19307130195 陈乐偲

Problem 1

使用插值型积分，

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx \frac{x(x+a)}{2a^2}f(-a)+\frac{(x-a)(x+a)}{a^2}f(0)+\frac{x(x-a)}{2a^2}f(a) \\
\int_{-2a}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{8a}{3}f(-a)-\frac{4}{3}f(0)+\frac{8a}{3}f(a)
\end{aligned}
$$

可以验证上述积分公式可以精确地计算 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 的积分，而不能精确计算 x^4 的积分，其代数精度为 3

下面说明对于该问题为什么选取插值型积分是最优的。如果存在一种积分公式满足代数精度为 4 或以上，其至少要能够精确计算 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 的积分，因此需要满足如下方程，

$$
\begin{aligned}
2c_1+c_2 &= 4a \\
c_1-c_2 &= 0 \\
c_1 &= \frac{8a}{3}
\end{aligned}
$$

得到的解也即上面给出的插值型积分公式，而其代数精度为 3.

Problem 2

2.1

当 $f(x)=1$,

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b-a = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)
$$

当 $f(x)=x$,

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)
$$

但是当 $f(x)=x^2$ 时，

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{2} \neq \frac{(b-a)(5a^2+8ab+5b^2)}{18} = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)
$$

因此该求积公式的代数精度为 1.

2.2

当 $n \to \infty$ 的时候，在每个区间 $[t, t+h]$ 内考虑上述求积公式的误差，

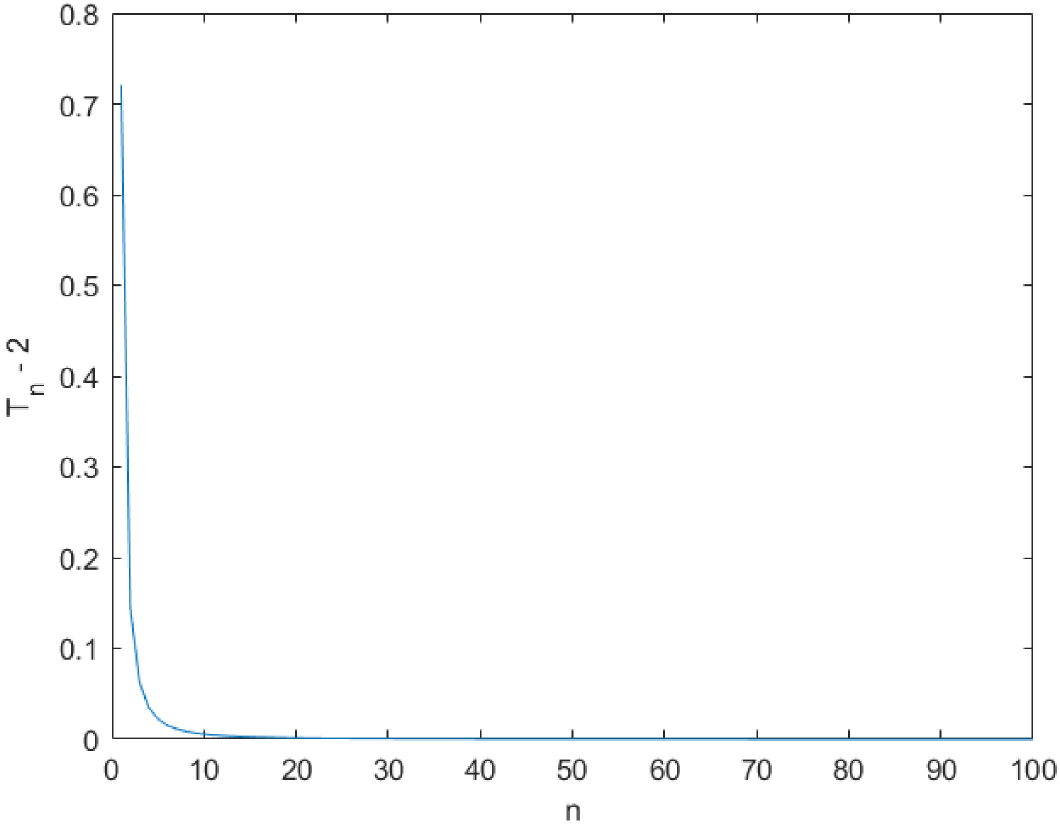
$$\begin{aligned}
\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(f\left(t+\frac{h}{3}\right)+f\left(t+\frac{2h}{3}\right)\right) &= \int_t^{t+h} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(\sin\left(t+\frac{h}{3}\right)+\sin\left(t+\frac{2h}{3}\right)\right) \\
&= \cos(t) - \cos(t+h) - \frac{h}{2}\left(\sin\left(t+\frac{h}{3}\right)+\sin\left(t+\frac{2h}{3}\right)\right) \\
&= 2\sin\left(t+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) - h\left(\sin\left(t+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{6}\right)\right) \\
&= \sin\left(t+\frac{h}{2}\right)\left(h-\frac{h^3}{24}-h\left(1-\frac{h^3}{72}\right)+o(h^4)\right) \\
&= -\sin\left(t+\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h^3}{36}+o(h^4)\right)
\end{aligned}$$

将所有区间求和，

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n &= -\sum_{t=a}^{b-h}\sin\left(t+\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h^2}{36}+o(h^4)\right) \\
&= -\left(\frac{1}{36}h^3+o(h^4)\right)\sum_{t=a}^{b-h}\sin\left(t+\frac{h}{2}\right) \\
&= -\frac{\frac{1}{36}h^3+o(h^4)}{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\sum_{t=a}^{b-h}2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(t+\frac{h}{2}\right) \\
&= -\frac{\frac{1}{36}h^3+o(h^4)}{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\sum_{t=a}^{b-h}\cos(t)-\cos(t+h) \\
&= -\frac{\frac{1}{36}h^3+o(h^4)}{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}(\cos(0)-\cos(\pi)) \\
&= -\frac{\frac{1}{36}h^3+o(h^4)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \\
&= -\frac{\frac{1}{36}h^3+o(h^4)}{\frac{h}{2}+o(h^2)} \\
&= -\frac{\frac{1}{18}h^2+o(h^3)}{1+o(h)} \\
&= -\frac{1}{18}h^2
\end{aligned}$$

因此对于该问题，上述求积公式的误差为 $o(h^2)$.

编程计算，详见 `quadrature_sin.m` 文件，积分残差随着 n 的变化如下，



图中可以看见误差大体呈现平方衰减的趋势，并且残量均为正值，也与理论结果相符合。

Problem 3

3.1

先考虑不作复化的情况，

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=\int_a^b f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2},x\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2},x\right)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(a+b)x}{2}+ab\right)\\
&=\int_a^b \left(\frac{x^2}{2}-\frac{(a+b)x}{2}+ab\right)f\left(\frac{a+b}{2},x,x\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(a+b)x}{2}+ab\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{(b-a)^3f''(\xi)}{24}
\end{aligned}
$$

据此可以得到使用复化中点公式的误差为，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

3.2

想要精度达到小数点后 6 位，只需要，

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{1}{24n^2}\exp(\xi) < 10^{-6}$$

因为 $\xi \in (0,1)$, 因此只需要满足，

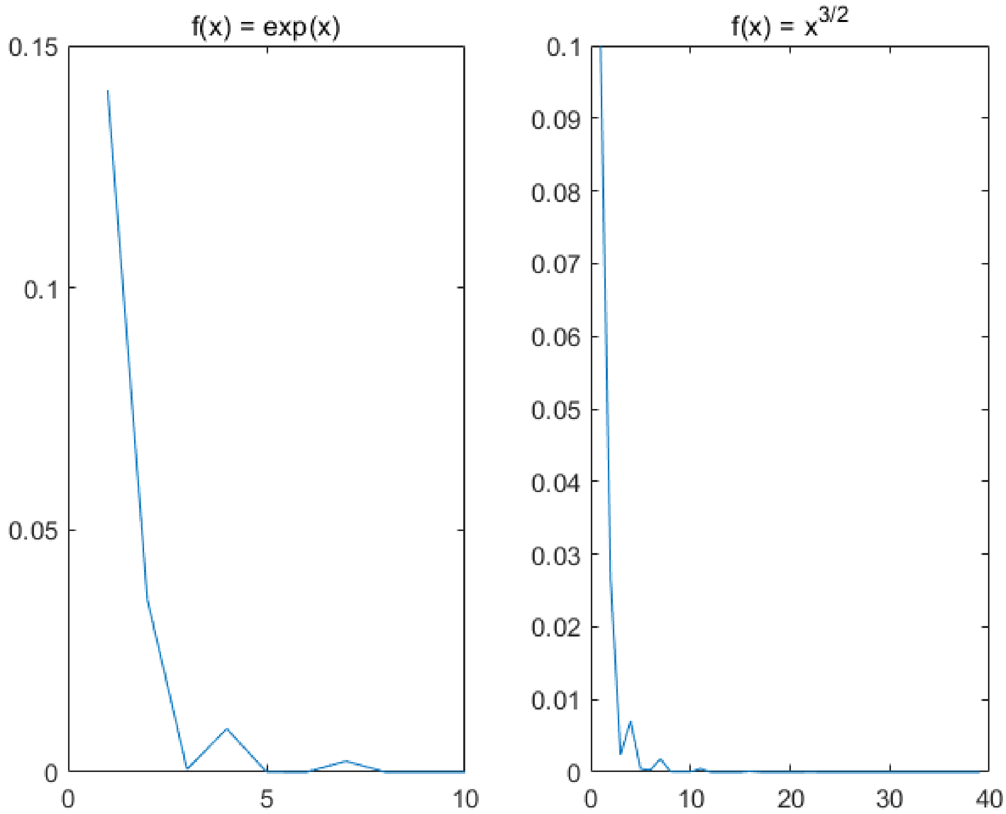
$$\frac{1}{24n^2}\exp(1) < 10^{-6}$$
$$n > \sqrt{\frac{10^6\exp(1)}{24}}$$

因此只需要取 $n = 337$.

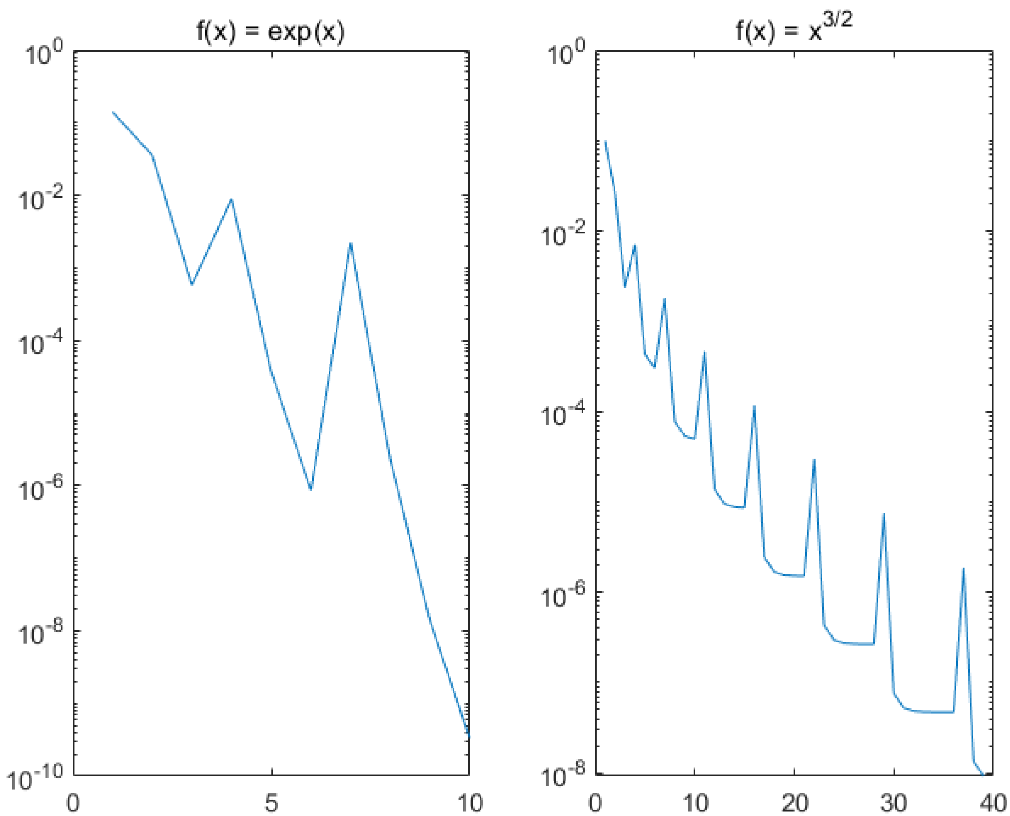
Problem 4

使用Romberg算法分别计算函数 $\exp(x), x^{3/2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分，详见文件 `Romberg.m`

只需要生成对应的递推表即可，其误差曲线如下，可以看见算法收敛很快，但后一个函数收敛稍慢于前一个函数



对数坐标系下误差如下图，



这也与算法整体上是线性收敛的相符合。