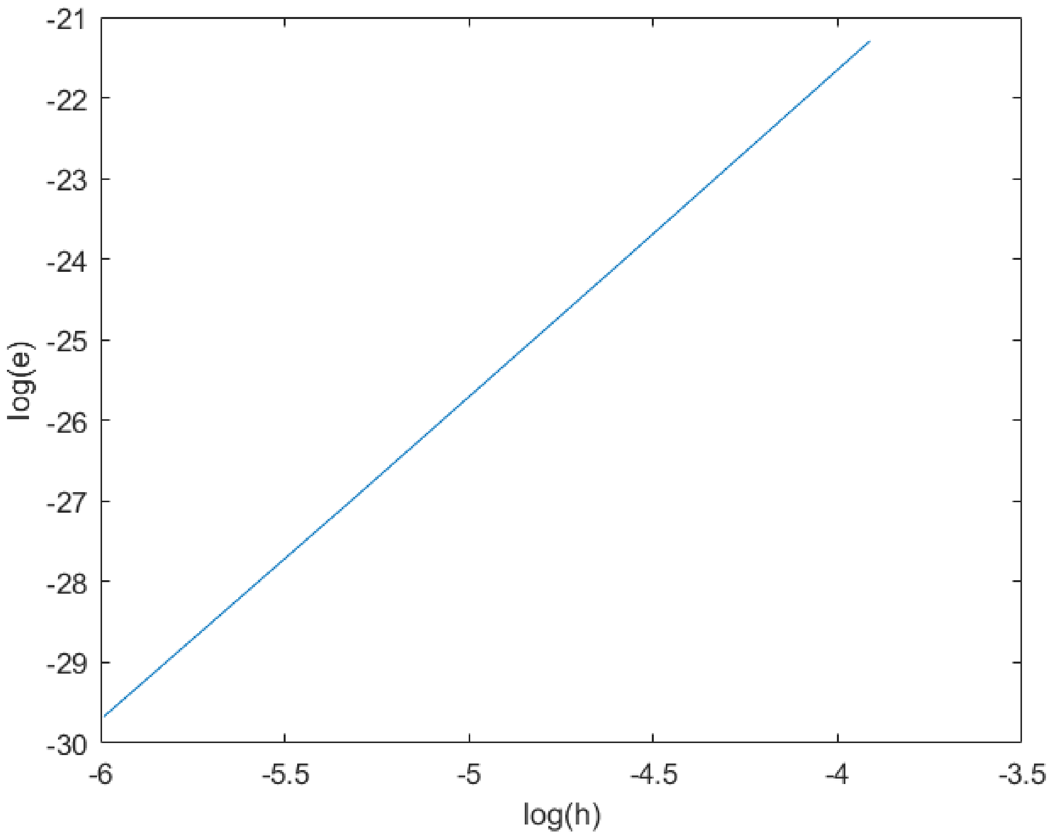
19307130195 陈乐偲

Problem 1

使用RK4求解微分方程，求解的函数为，

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \exp(t) + \log(t+1), \\
u'(t) &= \exp(t) + 1/(t+1).
\end{aligned}
$$

选取不同的 h ，计算RK4产生的误差 e，绘制对数坐标下的图像，



回归该直线可以发现斜率为 4.03， 可以验证RK4的全局误差为 $O(h^4)$.

Problem 2

根据迭代格式

$$u_{k+1} = u_k - \lambda h(\theta u_{k+1} + (1-\theta)u_k).$$

移项后可以得到，

$$(1 + h\lambda\theta)u_{k+1} = (1 - h\lambda(1-\theta))u_k.$$

因此，

$$u_{k+1}=\left(\frac{1-h\lambda(1-\theta)}{1+h\lambda\theta}\right)^k u_0$$

稳定域为，

$$\left|\frac{1-h\lambda(1-\theta)}{1+h\lambda\theta}\right|<1$$

化简得到，

$$(1-2\theta)\lambda h<2$$

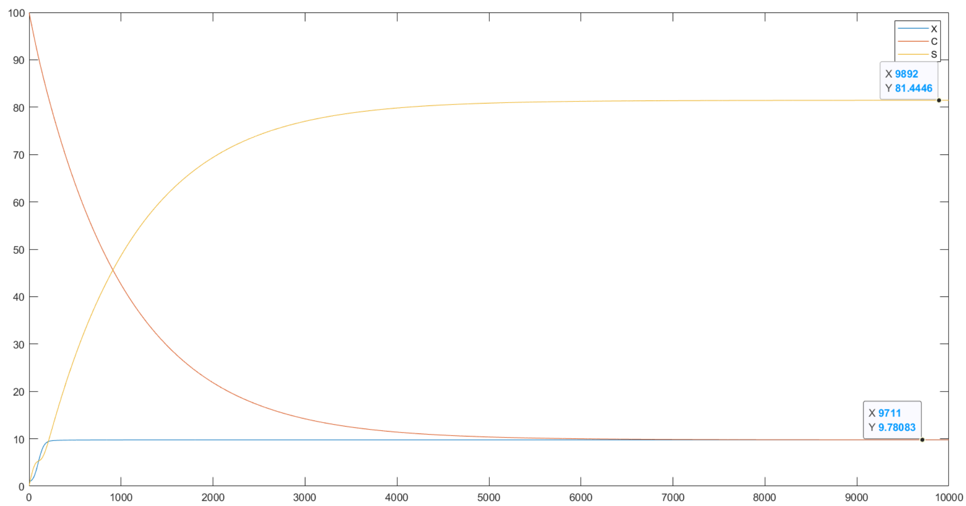
分段得到其稳定域为，

$$\begin{cases}(0,\frac{2}{(1-2\theta)\lambda}) & \theta\le\frac{1}{2};\\(0,\infty) & \theta>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

也即隐式方法具有更宽的稳定域。

Problem 3

直接使用最简单的前向Euler方法求解，将每一天分为 100段，结果如下



稳定的浓度都已经在图中显示

Problem 4

4.1

求解常微分方程，

$$mx''(t)+kx(t)=0$$

特征方程的根为，

$$r=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

通解为，

$$x=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

代入初值得到，

$$x=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

4.2

对应的一阶方程为，

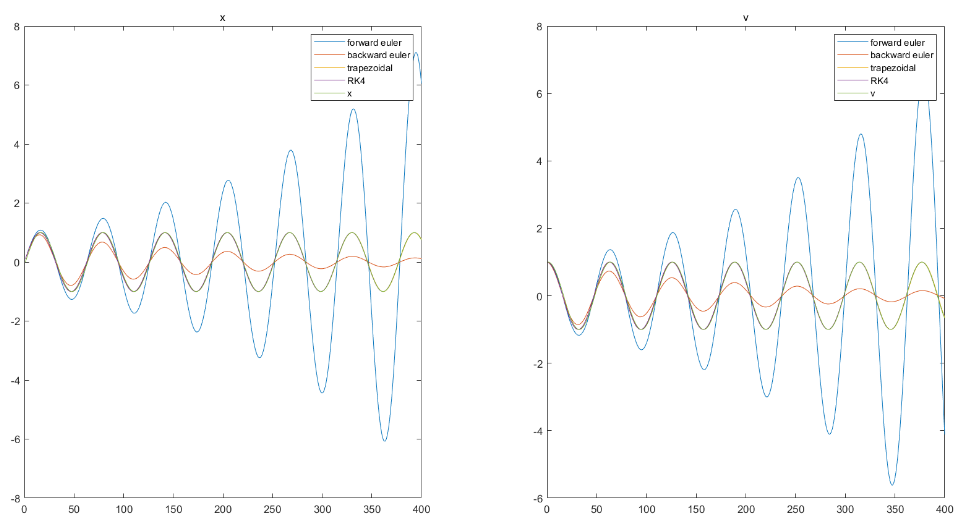
$$\begin{pmatrix}x'(t)\\x''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-k/m&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x'(t)\end{pmatrix}$$

写成向量形式为，

$$u'(t)=Au(t).$$

4.3

选取初值为 $[0,1]'$，采用不同方法求解结果如下，



其中前向Euler方法的误差最大，后向Euler帆发也具有较大的误差，而梯形公式和RK4算法求解基本准确，与 x, v 的理论值基本吻合，在上面两张图中梯形公式、RK4、理论值所对应的曲线在肉眼上是区分不开的。