Problem 1

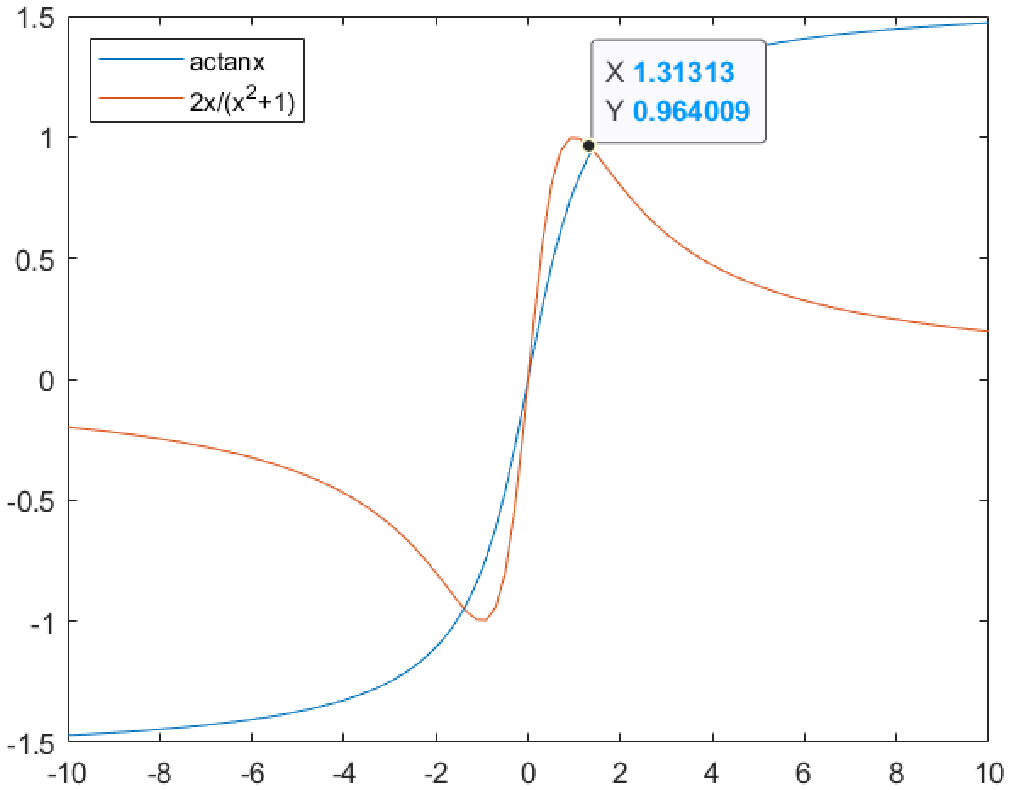
使用Newton方法对函数 $\arctan(x)$ 求根，迭代形式为，参见函数 `Netwon`

$$x_{k+1} = x_k - (x_k^2 + 1)\arctan(x_k)$$

当初始点 x_0 满足，

$$-x_0 = x_0 - (x_0^2 + 1)\arctan(x_0)$$

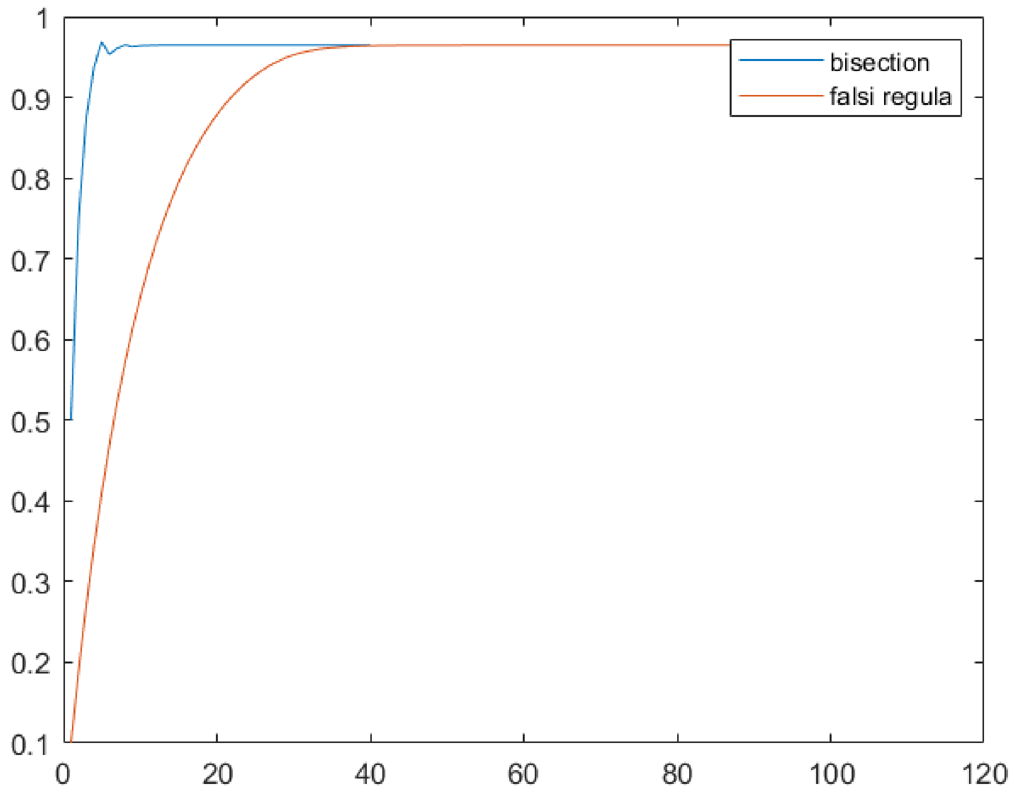
的时候，Newton方法产生的根在 $x_0, -x_0$ 之间反复横跳，结合 $\arctan(x)$ 的函数图像知， $\alpha < |x_0|$ 时Newton方法收敛，而 $\alpha \geq |x_0|$ 时不收敛，使用MATLAB编写程序可以发现，当 $\alpha < |x_0|$ 时输出的根接近于 0 ,但当$\alpha \geq |x_0|$的时候输出为 NaN. 使用MATLAB绘制对应的函数图像可以找到对应的临界点，



]

Problem 2

使用MATLAB程序编写实二分法与反差值法求解方程 $x^{64}=0.1$ 的根，详见函数 `bisection` ,使用 `bisection_x64(f,regula_falsi = 0)` 调用时为二分法求函数 f 的根，使用 `bisection(f, regular_falsi = 1)` 调用时为反插值法，收敛图像如下，从图中可以看出在该例子中二分法优于反插值法，



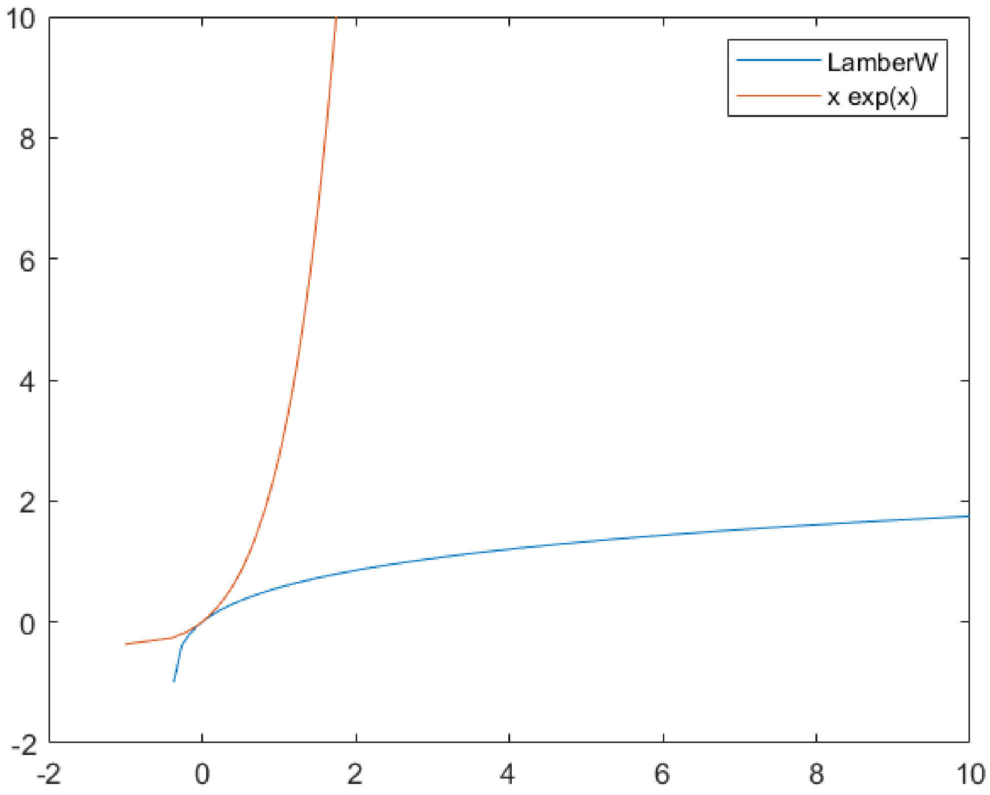
Problem 3

调用Problem 2中撰写的函数，使用二分法求 $x=y\exp(y)$,

当 $x\in(-\exp(-1),0)$ 时，反函数的根在 $y=(-1,0)$ 之间,

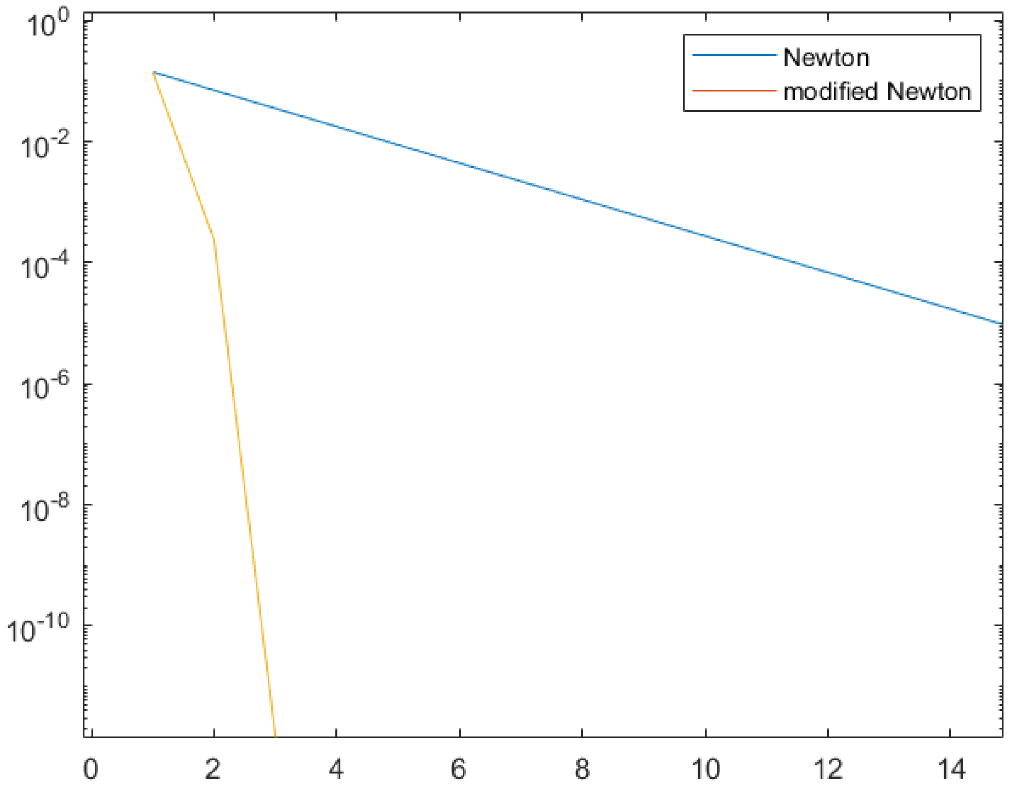
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，反函数的根在 $y=(0,x)$ 之间,

在实际编程中发现，为了获得更好的数值解，选取的二分法的初始范围应该稍微大于上述理论给出的范围，求得结果如下图



Problem 4

使用函数 `Newton` 对方程 $f(x)=1+\cos x=0$ 进行求解，函数 `Newton` 的参数 `m` 表示重根的数目，令 $m=1$ 退化为普通的Newton方法，在该例子中，对于 $x_*=\pi$, 满足 $f(x)=f'(x)=0$, 因此使用参数 $m=2$ 为改进后的Newton方法，其收敛率对比如下，



可以见到普通的Newton方法呈现出线性收敛的特征，而改进后的方法在进入某一个区域后收敛速度明显加快，可能是二次收敛的特征，下面对该例子进行理论分析，利用不动点方法的分析 $x_{k+1}=g(x_k), g(x)=x-f(x)/f'(x)$, 利用Taylor展开，对于未加改进的Newton方法，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_*)+f(x_*)'(x-x_*)+\frac{f(x_*)''}{2}(x-x_*)^2+\ldots+\frac{f(\xi_1)^{(m+1)}}{(m+1)!}(x-{x_*}^2) \\
&= \frac{f(\xi_0)^{(m+1)}}{(m+1)!}(x-x_*)^{m+1}, \exists\xi_0\in\mathcal{B}(x_*,\|x-x_*\|) \\
f(x)' &= \frac{f(\xi_1)^{(m+1)}}{m!}(x-x_*)^{m}, \exists\xi_1\in\mathcal{B}(x_*,\|x-x_*\|) \\
f(x)'' &= \frac{f(\xi_2)^{(m+1)}}{(m-1)!}(x-x_*)^{m-1}, \exists\xi_2\in\mathcal{B}(x_*,\|x-x_*\|)
\end{aligned}
$$

因此，

$$
g'(x)=\frac{f(x)f(x)''}{[f(x)']^2}=\frac{m}{m+1}\frac{f(\xi_0)^{(m+1)}f(\xi_2)^{(m+1)}}{[f(\xi_1)^{(m+1)}]^2}
$$

假设函数的 $m+1$ 阶导数满足Lipschitz性质，也即

$$
\|f^{(m+1)}(x)-f^{(m+1)}(y)\|\leq L\|x-y\|
$$

考虑算法的局部收敛性，假设

$$
\|x_0-x_*\|\leq R
$$

不妨假设 $f^{(m+1)}(x_*)>0$, 在半径为 R 的邻域内，恒有 $f^{(m+1)}(x_*)\geq M, \exists M>0$

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}-x_*\| &= \|g(x_k)-g(x_*)\| \\
&= \|g'(\eta)(x_k-x_*)\|, \exists \eta \in \mathcal{B}(x_*,R) \\
&= \frac{m}{m+1}\|\frac{f(\xi_0)^{(m+1)}f(\xi_2)^{(m+1)}}{[f(\xi_1)^{(m+1)}]^2}\|\|x_k-x_*\|, \exists \xi_0,\xi_1,\xi_2 \in \mathcal{B}(x_*,R) \\
&\le \frac{m}{m+1}(1+\frac{L^2R^2}{M}+\frac{L^4R^4}{M^2})\|x_k-x_*\|
\end{aligned}
$$

当 $R^2 \le M/4mL^2$ 时，成立,

$$
\|x_{k+1}-x_*\| \le \frac{2m+1}{2m+2}\|x_k-x_*\|
$$

此时算法满足局部线性收敛，而修正后的Newton方法正好满足，

$$
g'(x) = m(1-\frac{f(\xi_0)^{(m+1)}f(\xi_2)^{(m+1)}}{[f(\xi_1)^{(m+1)}]^2})
$$

也即其修正了一阶量