19307130195 陈乐偲

Problem 1

定义 $T_n(x)$ 为 n 界CHebyshev多项式，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为其 n 个零点，积分公式可以写为，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^{n}A_k\lambda_k=\sum_{k=1}^{n}A_k\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Chebyshev多项式具有性质，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_i(x)T_j(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ \pi, & i=j=0;\\ \pi/2, & i=j\neq 0.\end{cases}$$

定义如下的矩阵 Q，

$$Q=(\,q_1,q_2,\cdots,q_n\,)=\begin{pmatrix}T_0(\lambda_1) & T_0(\lambda_2) & \cdots & T_0(\lambda_n)\\ T_1(\lambda_1) & T_1(\lambda_2) & \cdots & T_1(\lambda_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ T_{n-1}(\lambda_1) & T_{n-1}(\lambda_2) & \cdots & T_{n-1}(\lambda_n)\end{pmatrix}.$$

利用Gauss型积分公式对于 $2n$ 次多项式精确成立，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_i(x)T_j(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k\lambda_k=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ \pi, & i=j=0;\\ \pi/2, & i=j\neq 0.\end{cases}$$

写成矩阵形式为，

$$Q\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}Q^\top=\mathrm{diag}\{\pi,\pi/2,\cdots,\pi/2\}.$$

定义归一化的特征向量矩阵，

$$\tilde{Q}=(\,\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,\cdots,\tilde{q}_n\,)=\left(q_1\sqrt{\tfrac{1}{\pi}},q_2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},\cdots,q_n\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\right)$$

可以得到，

$$\begin{aligned}\tilde{Q}\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\tilde{Q}^\top&=I_n\\ \mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\tilde{Q}\tilde{Q}^\top&=I_n\end{aligned}$$

因此可以求解积分公式中的系数，

$$
\begin{aligned}
A_k &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{q}_{k,j}^2\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{(n-j)(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(k - \frac{\pi}{2} - \frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{j(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{\pi}
\end{aligned}
$$

因此Gauss-Chebyshev积分公式可以写为，

$$
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k = \frac{n}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}.
$$

Problem 2

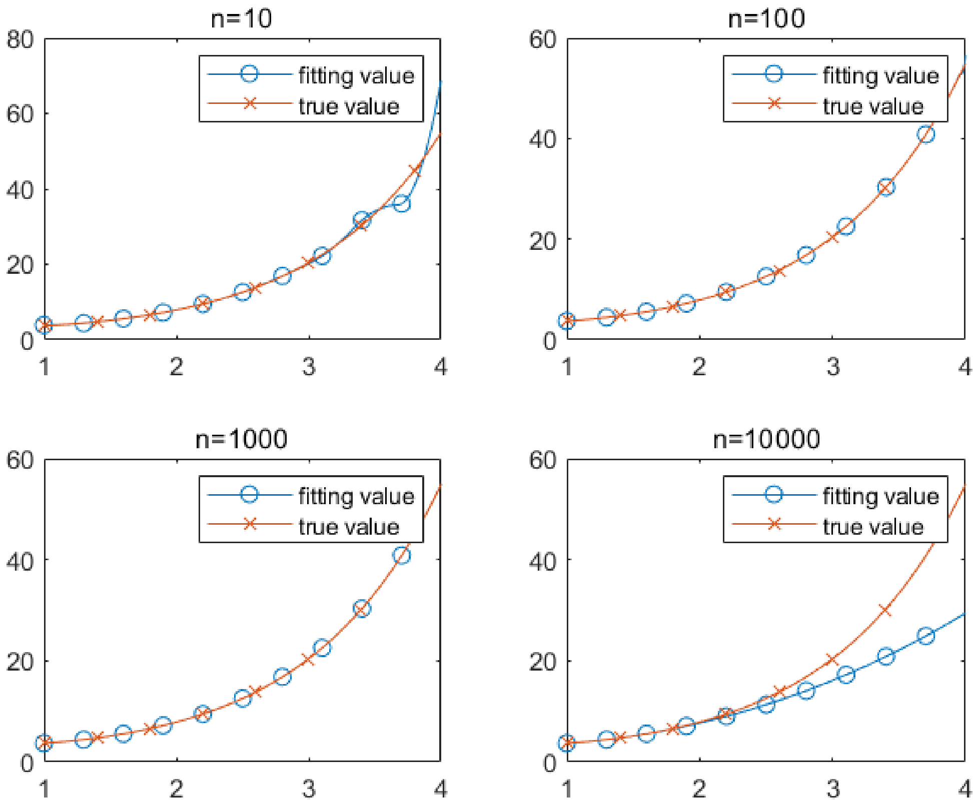
对于三次样条插值，设 $f'(x_i)$ 为自变量， 可以写出其对应的线性方程组，解得后代入每一个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的如下插值公式即可获得对应的查询点 x 的插值结果，

$$
\begin{aligned}
f_i(x) = f(x_i)\phi(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}) &+ f(x_{i+1})\phi(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}) \\
&- f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)\psi(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}) + f'(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)\psi(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}) \\
\text{With } \phi(x) = -2x^3 + 3x^2, \psi(x) = x^3 - x^2
\end{aligned}
$$

如果要求获得导数值，可以用如下公式计算，

$$
\begin{aligned}
f_i'(x) = -\frac{f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\phi'(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}) + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}\phi'(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}) \\
+ f'(x_i)\psi'(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}) + f'(x_{i+1})\psi'(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}) \\
\text{With } \phi'(x) = -6x^2 + 6x, \psi'(x) = 3x^2 - 2x.
\end{aligned}
$$

设计数值实验， n 为插值点的数目，对比导数的拟合值和真实值，绘制如下图



可以看到当 n 选取过小或者过大都会导致效果不好。

Problem 3

直接验证即可，

$$F_n = \begin{pmatrix} w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \\ w_n^1 & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^n \\ w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^n & w_n^{2n} & w_n^{3n} & \cdots & w_n^{n^2} \end{pmatrix}, J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

那么有，

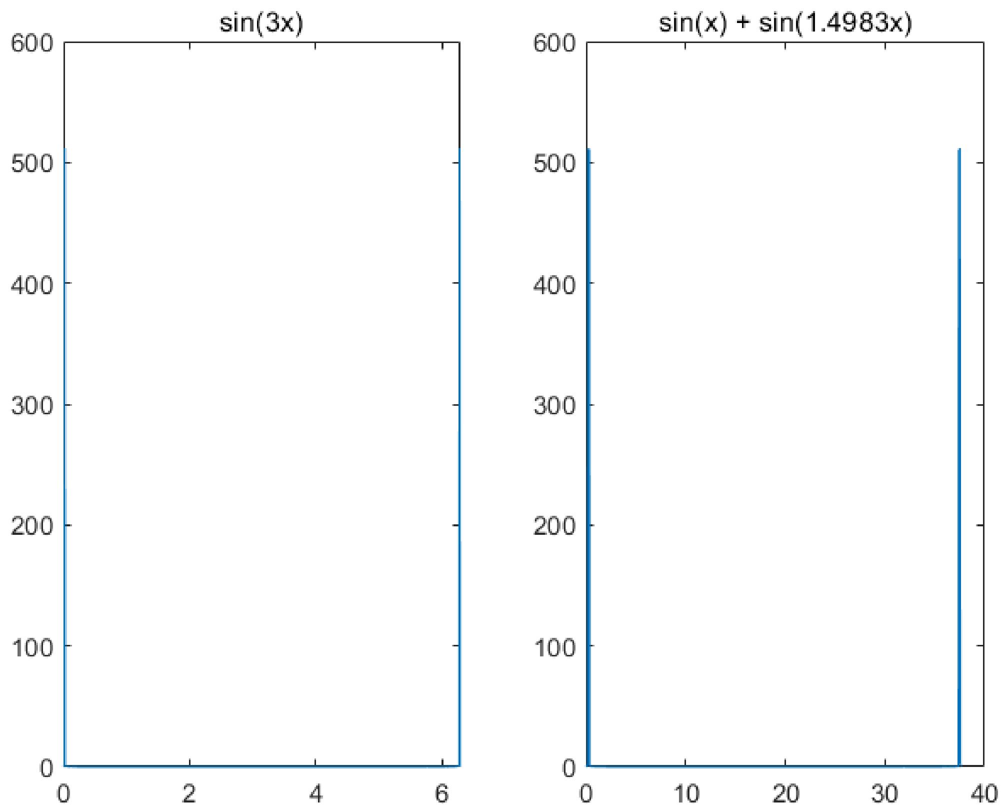
$$
\begin{aligned}
J_nF_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \\ w_n^1 & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^n \\ w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^n & w_n^{2n} & w_n^{3n} & \cdots & w_n^{n^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_n^1 & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^n \\ w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{2n} \\ w_n^3 & w_n^6 & w_n^9 & \cdots & w_n^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_n^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_n^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \\ w_n^1 & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^n \\ w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^n & w_n^{2n} & w_n^{3n} & \cdots & w_n^{n^2} \end{pmatrix} \\
&= D_nF_n
\end{aligned}
$$

也即，

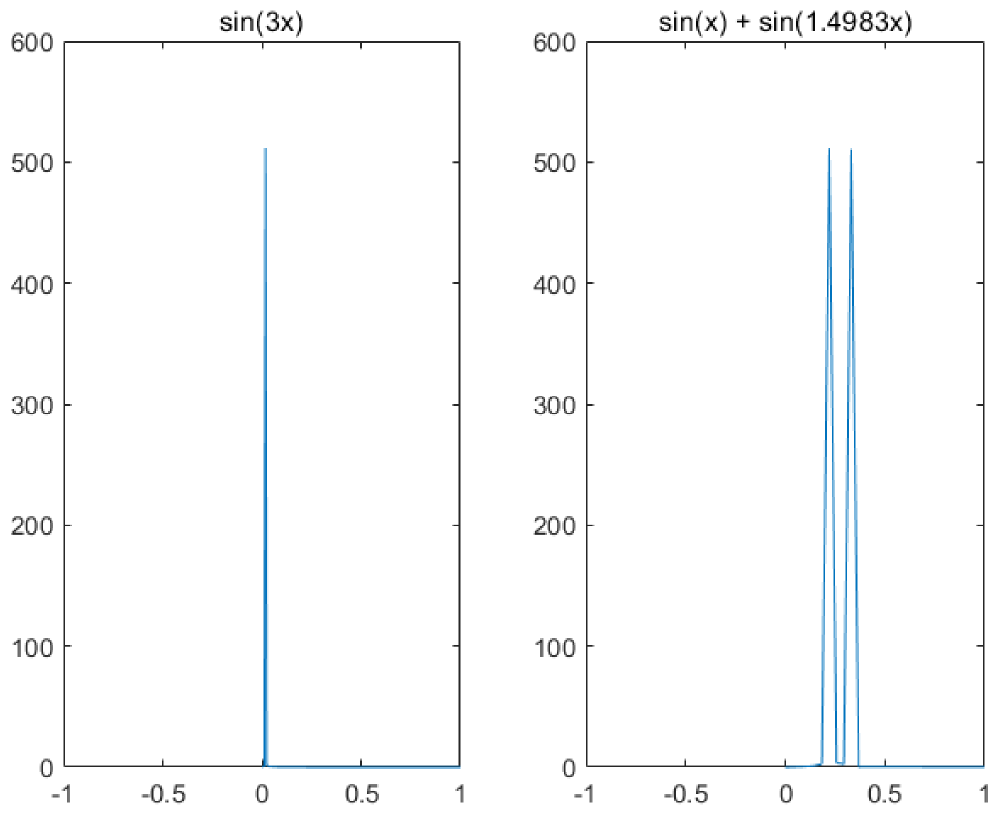
$$F_n^{-1}J_nF_n = D_n$$

Problem 4

使用MATLAB自带的 `fft` 函数绘制出傅里叶变换后的功率谱，



放大可以看见左图在原点附近仅有连续的单峰，而右图在原点附近出现连续的双峰，



下面解释该现象，首先对连续的傅里叶变换进行解释，考虑冲激函数的逆傅里叶变换，

$$\mathrm{IFT}(\delta(s-s_0))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s-s_0)\exp(its)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\exp(its_0).$$

根据傅里叶变换和逆傅里叶变换的一一对应，

$$\mathrm{FT}(\exp(its_0))=2\pi\delta(s-s_0).$$

利用欧拉公式可以求得正弦函数的傅里叶变换，

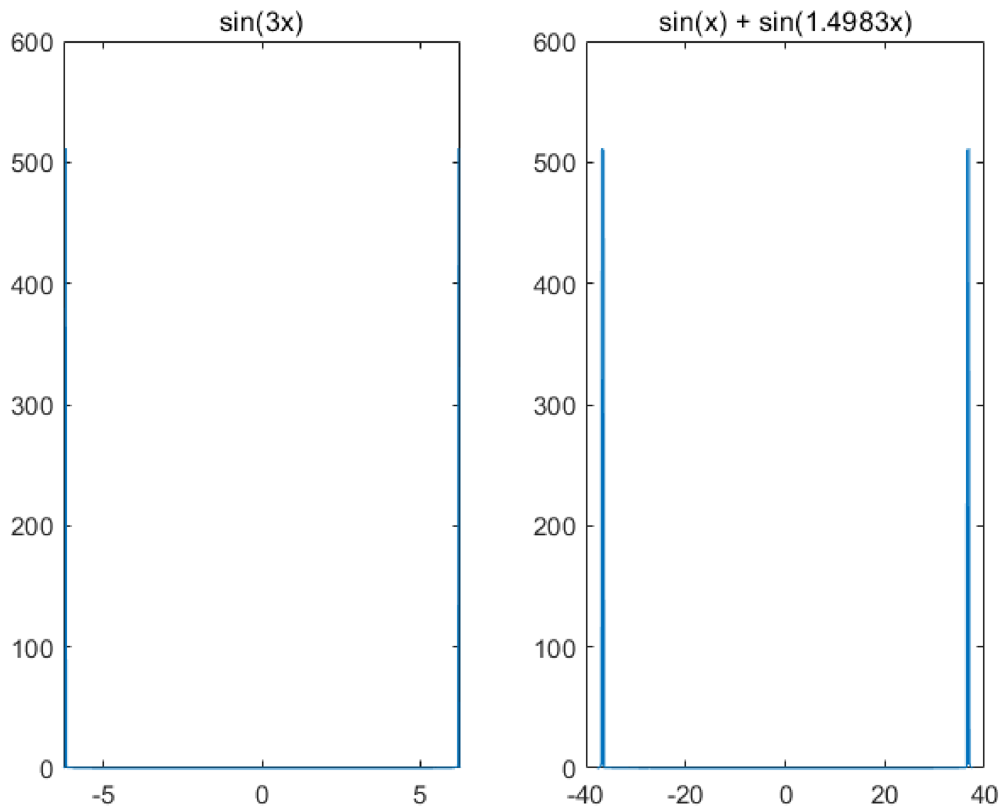
$$\sin(s_0t)=\frac{\exp(is_0t)-\exp(-is_0t)}{2i}=i\pi\delta(s+s_0)-i\pi\delta(s-s_0)$$

而且傅里叶变换具有线性性质，可以通过定义验证，

$$\mathrm{FT}(af(t)+bg(t))=a\mathrm{FT}(f(t))+b\mathrm{FT}(f(t)).$$

从上述的推导可以看出，傅里叶变换将不同正弦函数的分离开来，因此出现上图的现象，当然对于余弦函数同样成立。

我们还可以看到功率谱关于原点对称，如下图所示，



这是由于傅里叶变换关于实函数是共轭对称的，

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-its)\mathrm{d}t = F^*(-s)$$

因此其功率谱关于原点中心对称，

$$|F(s)| = |F(-s)|$$

上述的解释仍然不完全严谨，由于在数值实验中，我们采用等距结点对原函数进行采样，我们关心采样后的函数的傅里叶变换，记原函数为 $f(t)$, 采用周期为 ΔT 的冲激串 $s_{\Delta T}$ 对其进行采样，记采样后的函数为 $\tilde{f}\,(t)$, 假设我们已知 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(s)$, 我们关心 $\tilde{f}\,(t)$ 的傅里叶变换 $\tilde{F}(s)$ 的表达式，

对于冲激串，为周期为 ΔT 的周期函数，可以对其进行傅里叶展开，惊喜地发现级数前每一项系数都为 $1/\Delta T$,

$$s_{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(i\frac{2\pi n}{\Delta T})$$

其傅里叶变换为为周期为 $2\pi/\Delta T$ 的冲激串，

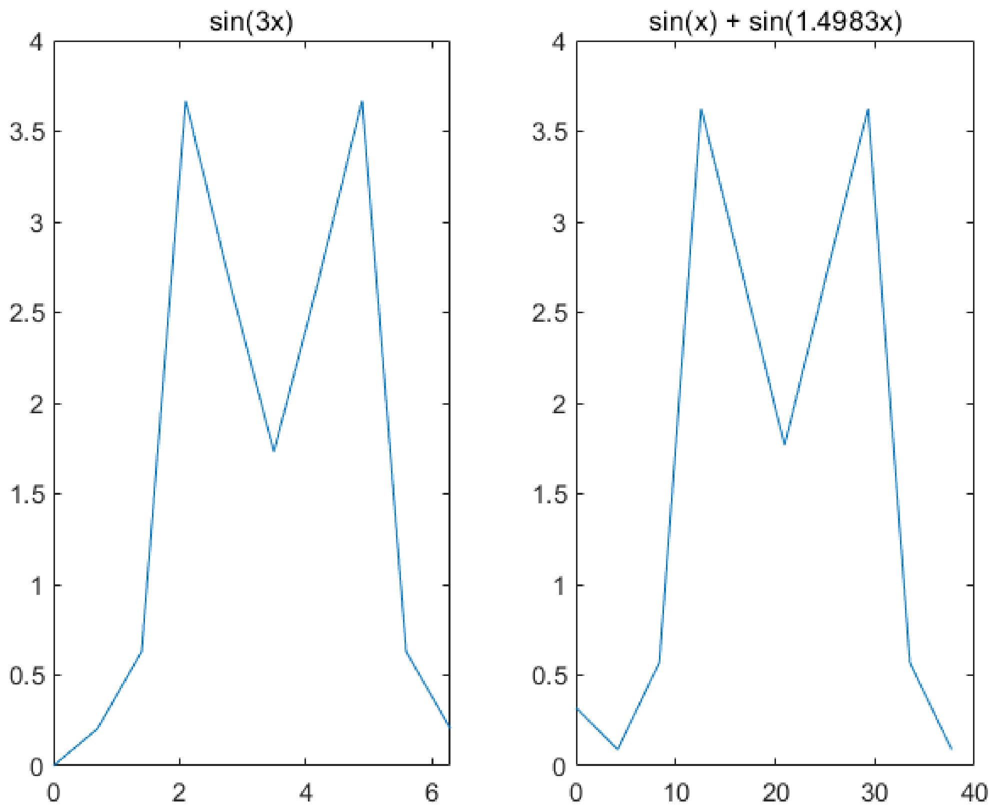
$$S_{\Delta T}(s) = \mathrm{FT}(s_{\Delta T}) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{FT}(\exp(i\frac{2\pi n}{\Delta T})) = \frac{2\pi}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-\frac{2\pi n}{\Delta T})$$

利用卷积定理，

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= \mathrm{FT}(\tilde{f}(t)) \\
&= \mathrm{FT}(f(t) \odot s_{\Delta T}(t)) \\
&= F(s) \otimes S_{\Delta T}(s) \\
&= \frac{2\pi}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s - x - \frac{2\pi n}{\Delta T}) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(s - x - \frac{2\pi n}{\Delta T}) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - \frac{2\pi n}{\Delta T})
\end{aligned}
$$

从上式中可以看到 $\tilde{F}(s)$ 是 $F(s)$ 的一个周期为 $2\pi/\Delta T$ 的无限拷贝，因此在未放大的图中我们正好看到了两个周期。

由于 $\tilde{F}(s)$ 的周期为 $2\pi/\Delta T$， 如果采样的间距过小，会出现混淆的情况，例如在上述实验中取 $n=10$, 可以看到



上述的推导针对的是连续的傅里叶变换，但在实际中使用的是离散的傅里叶变换，那么上述的性质对于离散的傅里叶变换是否仍然成立的，为了说明这一点，可以考虑连续傅里叶变换到离散的傅里叶变换之间的联系，参见书中的结论，离散傅里叶变换可以看作是对 $\tilde{F}(s)$ 的一个周期进行等距采样的结果，

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \exp(-its) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\Delta T) \exp(-its) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\Delta T) \exp(-its) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \exp(-in\Delta T s)
\end{aligned}$$

实际中，我们并不可能对 $n = -\infty \sim +\infty$ 求和，因此只能选择考虑有限求和，此时也相当于考虑一个带限函数的傅里叶变换，记对原函数所采样的点为 $f_n, n = 0, \cdots, N-1$，我们已经知道 $\tilde{F}(s)$ 的一个周期为 $2\pi/\Delta T$, 考虑我们在该周期中采集 $\tilde{F}(s)$ 的 N 个样本，对应所采集到的点位为 $F_m, m = 0, \cdots, N-1$, 那么

$$F_m(s) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-\frac{i2\pi mn}{N}).$$

即为离散傅里叶变换的表达式。

因此，离散傅里叶变换的结果，可以看作对连续的傅里叶变换采样后的结果，因此上述对于连续傅里叶变换的分析可以仍然适用。