19307130195 陈乐偲

1

根据Taylor展开，

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

对于级数，

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

定义下列极限，其极限收敛，

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

其差值，

$$D_n = S_\infty - S_n = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 2\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

利用积分的上下界，

$$\begin{gathered} 2\int_{2n+1}^{\infty} \frac{1}{4x^2-1} \le D_n \le 2\int_{2n}^{\infty} \frac{1}{4x^2-1} \\ 2\int_{2n+1}^{\infty} \frac{1}{4x^2} \le D_n \le 2\int_{2n-1}^{\infty} \frac{1}{4x^2} \\ \frac{1}{2(2n+1)} \le D_n \le \frac{1}{2(2n-1)} \end{gathered}$$

此时其收敛率为 $\Theta(1/n)$

考虑对该级数的估计进行修正，令

$$\hat{S}_n = S_n + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

此时误差满足，

$$0 \le \hat{D}_n = S_\infty - \hat{S}_n \le \frac{1}{4n^2-1}$$

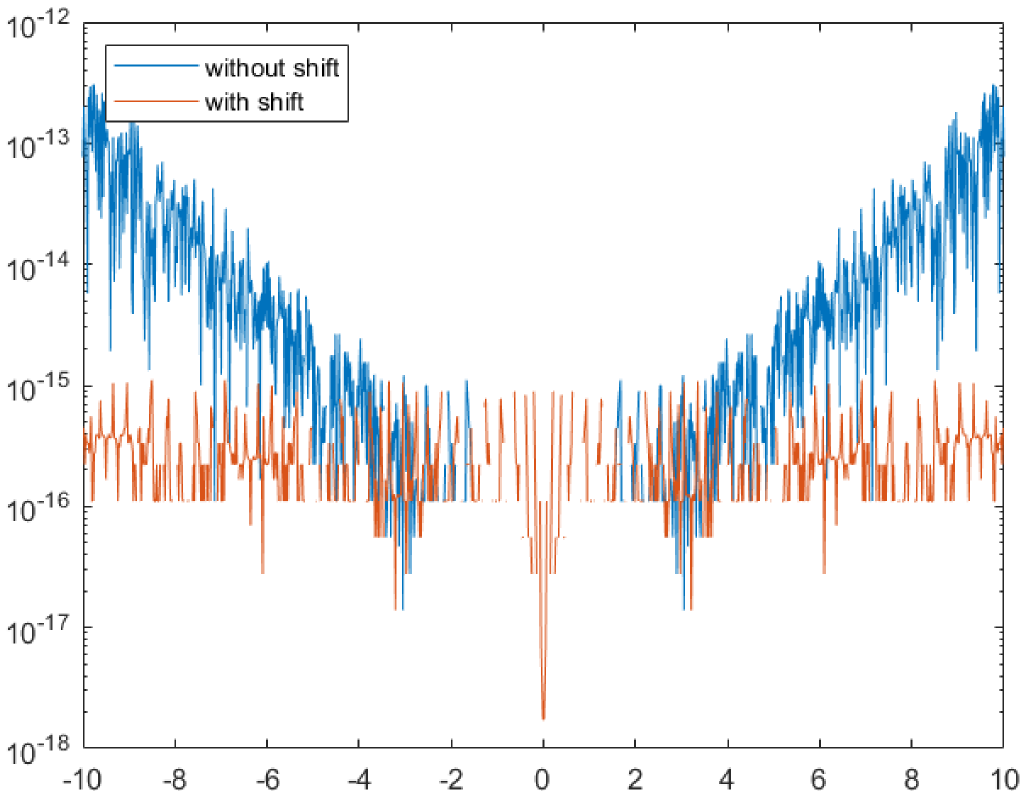
因此经过修正后的收敛率为 $\Theta(1/n^2)$

2

使用Taylor展开计算sin函数值，

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

下图展示shift 操作的影响，



假设 $|x| < c$, 对于该交错级数其截断误差也即余项估计有，

$$|D_{n-1}| \leq |\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}| \leq \frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

因此其界 c 越小，达到给定的截断精度所需要展开的项数 n 越小，产生的舍入误差也相应的越小，

3

条件等价于，

$$\|r\|_\alpha = \|b - A\hat{x}\|_\alpha = \|A(x_* - \hat{x})\|_\alpha = \|x_* - \hat{x}\|_\beta$$

只需令如下的范数就可以满足条件，

$$\|x - \hat{x}\|_\beta = \|A(x_* - \hat{x})\|_\alpha$$

容易根据范数的定义验证当 $\|\cdot\|_\alpha$ 为向量范数时，如上定义的范数 $\|\cdot\|_\beta$ 也满足向量范数的定义。

4

利用《数值逼近》一书中关于舍入误差的引理，

$$1-nu \leq \prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \leq 1+1.01nu, |\delta_i| \leq u, nu \leq 0.01$$

结合二次型的公式，

$$x^\top Ax = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j$$

得到其运算结果满足，

$$fl(x^\top Ax) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j(1+w_{ij}), |w_{ij}| \leq 1.01 \times (n^2+1)u$$

因此误差满足，

$$|fl(x^\top Ax) - x^\top Ax| \leq |\sum_{ij} a_{ij}w_{ij}| \leq 1.01 \times (n^2+1)u \times \sum_{ij}|a_{ij}|$$