu, jak i lokalnych zmian** profilu. Szczególnie dobrze sprawdza się przy średniej i dużej liczbie węzłów (od 16 w górę), co czyni ją **praktycznym kompromisem między złożonością a dokładnością**.

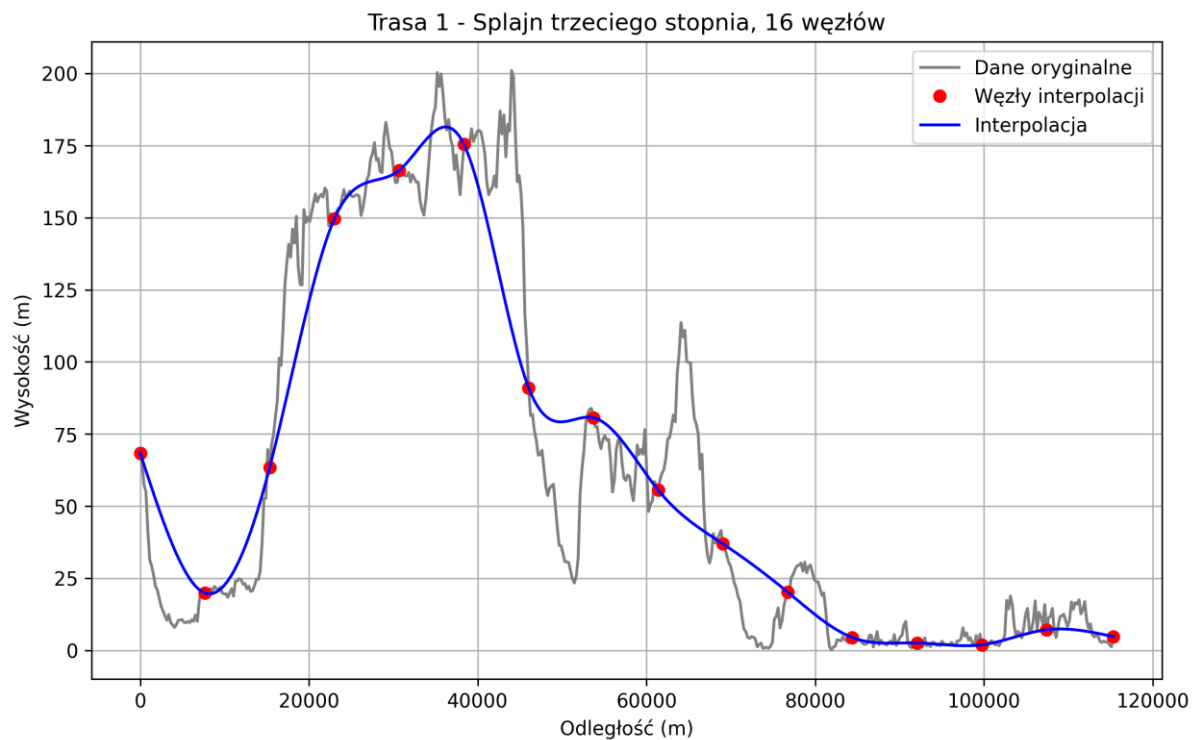
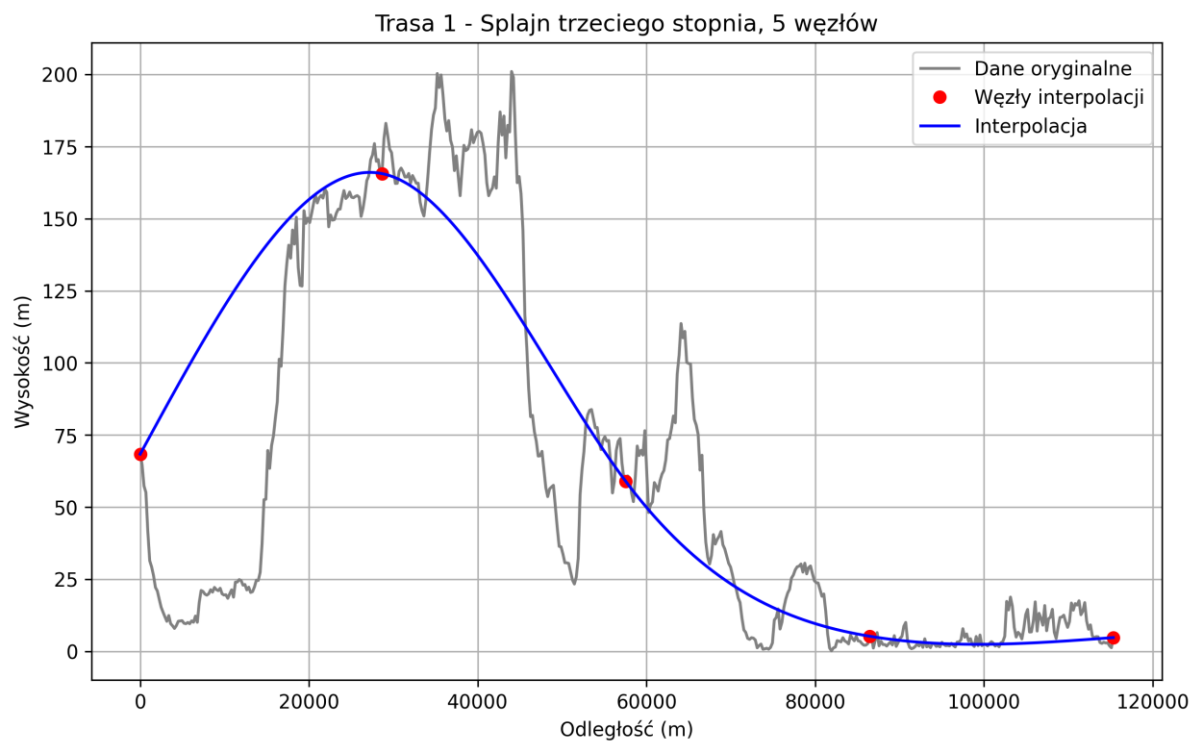
Mimo to należy pamiętać, że metoda ta **wymaga nierównomiernego rozmieszczenia punktów interpolacyjnych**, co może być trudne do zastosowania w przypadku danych pomiarowych o stałym kroku. Jednakże przy dużej liczbie punktów wejściowych (tak jak w naszym przypadku – 512), możliwe jest wygenerowanie rozkładu węzłów Czebyszewa bez utraty istotnych informacji.

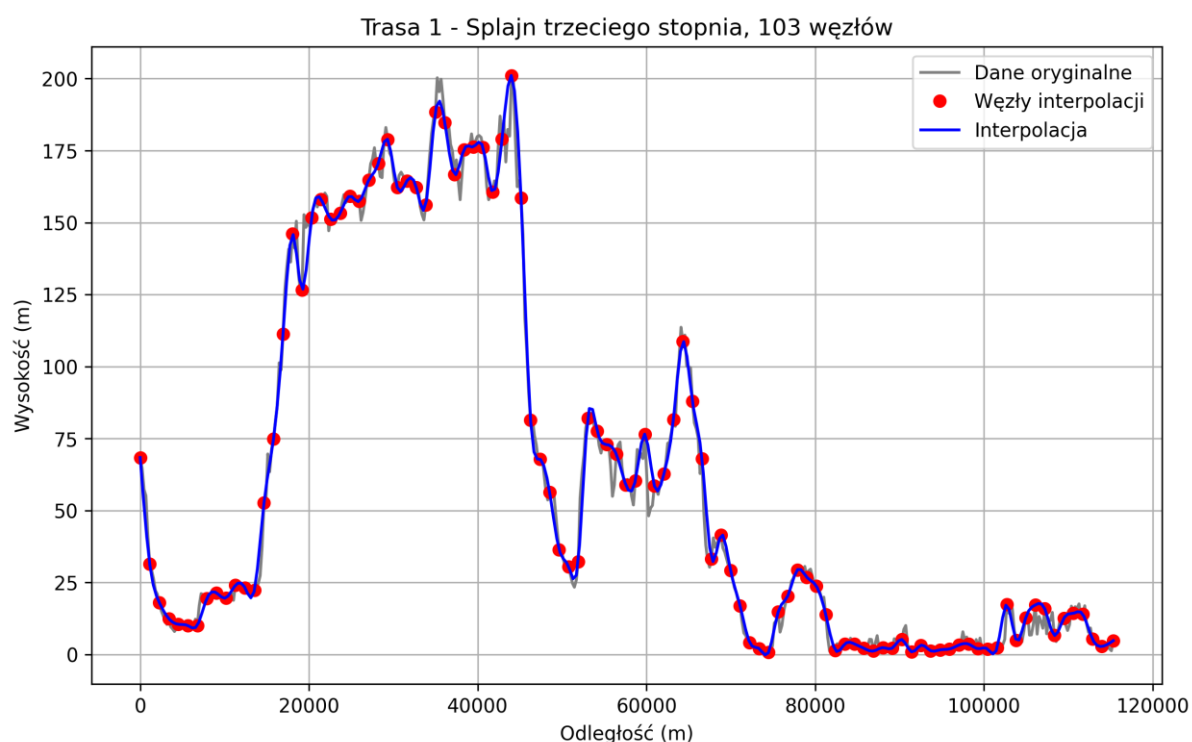
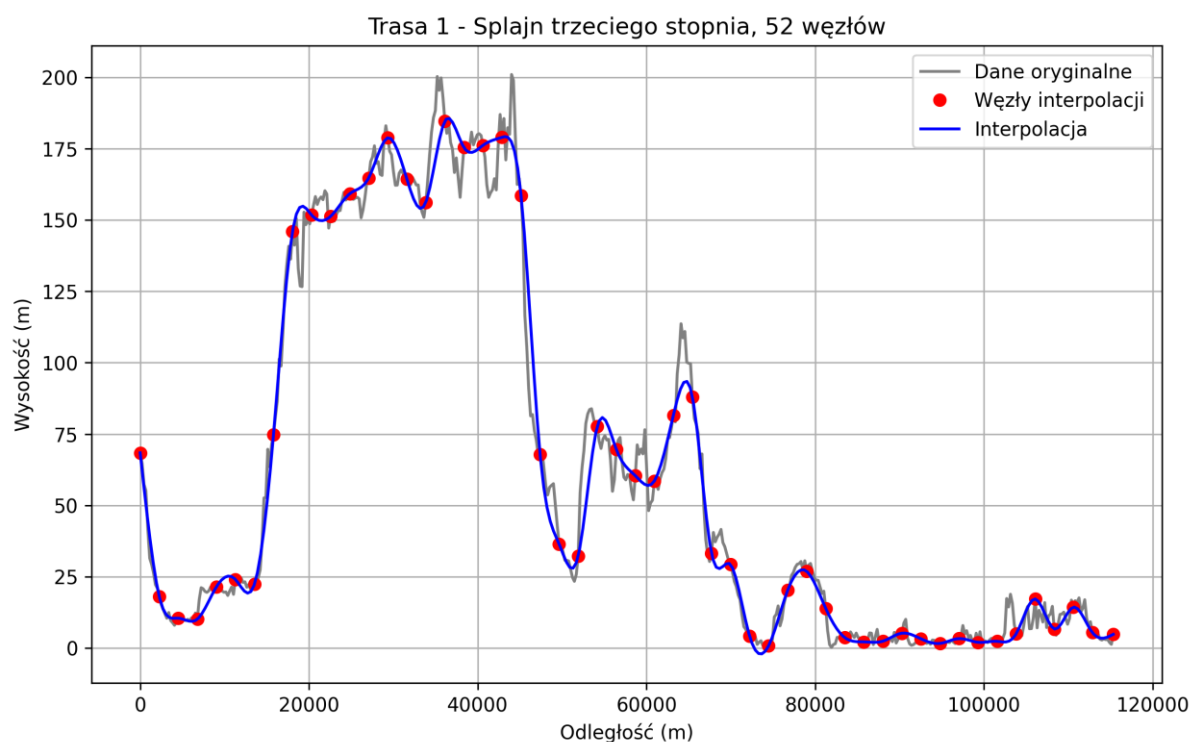
4. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych

Dla każdego z trzech analizowanych profili przeprowadzono interpolację metodą funkcji sklejanych. W projekcie zastosowano funkcje sklejane stopnia trzeciego (tzw. cubic splines). W celu porównania wyników, dla każdego zestawu danych wybrano 4 różne

liczby węzłów: **5, 16, 52 oraz 103**. Węzły zostały rozmieszczone **równoodległe** w obrębie każdego profilu.

4.1 Trasa 1 – hel-yeah.csv



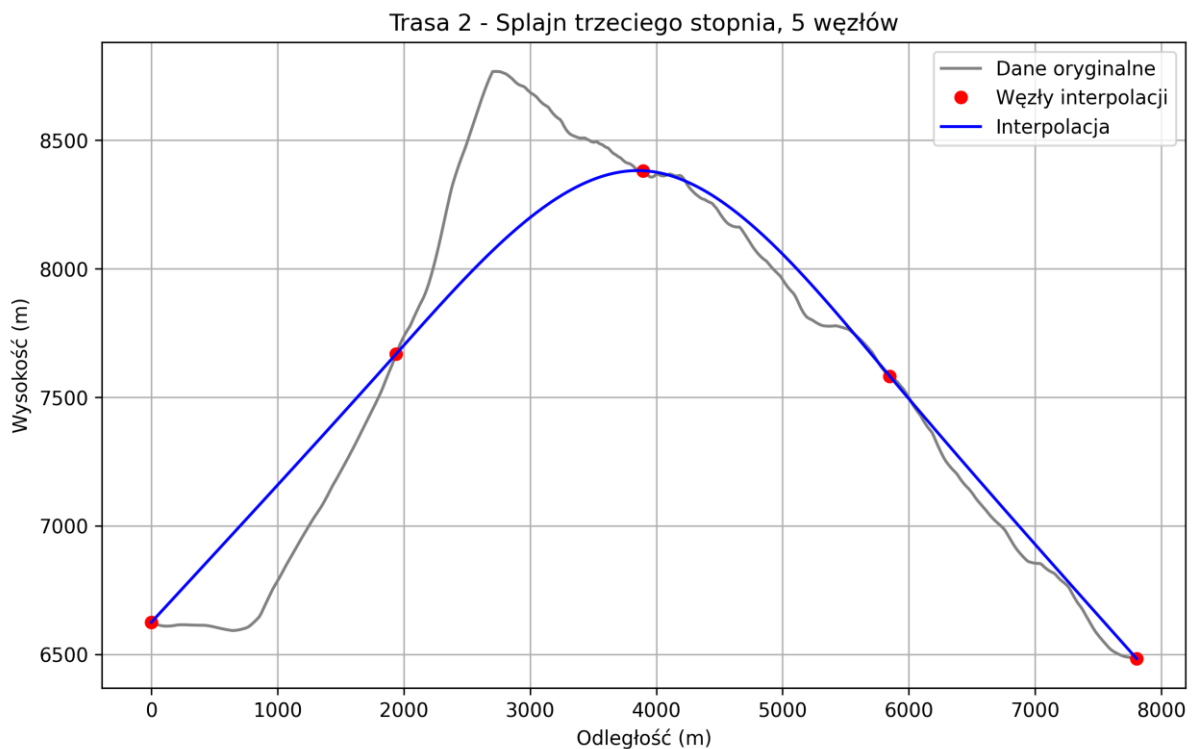


W przypadku profilu **hel_yeah**, metoda funkcji sklepanych początkowo nie zapewnia wysokiej dokładności. Dla **5** oraz **16 węzłów** przybliżenie jest zbyt uproszczone i nie oddaje lokalnych zmian ani charakterystycznych cech profilu. Dopiero przy **52 węzłach** interpolacja staje się wyraźnie lepsza, a dla **103 węzłów** uzyskujemy bardzo dokładne odwzorowanie przebiegu trasy.

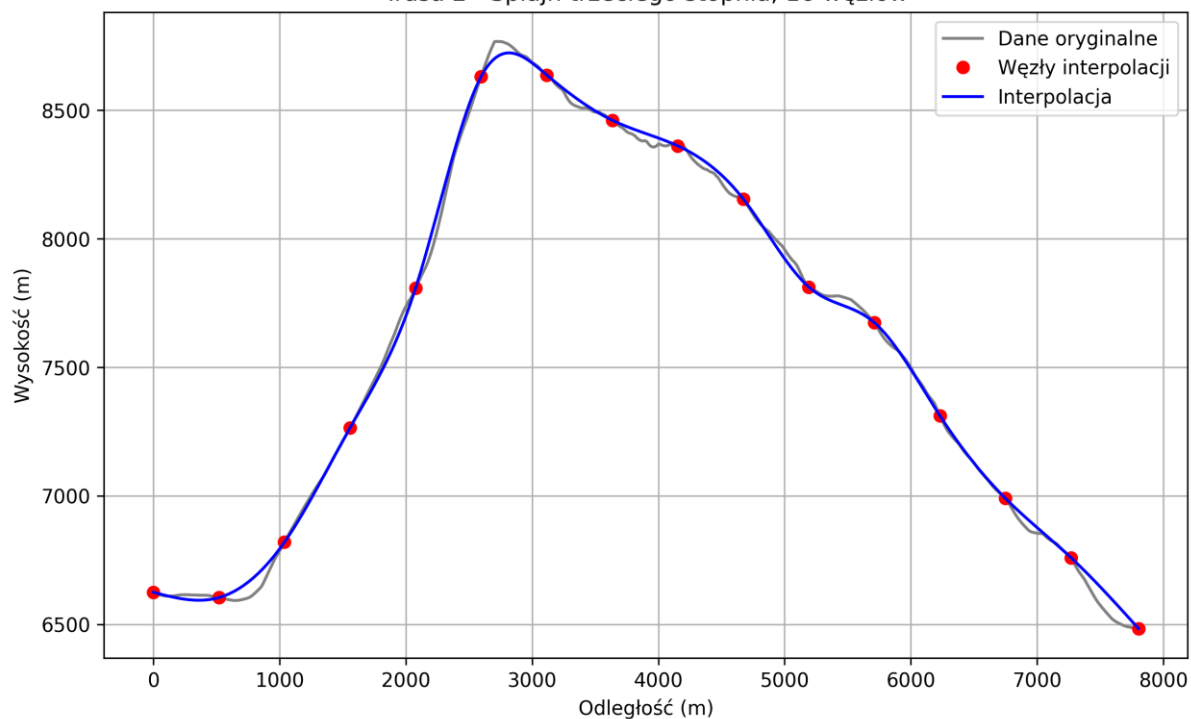
Zaletą funkcji sklejanych jest ich **odporność na efekt Rungego**, co pozwala bezpiecznie zwiększać liczbę węzłów bez ryzyka pojawienia się niestabilnych oscylacji. Metoda zachowuje gładkość i ciągłość przebiegu, nawet dla dużej liczby punktów, co jest istotne w kontekście dokładnego modelowania profilu wysokościowego.

Dodatkowo, zastosowanie **równoodległych węzłów** nie wpływa negatywnie na jakość interpolacji, co czyni tę metodę wygodną i skuteczną w praktycznych zastosowaniach.

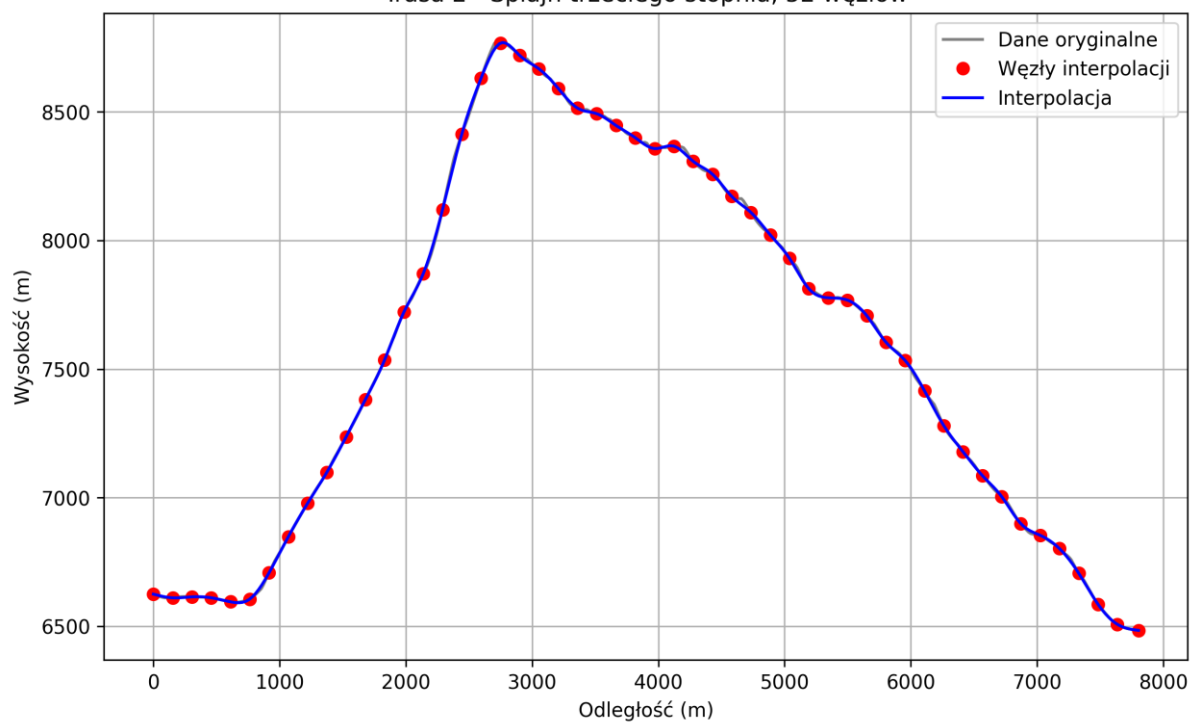
4.2 Trasa 2 – MountEverest.csv

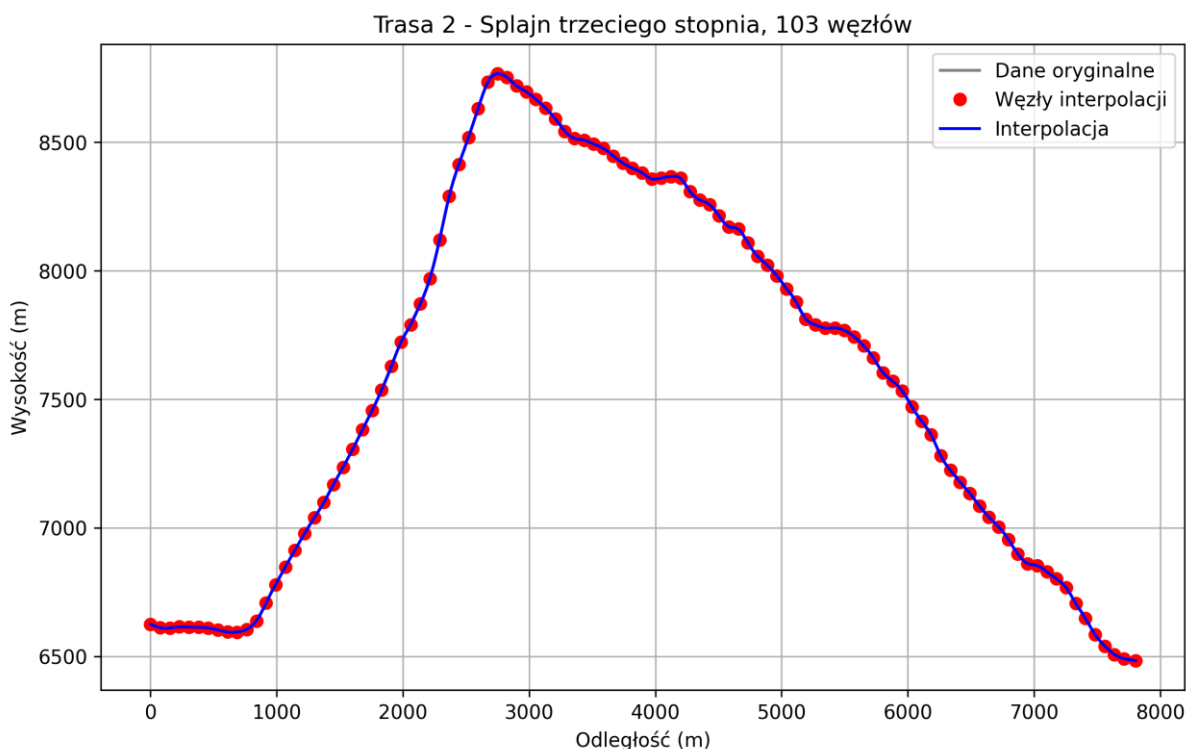


Trasa 2 - Splajn trzeciego stopnia, 16 węzłów



Trasa 2 - Splajn trzeciego stopnia, 52 węzłów





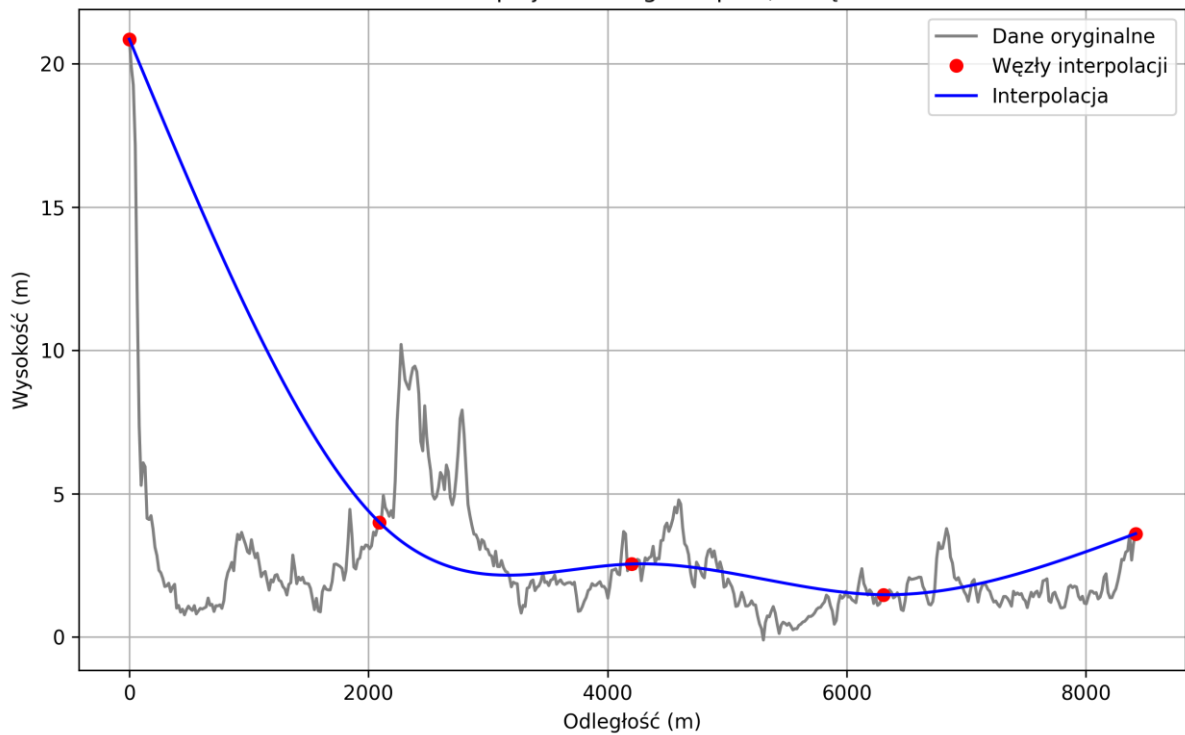
Dla profilu **Mount Everest** metoda funkcji sklejanych daje bardzo dobre rezultaty już przy umiarkowanej liczbie węzłów. Dla **16 węzłów** uzyskane przybliżenie jest dość dokładne – odwzorowuje główne cechy profilu, choć pewne lokalne różnice nadal są widoczne.

Z kolei przy **52 węzłach** interpolacja staje się **niemal idealna** – przebieg funkcji interpolacyjnej bardzo dobrze pokrywa się z oryginalnymi danymi, zarówno w ujęciu globalnym, jak i lokalnym. Dalsze zwiększanie liczby węzłów (do 103) nie powoduje pogorszenia wyników, dzięki **odporności metody na efekt Rungego**.

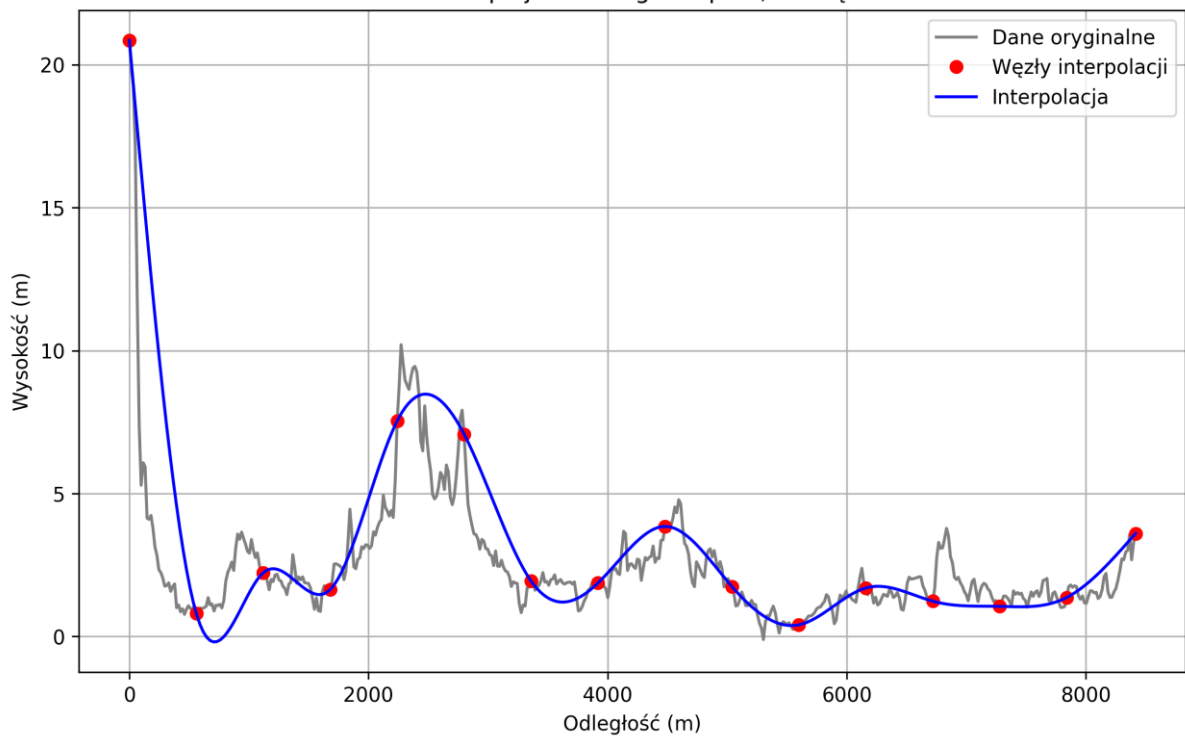
Metoda funkcji sklejanych zapewnia gładkość, stabilność i wysoką dokładność, szczególnie przy większej liczbie węzłów. Co istotne, dobrze radzi sobie również przy **równoodległym rozmieszczeniu punktów**, co zwiększa jej użyteczność w praktyce.

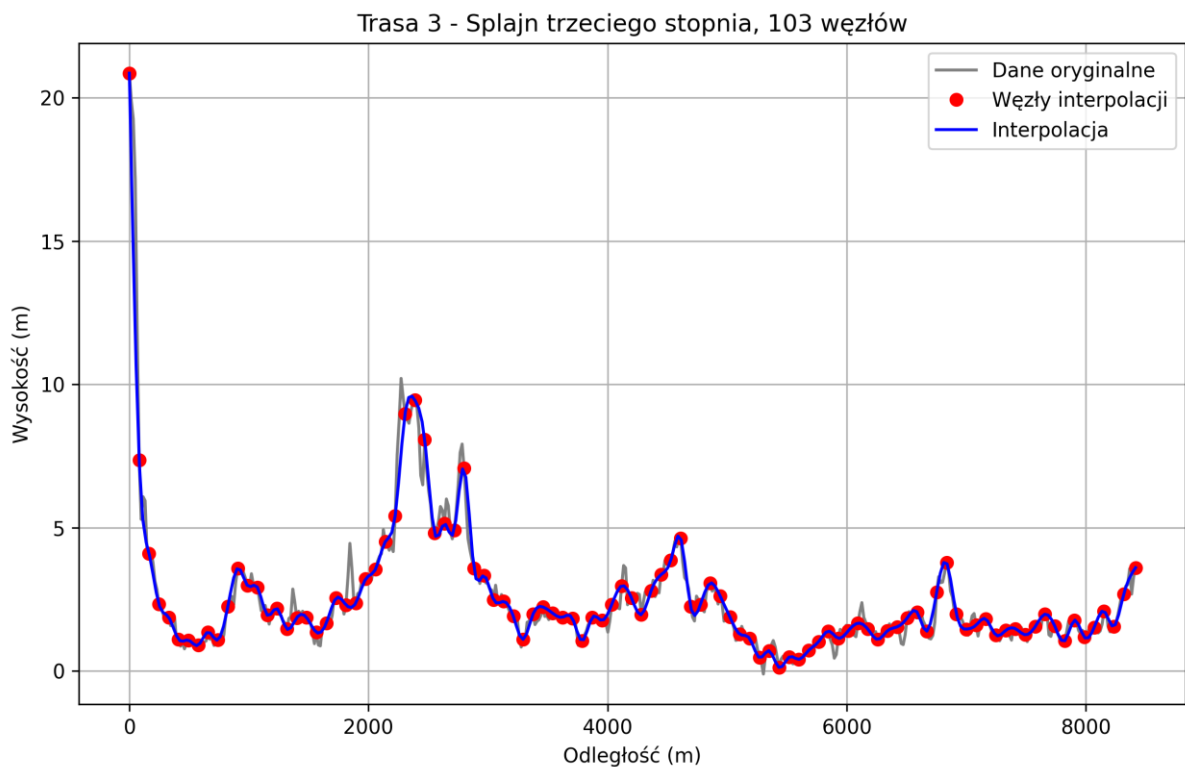
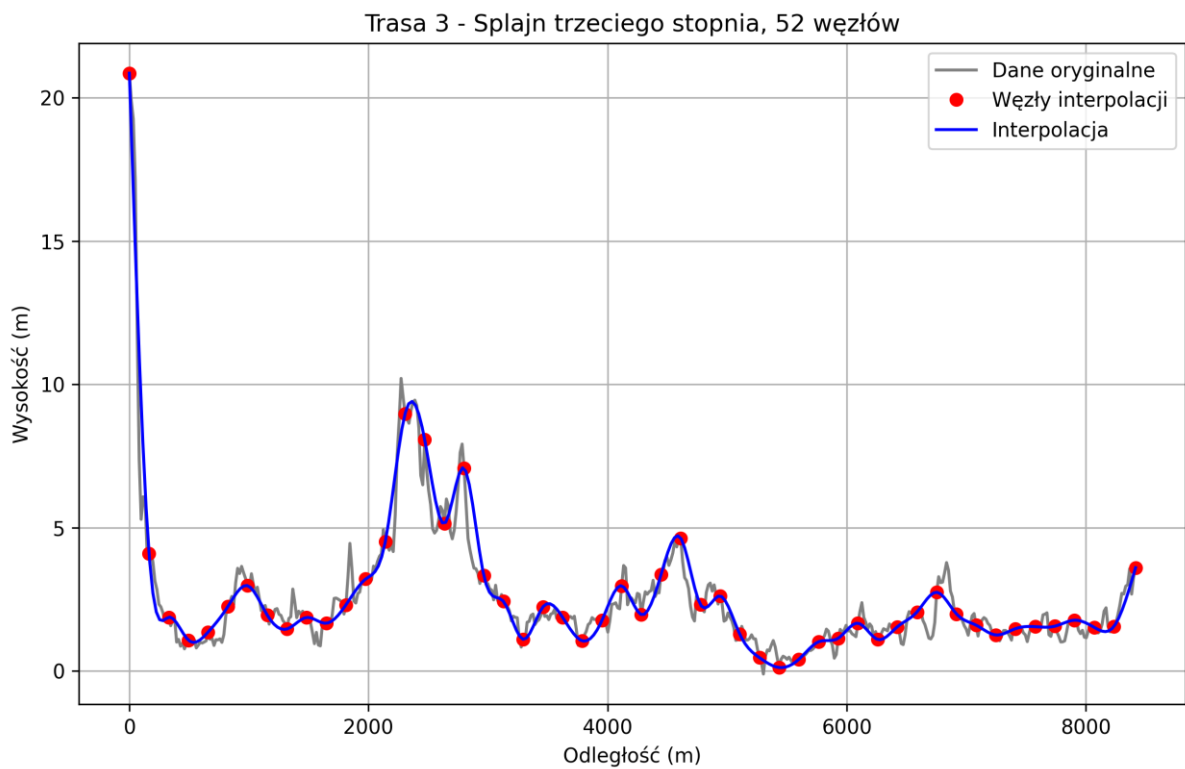
4.3 Trasa 3 – GddanskSpacerniak.csv

Trasa 3 - Splajn trzeciego stopnia, 5 węzłów



Trasa 3 - Splajn trzeciego stopnia, 16 węzłów





Profil **GdanskSpacerniak** charakteryzuje się częstymi, drobnymi zmianami wysokości w zakresie od około **1 m do 20 m**. W takich warunkach metoda funkcji sklepanych

stopnia trzeciego radzi sobie **lepiej niż metody wielomianowe**, jednak nie bez ograniczeń.

Dodawanie węzłów **wyraźnie poprawia dokładność** interpolacji – przy **5 i 16 węzłach** przybliżenie jest zbyt wygładzone i nie odwzorowuje dobrze gęstych lokalnych zmian. **Dopiero przy 52 węzłach** jakość interpolacji jest zadowalająca, a przebieg zaczyna dobrze oddawać strukturę profilu. Mimo to, nawet przy **103 węzłach**, interpolacja **nie jest w pełni dokładna** – pewne lokalne maksima i minima nie są idealnie pokryte, szczególnie tam, gdzie zmienność jest największa.

Ograniczeniem jest tu **równoodległy rozkład węzłów**, który nie dostosowuje się do miejsc o większej dynamice zmian. W takich przypadkach nawet funkcje sklepane nie są w stanie uchwycić wszystkich szczegółów, mimo że zachowują gładkość i stabilność rozwiązania.

4.4 Podsumowanie interpolacji metodą funkcji sklepanych

Interpolacja metodą funkcji sklepanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników, szczególnie dla większej liczby węzłów. Już przy **16 węzłach** interpolacja dobrze oddaje charakterystykę większości analizowanych profili, a dla **52 i 103 węzłów** wyniki są bardzo precyzyjne i zbliżone do oryginalnych danych.

Metoda funkcji sklepanych cechuje się wysoką odpornością na efekt Rungego, co umożliwia zwiększanie liczby węzłów bez ryzyka pogorszenia jakości przybliżenia czy występowania oscylacji charakterystycznych dla wielomianów interpolacyjnych wysokiego stopnia.

Warto również podkreślić, że metoda ta dobrze sprawdza się w przypadku **równoodległego rozmieszczenia węzłów**, co czyni ją praktycznym narzędziem do interpolacji danych wysokościowych.

Należy jednak pamiętać, że metoda funkcji sklepanych nie gwarantuje idealnej interpolacji w każdym przypadku. W profilach charakteryzujących się dużą zmiennością na małych odcinkach (np. GdanskSpacerniak) nawet przy dużej liczbie węzłów mogą wystąpić niedokładności, spowodowane między innymi ograniczeniami równomiernego rozkładu punktów interpolacyjnych.

Podsumowując, funkcje sklejane są zdecydowanie lepszym wyborem niż metoda Lagrange'a dla danych o równoodległych węzłach, oferując stabilność, gładkość oraz wysoką dokładność interpolacji.

5. Podsumowanie

W ramach projektu przeanalizowano skuteczność różnych metod interpolacji w odwzorowaniu profili wysokościowych, wykorzystując dane z trzech tras i porównując działanie metody Lagrange'a (dla węzłów równoodległych i Czebyszewa) oraz metody funkcji sklejanych. Interpolacje przeprowadzono dla różnych licznosci węzłów, od 5 do 103, oceniając wpływ ich rozmieszczenia i ilości na jakość odwzorowania danych.

Metoda Lagrange'a z równoodległymi węzłami wykazała znaczące ograniczenia. Przy małej liczbie węzłów przybliżenie było zbyt uproszczone, natomiast przy większej liczbie punktów pojawiał się wyraźny **efekt Rungego** – oscylacje na krańcach przedziału, prowadzące do znacznych zaburzeń interpolacji. Ta niestabilność powoduje, że metoda ta nie nadaje się do interpolacji profili wysokościowych, szczególnie przy dużej liczbie węzłów.

Z kolei **zastosowanie węzłów Czebyszewa** znacznie poprawiło jakość interpolacji i **praktycznie całkowicie wyeliminowało efekt Rungego**, nawet dla **103 węzłów**. Interpolacje były znacznie bardziej stabilne i precyzyjne niż w przypadku węzłów równoodległych. Warto jednak zaznaczyć, że metoda ta wymaga nierównomiernego rozkładu węzłów, co może być trudne do zastosowania w praktyce – szczególnie przy mniejszej liczbie danych.

Metoda funkcji sklejanych (cubic splines) okazała się najbardziej efektywna i stabilna spośród testowanych. Zapewniła dobre wyniki już przy umiarkowanej liczbie węzłów (np. 16), a dalsze zwiększanie liczby punktów (do 52 i 103) prowadziło do bardzo dokładnych odwzorowań, bez ryzyka wystąpienia efektu Rungego. Szczególnie istotne jest to, że metoda funkcji sklejanych dobrze współpracuje z **równoodległym**

rozkładem węzłów, co czyni ją praktyczną i łatwą do implementacji w rzeczywistych zastosowaniach.

W niektórych przypadkach, jak profil GdanskSpacerniak, mimo dużej liczby węzłów interpolacja nie pokrywała w pełni wszystkich lokalnych ekstremów – jednak były to ograniczenia wynikające z natury danych oraz stałego rozkładu węzłów, a nie z samej metody.