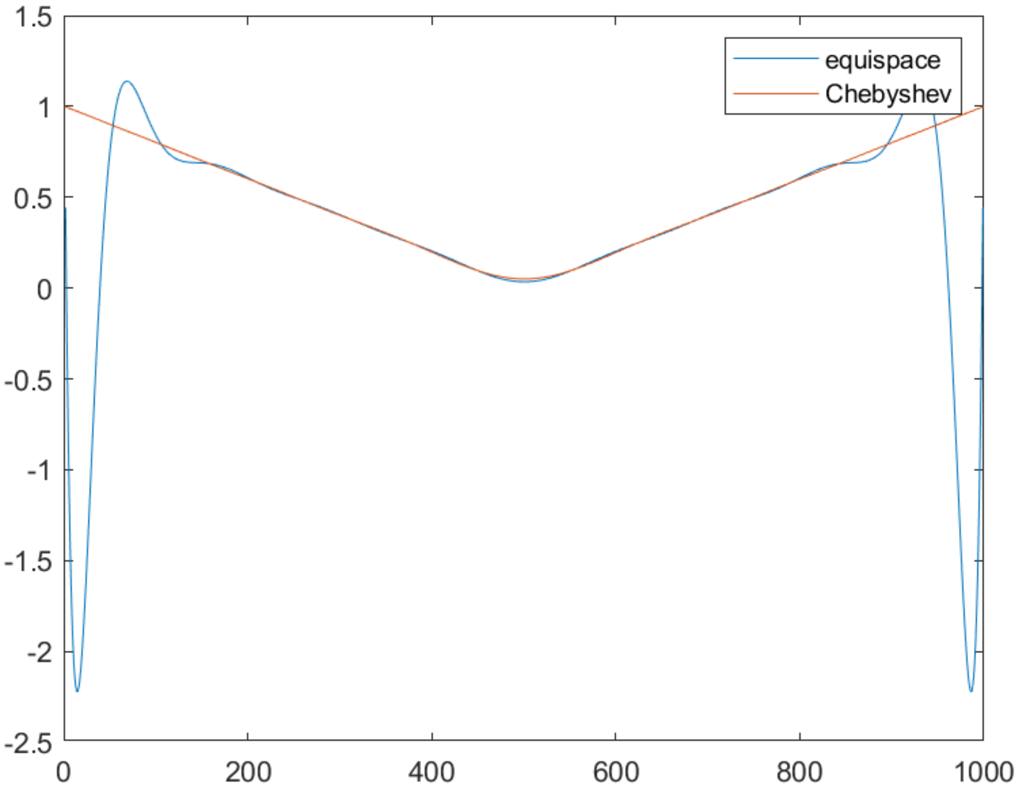
19307130195 陈乐偲

Problem 1

分别使用等距结点和Chebyshev结点对绝对值函数 $|x|, x \in [-1,1]$ 进行插值，各取 20 个结点，



可以看见采用Chebyshev结点明显改善了Runge现象，唯一美中不足的是在 0 附近处函数值本应该呈现一个尖峰，但此处采用Chebyshev结点插值也未能在 0 附近有很好的结果，由于使用多项式插值在 0 附近的导数一定是连续的，如果想要改善该现象可能需要采用分段插值的方式。

Problem 2

使用Newton插值公式，令 n 个插值结点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,插值产生的多项式为，

$$p_{n-1}(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \cdots + f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$$

其中 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 阶差商，对于误差 $R(x)=f(x)-p_{n-1}(x)$，假设 $x_i\in[a,b],\forall 1\le i\le n$，则在区间 $[a,b]$ 上函数 $R(x)$ 存在 $x_1,\cdots,x_n$ 共 n 个零点，根据中值定理，可以找到

$$\exists\xi\in[a,b],R^{(n-1)}(\xi)=f^{(n-1)}(\xi)-(n-1)!f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

令 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(x^*,x^*,\cdots,x^*)$ 则可以得到结论，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to\frac{f^{(n-1)}(x^*)}{(n-1)!}$$

Problem 3

对于间距为 h 的等距结点，定义差分的符号 $\Delta^n f(\cdot)$，可以验证

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})=\frac{\Delta^n f(x_1)}{h^n n!}$$

记 $x=x_1+ph$, 则有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=\frac{\Delta^n f(x_1)}{n!}\times p(p-1)\cdots(p-n+1)=\binom{p}{n}\Delta^n f(x_1)$$

将其代入Newton插值的公式可以得到在 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 处的插值多项式满足，

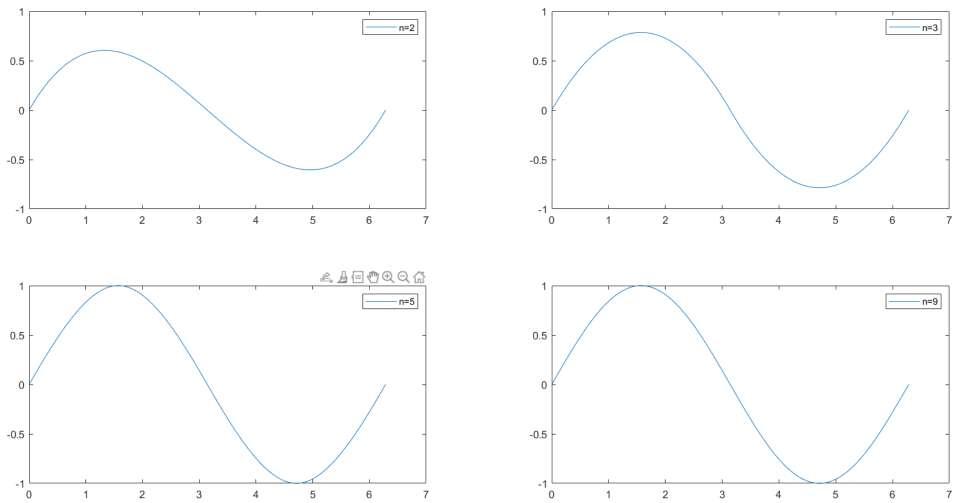
$$f(x_1+ph)=\sum_{i=0}^{n}\binom{p}{i}\Delta^i f(x_1)$$

Problem 4

对于Hermite插值，可以使用Lagrange方法或者Newton方法解出在每一个区间 $[x_i,x_{i+1}]$上的插值公式

$$f_i(x)=f(x_i)\phi(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i})+f(x_{i+1})\phi(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})-f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)\psi(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i})+f'(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)\psi(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})$$
$$\text{With }\phi(x)=-2x^3+3x^2,\psi(x)=x^3-x^2$$

对于正弦函数，有 $f(x)=\sin(x),f'(x)=\cos(x)$, 代入上述公式可以绘制出如下的插值曲线，$n$ 表示采样点的数目


n=2
n=3
n=5
n=9