

Trabajo de Fin de Grado  
Curso 2024/2025



UNIVERSIDAD  
**COMPLUTENSE**  
MADRID

# **Cómo deformar polinómicamente la bola unidad cerrada para construir poliedros**

---

Facultad de Ciencias Matemáticas  
Grado en Matemáticas  
Junio 2025

Autor: Andrés Contreras Santos

Dirigido por los Profesores:

Juan Ramón Delgado Pérez  
José Francisco Fernando Galván  
José Manuel Gamboa Mutuberría

Madrid, 25 de junio de 2025

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos y motivación . . . . .	1
1.2. Esquema del trabajo . . . . .	1
1.3. Antecedentes . . . . .	2
<b>2. Propiedades básicas de las imágenes polinómicas de la bola unidad</b>	<b>3</b>
2.1. Conjuntos semialgebraicos . . . . .	3
2.1.1. Teorema de Tarski-Seidenberg . . . . .	4
<b>3. Imágenes polinómicas esenciales de la bola unidad cerrada</b>	<b>6</b>
<b>4. Curvas polinómicas en conjuntos semialgebraicos</b>	<b>9</b>
4.1. Interpolación de Hermite . . . . .	9
4.2. Aproximación combinada con interpolación polinómica . . . . .	10
4.3. Construcción de caminos semialgebraicos . . . . .	16
4.4. Puentes polinómicos entre conjuntos semialgebraicos . . . . .	21
<b>5. Conclusión: uniones finitas de polígonos</b>	<b>23</b>
<b>6. Casos prácticos</b>	<b>24</b>
Ejemplo 6.1 . . . . .	25
6.1.1. Obtención de curvas polinómicas. . . . .	25
6.1.2. Verificación de las curvas con la secuencia de Sturm. . . . .	27
6.1.3. Reparametrizaciones. . . . .	29
6.1.4. Conclusión. . . . .	32
Ejemplo 6.2 . . . . .	34
Ejemplo 6.3 . . . . .	37
Ejemplo 6.4 . . . . .	38
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>
<b>Anexos</b>	<b>41</b>
<b>A. Código fuente</b>	<b>41</b>
A.1. Interpolación de Hermite . . . . .	41
A.2. Definición de una clase para curvas de interpolación . . . . .	42
A.3. Programa interactivo para hallar curvas polinómicas mediante interpolación . . . . .	45
A.3.1. Ejemplo de uso . . . . .	46
<b>B. Cuerpos reales y conjuntos semialgebraicos.</b>	<b>52</b>
B.1. Cuerpos reales y real-cerrados . . . . .	52
B.2. Conjuntos semialgebraicos y teorema de Tarski-Seidenberg . . . . .	57
B.3. Caminos semialgebraicos en conjuntos semialgebraicos abiertos . . . . .	60
<b>C. Lema de Selección de Curvas</b>	<b>61</b>
C.1. Conexión semialgebraica . . . . .	61
C.2. Demostración del Lema de Selección de Curvas . . . . .	61

## Resumen

Este trabajo estudia qué conjuntos del plano pueden obtenerse como imagen de la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^3$  mediante una aplicación polinómica, con un énfasis especial en las uniones finitas de polígonos. Se presenta una construcción explícita de estas aplicaciones usando unas determinadas curvas polinómicas. Posteriormente, se prueba la existencia de dichas curvas, para lo cual se desarrollan resultados de aproximación e interpolación polinómica. Como resultado principal, se demuestra que una unión finita de polígonos es imagen de la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^3$  mediante una aplicación polinómica si, y solo si, es conexa por caminos analíticos. Finalmente, se muestran algunos ejemplos originales de aplicación de las técnicas desarrolladas.

## Abstract

The main aim of this work is to study which subsets of the plane can be obtained as the image of the closed unit ball in  $\mathbb{R}^3$  under a polynomial map, focusing on finite unions of polygons. We present an explicit construction of such maps using certain polynomial curves. A substantial part of the work is dedicated to proving the existence of said curves, which will require results concerning polynomial approximation and interpolation. As a main result, we prove that a finite union of polygons is the image of the closed unit ball in  $\mathbb{R}^3$  under a polynomial map if, and only if, it is connected by analytic paths. Finally, we show some original examples of application of the developed techniques.

# 1. Introducción

## 1.1. Objetivos y motivación

El objetivo principal de este trabajo es estudiar qué conjuntos del plano pueden obtenerse como imagen polinómica de la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^3$ . Diremos que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es *imagen polinómica de un conjunto*  $B \subset \mathbb{R}^m$  si existen polinomios  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  tales que  $A = f(B)$ , donde  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la aplicación dada por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  para  $x \in \mathbb{R}^m$ . En este caso, diremos además que  $f$  es una *aplicación polinómica* que transforma  $B$  en  $A$ . Puesto que trabajaremos principalmente con la bola unidad cerrada, introducimos una notación que se utilizará para hacer referencia a ella en el trabajo: para cada  $m \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $\overline{B}_m$  a la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^m$ , esto es,

$$\overline{B}_m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}.$$

El estudio de imágenes polinómicas de conjuntos sencillos como la bola unidad cerrada corresponde a un problema habitual en matemáticas: entender cómo ciertos dominios pueden transformarse en otros mediante una clase concreta de aplicaciones. Este enfoque es útil porque permite trasladar problemas formulados en dominios complicados a otros más sencillos, siempre y cuando las aplicaciones utilizadas conserven las propiedades relevantes para el problema. Por ejemplo, un resultado de central importancia en análisis complejo es el Teorema de la Aplicación de Riemann, que caracteriza los dominios de  $\mathbb{C}$  que son imagen del disco unidad mediante una aplicación conforme.

En nuestro contexto, las aplicaciones relevantes son las polinómicas. De especial interés será su naturaleza algebraica, que impone restricciones estructurales sobre los conjuntos imagen. El análisis de estas propiedades requerirá del estudio de algunos resultados clásicos en geometría algebraica real, lo cual se puede considerar un objetivo secundario del trabajo. Algunos de estos resultados se presentan en los anexos.

Nos centraremos principalmente en el caso de los polígonos, y en las uniones finitas de estos. Desarrollaremos una estrategia constructiva para obtener explícitamente una aplicación polinómica que transforme  $\overline{B}_3$  en una unión finita de polígonos del plano.

Sin embargo, cabe señalar que, salvo en casos particulares, la obtención de dichas aplicaciones polinómicas es un proceso computacionalmente complejo, lo cual limita la aplicabilidad práctica de las técnicas presentadas. No obstante, el trabajo aporta resultados de interés teórico, pues se prueba la existencia de dichas aplicaciones bajo ciertas condiciones; y permite abordar de forma efectiva ciertos casos particulares.

Por último, observamos que las construcciones y resultados presentados en el trabajo se pueden generalizar al caso  $n$ -dimensional, para obtener uniones finitas de poliedros como imagen de la bola unidad  $\overline{B}_{n+1}$ . No obstante, en el caso general hay que añadir una hipótesis adicional: que los poliedros que componen la figura se puedan “triangular”, esto es, descomponer en una cantidad finita de  $n$ -símplices. Dicha hipótesis es superflua en el caso de los polígonos, pero en general no lo es en dimensiones superiores.

## 1.2. Esquema del trabajo

El contenido de la memoria se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2, determinamos algunas propiedades generales que debe cumplir todo conjunto que sea imagen polinómica de la bola unidad cerrada. El estudio de estas propiedades permitirá acotar en cierto modo el problema, pues restringe el tipo de conjuntos que debemos considerar. Se incluyen propiedades topológicas, como la compacidad; así como otras de naturaleza algebraica, lo cual nos llevará a introducir brevemente los conjuntos semialgebraicos. Se estudiarán algunas de sus propiedades clásicas, como el Teorema de Tarski-Seidenberg, que nos permite probar que una imagen polinómica de la bola unidad debe ser un conjunto semialgebraico; o el Lema de Selección de Curvas, que tendrá un papel importante en la construcción de curvas polinómicas que serán relevantes en el trabajo.

Después, en la Sección 3, se presentan construcciones explícitas de algunos conjuntos como imagen polinómica de la bola unidad cerrada. En particular, el prisma triangular será de especial relevancia en el trabajo, pues el Teorema 3.5 proporciona una manera de obtener uniones de polígonos a partir del prisma triangular, siempre que se disponga de ciertas curvas polinómicas que cumplan determinadas condiciones.

El objetivo de la Sección 4, por tanto, será estudiar la existencia de dichas curvas polinómicas necesarias para la construcción dada en el Teorema 3.5. En concreto, se prueba que una condición suficiente para asegurar su existencia es la conexión por caminos analíticos, una hipótesis que no resultará demasiado restrictiva. Además, algunas de las técnicas empleadas en esta sección serán de utilidad para encontrar las curvas en ejemplos prácticos.

La Sección 5 emplea los resultados de las secciones anteriores para establecer uno de los resultados principales del trabajo: el Teorema 5.1, que caracteriza las uniones finitas de polígonos que son imágenes polinómicas de  $\overline{B}_3$ . En concreto, afirma que una unión finita de polígonos es imagen polinómica de  $\overline{B}_3$  si, y solo si, la unión es conexa por caminos analíticos.

Finalmente, en la Sección 6, se aplican los conocimientos teóricos de las secciones anteriores para abordar una serie de casos prácticos. Dado un conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  que sea una unión finita de polígonos, construiremos explícitamente una aplicación polinómica que transforme  $\overline{B}_3$  en  $\mathcal{S}$ , encontrando las curvas polinómicas que se necesiten para aplicar la construcción del Teorema 3.5.

### 1.3. Antecedentes

Gran parte de los contenidos de este trabajo se basan en el artículo [3], que trata en profundidad el tema central de este trabajo. En dicho artículo se pueden encontrar generalizaciones de algunos de los resultados que se presentan en este trabajo, así como una construcción que mejora a la aquí utilizada. No obstante, el enfoque adoptado en este trabajo es más constructivo, incluyendo la resolución práctica de algunos casos particulares originales.

Además, el estudio de este problema requiere de resultados de corte más clásico sobre geometría algebraica real, para lo cual se ha consultado el libro *Real Algebraic Geometry*, [2], que constituye una referencia fundamental en la materia.

Por otra parte, numerosos trabajos han estudiado problemas relacionados, como el estudio de los poliedros convexos no acotados como imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$ , tratado en [6]; o la caracterización de las imágenes analíticas o regulares (esto es, mediante funciones racionales cuyo denominador no se anula) del espacio euclídeo, que se estudian en [5] y [7]. Otra cuestión de importancia en este trabajo es la de las curvas polinómicas dentro de conjuntos semialgebraicos. El artículo [4] profundiza en este tema, de una forma más general al tratar con curvas *Nash*, es decir, algebraicas y analíticas.

## 2. Propiedades básicas de las imágenes polinómicas de la bola unidad

En esta sección, estudiamos algunas de las propiedades que cumplen los conjuntos que son imagen polinómica de la bola unidad cerrada  $\overline{B}_m$ . Por ejemplo, como las aplicaciones polinómicas son continuas y  $\overline{B}_m$  es compacta, una imagen polinómica de  $\overline{B}_m$  es también compacta. De forma similar, toda imagen polinómica de  $\overline{B}_m$  es conexa. Estas propiedades se pueden entender también como condiciones necesarias para que un conjunto pueda ser imagen polinómica de la bola unidad cerrada.

De hecho, en cuanto a la conexión se tiene una propiedad más fuerte: conexión por caminos polinómicos.

**Proposición 2.1.** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  imagen polinómica de  $\overline{B}_m$ . Entonces,  $\mathcal{S}$  es conexo por caminos polinómicos. Esto es, para cada  $x, y \in \mathcal{S}$ , existe una aplicación polinómica  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  polinómica tal que  $f(\overline{B}_m) = \mathcal{S}$ . Dados  $x, y \in \mathcal{S}$ , existen  $x_0, y_0 \in \overline{B}_m$  con  $f(x_0) = x$ ,  $f(y_0) = y$ . Como  $\overline{B}_m$  es convexa, el segmento que une  $x_0$  con  $y_0$  está contenido en  $\overline{B}_m$ . Por tanto,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $t \mapsto f((1-t)x_0 + ty_0)$  es un camino polinómico con  $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{S}$  y  $\alpha(0) = f(x_0) = x$ ,  $\alpha(1) = f(y_0) = y$ . □

**Ejemplo 2.2.** Consideramos  $\overline{B}_2 \subset \mathbb{R}^2$  el círculo unidad, y la aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (2x^2 + 2y^2, y)$ . Entonces  $P := f(\overline{B}_2)$  es una imagen polinómica de  $\overline{B}_2$ , y se comprueba fácilmente que

$$P = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq v \leq 1, u \leq 2, 2v^2 \leq u\}.$$

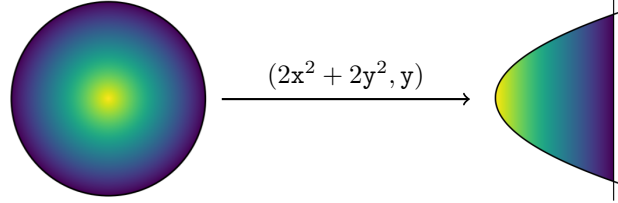


Figura 1: Transformación del Ejemplo 2.2

Ya hemos comentado algunas propiedades topológicas de  $\overline{B}_m$  que deben conservar sus imágenes polinómicas. En el Ejemplo 2.2, vemos cómo se conserva también una propiedad de naturaleza más algebraica: el conjunto  $P = f(\overline{B}_2)$ , al igual que el círculo, tiene una descripción con inecuaciones polinómicas. De manera informal, los conjuntos que se pueden describir mediante inecuaciones polinómicas se llaman *conjuntos semialgebraicos*. Veremos que lo que ocurre en el Ejemplo 2.2 es cierto en general, y que toda imagen polinómica de la bola unidad es un conjunto semialgebraico. Por tanto, bastará considerar este tipo de conjuntos a la hora de buscar imágenes polinómicas de  $\overline{B}_m$ .

### 2.1. Conjuntos semialgebraicos

Como se ha comentado, los conjuntos semialgebraicos son aquellos que se pueden describir mediante inecuaciones polinómicas. El uso de desigualdades necesita de la existencia de un orden, por lo que este tipo de conjuntos solo se pueden definir sobre cuerpos *reales*, es decir, aquellos que tienen un orden que además es compatible con las operaciones de cuerpo. De hecho, trabajaremos aquí con cuerpos real-cerrados, que son algo más restrictivos. Los contenidos de esta sección se tratan con más detalle en el Anexo B.

**Definición 2.3.** Dado un cuerpo real-cerrado  $R$  y un número natural  $n \geq 1$ , se define la familia de conjuntos semialgebraicos de  $R^n$  como la menor familia de subconjuntos de  $R^n$  que cumple:

- i) incluye al conjunto  $\{x \in R^n : f(x) > 0\}$  para todo polinomio  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ ,
- ii) es cerrada por complementarios y uniones e intersecciones finitas.

Esto define de manera rigurosa la familia de conjuntos semialgebraicos de  $R^n$ . Sin embargo, resulta más intuitivo describir el aspecto que tienen los conjuntos semialgebraicos. Como se ha comentado antes, son conjuntos que se pueden describir mediante combinaciones de ecuaciones e inecuaciones polinómicas; una idea que se formaliza en la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.** Un conjunto  $S \subseteq R^n$  es semialgebraico si y solo si se puede escribir como unión finita de conjuntos de la forma

$$\{x \in R^n : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0, \quad g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0\}, \quad (1)$$

donde  $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_\ell \in R[x_1, \dots, x_n]$ .

**Ejemplo 2.5.** Los conjuntos semialgebraicos adoptan una gran variedad de formas distintas. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$ :

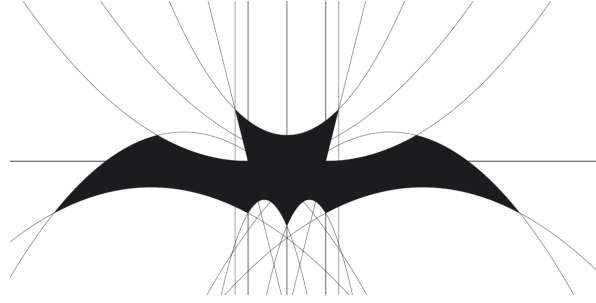


Figura 2: Un conjunto semialgebraico  $M \subseteq \mathbb{R}^2$

La figura anterior viene descrita por  $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{y \leq \frac{1}{4}x^2 + 1, \quad 4x - y \leq 6, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0\} \\ A_2 &= \{y \leq \frac{4}{49}(x - \frac{3}{2})^2, \quad y \leq \frac{1}{8}(x - 4)^2 + \frac{9}{8}, \quad y \geq -\frac{16}{225}(x - \frac{21}{4})^2 - 1, \quad x \geq \frac{3}{2}\} \\ A_3 &= \{y \leq \frac{4}{49}(-x - \frac{3}{2})^2, \quad y \leq \frac{1}{8}(-x - 4)^2 + \frac{9}{8}, \quad y \geq -\frac{16}{225}(-x - \frac{21}{4})^2 - 1, \quad x \leq -\frac{3}{2}\} \\ A_4 &= \{y \geq \frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{5}{2}, \quad y \geq \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{5}{2}, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, \quad y \leq 0\}. \end{aligned}$$

### 2.1.1. Teorema de Tarski-Seidenberg

En esencia, el Teorema de Tarski-Seidenberg afirma que la proyección de un conjunto semialgebraico es también un conjunto semialgebraico. Dicha propiedad no es inmediata a partir de las definiciones: supongamos que  $S \subset R^{n+1}$  es un conjunto semialgebraico definido por una combinación de ecuaciones e inecuaciones polinómicas  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Esto es,  $S = \{(x, y) \in R^{n+1} : \Phi(x, y)\}$ , entonces su proyección sobre las  $n$  primeras variables es:

$$\Pi(S) = \{x \in R^n : \exists y \in R \text{ tal que } (x, y) \in S\} = \{x \in R^n : \exists y \in R \text{ tal que } \Phi(x, y)\},$$

que no es en apariencia un conjunto semialgebraico, pues según la definición, no se permite que la fórmula que define a uno de estos conjuntos contenga cuantificadores. Por tanto, para probar que  $\Pi(S)$  es semialgebraico, debemos probar que se puede eliminar el cuantificador existencial que hay en su definición. Más precisamente, queremos encontrar (o, al menos, probar la existencia de) otra fórmula *sin cuantificadores* que sea equivalente a la anterior. El Teorema de Tarski-Seidenberg asegura que esto siempre es posible.

**Teorema 2.6 (Tarski-Seidenberg en  $\mathbb{R}$ ).** *Sea  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  y sea  $y$  una variable. Supongamos que tenemos  $f_i = h_{i,m_i}(\mathbf{x})y^{m_i} + \dots + h_{i,0}(\mathbf{x})$  polinomio en  $\mathbb{R}[\mathbf{x}, y]$  para  $i = 1, \dots, s$ ; así como una función  $\sigma : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ . Entonces, existe una combinación booleana de ecuaciones e inecuaciones polinómicas en las variables  $\mathbf{x}$ , que denotamos  $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ , de forma que para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , el sistema*

$$\begin{cases} \text{signo}(f_1(x, y)) = \sigma(1) \\ \dots \\ \text{signo}(f_s(x, y)) = \sigma(s) \end{cases}$$

*tiene alguna solución  $y \in \mathbb{R}$  si y solo si se cumple la condición  $\mathcal{B}(x)$ .*

Como corolario inmediato, se tiene la mencionada estabilidad bajo proyecciones de los conjuntos semialgebraicos (que es, de hecho, una formulación equivalente del teorema).

**Corolario 2.7.** *Si  $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$  es un conjunto semialgebraico, entonces su proyección sobre las  $n$  primeras coordenadas  $\Pi_n(S)$  es también un conjunto semialgebraico.*

Finalmente, probamos un resultado de especial relevancia para el trabajo: la imagen de un conjunto semialgebraico mediante una aplicación polinómica es también un conjunto semialgebraico. De hecho, esto se tiene para una clase mayor de aplicaciones: las aplicaciones semialgebraicas, que definimos a continuación.

**Definición 2.8.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  conjuntos semialgebraicos. Una aplicación  $f : A \rightarrow B$  se dice semialgebraica si su gráfica

$$\text{Graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

es un conjunto semialgebraico.

Como aplicación de lo anterior, obtenemos el resultado que buscábamos probar.

**Proposición 2.9.** *Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  semialgebraicos y  $f : A \rightarrow B$  una aplicación semialgebraica. Entonces:*

- i) Para todo  $C \subset A$  semialgebraico,  $f(C)$  es semialgebraico.*
- ii) Para todo  $D \subset B$  semialgebraico,  $f^{-1}(D)$  es semialgebraico.*

*Demostración.*

- i)  $f(C) = \Pi_2(\text{Graf}(f) \cap (C \times \mathbb{R}^m))$ , donde  $\Pi_2$  denota la proyección sobre las  $m$  últimas coordenadas.
- ii)  $f^{-1}(D) = \Pi_1(\text{Graf}(f) \cap (\mathbb{R}^n \times D))$ , donde  $\Pi_1$  denota la proyección sobre las  $n$  primeras coordenadas.

□

Por lo tanto, toda imagen polinómica de  $\overline{B}_m$  es un conjunto semialgebraico.



### 3. Imágenes polinómicas esenciales de la bola unidad cerrada

En esta sección, presentamos algunos conjuntos que son imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_m$ . Un conjunto de especial importancia para este trabajo es el prisma triangular, que nos permitirá obtener importantes resultados sobre polígonos. Con este objetivo en mente, construiremos primero un triángulo como imagen polinómica del círculo (de hecho, probamos este resultado más en general para  $n$ -símplices), y después, el cilindro como imagen de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ . Combinando ambos resultados, se obtiene fácilmente el prisma triangular.

*Notación.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\Delta_n$  al  $n$ -símplice de vértices  $0, e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ , esto es,

$$\Delta_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}.$$

**Proposición 3.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el  $n$ -símplice  $\Delta_n$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_n$ .*

*Demostración.* Para la aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2, \dots, x_n^2)$ , se tiene que  $f(\overline{\mathcal{B}}_n) = \Delta_n$ . □

El  $n$ -símplice  $\Delta_n$  se puede transformar en cualquier poliedro convexo de  $n+1$  vértices, como muestra el siguiente corolario. En particular, a partir de  $\Delta_2$  podemos obtener cualquier triángulo, lo cual será importante para la construcción dada en el Teorema 3.5.

**Corolario 3.2.** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y compacto de  $m+1$  vértices. Entonces,*

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i) v_{m+1} : (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Delta_m \right\} \quad (2)$$

*En particular,  $\mathcal{K}$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_m$ .*

*Demostración.* La igualdad (2) es consecuencia de que todo poliedro convexo es la envolvente convexa de sus vértices. Por otro lado, en virtud de (2),  $\mathcal{K}$  es imagen de  $\Delta_m$  mediante la aplicación  $f : \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i) v_{m+1}$ . Por la Proposición 3.1,  $\Delta_m$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_m$ , así que por composición,  $\mathcal{K}$  también lo es. □

Abordamos ahora la construcción del cilindro a partir de la bola  $\overline{\mathcal{B}}_3$ . Lo hacemos en el caso general  $n$ -dimensional, puesto que no supone ninguna complicación.

*Notación.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\mathcal{C}_n$  al cilindro  $n$ -dimensional, esto es  $\mathcal{C}_n := \overline{\mathcal{B}}_{n-1} \times [-1, 1]$ .

**Proposición 3.3.** *El cilindro  $\mathcal{C}_n$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_n$ .*

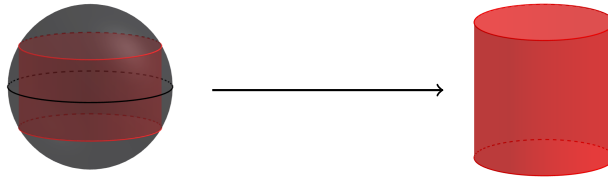


Figura 3: Construcción del cilindro en la Proposición 3.3

*Demostración.* Para cada  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , denotamos  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Sea  $\mathcal{S}_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x'\| \leq \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{1}{2}\}$ . Obsérvese que  $\mathcal{S}_n$  es un cilindro de radio  $\frac{3}{4}$  y altura 1, y que  $\mathcal{S}_n \subset \bar{\mathcal{B}}_n$ . Definiremos a continuación una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{\mathcal{B}}_n) \subset \mathcal{C}_n$  y  $f(\mathcal{S}_n) = \mathcal{C}_n$ .

Sean  $g_1, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  los polinomios  $g_1(\mathfrak{t}) := \sqrt{3}(1 - \frac{4}{9}\mathfrak{t})$ ,  $g(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}g_1(\mathfrak{t}^2)$   $h(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}(3 - 4\mathfrak{t}^2)$ . Se tiene que  $g([0, \frac{\sqrt{3}}{2}]) = [0, 1]$  y  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ . Además,  $h([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [-1, 1]$  y  $h([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ . Definimos ahora  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto (x'g_1(\|x'\|^2), h(x_n))$ . Dado  $x \in \bar{\mathcal{B}}_n$ , sea  $y = (y', y_n) := f(x)$ . Entonces:

$$|y_n| = |h(x_n)| \leq 1, \quad y \quad \|y'\| = \|x'g_1(\|x'\|^2)\| = \|x'\|g_1(\|x'\|^2) = g(\|x'\|) \leq 1.$$

Por tanto,  $f(x) = y \in \mathcal{C}_n$  y se cumple  $f(\bar{\mathcal{B}}_n) \subset \mathcal{C}_n$ . Ahora, dado  $y = (y', y_n) \in \mathcal{C}_n$ , como  $g([0, \frac{\sqrt{3}}{2}]) = [0, 1]$ , existe  $x'_0 \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$  tal que  $g(x'_0) = \|y'\|$ . Además, existe  $x_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  tal que  $h(x_n) = y_n$ . Sean  $x' := x'_0 \frac{y'}{\|y'\|}$  y  $x := (x', x_n) \in \mathcal{S}_n \subset \bar{\mathcal{B}}_n$ . Afirmamos que  $f(x) = (x'g_1(\|x'\|^2), h(x_n)) = (y', y_n) = y$ . En efecto,  $y_n = h(x_n)$  por elección de  $x_n$  y como  $\|x'\| = |x'_0| = x'_0$ ,

$$x'g_1(\|x'\|^2) = x'_0 \frac{y'}{\|y'\|} g_1((x'_0)^2) = \frac{y'}{\|y'\|} g(x'_0) = y'.$$

□

Combinando los dos resultados anteriores, se puede obtener fácilmente el conjunto  $\Delta_{n-1} \times [-1, 1]$ , que para el caso  $n = 3$  se corresponde con un prisma triangular.

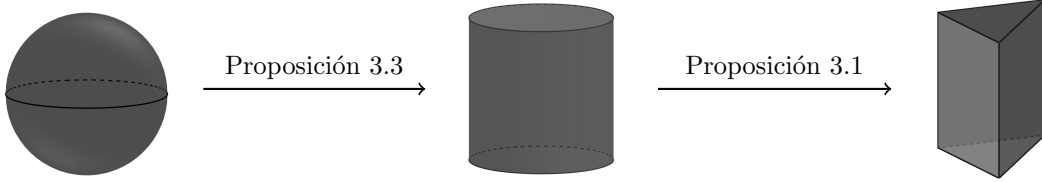


Figura 4: Construcción del prisma triangular

**Corolario 3.4.** *El conjunto  $\Delta_{n-1} \times [-1, 1]$  es imagen polinómica de  $\bar{\mathcal{B}}_n$ .*

*Demostración.* Aplicando la Proposición 3.3 para  $n$  y la Proposición 3.1 para  $n - 1$ , obtenemos que existen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  polinómicas tales que  $f(\bar{\mathcal{B}}_n) = \mathcal{C}_n = \bar{\mathcal{B}}_{n-1} \times [-1, 1]$  y  $g(\bar{\mathcal{B}}_{n-1}) = \Delta_{n-1}$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , escribimos  $x = (x', x_n)$ , donde  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  y definimos  $g_1(x) = (g(x'), x_n)$ . Entonces,  $h := g_1 \circ f$  es una aplicación polinómica que cumple

$$h(\bar{\mathcal{B}}_n) = g_1(f(\bar{\mathcal{B}}_n)) = g_1(\bar{\mathcal{B}}_{n-1} \times [-1, 1]) = \Delta_{n-1} \times [-1, 1].$$

□

A continuación, mostramos la construcción fundamental del trabajo: la obtención de una unión finita de polígonos  $\mathcal{S}$  como imagen polinómica  $\Delta_2 \times [-1, 1]$ . La idea de dicha construcción es triangular los polígonos que componen  $\mathcal{S}$  y, utilizando la técnica del Corolario 3.2, desplazar el triángulo  $\Delta_2$  para cubrir cada uno de los triángulos de la triangulación. Para ello, necesitaremos unas curvas polinómicas que desplacen los vértices del triángulo a lo largo de todos los vértices de la triangulación, y sin salir del conjunto  $\mathcal{S}$ . Intuitivamente, tratamos el eje vertical del prisma, el intervalo  $[-1, 1]$ , como un eje “temporal”, pues será el dominio de las curvas sobre las que se desplazan los vértices del triángulo.

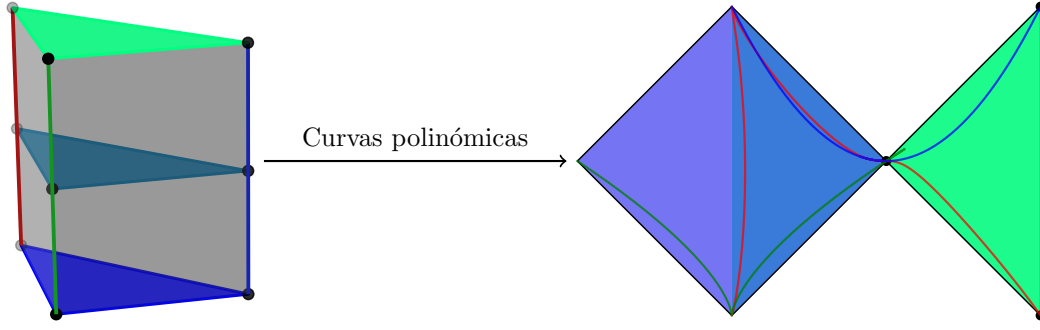


Figura 5: Construcción de un polígono usando el Teorema 3.5

**Teorema 3.5.** Sean  $P_0, \dots, P_r \subset \mathbb{R}^n$  polígonos (compactos) convexos, y sea  $\mathcal{S} := \bigcup_{i=0}^r P_i$ . Para cada  $i$ , sea  $(\sigma_{ij})_{j=0}^{k_i}$  una triangulación de  $P_i$  y denotamos por  $v_{ij}^1, v_{ij}^2, v_{ij}^3$  a los vértices de  $\sigma_{i,j}$ . Supongamos que existen curvas polinómicas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  satisfaciendo:

- i) para cada  $i = 0, \dots, r$ ,  $j = 0, \dots, k_i$ , existe un valor  $t_{ij} \in [-1, 1]$  tal que  $\alpha_1(t_{ij}) = v_{ij}^1$ ,  $\alpha_2(t_{ij}) = v_{ij}^2$  y  $\alpha_3(t_{ij}) = v_{ij}^3$ .
- ii) para cada  $t \in [-1, 1]$ , existe  $i = i(t) \in \{0, \dots, r\}$  tal que  $\alpha_\ell(t) \in P_i$  para  $\ell = 1, 2, 3$ .

Entonces,  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ .

*Demostración.* Sea  $F : \Delta_2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación polinómica dada por:

$$F(x, y, t) = x\alpha_1(t) + y\alpha_2(t) + (1 - x - y)\alpha_3(t).$$

Afirmamos que  $F(\Delta_2 \times [0, 1]) = \mathcal{S}$ : en primer lugar, por ii) se tiene que  $\alpha_\ell(t) \in P_i$  para  $i = 0, \dots, r$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ . Además, como  $P_i$  es cerrado, de ii) se deduce también que  $\alpha_\ell(s_i), \alpha_\ell(s_{i+1}) \in P_i$  para cada  $i = 0, \dots, r$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ . Dados  $(x, y) \in \Delta_2$  y  $t \in [0, 1]$ ,  $F(x, y, t)$  es una combinación lineal convexa de  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$  y cada  $P_i$  es convexo. Por tanto, usando ii),  $F(x, y, t) \in P_{i(t)} \subset \mathcal{S}$  para todo  $t \in [-1, 1]$ ,  $(x, y) \in \Delta_2$ . Por tanto,  $F(\Delta_2 \times [0, 1]) \subset \mathcal{S}$ .

Ahora, por i), tenemos que  $F(x, y, t_{ij}) = xv_{ij}^1 + yv_{ij}^2 + (1 - x - y)v_{ij}^3$ . Por el Corolario 3.2,  $F(\Delta_2 \times \{t_{ij}\}) = \sigma_{ij}$ . Así,  $\mathcal{S} = \bigcup_{i=0}^r P_i = \bigcup_{i,j} \sigma_{i,j} \subset F(\Delta_2 \times [0, 1])$ , lo cual prueba que  $F(\Delta_2 \times [0, 1]) = \mathcal{S}$ . En virtud del Corolario 3.4, el conjunto  $\Delta_2 \times [0, 1]$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ , luego por composición de aplicaciones, también lo es  $\mathcal{S}$ . □

Dada una unión de polígonos convexos, el teorema anterior nos asegura que es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$  *supuesta la existencia* de las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Además, si somos capaces de encontrar las curvas de forma explícita, nos proporciona una aplicación polinómica concreta, que detallamos a continuación: en primer lugar, en virtud de la Proposición 3.3 y el Corolario 3.4, si denotamos  $g_2(\mathbf{t}) := 3(1 - \frac{4}{9}\mathbf{t})^2$ , se tiene que

$$\Delta_2 \times [-1, 1] = G(\overline{\mathcal{B}}_3), \text{ donde } G(x, y, z) = (x^2 g_2(x^2 + y^2), y^2 g_2(x^2 + y^2), z(3 - 4z^2)).$$

Entonces, basta componer la aplicación  $F$  dada en la demostración del Teorema 3.5 para obtener una aplicación  $H = F \circ G$  que verifica  $H(\overline{\mathcal{B}}_3) = \mathcal{S}$ . Por lo anterior, la expresión de  $H$  es

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= F(x^2 g_2(x^2 + y^2), y^2 g_2(x^2 + y^2), z(3 - 4z^2)) = \\ &= g_2(x^2 + y^2) \left( x^2 \alpha_1(z(3 - 4z^2)) + y^2 \alpha_2(z(3 - 4z^2)) \right) + \left( 1 - g_2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) \right) \alpha_3(z(3 - 4z^2)). \end{aligned}$$

El problema que surge de forma natural, y que abordamos a continuación, es determinar bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia de dichas curvas, así como encontrar un procedimiento para hallar curvas polinómicas que satisfagan las condiciones pedidas.

## 4. Curvas polinómicas en conjuntos semialgebraicos

En esta sección se demuestra la existencia de las curvas polinómicas necesarias para aplicar la construcción del Teorema 3.5. Para ello, bastará estudiar una situación un poco más general: en lugar de polígonos, trabajaremos con conjuntos semialgebraicos abiertos. Buscaremos, dados algunos puntos prefijados en la adherencia de estos conjuntos, una curva polinómica que pase por los puntos prefijados sin salir de los conjuntos semialgebraicos de partida (salvo, quizás, al pasar por los puntos de adherencia prefijados).

En primer lugar, demostraremos que dada una curva semialgebraica (con ciertas condiciones de diferenciabilidad) que cumpla todo lo anterior, se puede obtener a partir de ella una curva polinómica que también lo cumpla. Para ello, necesitaremos resultados de aproximación por polinomios, y también de interpolación para garantizar que las curvas pasen por los puntos prefijados. Después, bajo la hipótesis de conexión por caminos analíticos, probaremos que es posible construir dichas curvas semialgebraicas.

### 4.1. Interpolación de Hermite

En primer lugar, presentamos un resultado clásico sobre interpolación polinómica que permite, dados números reales  $t_1 < \dots < t_r$  y para cada  $t_i$ , una cantidad finita de valores  $a_{ik}$  encontrar un polinomio  $H \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  cuyas derivadas en el punto  $t_i$  sean precisamente los valores  $a_{ik}$  dados. Esto incluye al propio valor  $H(t_i) = a_{i0}$ , que como es habitual denotamos por  $H^{(0)}(t_i)$ .

Esta técnica generaliza la conocida interpolación de Lagrange, que permite prefijar en algunos puntos el valor del polinomio, pero no sus derivadas. La construcción de los polinomios de interpolación de Hermite sigue un esquema muy similar al caso de la interpolación de Lagrange. Para ello, será útil el siguiente lema, que nos proporciona polinomios cuya derivadas se anulan en algunos puntos prefijados.

**Lema 4.1.** *Sean  $t_1 < \dots < t_r$  números reales y  $m_1, \dots, m_r$  enteros no negativos. Entonces, el polinomio*

$$P(\mathbf{t}) := \prod_{i=1}^r (\mathbf{t} - t_i)^{m_i} \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$$

*verifica que*

$$i) \ P^{(k)}(t_i) = 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, r, \ 0 \leq k \leq m_i - 1, \text{ y}$$

$$ii) \ P^{(m_i)}(t_i) = m_i! \prod_{j \neq i} (t_i - t_j)^{m_j}.$$

**Teorema 4.2.** *Sean  $t_1 < \dots < t_r$  números reales y  $m_1, \dots, m_r$  enteros no negativos. Para cada  $i = 1, \dots, r$ ,  $0 \leq k \leq m_i$ , fíjese un valor real  $a_{ik}$ . Entonces, existe un único polinomio  $H \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  de grado menor o igual que  $(r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$  tal que  $H^{(k)}(t_i) = a_{ik}$  para cada  $i = 1, \dots, r$ ,  $0 \leq k \leq m_i$ .*

*Demostración.* Probamos en primer lugar la unicidad: si  $H_1, H_2$  son dos polinomios cumpliendo las condiciones del enunciado, definimos  $h(\mathbf{t}) := H_1(\mathbf{t}) - H_2(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ , que es un polinomio de grado menor o igual que  $(r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$ . Además, para cada  $i = 1, \dots, r$ ,  $0 \leq k \leq m_i$  se tiene

$$h^{(k)}(t_i) = H_1^{(k)}(t_i) - H_2^{(k)}(t_i) = a_{ik} - a_{ik} = 0.$$

Por tanto,  $t_i$  es una raíz de  $h$  con multiplicidad  $\mu_i \geq m_i + 1$ . Así, el número de raíces de  $h$  contadas con su multiplicidad es  $\sum_{i=1}^r \mu_i \geq \sum_{i=1}^r (m_i + 1) = r + \sum_{i=1}^r m_i > \deg(h)$ . De esto se deduce que  $h \equiv 0$ , luego  $H_1 = H_2$ .

Procedemos ahora a probar la existencia del polinomio  $H$ , por inducción sobre  $r$ . Si  $r = 1$ , podemos tomar

$$H(\mathbf{t}) := a_{10} + a_{11}(\mathbf{t} - t_1) + \frac{a_{12}}{2!}(\mathbf{t} - t_1)^2 + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{m_1!}(\mathbf{t} - t_1)^{m_1} = \sum_{k=0}^{m_1} \frac{a_{1k}}{k!}(\mathbf{t} - t_1)^k.$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para  $r - 1$ , y comprobamos que se cumple también para  $r$ . En las condiciones del enunciado, por hipótesis de inducción existe un polinomio  $G \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  de grado  $\deg(G) \leq (r - 1 + \sum_{i=1}^{r-1} m_i) - 1 \leq (r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$  tal que  $G^{(k)}(t_i) = a_{ik}$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ ,  $0 \leq k \leq m_i$ . Ahora, por inducción sobre  $m_r \geq 0$ , demostramos la existencia del polinomio  $H$  buscado.

Si  $m_r = 0$ , consideramos el polinomio  $P(\mathbf{t}) := \prod_{i=1}^{r-1} (\mathbf{t} - t_i)^{m_i+1} \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ . Por el Lema 4.1,  $P$  verifica  $P^{(k)}(t_i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r - 1$ ,  $0 \leq k \leq m_i$  y  $P(t_r) = \prod_{i=1}^{r-1} (t_r - t_i)^{m_i+1} \neq 0$ . Obsérvese también que  $\deg(P) = \sum_{i=1}^{r-1} (m_i + 1) = r - 1 + \sum_{i=1}^r m_i$ , pues hemos supuesto  $m_r = 0$ . Ahora, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , definimos el polinomio  $H_a(\mathbf{t}) := G(\mathbf{t}) + aP(\mathbf{t})$ , de grado  $\deg(H_a) \leq (r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$ . Por las propiedades de  $P$  ya mencionadas, se tiene

$$H_a^{(k)}(t_i) = G^{(k)}(t_i) = a_{ik} \quad \text{para } i = 1, \dots, r - 1, \quad 0 \leq k \leq m_i,$$

$$H_a(t_r) = G(t_r) + aP(t_r) = G(t_r) + a \prod_{i=1}^{r-1} (t_r - t_i)^{m_i+1}.$$

Por tanto, tomando  $a = (a_{r0} - G(t_r))(\prod_{i=1}^{r-1} (t_r - t_i)^{m_i+1})^{-1}$  el polinomio  $H_a$  cumple lo pedido.

Ahora, supongamos el resultado cierto para  $m_r - 1$  y verifiquemos que se cumple para  $m_r$ . Por hipótesis de inducción, existe un polinomio  $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  tal que  $Q^{(k)}(t_i) = a_{ik}$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ ,  $0 \leq k \leq m_i$  y para  $i = r$ ,  $0 \leq k \leq m_r - 1$ . Procedemos ahora de forma similar al caso  $m_r = 0$ : consideramos el polinomio  $P(\mathbf{t}) := (\mathbf{t} - t_r)^{m_r} \prod_{i=1}^{r-1} (\mathbf{t} - t_i)^{m_i+1}$ , que por el Lema 4.1, verifica que  $P^{(k)}(t_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ ,  $0 \leq k \leq m_i$  y también para  $i = r$ ,  $0 \leq k \leq m_r - 1$ . Además,  $\deg(P) = m_r + \sum_{i=1}^{r-1} (m_i + 1) = (r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$  y  $P^{(m_r)}(t_r) = m_r! \prod_{i=1}^{r-1} (t_r - t_i)^{m_i+1} \neq 0$ . Definimos ahora  $H_a(\mathbf{t}) := Q(\mathbf{t}) + aP(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ , que es un polinomio de grado  $\deg(H_a) \leq (r + \sum_{i=1}^r m_i) - 1$ . Procediendo de forma análoga al caso  $m_r = 0$ , se encuentra un valor de  $a$  adecuado para el cual el polinomio  $H_a$  cumple las condiciones requeridas.  $\square$

**Definición 4.3.** En las condiciones del Teorema 4.2, el polinomio  $H$  se llama *polinomio de interpolación de Hermite* de los valores  $a_{ik}$  en  $t_1, \dots, t_r$ .

*Observación.* La demostración del Teorema 4.2 es válida reemplazando  $\mathbb{R}$  por cualquier cuerpo de característica 0. En particular, si los valores  $t_1, \dots, t_r$  y  $a_{ik}$  son todos racionales, el polinomio de interpolación de Hermite  $H$  tiene también coeficientes racionales. A nivel computacional, esto puede resultar útil por cuestiones de precisión, pues permite obtener los coeficientes exactos del polinomio sin errores de redondeo.

## 4.2. Aproximación combinada con interpolación polinómica

La interpolación de Hermite permite encontrar polinomios cuyas derivadas toman valores prefijados en algunos puntos. Para el objetivo de este trabajo, necesitaremos combinar esta interpolación con aproximación por polinomios. Antes, introducimos algunos conceptos y notaciones que resultarán útiles.

**Definición 4.4.** Para cada  $\nu \in \mathbb{N}$  y cada intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , denotamos por  $\mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R})$  al espacio de las funciones de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  que son diferenciables  $\nu$  veces, y con su derivada de orden  $\nu$  continua en  $[a, b]$ . Sobre este espacio, consideramos la *topología compacto-abierto*, que tiene por una base de entornos a los conjuntos:

$$\mathcal{U}_{g, \varepsilon}^\nu := \left\{ f \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}) : \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{[a, b]} < \varepsilon, \quad k = 0, \dots, \nu \right\},$$

donde  $\varepsilon > 0$  y  $\|h\|_{[a,b]} := \sup \{|h(x)| : x \in [a,b]\}$ , que es finito siempre que  $h$  sea continua en  $[a,b]$ .

Para un subconjunto  $X \subset [a,b]$ , se define de forma análoga la topología compacto-abierta sobre el espacio  $\mathcal{C}^\nu(X, \mathbb{R})$ . Nótese que para un subconjunto arbitrario  $X \subset [a,b]$  y una función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , podría ser  $\|f\|_X = +\infty$ , pero esto no impide definir la topología. Cabe señalar también que la topología compacto-abierta está generada por la norma  $\|\cdot\|_\nu$  dada por

$$\|f\|_\nu := \sum_{i=0}^{\nu} \|f^{(i)}\| = \|f\| + \|f'\| + \cdots + \|f^{(\nu)}\|.$$

Para aplicaciones con varias componentes, tendremos los espacios  $\mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R}^n)$  con  $n \in \mathbb{N}$ . En este caso, consideramos que

$$\mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R})$$

y dotamos al espacio con la topología producto.

También nos será útil conocer la continuidad (con respecto de la topología compacto-abierta) de algunos operadores elementales entre estos espacios. Los tres siguientes lemas son de esta naturaleza.

**Lema 4.5.** *Para cada  $\nu \geq 1$ ,  $[a,b] \subset \mathbb{R}$  y  $n \geq 1$ , la aplicación*

$$D : \mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^{\nu-1}([a,b], \mathbb{R}^n)$$

*es continua.*

*Demostración.* Basta con comprobar la afirmación para  $n = 1$ , pues para dimensiones superiores se aplica coordenada a coordenada.  $D$  es un operador lineal entre espacios normados, por lo que para verificar su continuidad, es suficiente comprobar que es acotado. En efecto, para cada  $f \in \mathcal{C}^\nu([a,b], \mathbb{R})$ :

$$\|D(f)\|_{\nu-1} = \|f'\|_{\nu-1} = \|f'\| + \cdots + \|f^{(\nu)}\| \leq \|f\| + \|f'\| + \cdots + \|f^{(\nu)}\| = \|f\|_\nu.$$

□

**Lema 4.6.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación de clase  $\mathcal{C}^\ell$  para algún  $0 \leq \ell \leq \nu$ . Entonces, la aplicación  $\varphi^* : \mathcal{C}^\nu([a,b], U) \rightarrow \mathcal{C}^\ell([a,b], \mathbb{R}^m)$ ,  $f \mapsto \varphi \circ f$  es continua.*

*Demostración.* Observemos primero que basta comprobar la afirmación del enunciado para el caso  $m = 1$ , puesto que para  $m > 1$  se puede aplicar el resultado coordenada a coordenada.

Fijamos  $r \in \{0, \dots, \ell\}$  y  $\varepsilon > 0$ . Veamos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|f^{(k)} - g^{(k)}\| < \delta$  para cada  $k = 0, \dots, r$ , entonces  $\|(\varphi \circ f)^{(r)} - (\varphi \circ g)^{(r)}\| \leq \varepsilon$ . Dada una aplicación  $h \in \mathcal{C}^\nu([a,b], U)$ , como consecuencia de la regla de la cadena, la derivada  $r$ -ésima de  $\varphi \circ h$  se puede expresar como un polinomio en

- las derivadas parciales de  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$  para cada multiíndice  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  con  $|\alpha| := i_1 + \cdots + i_n \leq r$ , evaluadas en  $h(\mathbf{t})$ ,
- las derivadas de cada componente de  $h$ ,  $h_i^{(k)}$  para  $1 \leq k \leq r$ .

Por tanto,  $(\varphi \circ h)^{(r)}(\mathbf{t}) = T(h(\mathbf{t}), h'(\mathbf{t}), \dots, h^{(r)}(\mathbf{t}))$ , donde  $T : U \times \mathbb{R}^{rn} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que depende de  $r$  y  $\varphi$ . Para cada  $k = 0, \dots, r$ , la aplicación  $f^{(k)} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, luego  $f^{(k)}([a,b])$  es compacto. Por tanto, podemos elegir  $K_0 \subset U$  entorno compacto de  $f([a,b])$  y  $K_k \subset \mathbb{R}^n$  entorno compacto de  $f^{(k)}([a,b])$ .

Así,  $K := K_0 \times \cdots \times K_r \subset U \times \mathbb{R}^{rn}$  es compacto y  $T$  es uniformemente continua sobre  $K$ . En consecuencia, existe  $\delta' > 0$  tal que  $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$  siempre que  $x = (x_0, x_1, \dots, x_r), y = (y_0, y_1, \dots, y_r) \in K$  y  $\|x_i - y_i\| < \delta'$  para cada  $i = 0, \dots, r$ . Para cada  $k = 0, \dots, r$ , por ser  $f^{(k)}([a,b])$

compacto y  $K_k$  un entorno compacto suyo, existe  $\delta_k > 0$  tal que para  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $x \in K_k$  siempre que  $\text{dist}(x, f^{(k)}([a, b])) < \delta_k$ . Tomamos entonces  $\delta := \min\{\delta_0, \dots, \delta_r, \delta'\}$ .

Ahora, sea  $g \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n)$  tal que para cada  $k = 0, \dots, r$ ,  $\|f^{(k)} - g^{(k)}\| < \delta$  y fijemos  $t \in [a, b]$ . Entonces,  $\|f^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)\| \leq \|f^{(k)} - g^{(k)}\| < \delta \leq \min\{\delta_k, \delta'\}$  para cada  $k = 0, \dots, r$ . En particular,  $g^{(k)}(t) \in K_k$  y  $\|f^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)\| < \delta$ . Por tanto,  $(g(t), g'(t), \dots, g^{(r)}(t)) \in K$  y por la continuidad uniforme de  $T$  en  $K$ ,

$$\|(\varphi \circ f)^{(r)}(t) - (\varphi \circ g)^{(r)}(t)\| = \|T(f(t), f'(t), \dots, f^{(r)}(t)) - T(g(t), g'(t), \dots, g^{(r)}(t))\| < \varepsilon.$$

Como  $t \in [a, b]$  era arbitrario, se tiene que  $\|(\varphi \circ f)^{(r)} - (\varphi \circ g)^{(r)}\| \leq \varepsilon$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 4.7.** Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $X \subset [a, b]$ ,  $\nu \geq 0$  y sea  $\rho$  la aplicación de restricción a  $X$ , esto es,

$$\rho : \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\nu(X, \mathbb{R}^n), \quad f \mapsto f|_X.$$

Entonces,  $\rho$  es continua.

*Demostración.* Sean  $f \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n)$  y  $\varepsilon > 0$  fijo. Entonces, si  $g \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n)$  cumple que  $\|f - g\|_{[a, b]} < \varepsilon$ , se tiene que

$$\|f|_X - g|_X\| \leq \|f - g\|_{[a, b]} < \varepsilon.$$

$\square$

Los resultados anteriores nos ayudarán a probar el Lema 4.9, que probaremos como aplicación del siguiente Lema 4.8, que es la mencionada aproximación combinada con interpolación polinómica.

**Lema 4.8.** Sean  $a < t_1 < \dots < t_r < b$  números reales y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^\nu$ . Denotamos  $a_{ik} := f^{(k)}(t_i)$  para cada  $i = 1, \dots, r$ ;  $0 \leq k \leq \nu$ . Sea  $\varepsilon > 0$  fijo. Entonces, existe un polinomio  $g \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  que verifica:

$$i) \quad \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_{[a, b]} < \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq k \leq \nu.$$

$$ii) \quad g^{(k)}(t_i) = a_{ik} \text{ para todo } i = 1, \dots, r; 0 \leq k \leq \nu.$$

*Demostración.* La prueba se divide en dos partes: en primer lugar, mostramos que existe un polinomio  $h \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  que verifica la condición *i)* del enunciado. Después, se modificará el polinomio  $h$  obtenido en el primer paso para asegurar que cumple también la condición *ii)*.

**Paso 1.** Procedemos por inducción sobre el orden de diferenciabilidad  $\nu$ . Para  $\nu = 0$ , el resultado es el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass. Supongamos que el resultado es cierto para  $\nu - 1 \geq 0$ , y comprobemos que también se cumple para  $\nu$ .

Dada la función  $f \in \mathcal{C}^\nu([a, b])$ , su derivada es una función de clase  $\mathcal{C}^{\nu-1}$ . Por tanto, por hipótesis de inducción, existe un polinomio  $h_0 \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  tal que

$$\|f^{(k+1)} - h^{(k)}\| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{para } k = 0, \dots, \nu - 1.$$

Tomamos entonces el polinomio  $h$  dado por

$$h(t) = f(a) + \int_a^t h_0(s) \, ds.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo,  $h'(t) = h_0(t)$ , por lo que  $\|f^{(k+1)} - h^{(k+1)}\| < \varepsilon$ . Además,

$$|f(t) - h(t)| = \left| f(a) + \int_a^t f'(s) \, ds - \left( f(a) + \int_a^t h_0(s) \, ds \right) \right| = \left| \int_a^t f'(s) - h_0(s) \, ds \right| \leq$$

$$\leq \int_a^t |f'(s) - h_0(s)| \, ds < (t-a) \frac{\varepsilon}{b-a} < \varepsilon.$$

**Paso 2.** Dados los puntos  $t_i$ , tomamos polinomios  $P_{ik}$  tales que

$$P_{ik}^{(\ell)}(t_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \text{ o } \ell \neq k, \\ 1, & \text{si } i = j \text{ y } \ell = k, \end{cases}$$

para  $i, j = 1, \dots, r$  y  $0 \leq k \leq \nu$ . Estos polinomios pueden hallarse mediante interpolación de Hermite (son, de hecho, los polinomios base para la interpolación de Hermite). Definimos

$$M := \max\{\|P_{ik}^{(\ell)}\|_{[a,b]} : 1 \leq i \leq r, \ 0 \leq k, \ell \leq \nu\}.$$

Ahora, usando el Paso 1, tomamos  $h \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  tal que

$$\|f^{(k)} - h^{(k)}\|_{[a,b]} < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{1 + r(\nu + 1)M} \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq \nu. \quad (3)$$

Para cada  $i, k$ , definimos  $c_{ik} := a_{ik} - h^{(k)}(t_i)$ , que por (3) tiene  $|c_{ik}| < \varepsilon'$ . Entonces, consideramos el polinomio

$$g(\mathbf{t}) := h(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\nu} c_{ik} P_{ik}(\mathbf{t}),$$

que cumple  $g^{(\ell)}(t_i) = h^{(\ell)}(t_i) + c_{ik} = a_{ik}$ . Además,

$$\|f^{(k)} - g^{(k)}\| \leq \|f^{(k)} - h^{(k)}\| + \|h^{(k)} - g^{(k)}\| < \varepsilon' + \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\nu} c_{ik} P_{ik} \right\| \leq \varepsilon' + r(\nu + 1)\varepsilon' M = \varepsilon.$$

□

Como aplicación de este resultado, podemos dar un importante paso en la estrategia delineada anteriormente. El siguiente lema nos permite obtener curvas polinómicas con comportamientos prescritos en algunos puntos e intervalos, a partir de curvas semialgebraicas que cumplan dichas condiciones. Antes, aclaramos una notación que se utilizará con frecuencia en esta sección.

*Notación.* Si  $h$  es una función analítica definida en un intervalo abierto  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$ , escribiremos  $h(\mathbf{t}) = a_m \mathbf{t}^m$  para denotar que  $a_m \mathbf{t}^m$  es el término de menor orden de la serie de Taylor de  $h$ , esto es,  $h(\mathbf{t}) = a_m \mathbf{t}^m + \sum_{k>m} a_k \mathbf{t}^k$ .

**Lema 4.9.** Sean  $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_r \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos semialgebraicos conexos y abiertos, no necesariamente distintos dos a dos. Fijemos puntos  $z_i \in \overline{\mathcal{S}_{i-1}} \cap \mathcal{S}_i$  para  $i = 1, \dots, r$ . Supongamos que existe  $\beta : [a, b] \rightarrow \bigcup_{k=0}^r \mathcal{S}_k \cup \{z_1, \dots, z_r\}$  un camino semialgebraico de clase  $C^\nu$  (para algún  $\nu \geq 0$ ), y valores  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = b$  satisfaciendo:

i)  $\beta((t_k, t_{k+1})) \subset \mathcal{S}_k$  para  $k = 0, \dots, r$ .

ii)  $\beta(t_i) = z_i$  y  $\beta$  es analítica en un entorno de  $t_i$  para  $i = 1, \dots, r$ .

iii) existen polinomios  $f_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que el conjunto  $\{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_{i-1}$  es adherente a  $z_i$  y se tiene que la serie analítica  $(f \circ \beta)(t_i - \mathbf{t})$  es de la forma  $a_{ij} \mathbf{t}^{p_{ij}} + \dots$ , con  $a_{ij} > 0$ .

iv) existen polinomios  $g_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que el conjunto  $\{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_i$  es adherente a  $z_i$  y se tiene que la serie analítica  $(f \circ \beta)(t_i + \mathbf{t})$  es de la forma  $b_{ij} \mathbf{t}^{q_{ij}} + \dots$ , con  $b_{ij} > 0$ .

v)  $p_{ij}, q_{ij} < \nu$  para cada  $i, j$ .



Entonces:

(1) Existe  $\mathcal{U}$  entorno abierto de  $\beta$  en la topología compacto-abierta  $\mathcal{C}^\nu$  tal que para todo  $\alpha \in \mathcal{U}$ , si  $\alpha^{(\ell)}(t_i) = \beta^{(\ell)}(t_i)$  para  $\ell = 0, \dots, \nu$ , entonces  $\alpha((t_k, t_{k+1})) \subset \mathcal{S}_k$  para todo  $k = 0, \dots, r$ .

(2) Existen curvas polinómicas  $\alpha : [a, b] \rightarrow \bigcup_{k=0}^r \mathcal{S}_k \cup \{z_1, \dots, z_r\}$  arbitrariamente cercanas a  $\beta$  en la topología  $\mathcal{C}^\nu$  tales que  $\alpha(t_i) = z_i$  para  $i = 1, \dots, r$  y  $\alpha((t_k, t_{k+1})) \subset \mathcal{S}_k$  para  $k = 0, \dots, r$ .

*Demostración.* Puesto que  $(f_{ij} \circ \beta)^{(p_{ij})}(t_i) = p_{ij}! a_{ij} > 0$ ,  $(g_{ij} \circ \beta)^{(q_{ij})}(t_i) = q_{ij}! b_{ij} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $i = 1, \dots, r$ , en el intervalo compacto  $I_i := [t_i - \delta, t_i + \delta] \subset [a, b]$  se tiene  $(f_{ij} \circ \beta)^{(p_{ij})} > 0$ ,  $(g_{ij} \circ \beta)^{(q_{ij})} > 0$  para  $i = 1, \dots, r$  y  $j = 1, \dots, s$ . Denotamos  $J_0 := [a, t_1 - \delta]$ ,  $J_i := [t_i + \delta, t_{i+1} - \delta]$  para  $i = 1, \dots, r$  y  $J_r := [t_r + \delta, b]$ . Consideramos las aplicaciones

$$\varphi_{i,j} : \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^0(I_i, \mathbb{R}), \quad \gamma \mapsto (f_{ij} \circ \gamma|_{I_i})^{(p_{ij})},$$

$$\phi_{i,j} : \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^0(I_i, \mathbb{R}), \quad \gamma \mapsto (g_{ij} \circ \gamma|_{I_i})^{(q_{ij})},$$

$$\psi_i : \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^0(J_i, \mathbb{R}), \quad \gamma \mapsto \text{dist}(\gamma|_{J_i}(\mathbf{t}), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_i).$$

En virtud de los Lemas 4.5, 4.6 y 4.7, las aplicaciones anteriores son continuas. Además, todas las funciones  $\psi_k(\beta)$  son estrictamente positivas en  $J_k$ . Definimos

$$\varepsilon := \min_{i,j,k} \{ \min_{I_i} (f_{ij} \circ \beta)^{(n_{ij})}, \min_{I_i} (g_{ij} \circ \beta)^{(p_{ij})}, \min_{J_k} \psi_k(\beta) \} > 0.$$

Consideramos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 := & \bigcap_{i=1}^r \bigcap_{j=1}^s \{ \gamma \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) : |\varphi_{i,j}(\beta) - \varphi_{i,j}(\gamma)| < \varepsilon \} \cap \\ & \bigcap_{i=1}^r \bigcap_{j=1}^s \{ \gamma \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) : |\phi_{i,j}(\beta) - \phi_{i,j}(\gamma)| < \varepsilon \} \cap \\ & \bigcap_{k=0}^r \{ \gamma \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) : |\psi_k(\beta) - \psi_k(\gamma)| < \varepsilon \}, \end{aligned}$$

que, por la continuidad de las aplicaciones  $\varphi_{i,j}$ ,  $\phi_{i,j}$  y  $\psi_k$ , es un entorno abierto de  $\beta$  en  $\mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Por tanto, existe  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{U} := \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) : \|\gamma^{(m)} - \beta^{(m)}\|_{[a,b]} < \delta_0, \quad m = 0, \dots, \nu \right\} \subset \mathcal{U}_0.$$

Veamos entonces que el entorno  $\mathcal{U}$  verifica la condición (1) del enunciado. Sea  $\alpha \in \mathcal{U}$  tal que  $\alpha^{(m)}(t_i) = \beta^{(m)}(t_i)$  para  $m = 0, \dots, \nu$  e  $i = 1, \dots, r$ . Puesto que  $\alpha \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ , se tiene que  $|\psi_k(\alpha) - \psi_k(\beta)| < \varepsilon$ , luego

$$|\text{dist}(\alpha(t), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_k) - \text{dist}(\beta(t), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_k)| < \varepsilon \leq \text{dist}(\beta(t), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_k) \quad \text{para todo } t \in J_k,$$

de lo cual se deduce que  $\text{dist}(\alpha(t), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_k) > 0$  para  $t \in J_k$ . Por tanto,  $\alpha(J_k) \subset \mathcal{S}_k$  para todo  $k = 0, \dots, r$ . Falta probar, entonces, que

$$\alpha([t_i - \delta, t_i]) \subset \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_{i-1}, \quad y \tag{3.1}$$

$$\alpha((t_i, t_i + \delta]) \subset \{g_{i1} > 0, \dots, g_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_i. \tag{3.2}$$

Probamos a continuación (3.1). En primer lugar, por el teorema de Taylor, para  $t$  próximo a  $t_i$  se tiene

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\alpha^{(i)}(t_i)}{i!} (t - t_i) + (t - t_i)^\nu \theta(t - t_i) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\beta^{(i)}(t_i)}{i!} (t - t_i) + (t - t_i)^\nu \theta(t - t_i),$$

donde  $\theta$  es una aplicación continua definida en un entorno de  $t = 0$ . Además, como  $\beta$  es analítica en un entorno de  $t_i$ , para  $t$  próximo a  $t_i$  se tiene también

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\beta^{(i)}(t_i)}{i!} (t - t_i) + (t - t_i)^\nu \tau(t - t_i),$$

donde  $\tau$  es una tupla de series analíticas. Así, denotando  $\zeta := \tau - \theta$

$$\alpha(t) - \beta(t) = (t - t_i)^\nu \zeta(t) \rightsquigarrow \alpha(t) = \beta(t) + (t - t_i)^\nu \zeta(t).$$

Ahora, denotamos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ,  $\mathbf{y} := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  y  $\mathbf{z}$  una sola variable. Entonces, para cada  $i, j$ , el polinomio  $f_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) - f_{ij}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$  se anula sobre el conjunto algebraico  $\{\mathbf{z} = 0\}$ . Por tanto, existe un polinomio  $h_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$  tal que

$$f_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) - f_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}h_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \rightsquigarrow f_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) = f_{ij}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}h_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (4)$$

Por lo tanto, tenemos que, para  $t$  próximo a 0,

$$\begin{aligned} f_{ij}(\alpha(t_i - t)) &= f_{ij}(\beta(t_i - t) + (-t)^\nu \zeta(t_i - t)) = \\ &= f_{ij}(\beta(t_i - t)) + (-1)^\nu t^\nu h_{ij}(\beta(t_i - t), \zeta(t_i - t), (-t)^\nu) = a_{ij} t^{p_{ij}} + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

donde hemos usado que  $h_{ij}(\beta(t_i - t), \zeta(t_i - t), (-t)^\nu)$  es continua en un entorno de  $t = 0$  y que  $\nu > p_{ij}$ . De (5) se deduce que  $\alpha(t_i - t) \in \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\}$  para  $t > 0$  y próximo a cero. Probamos a continuación que, de hecho, esto debe cumplirse para todo  $t \in (0, \delta]$ . De lo contrario, existen un índice  $j_0$  y un valor  $t^* \in [0, \delta)$  tales que  $(f_{ij_0} \circ \alpha)(t_i - t^*) = 0$ . Supongamos por simplicidad de notación que  $j_0 = 1$ . Entonces, como también  $(f_{i1} \circ \alpha)(t_i) = 0$ , por el teorema de Rolle, existe  $\xi_1 \in (t_i - t^*, t_i)$  tal que  $(f_{i1} \circ \alpha)'(\xi_1) = 0$ . Además, nuevamente por (5),  $(f_{i1} \circ \alpha)^{(m)}(t_i) = 0$  para todo  $m = 0, \dots, p_{i1} - 1$ . Por tanto, aplicando sucesivamente el teorema de Rolle, existen valores  $t_i - t^* < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{p_{i1}-1} < \xi_{p_{i1}} < t_i$  tales que  $(f_{i1} \circ \alpha)^{(m)}(\xi_m) = 0$  para cada  $m = 0, \dots, p_{i1}$ .

Sin embargo, como  $\alpha \in \mathcal{U}$ , se tiene que  $|\varphi_{i1}(\beta) - \varphi_{i1}(\alpha)| < \varepsilon$ , luego

$$|(f_{i1} \circ \beta)^{(p_{i1})} - (f_{i1} \circ \alpha)^{(p_{i1})}| < \varepsilon \leq \min_{I_i} (f_{i1} \circ \beta)^{(p_{i1})},$$

lo cual implica que  $(f_{i1} \circ \alpha)^{(p_{i1})} \neq 0$  en  $I_i$ . Hemos llegado a una contradicción, pues habíamos hallado  $\xi_{p_{i1}} \in (t_i - \delta, t_i) \subset I_i$  con  $(f_{i1} \circ \alpha)^{(p_{i1})}(\xi_{p_{i1}}) = 0$ . Esto completa la prueba de (3.1). La demostración de (3.2) es análoga.

Por último, se verifica la condición (2) del enunciado: dado un entorno  $\mathcal{U}'_0$  de  $\beta$  en  $\mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n)$ , existe  $\delta' > 0$  tal que

$$\mathcal{U}' := \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^\nu([a, b], \mathbb{R}^n) : \|\beta^{(m)} - \gamma^{(m)}\|_{[a, b]} < \delta', \quad m = 0, \dots, \nu \right\} \subset \mathcal{U}'_0.$$

Por el Lema 4.8, existe una curva polinómica  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha^{(m)}(t_i) = \beta^{(m)}(t_i)$  para cada  $i = 1, \dots, r$  y  $m = 0, \dots, \nu$  y  $\|\alpha^{(m)} - \beta^{(m)}\| < \min\{\delta_0, \delta'\}$ . Por tanto,  $\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$  y por (1),  $\alpha((t_k, t_{k+1})) \subset \mathcal{S}_k$  para todo  $k = 0, \dots, r$ . □

El Lema 4.9 anterior será clave para demostrar la existencia de las curvas que buscamos, pero para poder aplicarlo se necesita que el camino semialgebraico  $\beta$  tenga un cierto orden de diferenciabilidad  $\nu$ . Sin embargo, en la construcción que haremos más adelante, se obtendrán en primera instancia caminos semialgebraicos que tan solo son diferenciables a trozos, por lo que podrían tener una cantidad finita de “picos”: puntos donde la curva no es diferenciable. El siguiente lema propone una manera de “alisar” dichos picos de un camino semialgebraico continuo, mediante interpolación de Hermite.

**Lema 4.10.** Sean  $a < \tau < t_0 < \theta < b$ ,  $\varepsilon > 0$  y un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}_n(x_0, \varepsilon)$  es un camino semialgebraico continuo y diferenciable en  $[a, b] \setminus \{t_0\}$ . Entonces, para cada  $\nu \geq 0$ , existe un camino semialgebraico  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}_n(x_0, \varepsilon)$  de clase  $\mathcal{C}^\nu$  y tal que  $\gamma|_{[a, b] \setminus (\tau, \theta)} = \beta|_{[a, b] \setminus (\tau, \theta)}$ .

*Demostración.* Consideremos el difeomorfismo semialgebraico

$$\varphi : \mathcal{B}(x_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x - x_0}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|x - x_0\|^2}}$$

y el camino semialgebraico continuo  $\tilde{\beta} := \varphi \circ \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\tilde{\beta}$  es diferenciable en  $[a, b] \setminus \{t_0\}$ . Usando interpolación de Hermite, existe una aplicación polinómica  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que cumple  $h^{(k)}(\tau) = \tilde{\beta}^{(k)}(\tau)$ ,  $h^{(k)}(\theta) = \tilde{\beta}^{(k)}(\theta)$  para  $k = 0, \dots, \nu$ . Consideramos entonces el camino semialgebraico

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{cases} \tilde{\beta}(t), & \text{si } t \in [a, \tau] \cup [\theta, b], \\ h(t), & \text{si } t \in (\tau, \theta). \end{cases}$$

El camino  $\gamma := \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$  cumple lo que buscamos. □

El Lema 4.9 nos permite demostrar un resultado sorprendente sobre conjuntos semialgebraicos, que también es relevante en este trabajo: todo conjunto semialgebraico abierto y conexo es también conexo por caminos polinómicos.

**Corolario 4.11.** Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico abierto y conexo, y fijemos dos puntos  $x, y \in \mathcal{S}$ . Entonces, existe una aplicación polinómica  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ .

*Demostración.* Para conjuntos semialgebraicos en  $\mathbb{R}^n$ , la conexión por caminos semialgebraicos es equivalente a la conexión usual. Por tanto,  $\mathcal{S}$  es conexo por caminos semialgebraicos y existe un camino semialgebraico continuo  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $\beta(0) = x$ ,  $\beta(1) = y$ . Extendemos  $\beta$  de manera continua y semialgebraica a un intervalo  $[-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$  con  $\varepsilon > 0$ ; y como  $\mathcal{S}$  es abierto, podemos suponer que  $\beta([-\varepsilon, 1 + \varepsilon]) \subset \mathcal{S}$ . Ahora, aplicando el Lema 4.9(2), existe una curva polinómica  $\alpha : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $\alpha(0) = \beta(0) = x$ ,  $\alpha(1) = \beta(1) = y$ . Entonces,  $\alpha|_{[0, 1]}$  es la curva polinómica buscada. □

El corolario anterior no será necesario para el caso particular tratado en este trabajo, pues los conjuntos semialgebraicos con los que trabajaremos serán triángulos (tras triangular los polígonos iniciales). En particular, tendremos conjuntos convexos, lo cual es más fuerte que la conexión por caminos polinómicos. Sin embargo, el Corolario 4.11 permite extender gran parte de los resultados de este trabajo a conjuntos semialgebraicos más generales.

### 4.3. Construcción de caminos semialgebraicos

El siguiente paso es construir los caminos semialgebraicos que verifiquen las condiciones que necesitamos: principalmente, pasar por ciertos puntos de adherencia prefijados sin que su imagen salga del conjunto semialgebraico correspondiente.

Para ello, necesitaremos resolver dos problemas: en primer lugar, dado un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  y un punto  $p \in \overline{\mathcal{S}}$ , queremos encontrar un camino semialgebraico que pase por  $p$  sin que el resto de su traza salga de  $\mathcal{S}$ . Pensando en el caso que nos ocupa, donde  $\mathcal{S}$  será un triángulo y el punto  $p$  un vértice suyo, nos interesa construir una suerte de cúspide dentro de  $\mathcal{S}$  cuyo vértice sea el punto  $p$ .

Una vez hecho esto, necesitaremos probar la existencia de “puentes” entre los conjuntos semialgebraicos que intervienen en el problema. Estos serán arcos polinómicos que crucen de un conjunto al siguiente, y que nos permitirán construir curvas que recorran todos los conjuntos dados.

Abordamos ahora la construcción de las mencionadas cúspides, para lo cual será importante un resultado clásico de geometría algebraica real: el Lema de Selección de Curvas, que enunciamos a continuación. Los detalles de su demostración están incluidos en el Anexo C.

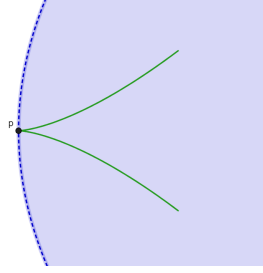


Figura 6: Cúspide dentro de un conjunto semialgebraico

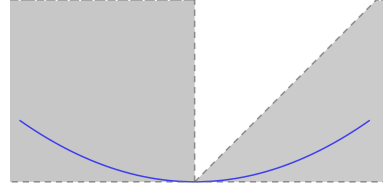


Figura 7: Puente polinómico entre conjuntos semialgebraicos

**Teorema 4.12 (Lema de Selección de Curvas).** *Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico y  $x \in \overline{A}$ . Entonces, existe una aplicación semialgebraica continua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(0) = x$  y  $f((0, 1]) \subset A$ .*

Sin embargo, la construcción de los caminos polinómicos que necesitamos requerirá curvas con una mayor regularidad (de hecho, utilizaremos curvas analíticas). Esto se puede conseguir gracias a las propiedades de las funciones semialgebraicas. En concreto, de [2, Prop. 8.1.12], se tiene lo siguiente:

**Proposición 4.13.** *Sea  $R$  un cuerpo real-cerrado, y sea  $g : [0, \delta) \rightarrow R$  una función semialgebraica continua. Entonces, existen un entero positivo  $p$ , un elemento  $\varepsilon \in R$ ,  $0 < \varepsilon \leq \delta^{1/p}$  y una función analítica  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R$  tal que  $f(t) = g(t^p)$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ .*

Aplicando este resultado, se consigue fácilmente obtener una curva analítica a partir del camino semialgebraico continuo que proporciona el Lema de Selección de Curvas.

**Proposición 4.14.** *Sean  $R$  un cuerpo real-cerrado,  $A \subset R^n$  un conjunto semialgebraico y  $x \in \overline{A}$ . Entonces, existe una aplicación semialgebraica analítica  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow R^n$  tal que  $\varphi(0) = x$  y  $\varphi((0, 1]) \subset A$ .*

*Demostración.* El Lema de Selección de Curvas nos da un camino semialgebraico continuo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^n$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma((0, 1]) \subset A$ . Aplicando la Proposición 4.13 a cada coordenada de  $\gamma$ , existen  $\varepsilon > 0$ ,  $p$  un entero positivo y  $\psi : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow R^n$  analítica tal que  $\psi(t) = \gamma(t^p)$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ . Podemos tomar  $\varphi(t) := \psi(\varepsilon t)$ . □

Ahora, modificamos la curva proporcionada por la Proposición 4.14 para construir la cúspide que buscamos.

**Lema 4.15.** *Sean  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico abierto, y  $p \in \overline{\mathcal{S}}$ . Entonces, existe una curva polinómica  $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

- i)  $\alpha(0) = p$ ,
- ii)  $\alpha([-1, 1] \setminus \{0\}) \subset \mathcal{S}$ , y
- iii)  $\alpha([-1, 0)) \cap \alpha((0, 1]) = \emptyset$ .

*Demostración.* Por la Proposición 4.14, existe una curva analítica  $\eta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\eta(0) = p$ ,  $\eta((0, 1]) \subset \mathcal{S}$ . Existen  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que

$$\eta((0, \varepsilon]) \subset \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \subset \mathcal{S}$$

para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Entonces, para cada  $j$ , la función analítica  $f_j \circ \eta$  debe tener una expresión en torno a  $t = 0$  de la forma  $(f_j \circ \eta)(t) = a_j t^{k_j} + \dots$  para algún  $a_j$  y  $k_j \geq 0$ . Si  $k_j = 0$  para

todo  $j = 1, \dots, r$ , entonces  $p = \alpha(0) \in \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \subset \mathcal{S}$  y el resultado es trivial. Supongamos entonces  $k_j \geq 1$  para algún  $j$ , y sin pérdida de generalidad, suponemos que  $k_1 \geq 1$ .

Definimos  $\ell := \max\{k_1, \dots, k_r\} + 1$ , y para cada componente de  $\eta$ , escribimos  $\eta_i = \xi_i + \mathbf{t}^\ell \zeta_i$ , donde  $\xi_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  es un polinomio y  $\zeta_i \in \mathbb{R}[[\mathbf{t}^*]]$  es una serie (por ejemplo, tomando como  $\xi_i$  el polinomio formado por todos los términos de grado menor que  $\ell$  en  $\eta_i$ ). Como hemos supuesto  $k_1 \geq 1$ , el polinomio  $\xi_1$  es no constante. Denotamos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ,  $\mathbf{y} := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  y  $\mathbf{z}$  una sola variable. Al igual que en la demostración de Lema 4.9, para cada  $j$  escribimos  $f_j(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) = f_j(\mathbf{x}) + \mathbf{z}h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Entonces, denotando  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ ,

$$f_j(\xi(t^2)) = f_j(\eta(t^2) - t^{2\ell}\zeta(t^2)) = f_j(\eta(t^2)) - t^{2\ell}h_j(\eta(t^2), \zeta(t^2), -t^{2\ell}) = a_j t^{2k_j} + \dots,$$

que es estrictamente positivo para valores no nulos de  $t$  próximos a cero. Ahora, tomamos  $q > 2\ell$  un entero impar y definimos  $\gamma := \xi(t^2) + t^q(0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]^n$ . Afirmamos que  $\gamma$  cumple las propiedades que deseamos: (i)  $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \subset \mathcal{S}$  y (ii)  $\gamma([-\varepsilon, 0)) \cap \gamma((0, \varepsilon]) = \emptyset$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

i) Como hemos tomado  $q > 2\ell$ , para valores de  $t$  próximos a 0 se tiene que

$$f_j(\gamma(t)) = f_j(\xi(t^2)) + t^q e_2 = f_j(\xi(t^2)) + t^q h_j(\xi(t^2), e_2, t^q) = a_j t^{2k_j} + \dots > 0.$$

ii) El polinomio  $\xi_1$  es no constante, luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\xi_1(\mathbf{t})$  es inyectivo en el intervalo  $(0, \varepsilon^2]$ . Ahora, si  $t_1, t_2 \in [-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon]$  y  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , entonces  $\xi_1(t_1^2) = \xi_1(t_2^2)$  y  $\xi_2(t_1^2) + t_1^q = \xi_2(t_2^2) + t_2^q$ . De lo primero, por la inyectividad de  $\xi_1|_{(0, \varepsilon^2]}$ , se deduce que  $t_1^2 = t_2^2$ ; y esto, por lo segundo, implica que  $t_1 = t_2$ . Por tanto,  $\gamma$  es inyectivo en  $[-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon]$ , luego en particular  $\gamma([-\varepsilon, 0)) \cap \gamma((0, \varepsilon]) = \emptyset$ .

Además,  $\gamma(0) = \xi(0) = \eta(0) = p$ , luego  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva polinómica que cumple las condiciones del enunciado. Tras una reparametrización lineal para tener  $[-1, 1]$  como dominio de la curva  $\gamma$ , deducimos que  $\gamma$  es el camino polinómico buscado.  $\square$

Con esto, hemos solucionado el primero de los dos problemas que apuntábamos al principio de esta sección: conocemos cómo construir las cúspides que pasan por puntos de adherencia dados sin salir del conjunto. A continuación, vemos cómo los resultados anteriores, junto con la existencia de puentes polinómicos nos permite obtener curvas polinómicas que cumplen las condiciones que buscamos. Ese es el contenido del Lema 4.17, que constituye el resultado más importante de esta sección. Antes, definimos formalmente el concepto de puente polinómico.

**Definición 4.16.** Sean  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos semialgebraicos abiertos. Un puente (polinómico) entre  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  es la imagen  $\Gamma$  de una curva polinómica  $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha([-1, 0)) \subset \mathcal{S}_1$  y  $\alpha((0, 1]) \subset \mathcal{S}_2$ . Se dice que  $\alpha$  es una parametrización de  $\Gamma$ , y el punto  $\alpha(0) \in \overline{\mathcal{S}_1} \cap \overline{\mathcal{S}_2}$  se llama *punto base* de  $\Gamma$ .

En el siguiente lema, combinamos el Lema 4.15, que nos permite construir cúspides dentro de conjuntos semialgebraicos, con la conexión por caminos polinómicos (Corolario 4.11) para construir una curva polinómica a trozos con las propiedades que buscamos. Para ello, necesitaremos suponer la existencia de puentes polinómicos para “cruzar” de un conjunto a otro. Después, aplicando los resultados de aproximación e interpolación podremos obtener una curva polinómica a partir de la curva a trozos que podemos construir.

**Lema 4.17.** Sean  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_\ell \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos semialgebraicos conexos (no necesariamente distintos dos a dos) y denotemos  $\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^\ell \mathcal{S}_i$ . Supongamos que, para cada  $i$ , existe un puente polinómico  $\Gamma_i$  entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_{i+1}$ , con base en el punto  $q_i \in \overline{\mathcal{S}_i} \cap \overline{\mathcal{S}_{i+1}}$ . Entonces, dados puntos  $p_i \in \overline{\mathcal{S}_i}$  y fijados valores  $s_0 := 0 < t_1 < \dots < t_\ell < 1 =: s_\ell$  y  $s_i \in (t_i, t_{i+1})$ , existe una curva polinómica  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfice:

- i)  $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{S} \cup \{p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_{\ell-1}\}$ .
- ii)  $\alpha(t_i) = p_i$  para cada  $i = 1, \dots, \ell$ .
- iii)  $\alpha((s_{i-1}, t_i)) \subset \mathcal{S}_i$ ,  $\alpha((t_i, s_i)) \subset \mathcal{S}_i$  para cada  $i = 1, \dots, \ell$ .
- iv)  $\alpha(s_i) = q_i$  para cada  $i = 1, \dots, \ell - 1$  y  $\alpha(s_0) \in \mathcal{S}_1$ ,  $\alpha(s_\ell) \in \mathcal{S}_\ell$ .

Además, supongamos que  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} \cup \{p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_{\ell-1}\}$  es un camino semialgebraico continuo satisfaciendo las condiciones ii), iii) y iv) del enunciado. Denotamos  $Z := \{s_0, \dots, s_\ell, t_1, \dots, t_\ell\}$ . Si  $\beta|_{[0,1] \setminus Z}$  es analítica y  $\beta(Z) \subset \mathcal{S}$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$  fijo, se puede obtener que la curva polinómica  $\alpha$  también verifique  $\|\alpha - \beta\|_{[0,1]} < \varepsilon$ .

*Demostración.* Se demuestra el resultado en tres pasos: en primer lugar, se construye un camino semialgebraico  $\beta$  adecuado. Después, calculamos el orden de diferenciabilidad  $\nu$  necesario para aplicar el Lema 4.9. Por último, se alisan los picos del camino  $\beta$  (haciendo uso del Lema 4.10), para obtener un camino de la regularidad  $\mathcal{C}^\nu$  necesaria.

**Paso 1.** Construcción del camino semialgebraico.

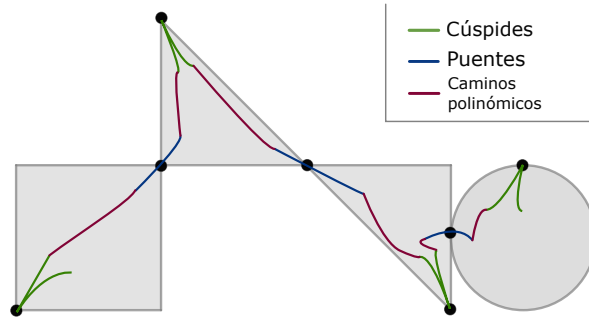


Figura 8: Construcción del camino polinómico a trozos

Para cada  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , aplicando el Lema 4.15, existe una curva  $\alpha_i : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}_i \cup \{p_i\}$  tal que  $\alpha_i(0) = p_i$ ,  $\alpha_i([-1, 1] \setminus \{0\}) \subset \mathcal{S}_i$  y  $\alpha_i([-1, 0]) \cap \alpha_i((0, 1]) = \emptyset$ . Después, para  $i = 1, \dots, \ell - 1$  tomamos  $\gamma_i : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización del puente  $\Gamma_i$ , con  $\gamma(0) = q_i$ . Ahora, para cada  $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ , como  $\alpha_i(1), \gamma_i(-1) \in \mathcal{S}_i$ , por el Corolario 4.11 existe un camino polinómico  $\eta_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_i$  con  $\eta_i(0) = \alpha_i(0)$  y  $\eta_i(1) = \gamma_i(-1)$ . Además se tiene que  $\gamma_i(1), \alpha_{i+1}(-1) \in \mathcal{S}_{i+1}$ , luego existe un camino polinómico  $\mu_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_{i+1}$  tal que  $\mu_i(0) = \gamma_i(1)$ ,  $\mu_i(1) = \alpha_{i+1}(-1)$ . De esta forma, podemos obtener un camino semialgebraico y continuo  $\beta$  concatenando los caminos  $\alpha_1, \eta_1, \gamma_1, \mu_1, \alpha_2, \eta_2, \gamma_2, \dots, \mu_{\ell-1}, \alpha_\ell$ , linealmente reparametrizados de forma adecuada para tener  $[0, 1]$  como el dominio de  $\beta$  y  $\beta(t_i) = \alpha_i(0) = p_i$ ,  $\beta(s_i) = \gamma_i(0) = q_i$ . Así, tenemos un camino  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  polinómico a trozos tal que:

- (1)  $\beta([0, 1]) \subset \mathcal{S} \cup \{p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_{\ell-1}\}$ ,
- (2)  $\beta(t_i) = p_i$ ,
- (3)  $\beta((s_{i-1}, t_i)) \subset \mathcal{S}_i$ ,  $\beta((t_i, s_i)) \subset \mathcal{S}_i$  para cada  $i = 1, \dots, \ell$ ,
- (4)  $\beta(s_i) = q_i$  para cada  $i = 1, \dots, \ell - 1$  y  $\beta(s_0) \in \mathcal{S}_1$ ,  $\beta(s_\ell) \in \mathcal{S}_\ell$ ,
- (5)  $\beta|_{[0,1] \setminus Z}$  es analítica, y  $\beta(Z) \subset \mathcal{S}$ .

Hemos dado un procedimiento para construir  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} \cup \{p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_\ell\}$ , un camino semialgebraico que verifica las condiciones ii), iii) y iv) del enunciado, además de (5).

A continuación que, fijamos  $\beta$  un camino semialgebraico en las condiciones descritas en el párrafo anterior. Observemos que dicho camino cumple también (1), (2), (3) y (4). Probamos que a partir de  $\beta$  se puede obtener la curva polinómica  $\alpha$  buscada, y que además se puede obtener que  $\|\alpha - \beta\|_{[0,1]} < \varepsilon$  para un  $\varepsilon > 0$  fijo pero arbitrario.

**Paso 2.** Cálculo del orden de diferenciabilidad  $\nu$ .

Como cada  $\mathcal{S}_i$  es un conjunto semialgebraico abierto, y como consecuencia de las condiciones (1), (2), (3), (4) y (5) anteriores, existen polinomios  $f_{ij}, g_{ij}, h_{ij}, m_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que:

- $\{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_i$  es adherente a  $p_i$  y  $(f_{ij} \circ \beta)(t_i - \mathbf{t}) = a_{ij}t^{e_{ij}} + \dots$ , donde  $a_{ij} > 0$  y  $e_{ij}$  es un entero no negativo.
- $\{g_{i1} > 0, \dots, g_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_i$  es adherente a  $p_i$  y  $(g_{ij} \circ \beta)(t_i + \mathbf{t}) = b_{ij}t^{u_{ij}} + \dots$ , donde  $b_{ij} > 0$  y  $u_{ij}$  es un entero no negativo.
- $\{h_{i1} > 0, \dots, h_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_i$  es adherente a  $q_i$  y  $(h_{ij} \circ \beta)(t_i - \mathbf{t}) = c_{ij}t^{v_{ij}} + \dots$ , donde  $c_{ij} > 0$  y  $v_{ij}$  es un entero no negativo.
- $\{m_{i1} > 0, \dots, m_{is} > 0\} \subset \mathcal{S}_{i+1}$  es adherente a  $q_i$  y  $(f_{ij} \circ \beta)(t_i + \mathbf{t}) = d_{ij}t^{w_{ij}} + \dots$ , donde  $d_{ij} > 0$  y  $w_{ij}$  es un entero no negativo.

Definimos entonces  $\nu := \max \{e_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} : 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq s\} + 1$ .

**Paso 3.** Alisar los picos del camino semialgebraico  $\beta$ . Por la condición (5), los “picos” de  $\beta$  aparecen solo en el conjunto finito  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset [0, 1] \setminus Z$  y además,  $\beta(\lambda_k) \in \mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^\ell \mathcal{S}_i$  para cada  $k = 1, \dots, r$ . Como cada  $\mathcal{S}_i$  es abierto, si  $\beta(\lambda_k) \in \mathcal{S}_{i_k}$ , podemos elegir  $\delta, \varepsilon$  suficientemente pequeños tales que  $[\lambda_k - \delta, \lambda_k + \delta] \subset [0, 1] \setminus Z$  y

$$\beta([\lambda_k - \delta, \lambda_k + \delta]) \subset \mathcal{B}(\beta(\lambda_k), \frac{\varepsilon}{4}) \subset \mathcal{B}(\beta(\lambda_k), \varepsilon) \subset \mathcal{S}_{i_k} \quad \text{para } k = 1, \dots, r.$$

Definimos  $T := \bigcup_{k=1}^r [\lambda_k - \delta, \lambda_k + \delta] \subset [0, 1] \setminus Z$ . Aplicando sucesivas veces el Lema 4.10, existe un camino semialgebraico  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^\nu$  tal que  $\gamma|_{[0,1] \setminus T} = \beta|_{[0,1] \setminus T}$  y  $\gamma([\lambda_k - \delta, \lambda_k + \delta]) \subset \mathcal{B}(\beta(\lambda_k), \frac{\varepsilon}{4})$  para  $k = 1, \dots, r$ . En consecuencia,  $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{S} \cup \{p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_{\ell-1}\}$  y  $\gamma$  verifica las condiciones ii), iii) y iv) del enunciado. Además, para  $t \in T$ ,

$$\|\beta(t) - \gamma(t)\| \leq \|\beta(t) - \beta(\lambda_k)\| + \|\beta(\lambda_k) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por tanto,  $\|\beta - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Conclusión.** Hemos conseguido un camino semialgebraico  $\gamma$  de clase  $\mathcal{C}^\nu$  que está en las condiciones del Lema 4.9. Aplicando dicho lema, existe un camino polinómico  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface las condiciones i), ii), iii) y iv) del enunciado y que además cumple  $\|\alpha - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por tanto,  $\|\alpha - \beta\| \leq \|\alpha - \gamma\| + \|\gamma - \beta\| < \varepsilon$ , como queríamos. □

La aplicación de este lema al caso de la unión de varios polígonos nos pondrá en las condiciones del Teorema 3.5. A grandes rasgos, tras triangular cada polígono, usaremos el Lema 4.17 tres veces para obtener las tres curvas que se necesitan para el Teorema 3.5. Nos centramos ahora, por tanto, en el asunto de los puentes polinómicos, pues necesitamos probar su existencia para aplicar el resultado anterior.

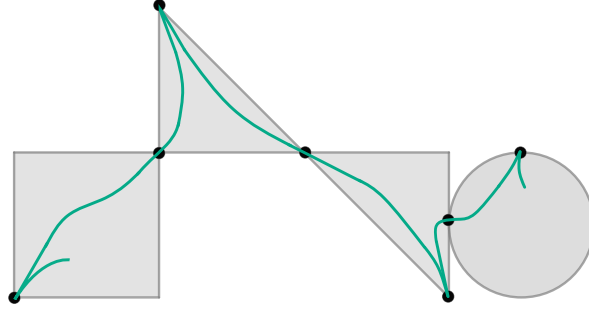


Figura 9: Curva polinómica obtenida del Lema 4.17

#### 4.4. Puentes polinómicos entre conjuntos semialgebraicos

En esta subsección, se estudia cuándo se puede garantizar la existencia de puentes polinómicos entre conjuntos semialgebraicos, probando un resultado que relaciona la existencia de puentes polinómicos con la conexión por caminos analíticos. Para ello será útil el siguiente lema:

**Definición 4.18.** Dado un subconjunto  $I \subset \mathbb{R}$  y una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  analítica en  $I$ , decimos que el *jet* de grado  $m$  de  $\alpha$  en  $t = t_0$  es la aplicación polinómica  $\alpha_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya  $i$ -ésima componente es el polinomio de Taylor de orden  $m$  de la  $i$ -ésima componente de  $\alpha$ .

**Lema 4.19.** Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico, y sea  $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}$  una aplicación analítica tal que  $\alpha([-1, 1] \setminus \{0\}) \subset \mathring{\mathcal{S}}$ . Para cada  $m \geq 0$ , denotamos por  $\alpha_m$  al *jet* de grado  $m$  de  $\alpha$  en el origen. Entonces, existen  $m \geq 1$  y  $\varepsilon > 0$  tales que la aplicación polinómica

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto \alpha_m(t) + t^{m+1}x$$

verifica  $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}) \times \overline{B}_n \subset \mathring{\mathcal{S}}$ .

*Demostración.* Sean  $f_i, g_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  polinomios tales que

$$\alpha((0, \varepsilon]) \subset \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \subset \mathring{\mathcal{S}}, \quad (5)$$

$$\alpha([- \varepsilon, 0)) \subset \{g_1 > 0, \dots, g_r > 0\} \subset \mathring{\mathcal{S}}, \quad (6)$$

para algún  $0 < \varepsilon < 1$ . Entonces, las series analíticas  $f_i(\alpha(\mathbf{t}))$  y  $g_i(\alpha(-\mathbf{t}))$  tienen la forma

$$f_i(\alpha(\mathbf{t})) = a_i \mathbf{t}^{k_i} + \dots, \quad \text{y}$$

$$g_i(\alpha(-\mathbf{t})) = b_i \mathbf{t}^{\ell_i} + \dots,$$

para ciertos  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$  y  $k_i, \ell_i \geq 0$ . Sea  $m := \max_i \{k_i, \ell_i\} + 1$ . Escribimos  $\alpha(\mathbf{t}) = \alpha_m(\mathbf{t}) + \mathbf{t}^{m+1}\beta(\mathbf{t})$ . Denotamos  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$  y  $\mathbf{z}$  una sola variable. Escribimos

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) + \mathbf{z}p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (7)$$

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) = g_i(\mathbf{x}) + \mathbf{z}q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (8)$$

donde  $p_i, q_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ . Entonces,

$$f_i(\alpha_m(t)) = f_i(\alpha(t) - t^{m+1}\beta(t)) = f_i(\alpha(t)) + (-t)^{m+1}p_i(\alpha(t), \beta(t), (-t)^{m+1}) = a_i t^{k_i} + \dots,$$

$$g_i(\alpha_m(-t)) = g_i(\alpha(-t) - (-t)^{m+1}\beta(-t)) = g_i(\alpha(-t)) - (-t)^{m+1}q_i(\alpha(t), \beta(t), -(-t)^{m+1}) = b_i t^{\ell_i} + \dots.$$



Aplicando de nuevo (7) y (8) a  $\alpha_m(\mathbf{t}) + \mathbf{t}^{m+1}\mathbf{x}$ , se tiene

$$f_i(\alpha_m(t) + t^{m+1}x) = f_i(\alpha_m(t)) + t^{m+1}p_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1}), \quad (9)$$

$$g_i(\alpha_m(-t) + (-t)^{m+1}x) = g_i(\alpha_m(-t)) + (-t)^{m+1}q_i(\alpha_m(t), x, (-t)^{m+1}). \quad (10)$$

Las aplicaciones semialgebraicas

$$(t, x) \mapsto p_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1}) \quad \text{y} \quad (t, x) \mapsto q_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1})$$

son continuas, luego existe  $M > 0$  tal que  $|p_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1})|, |q_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1})| \leq M$  para todo  $(t, x)$  en el compacto  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \overline{\mathcal{B}}_n$  y para cada  $i = 1, \dots, r$ . Entonces, para  $0 < t \leq \varepsilon$  y  $x \in \overline{\mathcal{B}}_n$ , por (9) y (10),

$$f_i(\alpha_m(t) + t^{m+1}x) \geq f_i(\alpha_m(t)) - t^{m+1}|p_i(\alpha_m(t), x, t^{m+1})| \geq f_i(\alpha_m(t)) - Mt^{m+1},$$

$$g_i(\alpha_m(-t) + (-t)^{m+1}x) \geq g_i(\alpha_m(-t)) - (-t)^{m+1}|q_i(\alpha_m(-t), x, (-t)^{m+1})| \geq f_i(\alpha_m(-t)) - M(-t)^{m+1}.$$

En consecuencia, reduciendo  $\varepsilon > 0$  si es necesario, podemos suponer que  $f_i(\alpha_m(t) + t^{m+1}x) > 0$  y  $g_i(\alpha_m(-t) + (-t)^{m+1}x) > 0$  para cada  $0 < t \leq \varepsilon$ ,  $x \in \overline{\mathcal{B}}_n$ . Así, por (5) y (6), se tiene el resultado.  $\square$

El resultado fundamental de esta sección es el siguiente:

**Lema 4.20.** Sean  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_\ell \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos semialgebraicos abiertos, conexos y no vacíos. Denotemos  $\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^\ell$  y supongamos que existe un conjunto semialgebraico  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$  conexo por caminos analíticos tal que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{S}}$ . Entonces, se pueden reordenar los índices  $i$  de forma que para cada  $i = 2, \dots, \ell$ , exista un puente  $\Gamma_i \subset \mathcal{T}$  entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$  para algún  $1 \leq j \leq i-1$ .

*Demostración.* Denotamos  $\mathcal{T}_i := \overline{\mathcal{S}}_i \cap \mathcal{T}$ . Probamos el resultado por inducción sobre  $i < \ell$ : supongamos que la conclusión del enunciado es cierta para todo  $i' < i$  y veamos que también se cumple para  $i$ . Para  $i = 1$  no hay nada que probar, así que suponemos  $2 \leq i \leq \ell$ .

Si  $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \neq \emptyset$  para algún  $1 \leq j \leq i-1$  e  $i \leq k \leq \ell$ , entonces tomamos un punto  $p \in \overline{\mathcal{S}}_j \cap \overline{\mathcal{S}}_k$  y  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{B}(p, \varepsilon) \subset \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ . Entonces, el arco polinómico  $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto p + \varepsilon(t, 0, \dots, 0)$  es un puente entre  $\mathcal{S}_j$  y  $\mathcal{S}_k$ . Se intercambian los índices  $i$  y  $k$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k = \emptyset$  siempre que  $1 \leq j \leq i-1, i \leq k \leq \ell$ . Definimos  $\mathcal{T}' := \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{T}_j$  y  $\mathcal{T}'' := \bigcup_{j=i}^\ell \mathcal{T}_j$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clausura de Zariski de  $\bigcup_{i=1}^\ell \partial \mathcal{S}_i$ , donde  $\partial \mathcal{S}_i := \overline{\mathcal{S}}_i \setminus \mathcal{S}_i$ . Observemos que la suposición anterior implica que  $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' \subset \bigcup_{i=1}^\ell \partial \mathcal{S}_i \subset \mathcal{E}$ . Además, el conjunto algebraico  $\mathcal{E}$  tiene dimensión  $\leq n-1$ , así que no contiene a ninguno de los  $\mathcal{S}_i$ . Por tanto,  $\mathcal{T}' \setminus \mathcal{E} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}'' \setminus \mathcal{E} \neq \emptyset$ .

Elegimos  $x \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{E}$ ,  $y \in \mathcal{T}'' \setminus \mathcal{E}$ . Como  $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}''$  es conexo por caminos analíticos, existe  $\beta : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{T}$  analítica tal que  $\beta(-1) = x$  y  $\beta(1) = y$ . Además, como  $\mathcal{E}$  es un conjunto algebraico, por el principio de identidad para funciones analíticas,  $\beta^{-1}(\mathcal{E})$  es conjunto finito. De lo contrario, se tendría  $\beta([-1, 1]) \subset \mathcal{E}$ , y en particular  $x, y \in \mathcal{E}$ , contra la elección de  $x, y$ .

Como  $x \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{E}$ ,  $y \in \mathcal{T}'' \setminus \mathcal{E}$  y  $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' \subset \mathcal{E}$ , existe un  $t_0 \in [-1, 1]$  tal que  $\beta(t) \in \mathcal{T}'$  para  $t \leq t_0$  y  $\beta(t) \in \mathcal{T}'' \setminus \mathcal{E}$  para  $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Como  $\beta^{-1}(\mathcal{E})$  es un conjunto finito, podemos suponer (reduciendo  $\varepsilon$  si fuera necesario) que  $\beta((t_0 - \varepsilon, t_0)) \subset \mathcal{S}_j$  para algún  $j = 1, \dots, i-1$  y  $\beta((t_0, t_0 + \varepsilon)) \subset \mathcal{S}_k$  para algún  $k = i, \dots, \ell$ . Después de una traslación, podemos suponer que  $t_0 = 0$ , y por el Lema 4.19, a partir de  $\beta$  se puede obtener un puente polinómico entre  $\mathcal{S}_j$  y  $\mathcal{S}_k$ . Tras intercambiar los índices  $k$  e  $i$ , se tiene el resultado.  $\square$

En las condiciones del Lema 4.20, podemos probar que se pueden reordenar los conjuntos semialgebraicos dados de forma que siempre exista un puente polinómico entre un conjunto y el siguiente. Esto es precisamente lo que necesitábamos para poder aplicar el Lema 4.17.

**Corolario 4.21.** *En las condiciones del Lema 4.20, se pueden reordenar con posibles repeticiones los conjuntos  $\mathcal{S}_i$  para obtener una secuencia de conjuntos semialgebraicos  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_r$  que verifican  $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_r\} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_\ell\}$  y para cada índice  $i = 1, \dots, r-1$ , existe un puente entre  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{R}_{i+1}$ .*

*Demostración.* Considérese el grafo simple  $G$  cuyos vértices son los conjuntos  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_\ell$  y tal que  $G$  tiene un arista conectando  $\mathcal{S}_i$  con  $\mathcal{S}_j$  si y solo si existe un puente entre  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_j$ . El Lema 4.20 asegura que  $G$  es conexo. Por lo tanto, existe un camino que recorre todos sus vértices. Si dicho camino  $c$  está dado por la secuencia de vértices  $c \equiv (\mathcal{S}_{i_1}, \mathcal{S}_{i_2}, \dots, \mathcal{S}_{i_r})$ , entonces los conjuntos  $\mathcal{R}_j := \mathcal{S}_{i_j}$  para  $i = 1, \dots, r$ , cumplen lo pedido. □

## 5. Conclusión: uniones finitas de polígonos

Los resultados de la sección 4, en especial el Lema 4.17, junto con la construcción del Teorema 3.5, nos permiten probar el teorema central de este trabajo, que caracteriza cuándo una unión finita de polígonos convexos es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ . Dicho teorema, que se enuncia y se demuestra a continuación, concluye las secciones de corte más teórico de la memoria.

**Teorema 5.1.** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  la unión de una familia finita de polígonos (compactos) convexos. Entonces, son equivalentes:*

- (1)  $\mathcal{S}$  es conexo por caminos analíticos.
- (2) Existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(\overline{\mathcal{B}}_{n+1}) = \mathcal{S}$ .

*Demostración.*

(2)  $\Rightarrow$  (1) Es consecuencia de la Proposición 2.1.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Probamos que  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_{n+1}$  como aplicación del Teorema 3.5. Para ello, demostramos la existencia de las curvas polinómicas necesarias. Sea  $(\sigma_i)_{i=1}^\ell$  una triangulación de  $\mathcal{S}$ , y sean  $v_i^1, v_i^2, v_i^3$  los vértices de  $\sigma_i$ . Mostramos cómo construir la curva  $\alpha_1$ , pues la construcción de  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  es análoga.

Como  $\mathcal{S}$  es conexo por caminos analíticos, aplicando el Corolario 4.21 con  $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ , podemos suponer que, para cada  $i = 1, \dots, \ell-1$ , existe un puente polinómico entre  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$  (tras una reordenar y, si es necesario, repetir alguno de los  $\sigma_i$ ). En consecuencia, y como el interior de cada  $\sigma_i$  es un conjunto semialgebraico abierto y conexo, estamos en condiciones de aplicar el Lema 4.17 con  $\mathcal{S}_i := \sigma_i$ . Elegimos valores  $s_0 := 0 < t_1 < \dots < t_\ell < 1 =: s_\ell$  y  $s_i \in (t_i, t_{i+1})$  para  $i = 1, \dots, \ell-1$ . Después, tomamos los puntos  $p_i := v_i^1 \in \overline{\mathcal{S}_i}$ . La curva  $\alpha$  cuya existencia asegura el Lema 4.17 es precisamente la curva  $\alpha_1$  buscada. □

## 6. Casos prácticos

Abordamos ahora la elaboración de algunos casos prácticos de aplicación de la construcción vista en este trabajo. En concreto, dada una unión de polígonos convexos  $\mathcal{S}$  que sea conexa por caminos analíticos, buscaremos construir explícitamente una aplicación polinómica que transforme  $\overline{\mathcal{B}}_3$  en  $\mathcal{S}$  (cuya existencia asegura el Teorema 5.1). Para ello, deberemos encontrar curvas polinómicas que cumplan las hipótesis de dicha construcción. Cabe señalar que, si bien las demostraciones de la Sección 4 sobre curvas polinómicas en conjuntos semialgebraicos son en cierto modo constructivas, el algoritmo que resulta de ellas tiene una complejidad demasiado elevada y proporciona polinomios de grado excesivamente alto.

Por tanto, recurriremos a otra estrategia para hallar dichas curvas. En concreto, la interpolación de Hermite, que nos permite prefijar los puntos por donde debe pasar la curva en tiempos dados, así como sus derivadas hasta un orden arbitrario en cada uno de esos puntos. El control sobre las derivadas de la curva ayuda a prefijar su aspecto localmente. Por ejemplo, podremos imponer que en tiempo  $t = t_0$  la curva tenga una cúspide que pase por un punto dado, y orientando la cúspide adecuadamente, esto garantiza que la curva se mantendrá en el interior del polígono para tiempos próximos a  $t_0$ . Además, en algunos casos, la naturaleza concreta del problema (por ejemplo, la simetría con respecto a algún eje) permite reducir la complejidad de las construcciones necesarias.

También necesitaremos algún procedimiento para asegurar de manera rigurosa que las curvas que se hayan obtenido realmente se mantienen dentro de los polígonos con los que estemos trabajando. Para ello, emplearemos el Teorema de Sturm, que proporciona un método para determinar el número de raíces reales de un polinomio en un intervalo dado, mediante la denominada *secuencia de Sturm*. El enunciado del Teorema de Sturm puede encontrarse en el Anexo B, Teorema B.21.

El uso de dicho teorema presenta una pequeña dificultad técnica, que no impedirá resolver el problema, pero que se debe tener en cuenta: no se puede aplicar el teorema en intervalos cuyos extremos sean raíces del polinomio en cuestión. Esto es habitual en nuestro caso, pues las curvas parten de puntos que se encuentran sobre las rectas que delimitan el polígono. Por tanto, para estudiar el comportamiento de un polinomio en un intervalo  $[a, b]$ , habitualmente tomaremos intervalos de la forma  $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ , para un cierto  $\varepsilon > 0$ .

En conclusión, la estrategia que seguiremos para resolver los siguientes casos prácticos es la que sigue:

- (1) Dibujar la figura con la que se esté trabajando y triangularla de forma adecuada, intentando aprovechar las características específicas del problema.
- (2) Utilizar interpolación de Hermite para obtener curvas que pasen por los puntos que necesitamos con derivadas prefijadas. Graficar dichas curvas sobre la figura para verificar de manera rápida si son candidatas para la resolución del problema.
- (3) Una vez obtenida una curva candidata, probamos de manera rigurosa que se mantiene dentro de los polígonos de la figura. Para ello, utilizamos las ecuaciones que definen los polígonos y el Teorema de Sturm.
- (4) Si fuera necesario, buscaremos reparametrizaciones<sup>1</sup> de las figuras para sincronizar las curvas obtenidas: nótese que, para aplicar el Teorema 3.5, se necesita que las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  pasen por los vértices de cada triángulo *al mismo tiempo*.
- (5) Aplicar el Teorema 3.5 para obtener el conjunto dado como imagen de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ .

Cabe señalar que no se incluirán todos los detalles en la elaboración de estos casos prácticos, pues se trata de un proceso técnico y repetitivo. Los ejemplos se presentan en orden decreciente de complejidad, dando menos detalles en los ejemplos más sencillos.

---

<sup>1</sup>Es importante señalar que, cuando hablemos de *reparametrizaciones*, no exigiremos que el cambio de parámetro sea un difeomorfismo ni un difeomorfismo local, tan solo una función que sea suprayectiva sobre el dominio de la curva.

Para facilitar la tarea en los puntos (1) y (2), se ha diseñado un programa informático mediante el lenguaje de programación Python. Las partes más relevantes del código se adjuntan en el A de este documento.

Por otra parte, en cada uno de los casos estudiados se puede encontrar un enlace a diversas animaciones que ilustran las transformaciones encontradas.

### Ejemplo 6.1

El primer caso de aplicación de las construcciones vistas en el trabajo que detallamos es la obtención del conjunto  $\mathcal{S} := C_1 \cup T_2 \cup T_3$ , donde  $C_1$  es el cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$ ;  $T_2$  es el triángulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$  y  $(2, 2)$ ; y  $T_3$  es el triángulo de vértices  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$  y  $(3, 0)$ . Para aplicar la construcción Teorema 3.5, primero debemos triangular la figura. Por tanto, dividimos el cuadrado  $C_1$  en dos triángulos,  $T_0$  y  $T_1$ . El conjunto  $\mathcal{S}$ , junto con la triangulación del cuadrado  $C_1$  utilizada, está dibujado en la Figura 10.

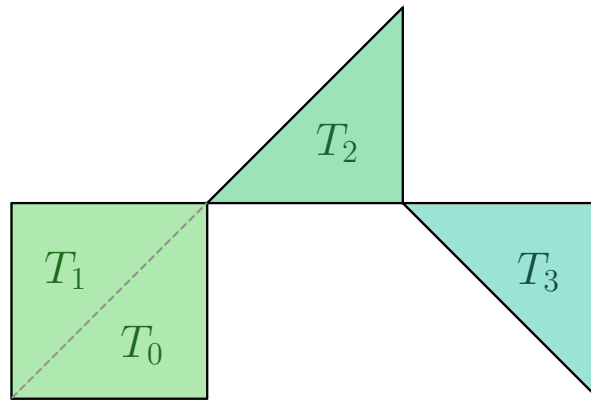


Figura 10: Conjunto  $\mathcal{S} = C_1 \cup T_2 \cup T_3$  y la triangulación usada

#### 6.1.1. Obtención de curvas polinómicas.

Para aplicar la construcción del Teorema 3.5, también debemos hallar unas curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que estén en las hipótesis del teorema. El dominio de las curvas no es de especial relevancia, siempre y cuando sea el mismo intervalo para las tres, por lo que omitiremos especificar un valor  $b \in \mathbb{R}$  hasta determinar uno conveniente.

En primer lugar, hallaremos curvas polinómicas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  que pasen de forma adecuada por los vértices de la triangulación sin salir del conjunto  $\mathcal{S}$ . No nos preocuparemos de que las curvas  $\beta_j$  estén “sincronizadas” en el sentido que pide el Teorema 3.5; buscaremos solamente que para cada triángulo  $T_i$ , existan tiempos  $t_{ij}$ , posiblemente distintos, tales que  $\beta_j(t_{ij}) = v_i^j$ , para cada  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Las curvas  $\alpha_j$  que usaremos finalmente serán reparametrizaciones de estas  $\beta_j$  iniciales.

La expresión explícita de las curvas obtenidas se dará en el siguiente apartado (Verificación de las curvas con la secuencia de Sturm), donde nos servirá para comprobar que verifican las propiedades deseadas.

**Primera curva.** Para la primera de las curvas polinómicas que queremos obtener,  $\beta_1$ , buscamos que pase por los vértices  $u_0 = (1, 0)$ ,  $u_1 = (0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1)$  y  $u_3 = (2, 1)$ , cada uno correspondiente a uno de los triángulos  $T_i$ .

Como se comentó al principio de esta sección, podemos conseguir una curva  $\beta_1$  que cumpla estas condiciones mediante interpolación de Hermite, prefijando algunos de sus valores y sus derivadas. Por

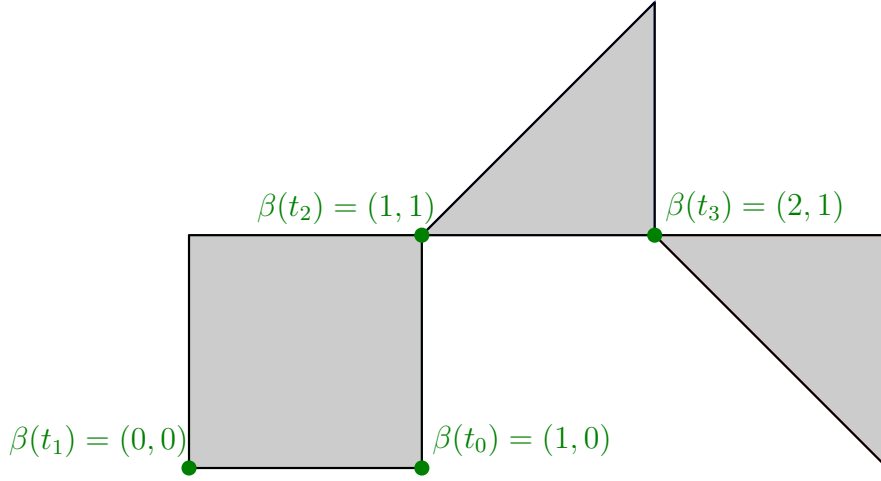


Figura 11: Algunas de las condiciones impuestas sobre la curva  $\beta_1$

motivos técnicos, ha resultado conveniente fijar los nodos de interpolación en los valores de parámetro  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = \frac{5}{2}$ . Las condiciones impuestas sobre  $\beta_1$  son:

$$\begin{aligned}
 \beta_1(t_0) &= u_0 = (1, 0), & \beta'_1(t_0) &= (-1, 1), \\
 \beta_1(t_1) &= u_1 = (0, 0), & \beta'_1(t_1) &= (0, 0), \quad \beta''_1(t_1) = (2, 2), \quad \beta'''_1(t_1) = (0, 6) \\
 \beta_1(t_2) &= u_2 = (1, 1), & & \\
 \beta_1(t_3) &= u_3 = (2, 1), & \beta'_1(t_3) &= (2, -1).
 \end{aligned} \tag{2}$$

La restricción (2) asegura que la curva tiene una cúspide en  $\beta_1(t_1) = u_1$ , orientada de forma adecuada para que su imagen se mantenga dentro del cuadrado  $C_1$ . Esta estrategia será común a lo largo de todos los casos prácticos desarrollados. A partir de estas condiciones, obtenemos una curva polinómica  $\beta_1 : [0, \frac{5}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuya imagen dibujamos en la Figura 12.

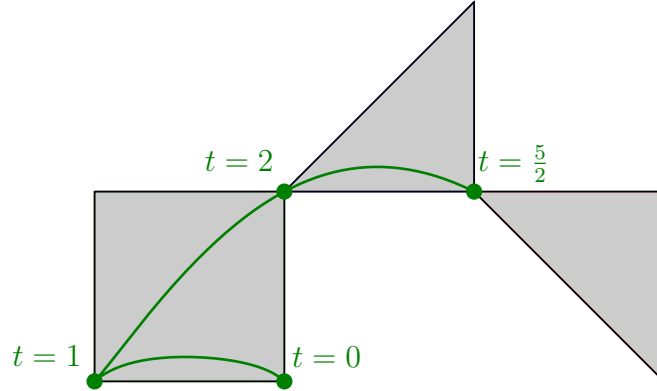


Figura 12: Imagen de la curva interpolada  $\beta_1$

**Segunda curva.** Para la curva  $\beta_2$ , queremos conseguir que pase por  $v_0 = v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 2)$  y  $v_3 = (3, 1)$ , los vértices dibujados en la Figura 13a. Nuevamente, usamos interpolación de Hermite,

fijando los nodos en  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  y  $t_3 = \frac{9}{4}$  e imponiendo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\beta_2(t_0) &= v_0 = v_1 = (1, 1), \\ \beta_2(t_1) &= v_2 = (2, 2), & \beta_2'(t_1) &= (0, 0), \beta_2''(t_1) = (-1, -2), \beta_2'''(t_1) = (2, 0) \\ \beta_2(t_2) &= (2, 1), \\ \beta_2(t_3) &= v_3 = (3, 1).\end{aligned}$$

En este caso, la condición  $\beta_2(t_2) = (2, 1)$ , aunque no será necesaria para completar los vértices de la triangulación, se añade para asegurar que la curva pase del triángulo  $T_2$  a  $T_3$  sin salir de la figura, puesto que  $T_2 \cap T_3 = \{(2, 1)\}$ . Esto también será habitual en muchos de los casos posteriores.

**Tercera curva.** Por último, necesitaremos una curva  $\beta_3$  que pase por los vértices  $w_0 = (0, 0)$ ,  $w_1 = (0, 1)$ ,  $w_2 = (2, 1)$  y  $w_3 = (3, 0)$ . En este caso, fijamos los valores de parámetro  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{3}{4}$ ,  $t_2 = \frac{7}{4}$ ,  $t_3 = \frac{9}{4}$  y  $t_4 = \frac{5}{2}$  e imponemos las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}\beta_3(t_0) &= w_0 = (0, 0), \\ \beta_3(t_1) &= w_1 = (0, 1), & \beta_3'(t_1) &= (0, 0), \beta_3''(t_1) = (2, -2), \beta_3'''(t_1) = (6, 0), \\ \beta_3(t_2) &= (1, 1), \\ \beta_3(t_3) &= w_2 = (2, 1), \\ \beta_3(t_4) &= w_3 = (3, 0).\end{aligned}$$

De manera similar a lo que ocurría al interpolar  $\beta_2$ , se añade la condición  $\beta(t_2) = (1, 1)$ , a pesar de que no es necesaria para completar los vértices de la triangulación. Igual que antes, esta restricción sirve para garantizar que la curva  $\beta_3$  pasa del cuadrado  $C_1$  al triángulo  $T_2$  sin salir de la figura.

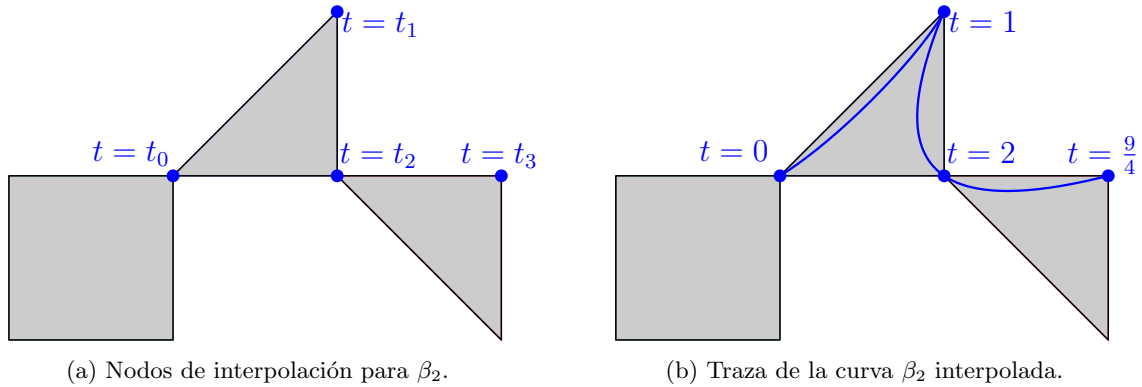


Figura 13: Construcción de la curva  $\beta_2$

### 6.1.2. Verificación de las curvas con la secuencia de Sturm.

Ahora, probamos de forma rigurosa que las curvas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  cumplen las propiedades que necesitamos. Hemos asegurado que pasan por los vértices deseados usando interpolación, por lo que solo falta probar que su imagen esté contenida en el conjunto  $\mathcal{S}$ . Para ello, utilizamos el procedimiento comentado al comienzo de la Sección 6: demostramos que las componentes de cada curva verifican las inecuaciones del conjunto  $\mathcal{S} = C_1 \cup T_2 \cup T_3$  usando la secuencia de Sturm. Haremos uso de las expresiones explícitas de las curvas halladas, que proporcionamos a continuación:

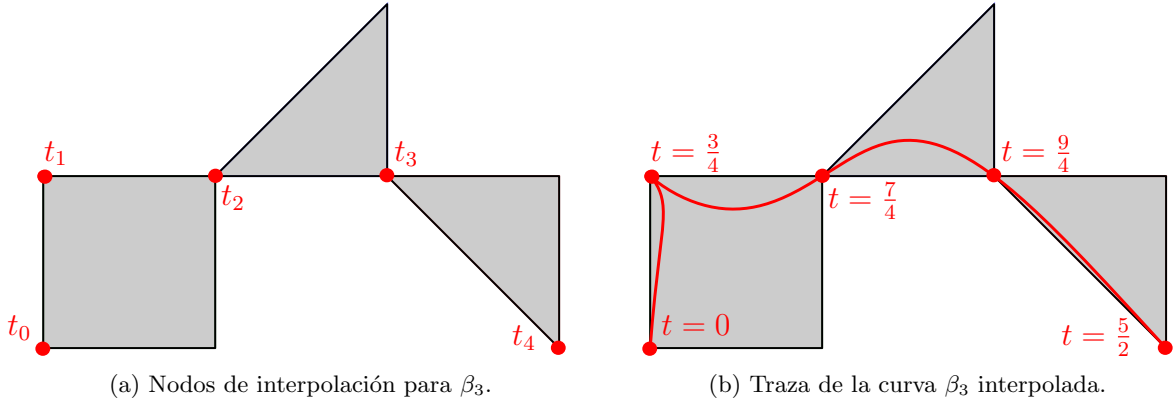


Figura 14: Construcción de la curva  $\beta_3$

$$\begin{aligned}\beta_{11}(\mathbf{t}) &= -\frac{1726}{30375}\mathbf{t}^8 + \frac{20266}{30375}\mathbf{t}^7 - \frac{197623}{60750}\mathbf{t}^6 + \frac{28609}{3375}\mathbf{t}^5 - \frac{386719}{30375}\mathbf{t}^4 + \frac{335642}{30375}\mathbf{t}^3 - \frac{50453}{12150}\mathbf{t}^2 - \mathbf{t} + 1, \\ \beta_{12}(\mathbf{t}) &= -\frac{2471}{30375}\mathbf{t}^8 + \frac{27311}{30375}\mathbf{t}^7 - \frac{468391}{121500}\mathbf{t}^6 + \frac{1007}{125}\mathbf{t}^5 - \frac{535123}{60750}\mathbf{t}^4 + \frac{178057}{30375}\mathbf{t}^3 - \frac{74651}{24300}\mathbf{t}^2 + \mathbf{t}, \\ \beta_{21}(\mathbf{t}) &= \frac{2546}{5625}\mathbf{t}^6 - \frac{9559}{3750}\mathbf{t}^5 + \frac{61913}{11250}\mathbf{t}^4 - \frac{29486}{5625}\mathbf{t}^3 + \frac{3401}{3750}\mathbf{t}^2 + \frac{21691}{11250}\mathbf{t} + 1, \\ \beta_{22}(\mathbf{t}) &= \frac{256}{625}\mathbf{t}^6 - \frac{1536}{625}\mathbf{t}^5 + \frac{3584}{625}\mathbf{t}^4 - \frac{4096}{625}\mathbf{t}^3 + \frac{1679}{625}\mathbf{t}^2 + \frac{738}{625}\mathbf{t} + 1, \\ \beta_{31}(\mathbf{t}) &= -\frac{1452512}{8751645}\mathbf{t}^7 + \frac{1944472}{1250235}\mathbf{t}^6 - \frac{47187608}{8751645}\mathbf{t}^5 + \frac{24455063}{2917215}\mathbf{t}^4 \\ &\quad - \frac{13236613}{2593080}\mathbf{t}^3 + \frac{798887}{2074464}\mathbf{t}^2 + \frac{407383}{987840}\mathbf{t}, \\ \beta_{32}(\mathbf{t}) &= \frac{968224}{1750329}\mathbf{t}^7 - \frac{1243016}{250047}\mathbf{t}^6 + \frac{30218824}{1750329}\mathbf{t}^5 - \frac{17434105}{583443}\mathbf{t}^4 + \\ &\quad + \frac{14702035}{518616}\mathbf{t}^3 - \frac{33052457}{2074464}\mathbf{t}^2 + \frac{1098835}{197568}\mathbf{t},\end{aligned}$$

donde denotamos  $\beta_j(\mathbf{t}) = (\beta_{j1}(\mathbf{t}), \beta_{j2}(\mathbf{t}))$  para  $j = 1, 2, 3$ .

A fin de ilustrar el procedimiento seguido para demostrar que la imagen de cada de estas curvas está contenida en el conjunto  $\mathcal{S} = C_1 \cup T_2 \cup T_3$ , mostramos parte de los cálculos hechos para la curva  $\beta_3 : [0, \frac{5}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Teniendo en mente la Figura 14b, donde se dibuja la imagen de la curva  $\beta_3$ , se prueba que  $\beta_3([0, \frac{7}{4}]) \subset C_1$ ,  $\beta_3([\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]) \subset T_2$ , y  $\beta_3([\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]) \subset T_3$ .

En primer lugar, para mostrar que  $\beta_3([0, \frac{7}{4}]) \subset C_1$ , utilizamos que

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Por tanto, consideramos los polinomios

$$f_1(\mathbf{t}) := \beta_{31}(\mathbf{t}), \quad f_2(\mathbf{t}) := \beta_{31}(\mathbf{t}) - 1, \quad f_3(\mathbf{t}) := \beta_{32}(\mathbf{t}), \quad f_4(\mathbf{t}) := \beta_{32}(\mathbf{t}) - 1,$$

y debemos probar que  $f_1 \geq 0$ ,  $f_2 \leq 0$ ,  $f_3 \geq 0$  y  $f_4 \leq 0$  en el intervalo  $[0, \frac{7}{4}]$ . Para ello, se han calculado sus respectivas secuencias de Sturm, utilizando las herramientas de cálculo simbólico proporcionadas por la librería ‘sympy’ de Python.

Por ejemplo, para el caso de  $f_1$ , definiendo  $\varepsilon := 2^{-10}$ , evaluamos su secuencia de Sturm en los valores  $a := -\varepsilon$  y  $b := \frac{7}{4}$  (nótese que  $f_1(b) = \beta_{31}(\frac{7}{4}) = 1 > 0$ ). Representamos a continuación solo los signos de dichas evaluaciones:

$$\text{sturm}(f_1; a) \equiv (-, +, -, +, +, +, -); \quad \text{sturm}(f_1; b) \equiv (-, -, +, +, -, -, -).$$

Entonces, el número de raíces de  $f_1$  en el intervalo  $(a, b)$  es  $v(f, 1; a) - v(f, 1; b) = 4 - 2 = 2$ . Conocemos exactamente cuáles son dichas raíces, pues provienen de las condiciones de interpolación que impusimos al construir la curva  $\beta_3$ . En concreto, sabemos que  $f_1(0) = \beta_{31}(0) = 0$  y  $f_1(\frac{3}{4}) = \beta_{31}(\frac{3}{4}) = 0$ , luego esas son las únicas dos raíces del polinomio en todo el intervalo  $[0, \frac{7}{4}]$ . Basta, entonces, evaluar  $f_1$  en dos puntos  $t_1 \in (0, \frac{3}{4})$  y  $t_2 \in (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}]$  y comprobar que  $f_1(t_1) > 0$ ,  $f_1(t_2) > 0$  para confirmar que se tiene  $f_1 \geq 0$  en todo el intervalo  $[0, \frac{7}{4}]$ . Por ejemplo, tomando  $t_1 = \frac{1}{2}$  y  $t_2 = \frac{7}{4}$ , se tiene

$$f_1(t_1) = \frac{342857}{8001504} > 0, \quad f_1(t_2) = \beta_{31}\left(\frac{7}{4}\right) = 1 > 0.$$

Procediendo de forma análoga, se prueban las desigualdades buscadas para  $f_2, f_3, f_4$ , así como la propiedad  $\beta_3([\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]) \subset T_2$ .

Para terminar, mostramos también algunos detalles de la prueba de que  $\beta_3([\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]) \subset T_3$ . Podemos describir el triángulo  $T_3$  como

$$T_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3, y \leq 1, x + y \geq 3\}.$$

Por tanto, definimos los polinomios  $g_1(\mathbf{t}) := \beta_{31}(\mathbf{t}) - 3$ ,  $g_2(\mathbf{t}) := \beta_{32}(\mathbf{t}) - 1$  y  $g_3(\mathbf{t}) := \beta_{31}(\mathbf{t}) + \beta_{32}(\mathbf{t}) - 3$ . Debemos probar que para todo  $t \in [\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]$ , se cumple que  $g_1(t) \geq 0$ ,  $g_2(t) \leq 0$  y  $g_3(t) \geq 0$ . Los tres casos se resuelven de manera análoga a lo hecho anteriormente, pero mostramos la prueba de  $g_3(t) \geq 0$  por ser algo más compleja y la más dudosa visualmente en la Figura 14b.

Se tiene que

$$\begin{aligned} g_3(\mathbf{t}) &= \beta_{31}(\mathbf{t}) + \beta_{32}(\mathbf{t}) - 3 = \\ &= \frac{125504}{324135}\mathbf{t}^7 - \frac{474512}{138915}\mathbf{t}^6 + \frac{11545168}{972405}\mathbf{t}^5 - \frac{20905154}{972405}\mathbf{t}^4 + \frac{30136781}{1296540}\mathbf{t}^3 - \frac{1791865}{115248}\mathbf{t}^2 + \frac{983593}{164640}\mathbf{t} - 3 \end{aligned}$$

Al igual que hicimos con  $f_1$  anteriormente, tomamos  $\varepsilon := 2^{-10}$ , calculamos la secuencia de Sturm de  $g_3$  y la evaluamos en los puntos  $a := \frac{9}{4} - \varepsilon$ ,  $b := \frac{5}{2} + \varepsilon$ , obteniendo las siguientes secuencias de signos:

$$\text{sturm}(g_3; a) \equiv (-, +, +, -, +, -, -, +), \quad \text{sturm}(g_3; b) \equiv (-, -, -, +, -, +, +, +).$$

Por tanto, el número de raíces de  $g_3$  en el intervalo  $(a, b)$  es exactamente  $v(g, 1; a) - v(g, 1; b) = 5 - 3 = 2$ . Nuevamente, conocemos dichas raíces, pues por las condiciones impuestas en la interpolación se tiene que

$$g_3(\frac{3}{4}) = \beta_{31}(\frac{3}{4}) + \beta_{32}(\frac{3}{4}) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0, \quad g_3(\frac{5}{2}) = \beta_{31}(\frac{5}{2}) + \beta_{32}(\frac{5}{2}) - 3 = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Entonces, basta tomar un valor cualquiera  $t_3 \in (\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$  y comprobar que se tiene  $g_3(t_3) > 0$ . Por ejemplo,  $g_3(\frac{19}{8}) = \frac{256943359}{6372753408} > 0$ .

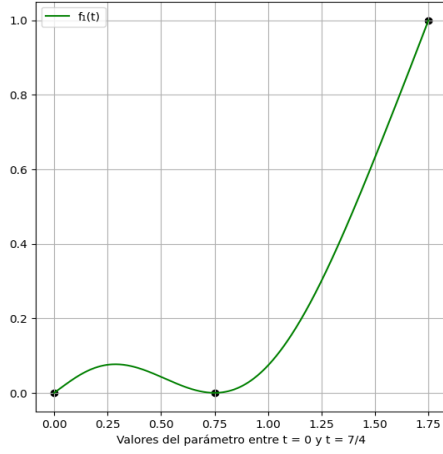
Adicionalmente, para las curvas  $\beta_1, \beta_2$  se tiene lo siguiente:

$$\beta_1([0, 2]) \subset C_1, \quad \beta_1([0, \frac{5}{2}]) \subset T_2; \quad \beta_2([0, 2]) \subset T_2, \quad \beta_2([2, \frac{9}{4}]) \subset T_3.$$

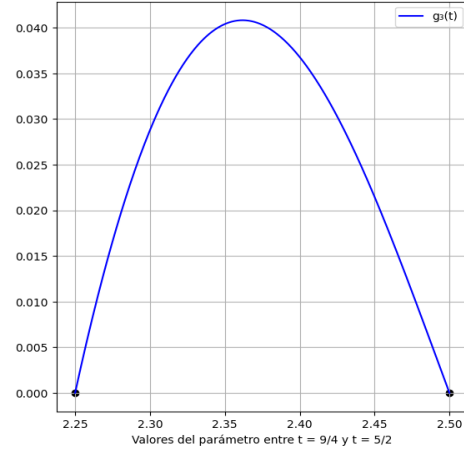
### 6.1.3. Reparametrizaciones.

Comentamos al principio de este ejemplo que nos despreocuparíamos de algunas de las condiciones concretas que debían cumplir las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Introducimos ahora una terminología que será útil para hacer referencia a una de las condiciones. Dados un triángulo  $T$  de vértices  $v_1, v_2, v_3$ ; un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ ; y tres curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diremos que las curvas  $\alpha_j$  *cubren los vértices* del triángulo  $T$  en el valor de parámetro  $t = t_0 \in I$  si para cada vértice  $v_i$ , existe un índice  $j_i \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $\alpha_{j_i}(t_0) = v_i$ . De esta forma, las restricciones que deben cumplir las curvas  $\alpha_j$  son:





(a) Gráfica de  $f_1$  en el intervalo  $[0, \frac{7}{4}]$



(b) Gráfica de  $g_3$  en el intervalo  $[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]$

Figura 15: Gráficas de los polinomios  $f_1(t)$ ,  $g_3(t)$  en sus respectivos intervalos de interés

- i) Para cada triángulo  $T_i$ , las curvas cubren sus vértices en algún valor del parámetro. Esto es, para cada  $i = 0, 1, 2, 3$ , existe un valor  $t_i \in [0, b]$  tal que  $\alpha_j(t_i) = v_i^j$  para  $j = 1, 2, 3$ .
- ii) Para cada valor de  $t$ , los puntos  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$  están todos en uno de los polígonos convexos que componen la figura. Esto es, para cada  $t \in [0, b]$ , se tiene que existe un conjunto  $\mathcal{R} \in \{C_1, T_2, T_3\}$  tal que  $\alpha_j(t) \in \mathcal{R}$  para todo  $j = 1, 2, 3$ .

Ahora, procedemos a reparametrizar las curvas  $\beta_j$  de manera adecuada para obtener otras curvas polinómicas  $\alpha_j$  que cumplan las condiciones i), ii) anteriores. Cabe señalar en este punto lo que entendemos exactamente por *reparametrización*: si  $I, J \subset \mathbb{R}$  son intervalos,  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva y  $h : J \rightarrow I$  es una función suprayectiva, diremos que  $\alpha := \beta \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una reparametrización de la curva  $\beta$ , y diremos que la función  $h$  es el *cambio de parámetro*. Como se ha comentado anteriormente, no exigimos que el cambio de parámetro sea un difeomorfismo, ni tan siquiera un difeomorfismo local, como es habitual en algunos contextos. Sin embargo, en nuestro caso sí buscaremos siempre que  $h$  sea una función polinómica, para que la reparametrización sea también una curva polinómica. Por tanto, aunque habitualmente omitiremos el adjetivo, siempre trataremos con reparametrizaciones y cambios de parámetro *polinómicos*.

Volvemos ahora a la figura  $\mathcal{S}$  que estábamos tratando, con la triangulación dada por  $\mathcal{S} = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . Para cada triángulo  $T_i$ , fijamos un valor de parámetro  $t_i$  para el cual queremos que las curvas  $\alpha_j$  cubran los vértices de  $T_i$ . Además, para garantizar la condición ii), fijaremos dos valores  $s_1 := 2$ ,  $s_2 := 4$  en los cuales las curvas  $\alpha_j$  pasan de  $C_1$  a  $T_2$  y de  $T_2$  a  $T_3$ , respectivamente. En resumen, buscamos reparametrizar las curvas  $\beta_j$  para obtener otras curvas  $\alpha_j$  “sincronizadas” de forma que verifiquen:

- i) en  $t = t_0 := 0$ , cubren los vértices de  $T_0$ ,
- ii) en  $t = t_1 := 1$ , cubren los vértices de  $T_1$ ,
- iii) para todo  $t \in [0, s_1] = [0, 2]$ , se tiene  $\alpha_j(t) \in C_1$  para  $j = 1, 2, 3$ ,
- iv) en  $t = t_2 := 3$ , cubren los vértices de  $T_2$ ,
- v) para todo  $t \in [s_1, s_2] = [2, 4]$ , se tiene  $\alpha_j(t) \in T_2$  para  $j = 1, 2, 3$ ,

vi) en  $t = t_3 := 5$ , cubren los vértices de  $T_3$ ,

vii) para  $t \in [s_2, t_3] = [4, 5]$ , se tiene  $\alpha_j(t) \in T_3$  para  $j = 1, 2, 3$ .

Mostramos ahora cómo se obtiene la reparametrización de la curva  $\beta_1$ . Teníamos  $\beta_1 : [0, \frac{5}{2}] \rightarrow \mathcal{S}$ , y buscamos definir  $\alpha_1 := \beta_1 \circ h_1$ , donde  $h_1$  será una función polinómica elegida de forma adecuada. Para las condiciones i) y ii), habíamos fijado  $\beta_1(0) = (1, 0)$  y  $\beta_1(1) = (0, 0)$ , que son vértices de  $T_0$  y  $T_1$ , respectivamente. Por tanto, nos interesa tomar  $h_1(0) = 0$ ,  $h_1(1) = 1$ . Con respecto de iii), como  $\beta_1([0, 2]) \subset C_1$ , buscamos que  $h_1([0, 2]) \subset [0, 2]$ .

Para iv), tenemos que  $\beta_1(\frac{5}{2}) = (2, 1)$ , vértice de  $T_2$ . Entonces, fijamos  $h_1(3) = \frac{5}{2}$ . Para v), recordemos que  $\beta_1([2, \frac{5}{2}]) \subset T_2$ , luego necesitamos que se cumpla  $h_1([2, 4]) \subset [2, \frac{5}{2}]$ .

Las condiciones vi) y vii) requieren un poco más de trabajo. Como  $\beta_1(\frac{5}{2})$  es vértice también de  $T_3$ , podemos tomar  $h_1(5) = \frac{5}{2}$ , pero necesitamos garantizar que además  $\alpha_1([4, 5]) \subset T_3$ . Sin embargo, tan solo tenemos que  $\beta_1(\frac{5}{2}) \in T_3$ . Para poder reparametrizar de manera que la curva  $\alpha_1(t)$  se mantenga dentro de  $T_3$  para  $t \in [4, 5]$ , necesitamos extender el dominio de  $\beta_1$  a un intervalo  $[0, \frac{5}{2} + \varepsilon]$  de forma que que  $\beta_1([\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + \varepsilon]) \subset T_3$ . Esta condición se tuvo en mente también al seleccionar la curva  $\beta_1$ , aunque por claridad no se ha mencionado hasta este momento. La misma curva  $\beta_1$ , cuya expresión explícita hemos dado en el apartado anterior, verifica  $\beta_1([\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]) \subset T_3$  (ver Figura 16a). Esto se puede comprobar usando las mismas técnicas del apartado anterior. Por tanto, además de  $h_1(5) = \frac{5}{2}$ , impondremos que  $h_1([4, 5]) \subset [\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]$ .

En resumen, buscamos un polinomio  $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= 0, & h_1(1) &= 1, & h_1([0, 2]) &\subset [0, 2], \\ h_1(3) &= \frac{5}{2}, & & & h_1([2, 4]) &\subset [2, \frac{5}{2}], \\ h_1(5) &= \frac{5}{2}, & & & h_1([4, 5]) &\subset [\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]. \end{aligned}$$

Nuevamente, la interpolación de Hermite resulta ser una herramienta útil para resolver este problema. En este caso, las condiciones impuestas sobre el polinomio  $h_1$  y sus derivadas fueron:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= 0, & h_1(1) &= 1, & h_1(2) &= 2, \\ h_1(3) &= \frac{5}{2}, & h_1'(3) &= 0, & h_1(4) &= \frac{5}{2}, \\ h_1(5) &= \frac{5}{2}, & & & & \end{aligned}$$

obteniéndose

$$h_1(t) = -\frac{5}{288}t^6 + \frac{25}{96}t^5 - \frac{419}{288}t^4 + \frac{355}{96}t^3 - \frac{77}{18}t^2 + \frac{67}{24}t,$$

que se puede comprobar que cumple las propiedades deseadas. Tomamos, entonces,  $\alpha_1 := \beta_1 \circ h_1$ .

Después, seguimos un proceso similar para hallar  $\alpha_2$  como reparametrización de  $\beta_2$ . En este caso, nuevamente se necesita extender el dominio de  $\beta_2$  a un intervalo mayor,  $[-\frac{3}{16}, \frac{9}{4}]$ , cumpliéndose que  $\beta_2([-\frac{3}{16}, 0]) \subset C_1$ . En consecuencia, las condiciones que se necesitan del cambio de parámetro  $h_2$  son:

$$\begin{aligned} h_2(0) &= 0, & h_2(1) &= 0, & h_2(2) &= 0, & h_2([0, 2]) &\subset [-\frac{3}{16}, 0], \\ h_2(3) &= 1, & & & & & h_2([2, 4]) &\subset [0, 2], \\ h_2(5) &= \frac{9}{4}, & & & & & h_2([4, 5]) &\subset [2, \frac{9}{4}]. \end{aligned}$$

Para ello, usando interpolación de Hermite, encontramos un polinomio  $h_2$  que verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_2(0) &= h_2(1) = h_2(2) = 0, & h_2'(0) &= -1, & h_2'(1) &= 0, \\ h_2(3) &= 1, & h_2(4) &= 2, & h_2'(4) &= \frac{7}{16}, \\ h_2(5) &= \frac{9}{4}, & & & & \end{aligned}$$

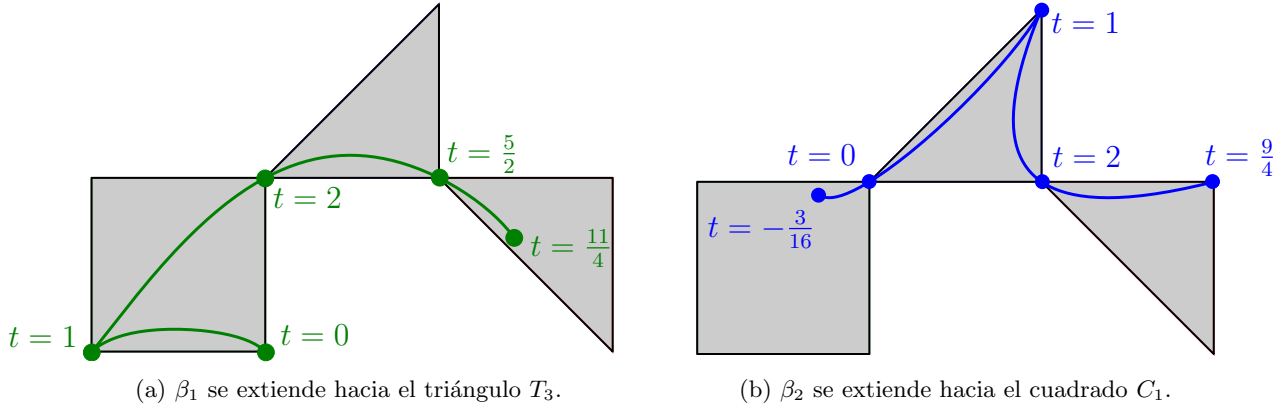


Figura 16: Extensiones de las curvas  $\beta_1, \beta_2$

cuya expresión es

$$h_2(t) = -\frac{281}{345600}t^8 + \frac{217}{17280}t^7 - \frac{1199}{21600}t^6 - \frac{1831}{34560}t^5 + \frac{360241}{345600}t^4 - \frac{95443}{34560}t^3 + \frac{13517}{4800}t^2 - t.$$

Se puede comprobar que este polinomio  $h_2$  cumple lo que necesitamos, así que definimos  $\alpha_2 := \beta_2 \circ h_2$ .

Por último, debemos reparametrizar  $\beta_3$ . En este caso no es necesario extender el dominio de  $\beta_3$ , por lo que resulta ser un caso más sencillo que los anteriores. Damos directamente el cambio de parámetro hallado, que es el polinomio

$$h_3(t) := \frac{1}{864}t^8 - \frac{55}{3456}t^7 + \frac{13}{216}t^6 + \frac{59}{864}t^5 - \frac{1519}{1728}t^4 + \frac{5579}{3456}t^3 - \frac{115}{192}t^2 + \frac{1}{2}t,$$

que verifica

$$h_3(0) = 0, \quad h_3(1) = \frac{3}{4}, \quad h_3([0, 2]) \subset [0, \frac{7}{4}] \quad h_3(3) = \frac{7}{4}, \quad h_3([2, 4]) \subset [\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]$$

$$h_3(5) = \frac{5}{2}, \quad h_3([4, 5]) \subset [\frac{9}{4}, \frac{5}{2}].$$

Tomamos entonces  $\alpha_3 := \beta_3 \circ h_3$ .

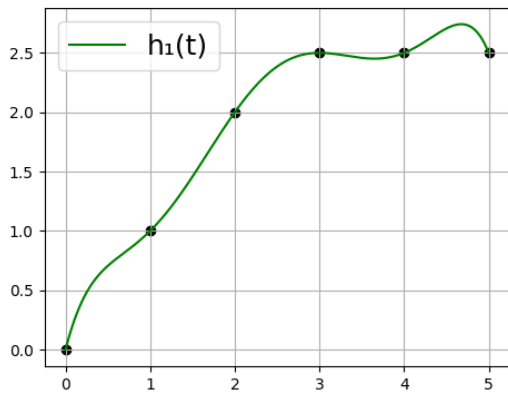
#### 6.1.4. Conclusión.

En virtud del Teorema 3.5 y las propiedades que hemos demostrado de las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , se tiene que el conjunto  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de la bola unidad cerrada de dimensión 3. Recordemos, además, que habíamos hallado la expresión de la aplicación polinómica que proporciona el mencionado teorema: dadas las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y definiendo el polinomio  $g_2(t) := 3(1 - \frac{4}{9}t)^2$ , su expresión es

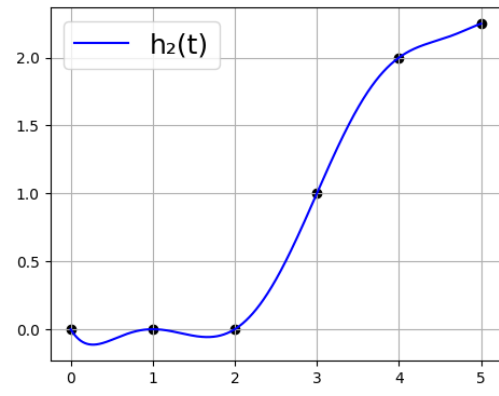
$$H(x, y, z) = g_2(x^2 + y^2) \left( x^2 \alpha_1(z(3 - 4z^2)) + y^2 \alpha_2(z(3 - 4z^2)) \right) + \left( 1 - g_2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) \right) \alpha_3(z(3 - 4z^2)).$$

Se puede encontrar una animación que representa la aplicación que transforma el prisma triangular en el conjunto  $\mathcal{S}$  en la dirección

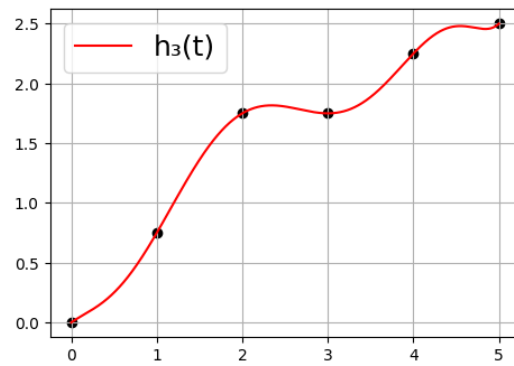
<https://github.com/Truglut/TFG/blob/main/Animaciones/cuad2triFinal.gif>.



(a) Cambio de parámetro  $h_1$



(b) Cambio de parámetro  $h_2$



(c) Cambio de parámetro  $h_3$

Figura 17: Gráficas de los cambios de parámetro  $h_1, h_2, h_3$  (Ejemplo 6.1)

## Ejemplo 6.2

Nos proponemos ahora la realización del conjunto  $T := R_1 \cup R_2$ , donde  $R_1$  es el rectángulo de vértices los puntos  $(0, 2)$ ,  $(-10, 2)$ ,  $(-10, -2)$  y  $(0, -2)$  y  $R_2$  es el rectángulo con vértices en los puntos  $(0, 5)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(4, -5)$  y  $(0, -5)$ . Triangulamos cada uno de los rectángulos, escribiendo  $R_1 = T_0 \cup T_1$  y  $R_2 = T_2 \cup T_3$  como se muestra en la Figura 18.

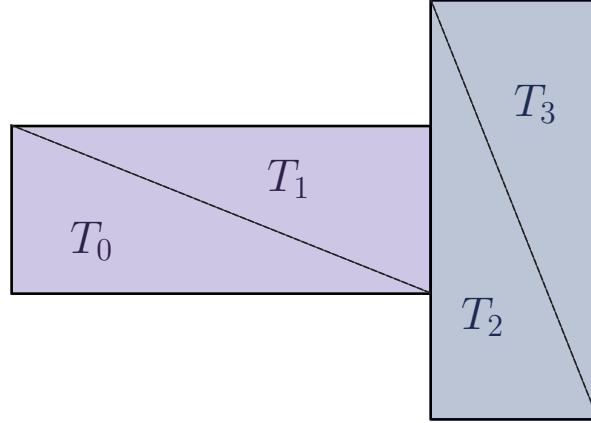


Figura 18: Conjunto  $T = R_1 \cup R_2$  y la triangulación usada (Ejemplo 6.2)

## Obtención de curvas polinómicas

Procedemos ahora a buscar las curvas polinómicas que necesitamos para aplicar la construcción vista en este trabajo. Seguiremos la misma estrategia que en el Ejemplo 6.1: primero obtendremos curvas  $\beta_j$  que pasen por los vértices de la triangulación, para después reparametrizarlas. Para facilitar el cálculo de las curvas  $\beta_j$ , utilizamos la simetría de la figura con respecto al eje horizontal. Encontramos una primera curva  $\beta_1$  que pase por los puntos  $u_0 = (-10, -2)$ ,  $u_1 = (0, -2)$ ,  $u_2 = (0, -5)$  y  $u_3 = (4, 5)$ , marcados en azul en la Figura 19a. Tomamos después  $\beta_2$  como la curva simétrica de  $\beta_1$  respecto del eje horizontal, reduciendo así la complejidad de los cálculos necesarios.

Para hallar la curva  $\beta_1$ , se sigue la estrategia habitual en este trabajo: se imponen condiciones sobre los valores y las derivadas de la curva en ciertos valores del parámetro. Después, se aplica la interpolación de Hermite. En este caso, las condiciones impuestas son:

$$\begin{aligned} \beta_1(0) &= (-10, -2), & \beta_1'(0) &= (3, 1), \\ \beta_1(1) &= (0, -2), & & \\ \beta_1(2) &= (0, -5), & \beta_1'(2) &= (0, 0), \quad \beta_1''(2) = (2, 2), \quad \beta_1'''(2) = (6, 0), \\ \beta_1(3) &= (4, 5). \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos dos de las tres curvas que utilizaremos en la construcción del conjunto  $T$ .

Falta por determinar una última curva  $\beta_3$  que pase por los vértices indicados en rojo en la Figura 20a. Nuevamente usamos interpolación de Hermite para imponer las condiciones sobre  $\beta_3$ . En este caso ha resultado conveniente interpolar en los valores del parámetro  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{7}{16}$ ,  $t_2 = \frac{15}{16}$ ,  $t_3 = \frac{3}{2}$ ,

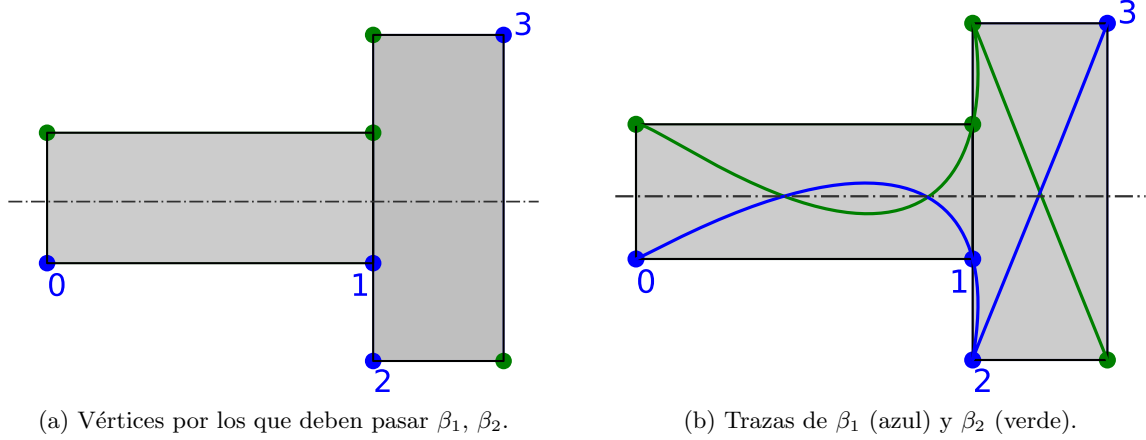


Figura 19: Construcción de las curvas  $\beta_1, \beta_2$

$t_4 = \frac{27}{16}$ , con condiciones

$$\begin{aligned}
 \beta_3(t_0) &= (0, -2), & \beta'_3(t_0) &= (-2, 1), \\
 \beta_3(t_1) &= (-10, 2), & \beta'_3(t_1) &= (0, 0), \quad \beta''_3(t_1) = (1, -1), \quad \beta'''_3(t_1) = (1, -\frac{1}{4}), \\
 \beta_3(t_2) &= (0, -\frac{3}{4}), \\
 \beta_3(t_3) &= (4, -5), & \beta'_3(t_3) &= (0, 0), \quad \beta''_3(t_3) = (-1, 1), \quad \beta'''_3(t_3) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\
 \beta_3(t_4) &= (0, 5).
 \end{aligned}$$

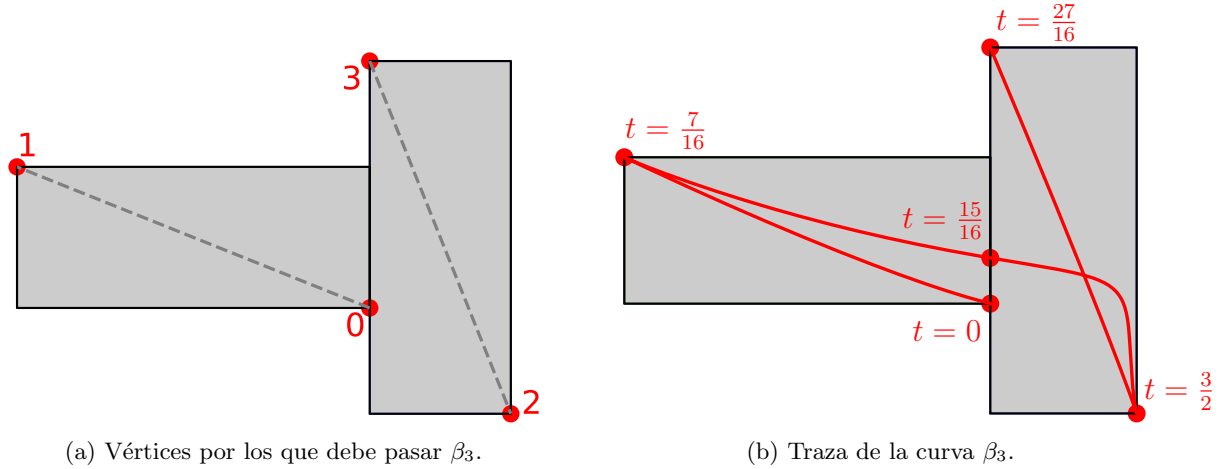


Figura 20: Construcción de la curva  $\beta_3$

### Verificación de las curvas con la secuencia de Sturm

Probamos después que las trazas de las curvas  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  están contenidas en los polígonos de la figura. En concreto, para la curva  $\beta_1 : [0, 3] \rightarrow T$  se cumple que  $\beta_1([0, 1]) \subset R_1$ ,  $\beta_1([1, 3]) \subset R_2$ . Por simetría, lo mismo se tiene para  $\beta_2$ . En cuanto a  $\beta_3$ , se verifica  $\beta_3([0, \frac{15}{16}]) \subset R_1$ ,  $\beta_3([\frac{15}{16}, \frac{3}{2}]) \subset R_2$ . Damos solamente algunos de los detalles a continuación.

Para ver que  $\beta_1([0, 1]) \subset R_1$ , usamos que  $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq 0, -2 \leq y \leq 2\}$ . Defi-

niendo los polinomios

$$f_1(\mathbf{t}) := \beta_{11}(\mathbf{t}) - 10, \quad f_2 := \beta_{11}(\mathbf{t}), \quad f_3(\mathbf{t}) := \beta_{12}(\mathbf{t}) + 2, \quad f_4(\mathbf{t}) := 2 - \beta_{12}(\mathbf{t}),$$

debemos probar que  $f_1, f_3, f_4 \geq 0$  y  $f_2 \leq 0$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Por ejemplo, para  $f_2 = \beta_{11}$ , tomamos  $a := 0, b := 3$  y calculamos la secuencia de Sturm de  $f_2$ . Después, evaluando dicha secuencia en  $a$  y en  $b$  obtenemos las siguientes secuencias de signos:

$$\text{sturm}(f_2; a) \equiv (-, -, +, -, +, +, -), \quad \text{sturm}(f_2; b) \equiv (-, -, +, +, -, -, -).$$

Por tanto, el número de raíces de  $f_2$  en el intervalo  $(0, 3)$  es exactamente  $v(f, 1; a) - v(f, 1; b) = 4 - 2 = 2$ . Conocemos dichas raíces, puesto que  $f_2(1) = \beta_{11}(1) = 0$  y  $f_2(2) = \beta_{11}(2) = 0$ . Por tanto,  $f_2$  tiene signo constante en el intervalo  $(0, 1)$  y como  $f_2(0) = \beta_{11}(0) = -10 < 0$ , se cumple que  $f_2 \leq 0$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Además, hemos determinado las raíces de  $f_2$  en todo el intervalo  $[0, 3]$  porque esto también nos servirá para probar que  $\beta_1([1, 3]) \subset R_2$ , porque una de las condiciones para tener dicha propiedad es precisamente  $f_2(t) \geq 0$  para todo  $t$  en el intervalo  $[1, 3]$ . Como ya hemos localizado todas las raíces de  $f_2$  en dicho intervalo, basta comprobar, por ejemplo, que  $f_2(\frac{3}{2}) > 0$  y  $f_2(\frac{5}{2}) > 0$ . El resto de casos se demuestran de forma análoga.

### Reparametrizaciones

Buscamos ahora, de manera similar al Ejemplo 6, reparametrizaciones  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  de las curvas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  que estén sincronizadas de modo que:

- i) en  $t = t_0 := 0$ , cubren los vértices de  $T_0$ ,
- ii) en  $t = t_1 := 1$ , cubren los vértices de  $T_1$ ,
- iii) para todo  $t \in [0, 2]$ , se tiene  $\alpha_j(t) \in R_1$  para  $j = 1, 2, 3$ ,
- iv) en  $t = t_2 := 3$ , cubren los vértices de  $T_2$ ,
- v) en  $t = t_3 := 4$ , cubren los vértices de  $T_3$ ,
- vi) para todo  $t \in [2, 4]$ , se tiene  $\alpha_j(t) \in R_2$  para  $j = 1, 2, 3$ .

Aprovechando una vez más la simetría, el mismo cambio de parámetro  $h_1$  servirá para las curvas  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . En este caso, se requiere que dicho cambio de parámetro verifique:

$$h_1(0) = 0, \quad h_1(1) = 1, \quad h_1([0, 2]) \subset [0, 1], \quad h_1(3) = 2, \quad h_1(4) = 3, \quad h_1([2, 4]) \subset [1, 3].$$

Se ha obtenido el polinomio

$$h_1(\mathbf{t}) = \frac{1}{24}\mathbf{t}^6 - \frac{17}{36}\mathbf{t}^5 + \frac{17}{9}\mathbf{t}^4 - \frac{53}{18}\mathbf{t}^3 + \frac{65}{72}\mathbf{t}^2 + \frac{19}{12}\mathbf{t},$$

a partir de las condiciones de interpolación

$$h_1(0) = 0, \quad h_1(1) = 1, \quad h'_1(1) = 0, \quad h_1(2) = 1, \quad h_1(3) = 2, \quad h'_1(3) = 1, \quad h_1(4) = 3.$$

Para  $\beta_3$ , necesitamos un cambio de parámetro  $h_3$  que verifique

$$h_3(0) = 0, \quad h_3(1) = \frac{7}{16}, \quad h_3([0, 2]) \subset [0, \frac{15}{16}], \quad h_3(3) = \frac{3}{2}, \quad h_3(4) = \frac{27}{16}, \quad h_3([2, 4]) \subset [\frac{15}{16}, \frac{27}{16}].$$

Para ello, el polinomio utilizado ha sido

$$h_3(\mathbf{t}) = \frac{7}{384}\mathbf{t}^5 - \frac{77}{384}\mathbf{t}^4 + \frac{287}{384}\mathbf{t}^3 - \frac{415}{384}\mathbf{t}^2 + \frac{61}{64}\mathbf{t},$$

interpolado a partir de los siguientes datos:

$$h_3(0) = 0, \quad h_3(1) = \frac{7}{16}, \quad h_3(2) = \frac{15}{16}, \quad h_3(3) = \frac{3}{2}, \quad h'_3(3) = \frac{3}{8}, \quad h_3(4) = \frac{27}{16}.$$

## Conclusión

Una vez obtenidos ambos cambios de parámetro necesarios, definimos las curvas que utilizaremos en la construcción:  $\alpha_1 := \beta_1 \circ h_1$ ,  $\alpha_2 := \beta_2 \circ h_1$  y  $\alpha_3 := \beta_3 \circ h_3$ . La elección que hemos hecho de los cambios de parámetro asegura que estas curvas cumplen las hipótesis del Teorema 3.5. Por tanto, hemos probado que el conjunto  $T$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$  bajo una aplicación cuya expresión es la misma que la dada en el ejemplo anterior, sustituyendo las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  por las halladas en este caso concreto. Se puede encontrar una animación de la transformación del prisma triangular en el conjunto  $T$  en la dirección siguiente:

<https://github.com/Truglut/TFG/blob/main/Animaciones/mgirFinal.gif>.

## Ejemplo 6.3

Presentamos ahora un caso más sencillo, en el que las características de la figura han permitido reducir el problema a encontrar una única curva polinómica. El conjunto con el que se ha trabajado es un pentágono  $P$ , de vértices  $(0, 3)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$  y  $(-2, 2)$ .

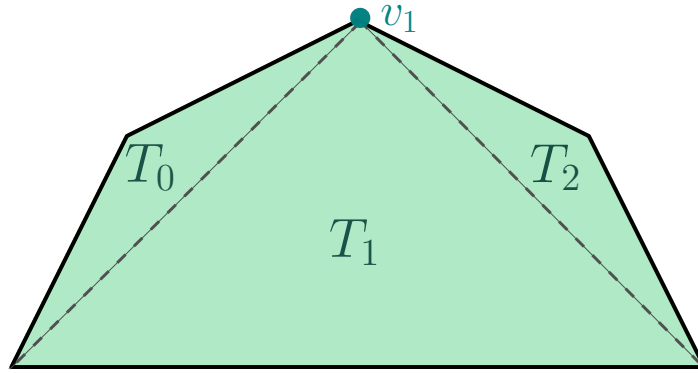


Figura 21: Conjunto  $T = R_1 \cup R_2$  y la triangulación usada

Se ha triangulado el polígono de forma que el punto  $v_1 = (0, 3)$  es vértice de todos los triángulos. Esto permite reducir el número de curvas que debemos calcular, puesto que podemos tomar la curva constante  $\alpha_1 \equiv v_1$  como una de las tres curvas necesarias para aplicar el Teorema 3.5. Además, las otras dos curvas se obtendrán a partir de una única curva polinómica  $\beta$  que pase por los restantes vértices del pentágono.

Para hallar la curva  $\beta$ , hacemos uso de la simetría de la figura con respecto del eje vertical, buscando que su primera componente sea una función impar y que su segunda componente sea una función par. De esta manera, tomando  $\beta : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , se tendrá que  $\beta([-2, 0])$  es la reflexión respecto del eje vertical de  $\beta([0, 2])$ . Teniendo esta simetría en cuenta, las condiciones impuestas sobre  $\beta$  en la interpolación son:

$$\beta(-2) = (-2, 2), \quad \beta(-1) = (-3, 0), \quad \beta(1) = (3, 0), \quad \beta(2) = (2, 2) \quad \text{y} \quad \beta'(-1) = \beta'(1) = (0, 0),$$

de donde se obtiene la curva polinómica  $\beta(t) = (\frac{1}{18}(5t^5 - 37t^3 + 86t), \frac{1}{9}(2t^4 - 4t^2 + 2))$ .

Entonces, las curvas  $\beta_2 := \beta|_{[-2, 1]}$  y  $\beta_3 := \beta|_{[1, 2]}$ , junto con la curva constante  $\beta_1 \equiv v_1$ , pasan por todos los vértices de la triangulación en la manera requerida por el Teorema 3.5. Sin embargo, nuevamente será necesario reparametrizar las curvas  $\beta_2$  y  $\beta_3$  para que lo hagan de forma sincronizada.

Primero, igualamos sus dominios tomando  $\gamma_2 := \beta_2(t - 2)$ ,  $\gamma_3 := \beta_3(t - 1) : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Después, observamos que  $\gamma_2$  pasa por los vértices de la triangulación en tiempos  $t = 0, 1, 3$ ; mientras que  $\gamma_3$  lo hace en tiempos  $t = 0, 2, 3$ . Reparametrizamos, por ejemplo,  $\gamma_2$ . Para ello, se requiere un cambio de parámetro  $h_2 : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$  tal que  $h_2(0) = 0$ ,  $h_2(2) = 1$ ,  $h_2(3) = 3$ . Un cambio de parámetro válido es el dado por el polinomio  $h_2(t) := \frac{1}{12}(t^3 + t^2)$ .



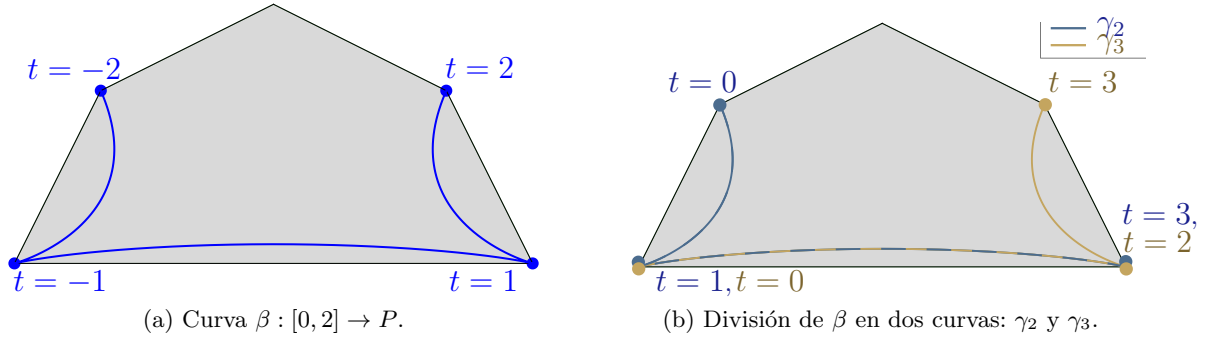


Figura 22: Obtención de las curvas  $\gamma_2, \gamma_3$

En conclusión, definiendo las curvas polinómicas  $\alpha_1(\mathbf{t}) \equiv v_1$ ,  $\alpha_2(\mathbf{t}) := (\gamma_2 \circ h_2)(\mathbf{t})$  y  $\alpha_3(\mathbf{t}) := \gamma_3(\mathbf{t})$ , se puede aplicar el Teorema 3.5, obteniendo que  $P$  es imagen de  $\bar{B}_3$ . Se puede encontrar una animación en la dirección <https://github.com/Truglut/TFG/blob/main/Animaciones/pentagonoFinal.gif>.

### Ejemplo 6.4

Por último, mostramos cómo una ligera modificación del Teorema 3.5 permite obtener de manera sencilla una figura compuesta por dos cuadrados. Consideramos  $C_1$  el cuadrado de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$  y  $(-1, -1)$ ; y  $C_2$  su simétrico respecto del eje vertical. Denotamos  $C := C_1 \cup C_2$ .

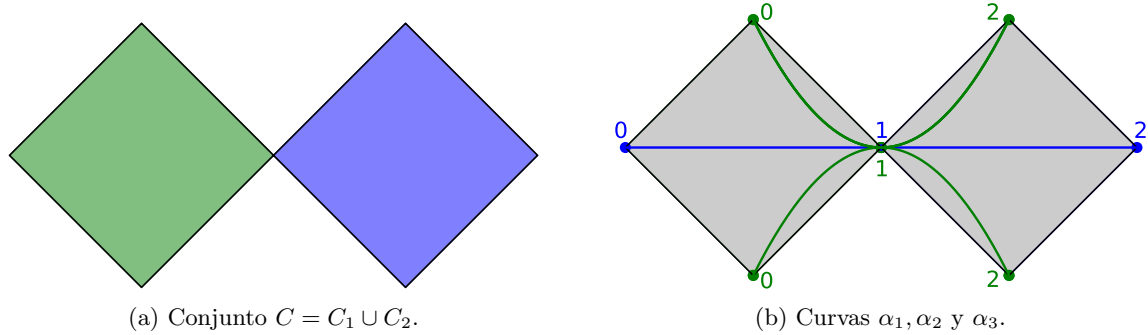


Figura 23: Conjunto  $C$  y curvas utilizadas

Observamos que las curvas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por  $\alpha_1(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$ ,  $\alpha_2(\mathbf{t}) = (2\mathbf{t}, 0)$  y  $\alpha_3(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, -\mathbf{t}^2)$ , junto con la curva constante  $\alpha_0 \equiv (0, 0)$ , cubren en tiempo  $t = -1$  los vértices del cuadrado  $C_1$ ; y en tiempo  $t = 1$ , los vértices del cuadrado  $C_2$ . Además,  $\alpha_j([-1, 0]) \subset C_1$  y  $\alpha_j([0, 1]) \subset C_2$  para cada  $j = 0, 1, 2, 3$ . Estas condiciones son análogas a las hipótesis del Teorema 3.5, salvo porque estamos trabajando con cuadrados en lugar de triángulos (y cuatro curvas en lugar de tres). Por tanto, no se puede aplicar directamente dicho teorema, pero sí un resultado análogo en el que se trabaja con paralelogramos en lugar de triángulos. Enunciamos dicho resultado a continuación:

**Proposición 6.1.** Sean  $P_1, \dots, P_\ell$  polígonos convexos, y sea  $\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^\ell P_i$ . Supongamos que existen  $L_1, \dots, L_r$  paralelogramos tales que  $\bigcup_{i=1}^r L_i = \mathcal{S}$ . Denotamos por  $v_i^0, v_i^1, v_i^2, v_i^3$  a los vértices de  $L_i$ , para cada  $i = 1, \dots, r$ . Ahora, sean  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas polinómicas tales que:

- i) Para cada  $j = 1, \dots, r$ , existe  $t_j \in [a, b]$  tal que  $\alpha_k(t_j) = v_i^k$  para  $k = 0, 1, 2, 3$ .
- ii) Para cada  $t \in [a, b]$ , existe  $i = i(t) \in \{1, \dots, \ell\}$  tal que  $\alpha_j(t) \in P_i$  para  $j = 0, 1, 2, 3$ .

iii) Para cada  $t \in [a, b]$ , los puntos  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  y  $\alpha_3(t)$  son los vértices de un paralelogramo.

Entonces,  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica del prisma cuadrangular  $[0, 1]^2 \times [a, b]$  mediante la aplicación

$$F : [0, 1]^2 \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, t) \mapsto x\alpha_1(t) + y\alpha_2(t) + (1 - x - y)\alpha_0(t).$$

En particular,  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de la bola unidad  $\overline{\mathcal{B}}_3$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la del Teorema 3.5. Basta observar que, para  $t \in [a, b]$  fijo,  $F([0, 1]^2 \times \{t\})$  es el paralelogramo de vértices  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  y  $\alpha_3(t)$ .

Para probar que  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de la bola unidad, es suficiente indicar que el prisma cuadrangular  $[0, 1]^2 \times [a, b]$  lo es, como consecuencia de la Proposición 3.3 (nótese que el cilindro 2-dimensional  $\mathcal{C}_2$  es el cuadrado  $[0, 1]^2$ ). □

Para aplicar la Proposición 6.1 a nuestro caso, falta comprobar la condición iii). En efecto, para cada  $i = 0, 1, 2$ , se tiene

$$\|\alpha_{i+1}(t) - \alpha_i(t)\| = \|\alpha_0(t) - \alpha_3(t)\| = \|(t, t^2)\|,$$

por lo que dichos puntos forman un rombo (véase la Figura 24).

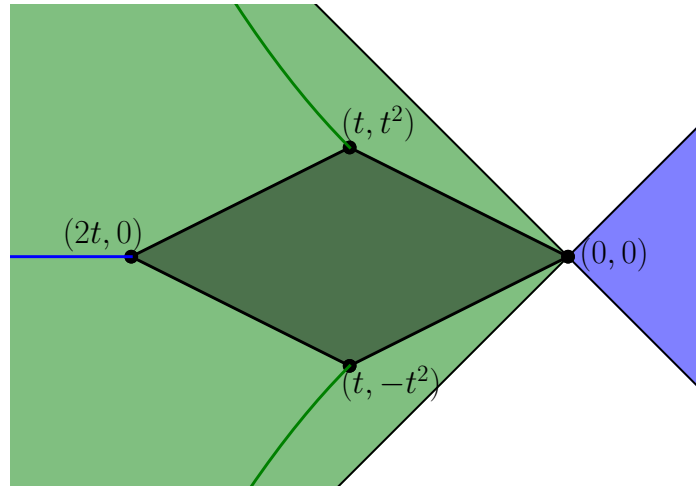


Figura 24: Los puntos  $\alpha_j(t)$  forman un rombo

En conclusión, el conjunto  $C = C_1 \cup C_2$  es imagen polinómica de  $\overline{\mathcal{B}}_3$ . La aplicación dada por la Proposición 6.1 es  $H := F \circ G$ , donde  $F$  es la aplicación usada en la demostración de la Proposición 6.1 y  $G$  es una aplicación polinómica que transforme  $\overline{\mathcal{B}}_3$  en  $[0, 1]^2 \times [-1, 1]$ . En este caso,

$$F(x, y, z) = x\alpha_1(t) + y\alpha_2(t) + (1 - x - y)\alpha_0(t) = x(t, t^2) + y(2t, 0) + (1 - x - y)(0, 0) = (xt + 2yt, xt^2).$$

La aplicación  $G$  se puede deducir a partir de la Proposición 3.3, pero también se puede tomar directamente

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}(3 - 4x^2) + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}(3 - 4y^2) + \frac{1}{2}, z(3 - 4z^2)\right).$$

Se puede encontrar una animación de la aplicación que transforma el prisma cuadrangular  $[0, 1]^2 \times [-1, 1]$  en el conjunto  $C$  en la dirección

<https://github.com/Truglut/TFG/blob/main/Animaciones/doscuaadradosFinal.gif>.

## Bibliografía

- [1] Saugata Basu, Richard Pollack y Marie-Françoise Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. 2nd. Vol. 10. Algorithms and Computation in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-33098-1. DOI: 10.1007/3-540-33098-1.
- [2] J. Bochnak, M. Coste y M.-F. Roy. *Real Algebraic Geometry*. Vol. 36. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, 1998.
- [3] J. F. Fernando y C. Ueno. «On polynomial images of a closed ball». En: *Journal of the Mathematical Society of Japan* (2022).
- [4] J.F. Fernando. «On a Nash curve selection lemma through finitely many points». En: *Revista Matemática Iberoamericana* 41.4 (2025), págs. 1201-1252.
- [5] J.F. Fernando. «On Nash images of Euclidean spaces». En: *Adv. Math.* 331 (2018), págs. 627-719.
- [6] J.F. Fernando, J.M. Gamboa y C. Ueno. «Unbounded convex polyhedra as polynomial images of Euclidean spaces». En: *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 19.2 (2019), págs. 509-565.
- [7] J.F. Fernando et al. «On regulous and regular images of Euclidean spaces». En: *Q. J. Math.* 69.4 (2018), págs. 1327-1351.

# Anexos

## A. Código fuente

En este anexo se proporcionan las partes más relevantes del código utilizado para resolver los casos prácticos presentados en la Sección 6 del trabajo. También se da una breve explicación de su utilización.

Además de estos fragmentos, se adjunta al trabajo el código utilizado al completo, que también se puede encontrar en la dirección <https://github.com/Truglut/TFG/tree/main/Codigo>.

El lenguaje de programación elegido para la implementación ha sido Python. Se ha hecho uso de algunas librerías existentes en dicho lenguaje: fundamentalmente, la librería de cálculo simbólico ‘sympy’ para las operaciones con polinomios y la librería ‘matplotlib’ para la realización de gráficas. Se aportan a continuación enlaces a la documentación de ambas librerías.

- Librería sympy: <https://docs.sympy.org>.
- Librería matplotlib: <https://matplotlib.org>.

### A.1. Interpolación de Hermite

En primer lugar, se ha implementado la interpolación de Hermite para hallar polinomios con valores y derivadas prefijados en ciertos puntos. Para ello, se ha utilizado un algoritmo de diferencias divididas.

Fragmento de código 1: Interpolación de Hermite

```
1 import sympy as sp
2 t = sp.symbols('t')
3
4 def hermite_sympy_dicts(t_vals, valores_dict, ders_dict):
5     """
6     Halla el polinomio de interpolacion de Hermite que toma los valores dados
7     en el diccionario dado en valores_dict y con derivadas hasta orden
8     arbitrario dadas en ders_dict.
9     """
10    # 1. Construimos Z (lista de nodos) repitiendo cada t_i tantas veces como
11    # valores a interpolar
12    Z = []
13    for ti in t_vals:
14        Z += [ti] * (len(ders_dict[ti]) + 1)
15    N = len(Z)
16
17    # 2. Primera columna de la tabla (columna 0): se repite f(t_i) para cada
18    # nodo en Z
19    columna_cero = [valores_dict[ti] for ti in Z]
20    for ti in t_vals:
21        columna_cero += [valores_dict[ti]] * (len(ders_dict[ti]) + 1)
22
23    # 3. Tabla de diferencias divididas: se construye columna a columna
24    # tabla[k][i] contendra la diferencia dividida f[Z_i,..., Z_{i+k}]
25    tabla = [columna_cero] # columna 0
26    for k in range(1, N):
27        col = []
28        for i in range(N-k):
29            if Z[i] == Z[i+k]:
30                # nodo repetido k + 1 veces: usar la derivada de k-esima
31                # dividida por k!
```

```

29         deriv_value = ders_dict[Z[i]][k-1] # derivada k-esima (k-1
           porque se empieza en indice 0)
30         col.append(deriv_value / sp.factorial(k))
31     else:
32         num = tabla[k-1][i+1] - tabla[k-1][i]
33         den = Z[i+k] - Z[i]
34         col.append(num/den)
35     tabla.append(col)
36
37     # 4. Construccion del polinomio usando los valores de la tabla
38     H = 0
39     termino = 1
40     for k in range(N):
41         H += tabla[k][0] * termino
42         termino *= t - Z[k]
43     H = sp.expand(H)
44     return sp.Poly(H, t)

```

## A.2. Definición de una clase para curvas de interpolación

Se ha creado también una clase en Python llamada ‘Curva.Interpolación’ que almacena nodos de interpolación con los datos introducidos para después aplicar la interpolación de Hermite. Además, la clase cuenta con algunos métodos que permiten modificar los nodos de interpolación introducidos, crear nuevos nodos o dibujar la imagen de la curva en una figura.

Fragmento de código 2: Definición y algunos métodos de la clase Curva.Interpolacion

```

1  import numpy as np
2  import sympy as sp
3  import bisect
4  from ast import literal_eval
5  from nodos import Nodo, punto_a_Rational
6  from hermite import curva_hermite_nodos
7  t = sp.symbols('t')
8
9  class Curva_Interpolacion(object):
10     def __init__(self, lista_nodos, xpoly = None, ypoly = None):
11         self.nodos = lista_nodos
12         self.nodos.sort(key = lambda n: n.get_tiempo())
13         self.tiempos = [n.get_tiempo() for n in self.nodos]
14         self.xpoly = xpoly
15         self.ypoly = ypoly
16
17     def interpolar(self):
18         # Utiliza interpolacion de Hermite para obtener las dos componentes de
           la curva
19         self.xpoly, self.ypoly = curva_hermite_nodos(self.nodos)
20
21     def actualizar_tiempos(self):
22         self.tiempos = [n.get_tiempo() for n in self.nodos]
23
24     def graficar(self, ax, color_curva = 'blue', color_puntos = 'black',
           samples = 400, t0=None, t1=None, puntos = True):
25         """
26         Dibuja la imagen de la curva en el intervalo dado por los nodos y, si
           se han proporcionado, los tiempos t0 y t1.

```

```

27     Devuelve los objetos correspondientes al dibujo de la curva y de los
28         nodos en el grafico (curva_graf y puntos_graf).
29
30     # Crear la lista de tiempos entre los que se debe dibujar la curva
31     tiempos_grafica = list()
32     if not t0 is None:
33         tiempos_grafica.append(t0)
34     tiempos_grafica.extend(self.tiempos)
35     if not t1 is None:
36         tiempos_grafica.append(t1)
37
38     # Dibujar la curva en los intervalos dados
39     x_vals = []
40     y_vals = []
41     for i in range(len(tiempos_grafica) - 1):
42         t_vals = np.linspace(tiempos_grafica[i], tiempos_grafica[i+1],
43                               samples)
44
45         x_vals.extend(np.array([self.xpoly(tj) for tj in t_vals]))
46         y_vals.extend(np.array([self.ypoly(tj) for tj in t_vals]))
47
48     curva_graf, = ax.plot(x_vals, y_vals, color = color_curva)
49
50     # Dibujar los puntos correspondientes a los nodos
51     puntos_graf = None
52     if puntos:
53         puntos_graf = ax.scatter([n.get_punto()[0] for n in self.nodos], [
54             n.get_punto()[1] for n in self.nodos],
55             color = color_puntos)
56
57     return curva_graf, puntos_graf
58
59 def quitar_nodo(self, index):
60     """
61     Elimina el nodo en la posicion 'index'.
62     """
63     nodo = self.nodos.pop(index)
64     self.tiempos.pop(index)
65     print(f"Nodo {index} correspondiente a t = {nodo.get_tiempo()}, p = {
66         nodo.get_punto()} eliminado.")
67
68 def modificar_tiempo(self, index, t_nuevo = None):
69     """
70     Modifica el tiempo del nodo en el indice 'index'.
71     Devuelve el nuevo indice del nodo tras la modificacion.
72     """
73     nodo = self.nodos[index]
74
75     # Obtener valor de t si no se ha especificado.
76     if t_nuevo is None:
77         print(f"Modificando el nodo en t = {nodo.get_tiempo()}")
78         try:
79             t_nuevo = sp.Rational(input("Introduce el nuevo valor de t: "))
80         )

```

```

78         except:
79             raise Exception("El valor de t introducido no es valido. Puede
80                             ser entero, decimal, o una fraccion *sin* comillas")
81
82         if t_nuevo in self.tiempos and t_nuevo != nodo.get_tiempo():
83             raise Exception("El tiempo especificado corresponde a un nodo ya
84                             existente.")
85
86         # Modificar el tiempo del nodo
87         nodo.set_tiempo(t_nuevo)
88         print(f"Tiempo modificado. Nuevo valor t = {nodo.get_tiempo()}")
89
90         # Reordenar los nodos y actualizar tiempos
91         self.nodos.sort(key = lambda n: n.get_tiempo())
92         indice_nuevo = self.nodos.index(nodo)
93         self.actualizar_tiempos()
94         return indice_nuevo
95
96     def modificar_punto(self, index, punto_nuevo = None):
97         """
98         Modifica el punto del nodo en el indice 'index'
99         """
100         nodo = self.nodos[index]
101         print(f"Modificando el nodo en tiempo t = {nodo.get_tiempo()}")
102         print(f"Punto actual: {nodo.get_punto()}")
103
104         # Si no se ha especificado punto, obtener un valor mediante input
105         if punto_nuevo is None:
106             try:
107                 punto_nuevo = literal_eval(input("Introduce el nuevo valor del
108                                                     punto: "))
109                 if not type(punto_nuevo) is tuple:
110                     raise Exception("El punto debe escribirse como una tupla (
111                                     x, y)")
112             except:
113                 raise Exception("El punto debe escribirse como una tupla (x, y
114                                 )")
115
116         nodo.set_punto(punto_nuevo)
117         print(f"Punto modificado. Nuevo valor {nodo.get_punto()}")
118         return
119
120     def modificar_derivadas(self, index, ders_nuevas = None):
121         """
122         Modifica las derivadas del nodo en el indice 'index'
123         """
124         nodo = self.nodos[index]
125         if ders_nuevas is None:
126             print(f"Modificando derivadas en tiempo t = {nodo.get_tiempo()}")
127             print(f"Punto p = {nodo.get_punto()}")
128
129             print(f"Derivadas en dicho punto actualmente: ")
130             print(nodo.get_derivadas())
131
132             try:
133                 ders_nuevas = literal_eval(

```

```

129         "[" + input(f"Introduce nuevas derivadas en t = {nodo.
130                       get_tiempo()}," \
131                       "\nseparadas por comas           : ") + "]"
132     except:
133         raise Exception("Error al leer las derivadas")
134
135     nodo.set_derivadas(ders_nuevas)
136     print(f"Derivadas modificadas. Nuevo valor {nodo.get_derivadas()}")
137
138 def modificar_nodo(self, index, t_nuevo = None, punto_nuevo = None,
139                    ders_nuevas = None):
140     """
141     Para modificar los parametros del nodo en el indice 'index'.
142     Si no se han especificado, pregunta al usuario por nuevos valores
143     para el tiempo, el punto y las derivadas.
144     Devuelve el nuevo indice del nodo.
145     """
146     indice_nuevo = self.modificar_tiempo(index, t_nuevo)
147     self.modificar_punto(indice_nuevo, punto_nuevo)
148     self.modificar_derivadas(indice_nuevo, ders_nuevas)
149
150     return indice_nuevo

```

### A.3. Programa interactivo para hallar curvas polinómicas mediante interpolación

Por último, se ha diseñado un programa para poder utilizar la interpolación de manera interactiva: al ejecutarlo, se abre una ventana donde se pueden dibujar las curvas de interpolación que se obtengan sobre una figura, lo cual permite comprobar de forma rápida si dichas curvas son candidatas a cumplir las condiciones necesarias o modificar alguno de sus nodos para tratar de conseguirlo.

Fragmento de código 3: Programa interactivo para hallar curvas con interpolación

```

1 import argparse
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from lectura_datos import *
4 from graficas import dibujar_poligonos
5
6 if __name__ == "__main__":
7     print("Iniciando...")
8
9     # 1. Parsear argumento de entrada (ruta a un JSON con los vertices de los
10        poligonos)
11    parser = argparse.ArgumentParser(
12        description="Dibuja poligonos leidos desde un fichero JSON"
13    )
14    parser.add_argument(
15        "archivo_poligonos",
16        help="Ruta al fichero JSON que contiene los poligonos"
17    )
18    args = parser.parse_args()
19
20    # 2. Leer todos los poligonos desde el JSON
21    ruta_poligono = args.archivo_poligonos
22    lista_poligonos = leer_poligonos_desde_json(ruta_poligono)

```



```

22     print("Poligonos leidos")
23
24     # Determinamos los limites de la figura
25     xmin = float(min(vx for poly in lista_poligonos for vx in poly[0]))
26     xmax = float(max(vx for poly in lista_poligonos for vx in poly[0]))
27     ymin = float(min(vy for poly in lista_poligonos for vy in poly[1]))
28     ymax = float(max(vy for poly in lista_poligonos for vy in poly[1]))
29
30     def borrar(ax):
31         ax.clear()
32         dibujar_poligonos(ax, lista_poligonos)
33
34     # 3. Crear la figura de Matplotlib
35     plt.ion()                                # modo interactivo
36     fig, ax = plt.subplots()
37     ax.set_aspect('equal', 'box')            # para que no deforme escalas
38     ax.set_xlim(xmin - 1, xmax + 1)          # margenes
39     ax.set_ylim(ymin - 1, ymax + 1)          # margenes
40
41     # 4. Dibujar poligonos de fondo
42     dibujar_poligonos(ax, lista_poligonos)
43
44     # 5. Mostrar la ventana sin bloquear el script
45     plt.show(block=False)
46
47     # 6. Entrar en un REPL interactivo para poder
48     #     modificar datos 'sobre la marcha'
49     from code import interact
50     interact(local=globals())

```

### A.3.1. Ejemplo de uso

A continuación, ilustramos con un ejemplo el proceso que se ha seguido para encontrar la mayoría de las curvas utilizadas en la Sección 6. Supongamos que, dado el polígono de la Figura 25, queremos encontrar una curva  $\alpha$  que pase por los tres vértices marcados,  $v_0 = (1, 2)$ ,  $v_1 = (2, 1)$  y  $v_2 = (2, -1)$ , sin salir del polígono.

Para ello, utilizando como siempre interpolación de Hermite, podemos prefijar en primer lugar tres condiciones:  $\alpha(0) = v_0$ ,  $\alpha(1) = v_1$  y  $\alpha(2) = v_2$ . En primer lugar se crean los nodos de interpolación como se muestra en la Figura 26a, y después de la interpolación se dibuja la imagen de la curva obtenida, que se puede ver en la Figura 26b.

Como se ve en este ejemplo, esto no suele ser suficiente, pues también debemos asegurar que la imagen de la curva esté contenida dentro del polígono. Para ello, modificamos uno de los nodos de interpolación, añadiendo condiciones sobre la derivada de la curva. En este caso, de manera similar a varios de los casos prácticos del trabajo, buscamos que la curva tenga una cúspide en el punto  $v_1$ . Para ello, se impone que:

$$\alpha'(1) = (0, 0), \quad \alpha''(1) = (-2, 0), \quad \alpha'''(1) = (-3, -6).$$

Se muestra cómo se introducen estas modificaciones, junto con la curva resultante, en la Figura 27.

En este caso, ya se ha obtenido lo que se buscaba, pues se puede comprobar que la imagen de la curva está contenida en el polígono. Si ahora quisiéramos que la curva pasara por algún otro vértice, por ejemplo  $v_3 := (1, -2)$ , podríamos añadir otro nodo de interpolación a la curva. La creación del nuevo nodo, junto con la curva obtenida, se puede ver en la Figura 28.

Sin embargo, si no se añaden más condiciones lo habitual es que de nuevo la curva obtenida salga del polígono. Repetimos la estrategia anterior, buscando que la curva tenga una cúspide en  $v_2$ , imponiendo

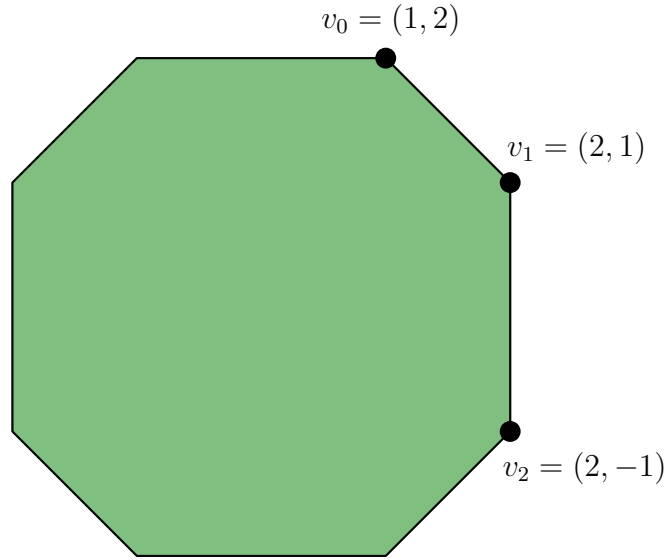


Figura 25: Polígono con vértices de ejemplo

las condiciones

$$\alpha'(t_2) = (0, 0), \quad \alpha''(t_2) = (-2, 0), \quad \alpha'''(t_2) = (3, -6).$$

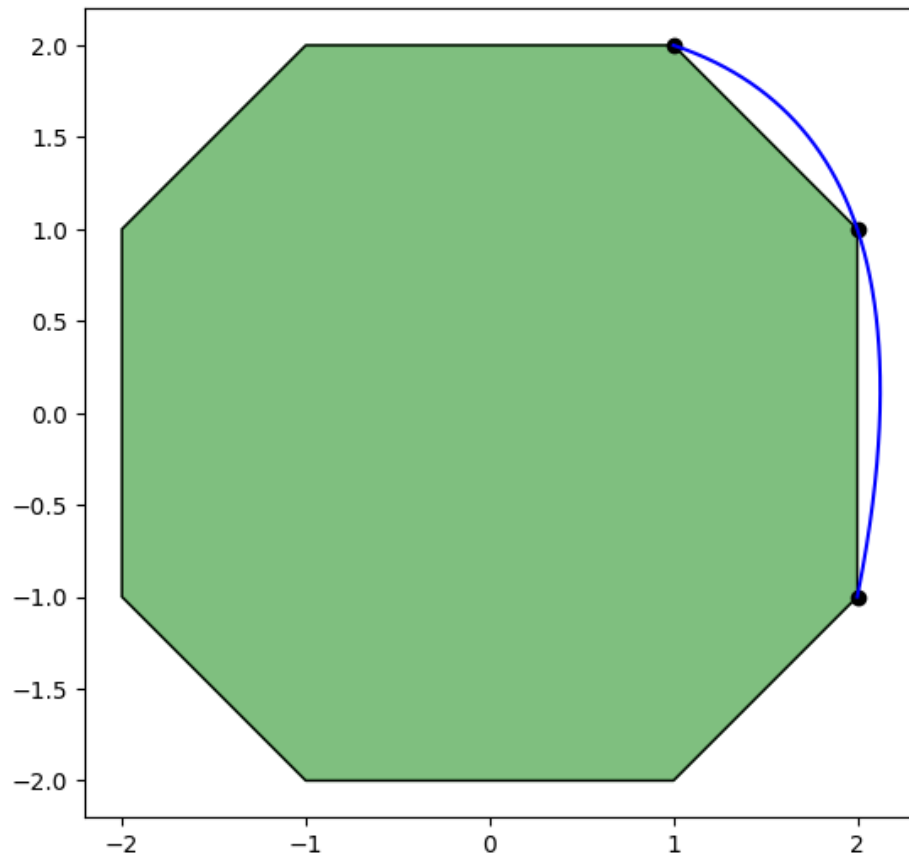
Nótese que estas condiciones son simétricas respecto de las impuestas anteriormente en el nodo de interpolación 1. Esto es intencional, y es una manera de aprovechar la simetría de la figura para obtener curvas que sean también simétricas. Además, en este caso, para que la curva obtenida cumpla los requisitos, es conveniente modificar los tiempos correspondientes a algunos de los nodos de interpolación, para espaciarlos de forma adecuada. Por ello, se define  $t_2 := 4$  y  $t_3 := 5$ . Estas modificaciones se muestran en la Figura 29.

```

>>> nodo0 = Nodo(tiempo=0, punto=(1,2))
>>> nodo1 = Nodo(1, (2,1))
>>> nodo2 = Nodo(2, (2,-1))
>>> curva = Curva_Interpolacion([nodo0, nodo1, nodo2])
>>> curva.interpolar()
>>> grafica, puntosnodos = curva.graficar(ax, 'blue');

```

(a) Creación de los nodos de interpolación y la curva



(b) Nodos de interpolación para  $\beta_2$ .

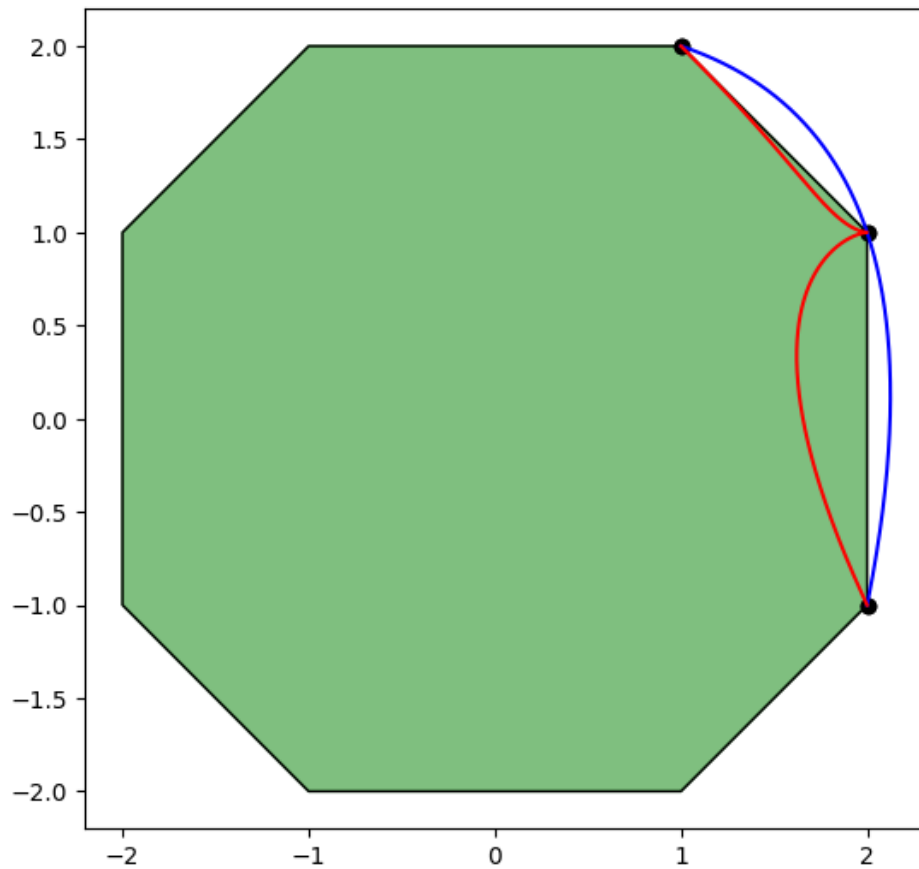
Figura 26: Curva obtenida a partir de los datos anteriores (en azul)

```

>>> curva.modificar_derivadas(1)
Modificando derivadas en tiempo t = 1
Punto p = (2, 1)
Derivadas en dicho punto actualmente:
[]
Introduce nuevas derivadas en t = 1,
separadas por comas                : (0,0), (-2, 0), (-3, -6)
Derivadas modificadas. Nuevo valor [(0, 0), (-2, 0), (-3, -6)]
>>> curva.interpolar()
>>> grafica2, _ = curva.graficar(ax, 'red')

```

(a) Se modifica el nodo de interpolación 1

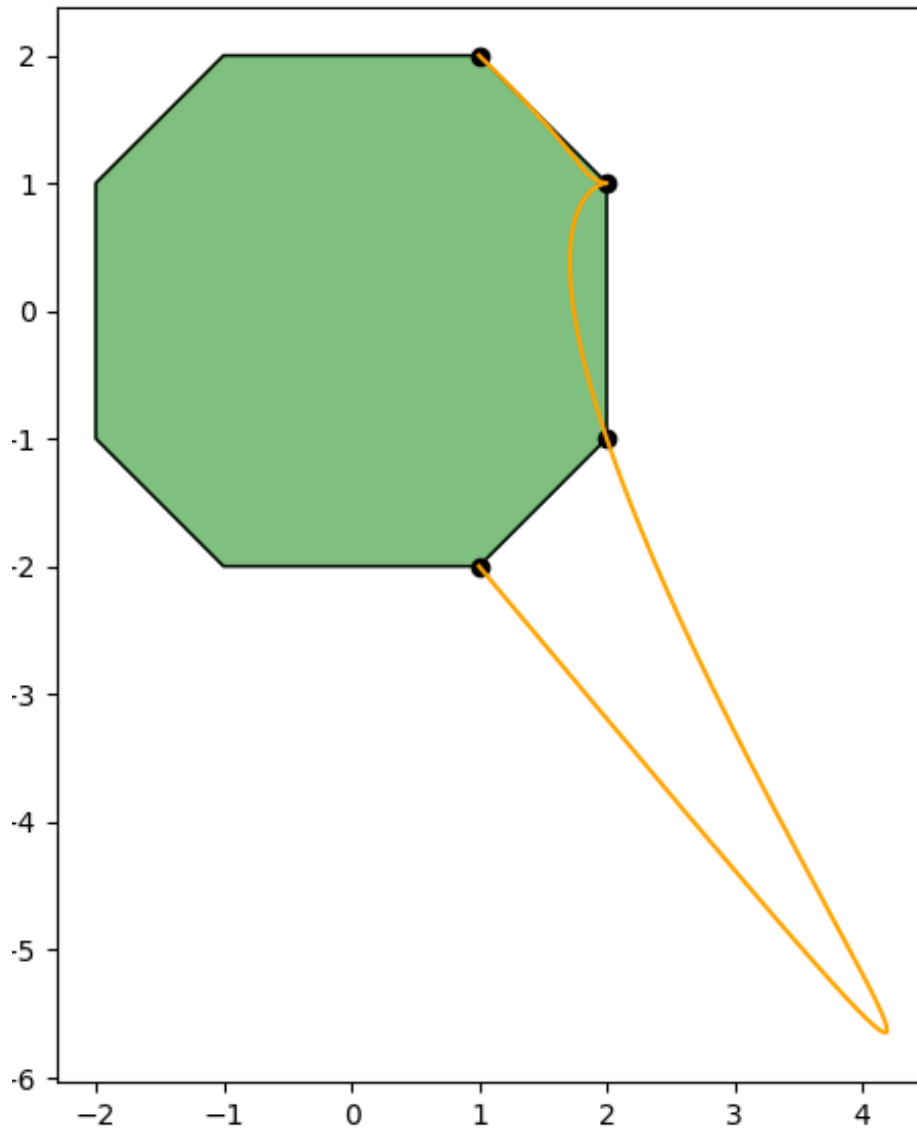


(b) Curva obtenida tras la modificación (en rojo), junto con la curva anterior (en azul)

Figura 27: Modificación de la curva obtenida en primera instancia

```
>>> curva.crear_nodo(3, (1,-2))  
>>> curva.interpolar()  
>>> curva.graficar(ax, 'orange')
```

(a) Creación del nuevo nodo de interpolación



(b) Nueva curva que pasa por el nodo creado

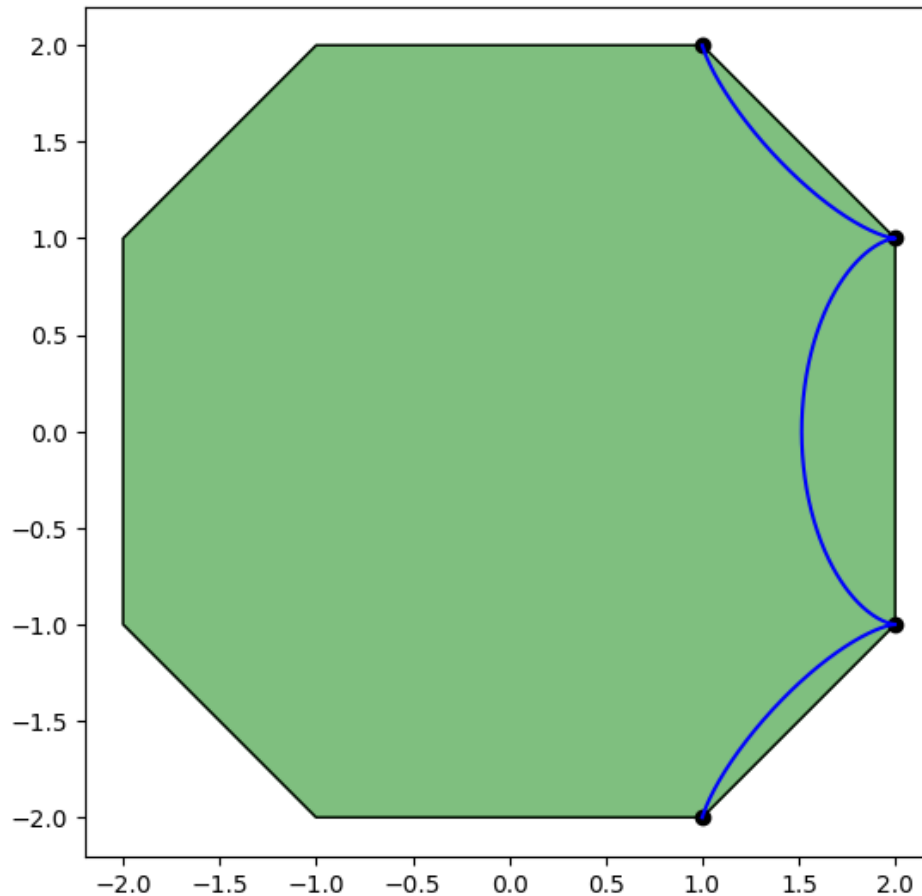
Figura 28: Obtención de una curva que pasa por un nodo adicional

```

>>> curva.modificar_derivadas(2)
Modificando derivadas en tiempo t = 2
Punto p = (2, -1)
Derivadas en dicho punto actualmente:
[]
Introduce nuevas derivadas en t = 2,
separadas por comas          : (0,0), (-2,0), (-4,-6)
Derivadas modificadas. Nuevo valor [(0, 0), (-2, 0), (-4, -6)]
>>> curva.modificar_tiempo(3)
Modificando el nodo en t = 3
Introduce el nuevo valor de t: 5
Tiempo modificado. Nuevo valor t = 5
3
>>> curva.modificar_tiempo(2, 4)
Tiempo modificado. Nuevo valor t = 4
2
>>> curva.interpolar()
>>> curva.graficar(ax, 'blue')

```

(a) Nuevas condiciones sobre la derivada y modificación de los tiempos



(b) Curva de interpolación obtenida

Figura 29: Obtención de una curva que pasa por cuatro nodos sin salir del polígono

## B. Cuerpos reales y conjuntos semialgebraicos.

### B.1. Cuerpos reales y real-cerrados

**Definición B.1.** Un orden de un cuerpo  $F$  es una relación de orden total  $\leq$  satisfaciendo:

- i)  $x \leq y \implies x + z \leq y + z, \quad \forall x, y, z \in F,$
- ii)  $0 \leq x, 0 \leq y \implies 0 \leq xy \quad \forall x, y \in F.$

En este caso, al par  $(F, \leq)$  se lo llama *cuerpo ordenado*.

**Definición B.2.** Un cuerpo  $F$  se dice *real* si existe un orden  $\leq$  sobre él.

**Proposición B.3.** Sea  $F$  un cuerpo real. Entonces:

- i)  $-1 \leq 0,$
- ii)  $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in F,$
- iii)  $x_1, \dots, x_n \in F, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n,$
- iv)  $-1$  no es una suma de cuadrados en  $F$ .

En realidad, las dos últimas propiedades caracterizan a un cuerpo real, pero para probar esto se necesita trabajar un poco más.

**Definición B.4.** Un cono de un cuerpo  $F$  es un subconjunto  $P \subseteq F$  tal que:

- i)  $x, y \in P \implies x + y \in P,$
- ii)  $x, y \in P \implies xy \in P,$
- iii)  $x \in F \implies x^2 \in P.$

Se dice que el cono  $P$  es propio si además:

- iv)  $-1 \notin P.$

### Ejemplo B.5.

- (1) Si  $(F, \leq)$  es un cuerpo ordenado, el conjunto

$$F_{\geq 0} := \{x \in F : x \geq 0\}$$

es un cono propio, llamado cono positivo del orden  $\leq$ .

- (2) El conjunto  $\sum F^2$  formado por las sumas finitas de cuadrados de elementos en  $F$  es siempre un cono de  $F$ . Además, cumple que para todo orden  $\leq$  en  $F$ ,  $\sum F^2 \subseteq F_{\geq 0}$ . Que  $\sum F^2$  sea propio equivale a que  $-1$  no sea suma de cuadrados en  $F$ .

*Observación.* Si  $P \subseteq F$  es un cono, que sea propio equivale a que  $P \cap -P = \{0\}$ , esto es, ningún elemento  $a \in F \setminus \{0\}$  cumple  $a \in P$  y  $-a \in P$ . Uno podría pensar que un cono no propio debe ser el total del cuerpo  $F$ , pero esto podría no suceder, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo B.6.** Consideremos el cuerpo  $F := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Denotamos  $P := \sum F^2$ . Es fácil comprobar que  $P$  es un cono propio, y que  $P \cup -P$  es un cono no propio. Sin embargo,  $P \cup -P$  no es el total, pues el elemento  $\sqrt{2}$  no es suma de cuadrados ni el opuesto de una suma de cuadrados en  $F$ .

**Proposición B.7.** Sea  $P \subset F$  un cono propio tal que  $P \cup -P = F$ . Entonces, la relación

$$x \leq y \iff y - x \in P$$

define un orden sobre  $F$ .

**Lema B.8.** Si  $P \subset F$  es un cono propio maximal en el sentido de la inclusión, entonces  $P \cup -P = F$ .

*Demostración.* Sea  $P \subset F$  un cono propio tal que  $P \cup -P \neq F$ . Veamos que  $P$  no es maximal. Por hipótesis, existe  $a \in F$  tal que  $a, -a \notin P$ . Definimos entonces  $P[a] := \{x + ay : x, y \in P\}$ . Se comprueba que  $P[a]$ , que contiene estrictamente a  $P$ , es un cono. Además, es propio: si tuviéramos  $-1 \in P[a]$ , entonces existen  $x, y \in P$  tales que  $-1 = x + ay$ . Necesariamente  $y \neq 0$ , pues  $-1 \notin P$ . Entonces, podemos escribir  $a = (x + 1)/y \in P$ , contra la hipótesis.  $\square$

En vista del lema y la proposición anteriores, nos interesa probar la existencia de un cono propio maximal. Se demuestra de manera estándar, usando el lema de Zorn, que todo cono propio está contenido en un cono propio maximal:

**Lema B.9.** Sea  $P \subset F$  un cono propio. Entonces, existe  $Q \supseteq P$  cono propio maximal en el sentido de la inclusión.

**Teorema B.10.** Sea  $F$  un cuerpo. Son equivalentes:

- (1)  $F$  es un cuerpo real,
- (2) Para todos  $x_1, \dots, x_n \in F$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0$ ,
- (3)  $-1$  no es suma de cuadrados en  $F$ .

*Demostración.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2) Si algún  $x_{i_0}$  es no nulo, entonces  $\sum x_i^2 \geq x_{i_0}^2 > 0$ .
- (2)  $\Rightarrow$  (3) Si  $-1 = \sum x_i^2$ , entonces  $1 + \sum x_i^2 = 0$ , contra la hipótesis.
- (3)  $\Rightarrow$  (1) El conjunto  $\sum F^2$  formado por las sumas finitas de cuadrados de elementos de  $F$  es siempre un cono contenido en  $F$ . Por *iii*), es además un cono propio. Por el Lema B.9, existe un cono propio maximal  $P \supseteq \sum F^2$ . Aplicando el Lema B.8 y la Proposición B.7, tenemos que el cono  $P$  induce un orden sobre  $F$ .  $\square$

## Cuerpos real-cerrados

Al igual que ocurre con  $\mathbb{R}$ , un cuerpo real no es algebraicamente cerrado, pues el polinomio  $x^2 + 1$  no puede tener raíces en un cuerpo real. Sin embargo, podemos definir la noción de cuerpo real-cerrado en el siguiente sentido:

**Definición B.11.** Sea  $F$  un cuerpo real. Diremos que  $F$  es real-cerrado si no tiene ninguna extensión algebraica real propia, esto es, no existe ningún cuerpo real  $F' \supsetneq F$  tal que la extensión  $F'|F$  es algebraica.

**Proposición B.12.** Si  $F$  es un cuerpo real cerrado, entonces existe un único orden de  $F$  cuyo cono positivo es el conjunto de cuadrados de  $F$ .

*Demostración.* Sea  $a \in F$ . Si  $a$  no es un cuadrado en  $F$ , entonces  $F(\sqrt{a})$  es una extensión algebraica no trivial de  $F$ , y por tanto no puede ser real. En consecuencia, existen  $x_i, y_i \in F$  tales que

$$-1 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i \sqrt{a})^2, \quad (11)$$



de donde

$$-a = \frac{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \in \sum F^2. \quad (12)$$

Por tanto,  $\sum F^2 \cup (-\sum F^2) = F$ . En consecuencia, probamos que si  $P$  es un cono propio en  $F$ , se tiene que  $P = \sum F^2$ . Para ello, basta demostrar  $P \subseteq \sum F^2$ , pues la otra inclusión siempre es cierta. En efecto, sea  $a \in P$ . Si  $a = 0$ , claramente se tiene  $a \in \sum F^2$ . Si  $a \neq 0$ , como  $P$  es propio,  $-a$  no puede ser un cuadrado en  $F$ , así que por (12),  $a \in \sum F^2$ .

Ahora, si  $\leq$  es un orden en  $F$ , su cono positivo  $F_{\geq 0}$  es un cono propio, así que  $F_{\geq 0} = \sum F^2$ . Como un orden queda determinado por su cono positivo, deducimos que existe un único orden sobre  $F$ . Además, hemos probado en (12) que todo elemento que no es un cuadrado en  $F$  es negativo en este orden. Por tanto, todos los elementos positivos son cuadrados en  $F$ .  $\square$

**Teorema B.13.** *Sea  $F$  un cuerpo real. Son equivalentes:*

- (1)  $F$  es real-cerrado,
- (2) Existe un único orden de  $F$  cuyo cono positivo es el conjunto de cuadrados de  $F$ , y todo polinomio de grado impar en  $F[x]$  tiene una raíz en  $F$ ,
- (3) El anillo  $F[i] := F[x]/(x^2 + 1)$  es un cuerpo algebraicamente cerrado.

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) La primera parte es la Proposición B.12.

Veamos ahora que todo polinomio de grado impar tiene una raíz en  $F$ , por inducción sobre el grado del polinomio. Sea  $f \in F[x]$  un polinomio de grado impar  $d$ . Si  $d = 1$ , es claro que  $f$  tiene alguna raíz en  $F$ . Supongamos ahora que  $d > 1$ . Si  $f$  es reducible, entonces uno de sus factores irreducibles es un polinomio  $g$  de grado impar y menor que  $d$ . Por hipótesis de inducción,  $g$  tiene una raíz en  $F$  y, por tanto,  $f$  también. Si  $f$  es irreducible, entonces el cociente  $F[x]/(f)$  es un cuerpo, y una extensión algebraica no trivial de  $F$ . Por ser  $F$  real-cerrado, el cuerpo  $F[x]/(f)$  no es real, luego existen  $h_i \in F[x]$  de grados  $< d$  y  $g \in F[x]$  tales que:

$$-1 = fg + \sum_{i=1}^n h_i^2.$$

El polinomio  $\sum_{i=1}^n h_i^2$  tiene grado  $\leq 2d - 2$ . Además, el término de mayor grado en dicha suma tiene grado par y un coeficiente que es suma de cuadrados en  $F$  no todos nulos. Por ser  $F$  un cuerpo real, dicho coeficiente es no nulo y  $\sum_{i=1}^n h_i^2$  tiene grado par. Por tanto,  $g$  es un polinomio de grado impar  $\leq d - 2$ . Por inducción,  $g$  tiene una raíz  $x \in F$ . Pero entonces  $-1 = \sum_{i=1}^n h_i^2(x) \in \sum F^2$ , contra la hipótesis.

(2)  $\Rightarrow$  (3) El polinomio  $f := x^2 + 1$ , de grado 2, no tiene raíces en  $F$ , y por tanto es irreducible en  $F[x]$ . En consecuencia, el cociente  $F[i] = F[x]/(f)$  es un cuerpo. En primer lugar, probamos que todo elemento de  $F[i]$  es un cuadrado. En efecto, sea  $a + bi \in F[i]$ . Como  $a^2 + b^2$  es positivo, por ii) existe  $c \in F$ ,  $c > 0$  tal que  $a^2 + b^2 = c^2$ . Entonces,

$$a^2 \leq a^2 + b^2 = c^2 \rightsquigarrow -c \leq a \leq c \rightsquigarrow c + a \geq 0, \quad c - a \geq 0.$$

Así, podemos elegir  $d := \sqrt{c + a}$ ,  $e := \sqrt{c - a} \in F$ . Afirmamos que  $x := d + ei$  verifica

$$x^2 = 2a + 2|b|i \rightsquigarrow \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 = a + |b|i. \quad (13)$$

Esto prueba lo que queríamos en el caso de que  $b \geq 0$ , lo cual podíamos suponer cambiando  $a + bi$  por  $-a - bi$ . Probamos, entonces, (13):

$$x^2 = (d + ei)^2 = (\sqrt{c + a} + i\sqrt{c - a})^2 = c + a - (c - a) + 2i\sqrt{(c + a)(c - a)} = 2a + 2i\sqrt{c^2 - a^2} = 2a + 2i\sqrt{b^2}.$$

Pasamos a demostrar que  $F[i]$  es algebraicamente cerrado. Sea  $K|F[i]$  una extensión algebraica, y queremos probar que  $K = F[i]$ . Fijado  $\alpha \in K$ , sea  $f := P_{F,\alpha}$  el polinomio mínimo de  $\alpha$  sobre  $F$ . Denotamos por  $L$  al cuerpo de descomposición de  $g(x) := f(x) \cdot (x^2 + 1)$  sobre  $R$ . Entonces, las extensiones  $L|F[i]$  y  $L|F$  son ambas de Galois. Escribimos  $G := \text{Gal}(L/F)$  y  $[L : F] = 2^m n$ , con  $n$  impar. Tomando  $S$  un subgrupo 2-Sylow de  $G$ , por el teorema fundamental de la teoría de Galois existe una subextensión  $K$  tal que  $[K : F] = [G : S] = n$ . Puesto que todo polinomio de grado impar en  $F$  tiene alguna raíz,  $F$  no tiene extensiones algebraicas propias de grado impar, luego debe ser  $n = 1$ . Por tanto,  $[L : F] = 2^m$  y  $[L : F[i]] = 2^{m-1}$ . Afirmamos ahora que debe ser  $m = 1$ , con lo cual habremos terminado. En efecto, si  $m > 1$ , entonces  $G_1 := \text{Gal}(L/F[i])$  es un 2-grupo no trivial. Por tanto, tiene un subgrupo de índice 2, lo cual corresponde con una extensión  $K_1/F[i]$  con  $[K_1 : F[i]] = 2$ . Pero esto es imposible, pues todo elemento de  $F[i]$  es un cuadrado y en consecuencia no hay extensiones cuadráticas de  $F[i]$ . Por tanto  $[L : F[i]] = 1$ , con lo que  $\alpha \in F[i]$ . Como  $\alpha \in K$  era arbitrario, se tiene que  $K = F[i]$ , como queríamos demostrar.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Puesto que  $F[i]$  es un cuerpo, sabemos que  $-1$  no es un cuadrado en  $F$ . Para ver que no es tampoco suma de cuadrados, probamos que la suma de dos cuadrados en  $F$  es también un cuadrado en  $F$ . Dados  $a, b \in F$ , como  $F[i]$  es algebraicamente cerrado, existen  $c, d \in F$  tales que  $a + bi = (c + di)^2$ . Entonces,  $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$  es un cuadrado en  $F$ . En consecuencia,  $F$  es un cuerpo real. Además es real-cerrado, pues necesariamente  $F[i]$  es su única extensión algebraica no trivial.  $\square$

#### Ejemplo B.14.

- (1) Claramente,  $\mathbb{R}$  es un cuerpo real-cerrado.
- (2) Los números reales algebraicos sobre  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}_{alg}$ , son un cuerpo real-cerrado.
- (3) El cuerpo de series de Puiseux con coeficientes reales,  $\mathbb{R}((t^*))$ , es real-cerrado. De hecho, si  $R$  es un cuerpo real-cerrado, entonces su cuerpo de series de Puiseux es también real-cerrado. Esto es fácil de ver usando la caracterización *iii*).

*Observación.* Aunque  $\mathbb{R}$  no es el único modelo de cuerpo real-cerrado, los cuerpos real-cerrados conservan muchas de las propiedades conocidas de  $\mathbb{R}$ . En particular, los análogos de los teoremas de Bolzano, Rolle y del Valor Medio para polinomios se utilizan en la prueba del Teorema de Tarski-Seidenberg.

*Notación.* En lo sucesivo,  $R$  denotará siempre un cuerpo real cerrado arbitrario. Para denotar intervalos en  $R$ , utilizaremos la notación habitual para los números reales. Por ejemplo,  $(a, b) := \{x \in R : a < x < b\}$ . Así, en este apéndice, dicha notación no corresponde a intervalos en  $\mathbb{R}$ , salvo que se esté trabajando explícitamente con el cuerpo  $\mathbb{R}$ .

**Corolario B.15.** Sea  $f \in R[x]$  mónico e irreducible. Entonces,  $\deg(f) \leq 2$  y

$$f(x) = x - a \quad \text{o bien} \quad f(x) = (x - a)^2 + b^2, \quad \text{con } b \neq 0.$$

*Demostración.* Si  $\deg(f) > 2$ , entonces tomando  $\alpha$  una raíz de  $f$  en un cuerpo de descomposición, tendríamos  $[R(\alpha) : R] > 2$ . Sin embargo, la clausura algebraica de  $R$  es  $R[i]$ , por el Teorema B.13. Así, se tendría  $2 = [R(i) : R] \geq [R(\alpha) : R] > 2$ , absurdo. En consecuencia,  $\deg(f) = 1$  o  $\deg(f) = 2$ .

- Si  $\deg(f) = 1$ , por ser mónico  $f(x) = x - a$  para algún  $a \in R$ .
- Si  $\deg(f) = 2$ , entonces existen  $a, c \in R$  tales que  $f(x) = x^2 - 2ax + c = (x - a)^2 + (c - a^2)$ . Como  $f$  es irreducible, no puede tener raíces en  $R$ , así que  $c - a^2 \geq 0$ , de lo que se sigue el resultado tomando  $b := \sqrt{c - a^2} \in R$ .

$\square$

**Corolario B.16.** Sea  $f \in R[x]$ . Entonces, existen  $c, a_i, d_j \in R$  y  $b \in R \setminus \{0\}$  tales que

$$f(x) = c \prod_{i=1}^m (x - a_i) \prod_{j=1}^n ((x - d_j)^2 + b_j^2).$$

(Permitiendo, posiblemente, que  $n = 0$  o  $m = 0$ , en cuyo caso asumimos la convención  $\prod_{i=1}^0 g_i = 1$  para cualesquiera  $g_i \in R[x]$ ).

De esta factorización se pueden deducir los teoremas previamente mencionados.

**Teorema B.17 (Bolzano).** Sean  $f \in R[x]$  un polinomio y  $a, b \in R$  tales que  $a < b$  y  $f(a)f(b) < 0$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  con  $f(c) = 0$ .

**Teorema B.18 (Rolle).** Sea  $f \in R[x]$  un polinomio y denotamos por  $f'$  a la derivada de  $f$ . Si  $a, b \in R$  son tales que  $a < b$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  con  $f'(c) = 0$ .

**Teorema B.19 (Valor Medio).** Sea  $f \in R[x]$  un polinomio y denotamos por  $f'$  a la derivada de  $f$ . Entonces, para todos  $a, b \in R$  con  $a < b$  existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Estas propiedades de los polinomios en cualquier cuerpo real-cerrado se pueden usar para demostrar una versión general del Teorema de Sturm, que enunciamos a continuación. Para ello, definimos primero la *secuencia de Sturm* de dos polinomios, sobre la cual trata dicho teorema. El número de cambios de signo en la secuencia de Sturm es fundamental en el teorema, por lo que también definiremos con precisión el significado de *número de cambio de signos*.

**Definición B.20.** Sean  $f, g \in R[x]$  dos polinomios. La secuencia de Sturm de  $f$  y  $g$  es la secuencia finita de polinomios  $(f_0, \dots, f_k)$  definida como sigue:

- $f_0 := f$ ,  $f_1 := f'g$ .
- Para cada  $i = 2, \dots, k$ ,  $f_i$  es el resto de la división de  $f_{i-1}$  por  $f_{i-2}$ , cambiado de signo. Esto es,  $f_i = f_{i-1}q_i - f_{i-2}$ , donde  $q_i \in R[x]$  y  $\deg(f_i) < \deg(f_{i-1})$ .
- $f_k$  es un máximo común divisor de  $f$  y  $f'g$ .

Dada una secuencia de elementos de  $R$ ,  $(a_0, \dots, a_k)$ , con  $a_0 \neq 0$ , definimos el número de cambios de signo en la secuencia  $(a_0, \dots, a_k)$  de la manera siguiente: contamos un cambio de signo por cada pareja  $(i, \ell)$  que verifique  $a_i a_\ell < 0$  con  $\ell \geq i + 1$  y  $a_j = 0$  para cada  $i < j < \ell$ . Es decir, contamos el número de cambios de signo ignorando todos los ceros que pueda haber en la secuencia  $(a_0, \dots, a_k)$ .

Si  $a \in R$  no es una raíz de  $f$  y  $(f_0, \dots, f_k)$  es la secuencia de Sturm de  $f$  y  $g$ , definimos  $v(f, g; a)$  como el número de cambios de signo en la secuencia  $(f_0(a), \dots, f_k(a)) \in R^k$ .

La secuencia de Sturm es especialmente importante en el caso particular en el que  $g = 1$ . En ese caso, la secuencia de Sturm de  $f$  y  $g \equiv 1$  se llama también secuencia de Sturm de  $f$ .

*Observación.* Obsérvese que la secuencia de Sturm de  $f$  y  $g$  es, salvo los signos, la obtenida al aplicar el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de  $f_0 = f$  y  $f_1 = f'g$ .

**Teorema B.21 (Teorema de Sturm).** Sea  $R$  un cuerpo real-cerrado y  $f \in R[x]$ . Sean  $a, b \in R$  tales que  $a < b$ ,  $f(a) \neq 0$  y  $f(b) \neq 0$ . Entonces, el número de raíces de  $f$  en el intervalo  $(a, b)$  es igual a  $v(f, 1; a) - v(f, 1; b)$ .

Cabe destacar la potencia de este teorema, pues proporciona la cantidad exacta de raíces que tiene un polinomio en un intervalo casi arbitrario. En este sentido, se diferencia de otros resultados como la regla de los signos de Descartes, que da una cota al número de raíces positivas del polinomio (además de su paridad). A cambio, el coste computacional de calcular la secuencia de Sturm de un polinomio es relativamente elevado. Se puede encontrar una descripción más detallada del algoritmo en [1].

## B.2. Conjuntos semialgebraicos y teorema de Tarski-Seidenberg

Ahora, demostramos algunas propiedades de los conjuntos semialgebraicos, incluidas las que se han citado en el cuerpo del trabajo.

**Definición B.22.** Dado un cuerpo real-cerrado  $R$  y un número natural  $n \geq 1$ , se define la familia de conjuntos semialgebraicos de  $R^n$  como la menor familia de subconjuntos de  $R^n$  que cumple:

- i) incluye al conjunto  $\{x \in R^n : f(x) > 0\}$  para todo polinomio  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ ,
- ii) es cerrada por complementarios y uniones e intersecciones finitas.

**Proposición B.23.** Un conjunto  $S \subseteq R^n$  es semialgebraico si y solo si se puede escribir como unión finita de conjuntos de la forma

$$\{x \in R^n : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0, \quad g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0\}, \quad (14)$$

donde  $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_\ell \in R[x_1, \dots, x_n]$ .

*Demostración.* Denotamos por  $X \subseteq \mathcal{P}(R^n)$  a la familia de conjuntos de la forma (14). Queremos probar que la familia formada por uniones finitas de conjuntos de  $X$ , que denotamos por  $\bigcup X$ , satisface ambas condiciones de la Definición B.22. La condición i) es inmediata, pues  $\{x \in R^n : f(x) > 0\} \in X \subseteq \bigcup X$  para todo polinomio  $f \in R[x]$ .

Probamos que satisface también la condición ii): en primer lugar, observamos que  $X$  es cerrado por intersecciones finitas. Además, es claro que  $\bigcup X$  es cerrado por uniones finitas. Ahora, sean  $A, B \in \bigcup X$  donde  $A = \bigcup_i A_i$ ,  $B = \bigcup_j B_j$  con  $A_i, B_j \in X$  para todo  $i, j$ . Entonces,

$$A \cap B = \bigcup_i A_i \cap \bigcup_j B_j = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j \in \bigcup X$$

Además, si  $T = \{x \in R^n : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0, \quad g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0\} \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} T^c &= \bigcup_{i=1}^r \{f_i(x) \neq 0\} \cup \bigcup_{j=1}^\ell \{g_j(x) \leq 0\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^r (\{-f_i(x) > 0\} \cup \{f_i(x) > 0\}) \cup \bigcup_{j=1}^\ell (\{-g_j(x) > 0\} \cup \{g_j(x) = 0\}) \in \bigcup X. \end{aligned} \quad (15)$$

Por tanto, dado  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i \in \bigcup X$ , con  $A_i \in X$ , entonces  $A^c = (\bigcup_{i=1}^m A_i)^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c \in \bigcup X$ .  $\square$

*Observación.* En virtud de la proposición anterior, un conjunto es semialgebraico si y solo si se puede definir mediante una combinación finita de conjunciones, disyunciones y negaciones de igualdades y desigualdades polinómicas. Una manera de formalizar esta noción es mediante lógica de primer orden. Basta saber que en el lenguaje de los anillos ordenados, una fórmula de primer orden es precisamente una combinación de disyunciones, conjunciones y negaciones de fórmulas atómicas del tipo  $f_1(x_1, \dots, x_n) = f_2(x_1, \dots, x_n)$  o  $f_1(x_1, \dots, x_n) > f_2(x_1, \dots, x_n)$ , donde  $f_1, f_2$  son polinomios. La única salvedad es que una fórmula de primer orden puede contener también cuantificadores sobre algunas de las variables que contiene, lo cual no parece estar permitido en la caracterización anterior de conjunto semialgebraico. La interpretación en lógica de primer orden de la Proposición B.23 es la siguiente:

**Proposición B.24.** Un conjunto  $S \subseteq R^n$  es semialgebraico si y solo si existen una fórmula de primer orden sin cuantificadores en el lenguaje de los anillos ordenados  $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_r)$  y elementos  $a_1, \dots, a_r \in R$  de modo que

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)\}.$$

**Definición B.25.** En algunos contextos será útil usar la terminología de *combinación booleana* para referirse a una de estas composiciones finitas de negaciones, disyunciones y conjunciones de ecuaciones e inecuaciones polinómicas.

**Teorema de Tarski-Seidenberg**

En esta subsección, denotaremos  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  e  $y$  una sola variable.

*Notación.* Denotamos signo a la función dada por

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{para todo } x \in R.$$

**Teorema B.26 (Tarski-Seidenberg).** Sea  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  y sea  $y$  una variable. Supongamos que tenemos  $f_i = h_{i,m_i}(\mathbf{x})y^{m_i} + \dots + h_{i,0}(\mathbf{x})$  polinomio en  $\mathbb{Z}[\mathbf{x}, y]$  para  $i = 1, \dots, s$ ; así como una función  $\sigma : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ . Entonces, existe una combinación booleana de ecuaciones e inecuaciones polinómicas en las variables  $\mathbf{x}$ , que denotamos  $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ , de forma que para cada  $x \in R^n$ , el sistema

$$\begin{cases} \text{signo}(f_1(\mathbf{x}, y)) = \sigma(1) \\ \dots \\ \text{signo}(f_s(\mathbf{x}, y)) = \sigma(s) \end{cases}$$

tiene alguna solución  $y \in R$  si y solo si se cumple la condición  $\mathcal{B}(x)$ .

*Observación.* El hecho de que los polinomios  $f_i$  tengan coeficientes enteros no supone ninguna limitación, pues podemos ampliar el número de variables e incluir los coeficientes de cada uno de los polinomios como un parámetro.

Incluimos solamente una idea general de la prueba. Se trata de demostrar el resultado por inducción sobre los grados en  $y$  de los polinomios  $f_i$ , pues el resultado es trivial en el caso base, que corresponde a que todos los polinomios sean constantes en  $y$ . Primero, introducimos una definimos un concepto sobre el que se basa la demostración del Teorema B.26.

**Definición B.27.** Sean  $f_1, \dots, f_s$  polinomios en  $R[x]$ , donde  $x$  es una sola variable. Si denotamos por  $x_1 < x_2 < \dots < x_r$  a las raíces de todos los  $f_k$  no idénticamente nulos, y con la convención  $x_0 := -\infty$ ,  $x_{r+1} := +\infty$ , entonces  $\text{signo}(f_k(x))$  es constante en cada intervalo  $I_i := (x_i, x_{i+1})$  para  $i = 0, 1, \dots, r$ . Denotamos por  $\text{signo}(f_k(I_i))$  al signo constante que toma  $f_k$  en dicho intervalo. Con estas convenciones, la información sobre los signos que toman los polinomios se puede resumir en una matriz  $\text{signos}(f_1, \dots, f_s) \in \mathcal{M}_{s \times 2r+1}$ , cuya  $k$ -ésima fila es

$$(\text{signo}(f_k(I_0)), \text{signo}(f_k(x_1)), \text{signo}(f_k(I_1)), \dots, \text{signo}(f_k(x_r)), \text{signo}(f_k(I_r))),$$

representando de esta manera los signos que toma  $f_k$  sobre todo  $R$ . Llamaremos a esta matriz *tabla de signos* de  $f_1, \dots, f_s$ .

*Observación.* Con la notación anterior, dada una función  $\sigma : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , el sistema

$$\begin{cases} \text{signo}(f_1(x)) = \sigma(1) \\ \vdots \\ \text{signo}(f_s(x)) = \sigma(s) \end{cases}$$

tiene una solución en  $R$  si y solo si  $(\sigma(1), \dots, \sigma(s))^t$  es una columna de la tabla de signos de  $f_1, \dots, f_s$ .

La herramienta fundamental que permite realizar el caso inductivo en la demostración del principio de Tarski-Seidenberg es el siguiente lema:

**Lema B.28.** Sean  $f_1, \dots, f_s \in R[x]$  con  $f_s$  no constante y  $f_1, \dots, f_{s-1}$  no nulos. Denotamos por  $f'_s$  a la derivada de  $f_s$  y sean  $g_1, \dots, g_{s-1}, g_s$  los restos de la división de  $f_s$  por  $f_1, \dots, f_{s-1}, f'_s$ , respectivamente. Entonces, la tabla de signos de  $f_1, \dots, f_s$  está determinada por la tabla de signos de  $f_1, \dots, f_{s-1}, f'_s, g_1, \dots, g_{s-1}, g_s$ .

*Demostración.* Conocida la tabla de signos  $W := \text{signos}(f_1, \dots, f_{s-1}, f'_s, g_1, \dots, g_{s-1}, g_s)$ , podemos extraer la secuencia de raíces de  $f_1, \dots, f_{s-1}, f'_s$ , que denotamos  $x_1 < \dots < x_r$ . Además,  $\text{signo}(f_s(x_i))$  queda determinado por  $W$ : para cada  $i$ ,  $x_i$  es raíz de algún  $f_k$  con  $k = 1, \dots, s-1$  o de  $f'_s$ . En el primer caso,  $f_s(x_i) = g_k(x_i)$ , y en el segundo,  $f_s(x_i) = g_s(x_i)$ . La tabla  $W$  nos permite saber qué caso se da, además del signo de  $g_k(x_i)$  y de  $g_s(x_i)$ . Escribimos también  $x_0 := -\infty$ ,  $x_{r+1} := +\infty$  y  $\text{signo}(f_s(x_0)) := \text{signo}(f'_s(I_0))$ ,  $\text{signo}(f_s(x_{r+1})) := \text{signo}(f'_s(I_{r+1}))$ .

Como el signo de  $f'_s$  es constante en cada  $I_i := (x_i, x_{i+1})$ ,  $f_s$  es monótono en cada uno dichos intervalos. Por tanto, se cumple que  $f_s$  tiene a lo sumo una raíz en  $I_i$  y  $f_s$  tiene una raíz en  $I_i$  si y solo si  $\text{signo}(f_s(x_i)) \cdot \text{signo}(f_s(x_{i+1})) < 0$ .

Por tanto, aunque no necesariamente sabemos calcular su valor, sí podemos determinar el número de raíces de  $f_s$ , así como su posición dentro del orden  $x_1 < \dots < x_r$ . Denotamos por  $y_1 < \dots < y_m$  a las raíces de  $f_s$ . Por el teorema de Rolle, entre dos raíces consecutivas de  $f_s$ ,  $y_i, y_{i+1}$ , usando  $W$  podemos encontrar al menos una raíz  $x_k$  de  $f'_s$ . Así, sabemos que  $\text{signo}(f_s((y_i, y_j))) = \text{signo}(f'_s(x_k))$ . Por último,  $\text{signo}(f_s((-\infty, y_1))) = \text{signo}(f'_s(I_0))$ ,  $\text{signo}(f_s((y_m, +\infty))) = \text{signo}(f'_s(I_r))$ .

Esta información permite reconstruir la tabla  $\text{signos}(f_1, \dots, f_s)$ .  $\square$

**Corolario B.29.** Si  $S \subseteq R^{n+k}$  es un conjunto semialgebraico, entonces su proyección sobre las  $n$  primeras coordenadas  $\Pi_n(S)$  es también un conjunto semialgebraico.

**Corolario B.30.** Sea  $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_\ell)$ , y sea  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  una fórmula de primer orden en el lenguaje de los anillos ordenados (posiblemente con cuantificadores). Entonces, para todo  $\bar{a} \in R^\ell$ , el conjunto  $S = \{x \in R^n : \Phi(x, \bar{a})\}$  es semialgebraico.

**Proposición B.31.** Si  $S \subseteq R^n$  es un conjunto semialgebraico, entonces su adherencia  $\bar{S}$  y su interior  $\overset{\circ}{S}$  son ambos semialgebraicos.

*Demostración.* Por definición de adherencia,

$$\bar{S} = \{x \in R^n : \forall t > 0, \exists y \in S \quad \|x - y\| < t\}. \quad (16)$$

La fórmula usada en (16) se puede traducir fácilmente en una fórmula de primer orden válida, pues tanto  $t > 0$  como  $y \in S$  son expresables como fórmulas de primer orden, por ser  $S$  semialgebraico. Por la proposición B.31, se tiene que  $\bar{S}$  es semialgebraico. Para  $\overset{\circ}{S}$ , basta con notar que  $\overset{\circ}{S} = R^n \setminus \overline{R^n \setminus S}$ .  $\square$

*Observación.* Interpretado en términos de lógica de primer orden, el teorema de Tarski-Seidenberg prueba que la teoría de los cuerpos real-cerrados tiene *eliminación de cuantificadores*. Esto permite probar que la teoría de los cuerpos real-cerrados es completa y, por tanto, dos modelos suyos cualesquiera deben satisfacer las mismas fórmulas en lógica de primer orden. Bastantes propiedades conocidas de  $\mathbb{R}$  se pueden extender de esta forma a cualquier cuerpo real-cerrado.

Otro importante resultado que se deriva del teorema de Tarski-Seidenberg es el de descomposición algebraica cilíndrica.

**Teorema B.32 (Descomposición algebraica cilíndrica).** Sean  $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  polinomios en  $n+1$  variables con coeficientes en  $R$ . Existe una partición de  $R^n$  en una cantidad finita de conjuntos semialgebraicos  $A_1, \dots, A_m$ , y para cada  $i = 1, \dots, m$ , una cantidad finita (posiblemente cero) de funciones  $\xi_{i,j} : A_i \rightarrow R$  semialgebraicas y continuas, tales que:

- i) Para cada  $x \in A_i$ ,  $\xi_{i,1}(x) < \dots < \xi_{i,\ell_i}(x)$  son todas las raíces de los polinomios  $f_1(x, y), \dots, f_s(x, y)$  que no sean idénticamente cero.
- ii) Para cada  $x \in A_i$ , los signos de  $f_k(x, y)$ ,  $k = 1, \dots, s$  solo dependen de los signos de  $y - \xi_{i,j}$  para  $j = 1, \dots, \ell_i$ . En particular, el signo de  $f_k(\xi_{i,j}(x))$  es constante en  $A_i$  para todo  $i, j, k$ .

**Definición B.33.** Dados unos polinomios  $f_1, \dots, f_s \in R[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , diremos que una colección de conjuntos  $A_i$  y funciones semialgebraicas  $\xi_{i,j}$  que cumplan las conclusiones del teorema anterior son una descomposición algebraica cilíndrica de  $f_1, \dots, f_s$ . Denotaremos por  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, \ell_i})_{i=1, \dots, m}$  a dicha descomposición.

### B.3. Caminos semialgebraicos en conjuntos semialgebraicos abiertos

En esta memoria se ha trabajado habitualmente con un camino semialgebraico  $\varphi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dentro de un conjunto semialgebraico abierto  $\mathcal{S}$ , y se ha argumentado que existen polinomios  $f_1, \dots, f_s \in R[\mathbf{x}]$  tales que  $\varphi((0, \varepsilon]) \subset \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \subset \mathcal{S}$ . Justificamos ahora esta afirmación, para lo cual es necesario conocer una importante propiedad de los conjuntos semialgebraicos: todo conjunto semialgebraico abierto puede escribirse como una unión finita de abiertos semialgebraicos *básicos*, los que son de la forma  $\{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$  para ciertos polinomios  $f_1, \dots, f_s \in R[\mathbf{x}]$ . Para la demostración de este resultado, nos referimos a [2].

**Proposición B.34 (Teorema de Finitud).** Sea  $A \subset R^n$  un conjunto semialgebraico abierto. Entonces,  $A$  es unión finita de abiertos semialgebraicos básicos.

Ahora, probamos la afirmación sobre caminos semialgebraicos a la que se aludía anteriormente.

**Proposición B.35.** Sean  $\mathcal{S} \subset R^n$  un conjunto semialgebraico,  $p \in \overline{\mathcal{S}}$  y  $\varphi : [0, 1] \rightarrow R^n$  una aplicación semialgebraica tal que  $\varphi(0) = p$  y  $\varphi((0, 1]) \subset \mathcal{S}$ . Entonces, existen polinomios  $f_1, \dots, f_s \in R[\mathbf{x}]$  y un elemento  $\varepsilon \in R$ ,  $\varepsilon > 0$  tales que

$$\varphi((0, \varepsilon)) \subset \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \subset \mathcal{S}.$$

*Demostración.* Usando la Proposición B.34, escribimos  $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^r \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\}$ . Denotamos, para  $i = 1, \dots, r$ ,  $F_i := \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is} > 0\}$ . Ahora, como  $\varphi$  es una aplicación semialgebraica,  $\varphi^{-1}(F_i)$  es un conjunto semialgebraico de  $R$  para  $i = 1, \dots, r$ , luego es vacío o una unión finita de puntos e intervalos abiertos. En el segundo caso, escribimos  $\varphi^{-1}(F_i) = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{\nu} \{p_{ik}\}$ . Por tanto, denotando  $I := \{i \in \{1, \dots, r\} : \varphi^{-1}(F_i) \neq \emptyset\}$ , se tiene que

$$(0, 1] = \varphi^{-1}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(F_i) = \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j=1}^{\ell} I_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{\nu} \{p_{ik}\} \right).$$

Afirmamos que alguno de los intervalos  $I_{ij}$  debe ser de la forma  $(0, \varepsilon)$  para  $\varepsilon > 0$ . De lo contrario, denotamos  $I_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$  donde  $a_{ij}, b_{ij} > 0$  y tomamos  $\delta := \min \{a_{ij}, p_{ik} : i \in I, j = 1, \dots, \ell, k = 1, \dots, \nu\} > 0$ . Entonces, se tiene que, para todo  $x \in \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j=1}^{\ell} I_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{\nu} \{p_{ik}\} \right) = (0, 1]$ ,  $x \geq \delta > 0$ , lo cual es absurdo. En consecuencia,  $I_{ij} = (0, \varepsilon)$  para algún  $i, j$ . Por tanto,  $\varphi((0, \varepsilon)) \subset F_i$  y se tiene el resultado.  $\square$

## C. Lema de Selección de Curvas

### C.1. Conexión semialgebraica

Los cuerpos real-cerrados arbitrarios no presentan un buen comportamiento con respecto a la conexión. Considérese, por ejemplo, el cuerpo  $R := \mathbb{R}_{alg}$  de los números reales algebraicos sobre  $\mathbb{Q}$ . Este cuerpo no es conexo, pues el conjunto  $[-\pi, \pi] \cap R$  es a la vez abierto y cerrado en  $R$ . En cambio, sí que presentan buenas propiedades con respecto a la conexión semialgebraica, que definimos a continuación.

**Definición C.1.** Un conjunto  $A \subseteq R^n$  se dice semialgebraicamente conexo si para todos  $U, V \subseteq A$  semialgebraicos, abiertos en  $A$  y disjuntos tales que  $U \cup V = A$ , se tiene que  $U = \emptyset$  o  $V = \emptyset$ .

*Observación.* Todo cuerpo real-cerrado  $R$  es semialgebraicamente conexo, pues los conjuntos semialgebraicos en  $R$  son uniones finitas de puntos e intervalos abiertos. Del mismo modo, todo intervalo de  $R$  es semialgebraicamente conexo.

También se puede definir la noción análoga a la conexión por caminos.

**Definición C.2.** Un conjunto  $A \subseteq R^n$  se dice conexo por caminos semialgebraicos si para cada par  $x, y \in A$ , existe una aplicación semialgebraica y continua  $f : [0, 1] \rightarrow A$  tal que  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .

*Observación.* El intervalo  $[0, 1]$  de la definición anterior es un intervalo en el cuerpo correspondiente  $R$ . Por tanto, no se puede asegurar que sea conexo, como muestra el comentario al principio de esta sección. Así, la conexión por caminos semialgebraicos no implica conexión en el sentido tradicional: el propio intervalo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}_{alg}$  es un ejemplo de ello.

En cambio,  $[0, 1] \subseteq R$  sí es semialgebraicamente conexo, y en consecuencia la conexión por caminos semialgebraicos sí implica conexión semialgebraica. En particular,  $R^n$  y cualquier subconjunto convexo de  $R^n$  son semialgebraicamente conexos.

### C.2. Demostración del Lema de Selección de Curvas

Un importante resultado en geometría real algebraica que ha sido en este trabajo es el llamado Lema de Selección de Curvas, una herramienta clásica en geometría real algebraica. Dedicamos esta sección a demostrar dicho resultado, cuyo enunciado presentamos a continuación.

**Teorema C.3 (Lema de Selección de Curvas).** Sean  $A \subseteq R^n$  un conjunto semialgebraico y  $x \in \overline{A}$ . Entonces, existe una aplicación semialgebraica continua  $f : [0, 1] \rightarrow R^n$  tal que  $f(0) = x$  y  $f((0, 1]) \subseteq A$ .

La demostración del Teorema C.3 necesitará de algunos lemas previos.

**Lema C.4.** Si  $\varphi : A \rightarrow R$  es una función semialgebraica, entonces existe un polinomio  $f \in R[x, y]$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in A$ .

*Demostración.* Por ser  $\text{Graf}(\varphi)$  semialgebraico, existen polinomios  $f_{i,j}, g_{i,j}$  tales que

$$\text{Graf}(f) = \bigcup_{i=1}^n \{(x, y) \in R^{m+1} : f_{i,1}(x, y) = \cdots = f_{i,k_i}(x, y) = 0, \quad g_{i,1} > 0, \dots, g_{i,\ell_i} > 0\}. \quad (17)$$

No pueden ser todos los  $f_{i,j}$  idénticamente nulos, pues entonces  $\text{Graf}(f)$  sería un abierto no vacío de  $R^{m+1}$ . Tomando  $f$  como el producto de todos los  $f_{i,j}$  no nulos, la igualdad (17) garantiza que  $f(x, \varphi(x)) = 0$  para todo  $x \in A$ , como queríamos.  $\square$

**Lema C.5.** Sea  $\varphi : (0, r) \rightarrow R$  una función semialgebraica continua y acotada. Entonces,  $\varphi$  se puede extender a 0 con continuidad.



*Demostración.* Usando el Lema C.4, tomamos  $f \in R[x, y]$  no nulo tal que  $f(x, \varphi(x)) = 0$  en  $(0, r)$ , y podemos suponer que  $x$  no divide a  $f$ . Demostramos ahora el resultado por inducción sobre  $d := \deg_y(f)$ . Si  $d = 1$ , entonces  $f(x, y) = P(x) + yQ(x)$ , para ciertos polinomios  $P, Q \in R[x]$ . Reduciendo el intervalo  $(0, r)$ , podemos suponer también que  $Q$  no se anula en todo el intervalo. En consecuencia,

$$0 = f(x, \varphi(x)) = P(x) + \varphi(x)Q(x) \rightsquigarrow \varphi(x) = -\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in (0, r).$$

Puesto que  $\varphi$  es acotada en  $(0, r)$ ,  $x$  no puede dividir a  $Q$ , y por tanto el cociente  $\varphi(0) := \frac{P(0)}{Q(0)}$  está bien definido y es continuo en 0.

Si  $d > 1$ , tomamos  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, \ell_i})_{i=1, \dots, m}$  una descomposición algebraica cilíndrica de  $(f, \frac{\partial f}{\partial y})$ . Nuevamente reduciendo el intervalo  $(0, r)$  si fuera necesario, se puede suponer que  $A_1 = (0, r)$ . Como  $f(x, \varphi(x)) = 0$  para todo  $x \in (0, r)$ , se tiene que para cada  $x$ , existe un  $j_x$  tal que  $\varphi(x) = \xi_{1,j_x}(x)$ . De hecho, usando que  $(0, r)$  es semialgebraicamente conexo y que las funciones  $\varphi, \xi_{1,j}$  son continuas y verifican  $\xi_{1,1} < \dots < \xi_{1,\ell_1}$ , un argumento estándar de conexión muestra que existe  $j_0$  tal que  $\varphi(x) = \xi_{1,j_0}$  para todo  $x \in (0, r)$ . Si  $\varphi$  es también raíz de  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , se tiene el resultado por hipótesis de inducción. De lo contrario, el signo de  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$  es constante en  $(0, r)$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) > 0$  en  $(0, r)$ .

Elegimos ahora dos funciones semialgebraicas continuas en  $[0, r]$   $\rho, \theta$  tales que  $\rho < \varphi < \theta$  en  $(0, r)$  y el signo de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es constante en  $(\rho(x), \varphi(x))$  para todo  $x \in (0, r)$ . Para ello, será útil denotar  $M$  una cota superior de  $|\varphi|$ .

Si  $j_0 = \ell_1$ , podemos tomar  $\theta \equiv M + 1$ . Si  $j_0 < \ell_1$ , entonces por el teorema de Rolle,  $\xi_{1,j_0+1}$  es necesariamente una raíz de  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Si  $\xi_{1,j_0+1}$  es acotada, entonces, por hipótesis de inducción, se puede extender con continuidad a 0. En ese caso, tomamos  $\theta = \xi_{1,j_0+1}$ . Por el contrario, si no es acotada, entonces suficientemente cerca de 0 también podemos tomar  $\theta \equiv M + 1$ . Para elegir la función  $\rho$ , se procede de forma similar. Una vez elegidas estas funciones, procedemos a extender  $\varphi$  a 0.

Si  $\rho(0) = \theta(0)$ , entonces definir  $\varphi(0) := \theta(0)$  da una extensión continua de  $\varphi$ .

Si  $\rho(0) < \theta(0)$ , probamos primero que  $f$  tiene una única raíz  $y_0$  en el intervalo  $[\rho(0), \theta(0)]$ . Después veremos que definiendo  $\varphi(0) := y_0$  se obtiene una extensión continua de  $\varphi$ . En efecto, por elección de  $\rho, \theta$  se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0, \quad f(x, \rho(x)) < 0, \quad f(x, \theta(x)) > 0 \quad \text{para todo } x \in (0, r), \quad y \in (\rho(x), \theta(x)).$$

Luego por continuidad, (1)  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \geq 0$  para  $y \in [\rho(0), \theta(0)]$  y (2)  $f(0, \rho(0)) \leq 0 \leq f(0, \theta(0))$ . Por (2), si  $f(0, y)$  fuera constante, tendría que ser nulo, y esto no puede suceder porque hemos supuesto que  $x$  no divide a  $f$ . Por tanto,  $f(0, y)$  es un polinomio no constante y, por (1), no decreciente en el intervalo  $[\rho(0), \theta(0)]$ . Esto implica que  $f(0, y)$  es estrictamente creciente en  $[\rho(0), \theta(0)]$ , pues si existieran  $y_1, y_2 \in [\rho(0), \theta(0)]$  tales que  $y_1 < y_2$  y  $f(0, y_1) = f(0, y_2)$  entonces por monotonía  $f(0, y) = f(0, y_1)$  para todo  $y \in [y_1, y_2]$ . Como  $f(0, y)$  es un polinomio, se tendría que  $f(0, y) \equiv f(0, y_1)$  constante. Esto, junto con (2), prueba que tiene exactamente una raíz  $y_0$  en dicho intervalo.

Consideramos ahora  $\varphi(0) := y_0$ . Falta probar que esto es una extensión *continua* de  $\varphi$ . Sabemos que

$$f(0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad f(0, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad \rho(0) < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \theta(0)$$

para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por continuidad, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in (0, \delta)$ ,

$$f(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad f(x, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad \rho(x) < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \theta(x),$$

y por tanto  $\varphi(x)$ , por ser la única raíz de  $f(x, y)$  en  $(\rho(x), \theta(x))$ , verifica  $\varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  siempre que  $x \in (0, \delta)$ . □

*Observación.* i) Sin la hipótesis de semialgebraicidad, el enunciado anterior sería falso. Considérese, por ejemplo, la función  $f(x) = \sin(1/x)$  en  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ , que no admite una extensión continua a 0.

En particular, esto prueba que la función anterior no es semialgebraica. En consecuencia, tampoco la función  $\sin(x)$  puede ser semialgebraica, pues las funciones semialgebraicas son estables por composición.

ii) El resultado se puede extender a toda  $\varphi : (0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y acotada, sin más que aplicar el Lema C.5 coordenada a coordenada.

Para aplicar el lema anterior al caso en que la función  $\varphi$  venga dada por las raíces de un polinomio, será útil el siguiente resultado:

**Lema C.6.** Sea  $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x \in R[x]$  un polinomio mónico, y sea  $\xi$  una raíz de  $f$ . Entonces,

$$\xi \leq \max\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $|\xi| \geq 1$  y veamos que  $|\xi| \leq |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$ . Tenemos que

$$0 = f(\xi) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_0 = \xi^n(1 + a_{n-1}\xi^{-1} + \cdots + a_0\xi^{-n}).$$

Y por tanto,

$$1 + a_{n-1}\xi^{-1} + \cdots + a_0\xi^{-n} = 0 \rightsquigarrow 1 = |a_{n-1}\xi^{-1} + \cdots + a_0\xi^{-n}|.$$

Usando ahora la desigualdad triangular y que  $|\xi| \geq 1$ , se obtiene que

$$1 \leq |a_{n-1}||\xi|^{-1} + \cdots + |a_0||\xi|^{-n} \leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)|\xi|^{-1},$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Definición C.7.** Diremos que una familia de polinomios  $\mathcal{F} \subseteq R[x]$  es estable bajo derivación si no contiene al polinomio nulo y para todo  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene  $f' \in \mathcal{F}$  o  $f' = 0$ .

**Lema C.8 (Lema de Thom).** Sea  $f_1, \dots, f_s$  una familia de polinomios estable bajo derivación, y sea  $\sigma : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  una función. Si denotamos

$$A_\sigma := \{x \in R : \text{signo}(f_k(x)) = \sigma(k)\},$$

y  $A_{r(\sigma)}$  el conjunto obtenido al relajar las desigualdades estrictas que definen  $A_\sigma$ , entonces:

i)  $A_\sigma$  es vacío, o es un punto, o es un intervalo abierto.

ii) Si  $A_\sigma$  es no vacío, entonces su adherencia es  $A_{r(\sigma)}$ .

iii) Si  $A_\sigma$  es vacío, entonces  $A_{r(\sigma)}$  es vacío o un solo punto.

*Demostración.* Por inducción sobre la cantidad de polinomios  $s$ . En el caso base  $s = 1$ , una familia formada por un único polinomio es estable bajo derivación si y solo si dicho polinomio es constante. El resultado es trivial en ese caso.

Supongamos ahora el resultado probado para  $s$ . Sean  $f_1, \dots, f_s, f_{s+1}$  estables bajo derivación, y  $\sigma' : \{1, \dots, s, s+1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ . Queremos ver que  $A_{\sigma'} := \{x \in R : \text{signo}(f_k(x)) = \sigma(k), k = 1, \dots, s, s+1\}$  verifica las propiedades i), ii), iii). Denotamos  $\sigma := \sigma'|_{\{1, \dots, s\}}$ . Tras reordenar los polinomios si fuera necesario, podemos suponer que  $f_{s+1}$  es de grado maximal entre los  $f_i$ . De este modo, la familia  $f_1, \dots, f_s$  es estable por derivación y por hipótesis de inducción, el conjunto  $A_\sigma := \{x \in R : \text{signo}(f_k(x)) = \sigma(k), k = 1, \dots, s\}$  cumple las conclusiones i), ii), iii). Observemos también que  $A_{\sigma'} = A_\sigma \cap \{\text{signo}(f_{s+1}(x)) = \sigma'(s+1)\}$  y  $A_{r(\sigma')} \subseteq A_{r(\sigma)}$ .

Si  $A_\sigma$  es vacío, entonces  $A_{\sigma'}$  es también vacío. Además, por *iii*),  $A_{r(\sigma)}$  es vacío o un solo punto. Por tanto, también  $A_{r(\sigma')}$  es vacío o un solo punto.

Si  $A_\sigma$  es un punto, entonces coincide con  $A_{r(\sigma)}$ . Si  $A_{\sigma'} = \emptyset$ , no hay nada que probar pues  $A_{r(\sigma')} \subseteq A_{r(\sigma)}$ . Si  $A_{\sigma'}$  es un punto, entonces, como  $A_{r(\sigma')}$  contiene a  $A_{\sigma'}$  y tiene a lo sumo un punto, necesariamente  $A_{r(\sigma')} = A_{\sigma'} = \overline{A_{\sigma'}}$ .

Si  $A_\sigma$  es un intervalo abierto, argumentamos de la siguiente manera: si  $f_{s+1}$  es constante, entonces el resultado es trivial, pues todos los  $f_i$  serían constantes. Si  $f_{s+1}$  no es constante, entonces su derivada  $f'_{s+1}$  es no nula y coincide con  $f_{k_0}$  para algún  $k_0 \in \{1, \dots, s\}$ . Como ninguno de los  $f_1, \dots, f_s$  es nulo, si fuera  $\sigma(k) = 0$  para algún  $k = 1, \dots, s$ , entonces  $A_\sigma$  sería un conjunto finito, que no es el caso que nos ocupa. Por tanto,  $f'_{s+1} = f_{k_0}$  tiene signo no nulo y constante en  $A_\sigma$ . Por el Teorema del Valor Medio, se deduce que  $f_{s+1}$  es estrictamente monótono en el intervalo cerrado  $A_{r(\sigma)}$ . Este hecho, junto con un sencillo análisis de casos, permite demostrar el resultado.  $\square$

**Definición C.9.** Diremos que un polinomio  $f \in R[\mathbf{x}, y]$  es cuasimónico con respecto a  $y$  si su coeficiente principal en  $y$  es constante, esto es,

$$f(\mathbf{x}, y) = a_d y^d + g_{d-1}(\mathbf{x}) y^{d-1} + \dots + g_0(\mathbf{x})$$

con  $a_d \in R$  no nulo.

La demostración del lema de selección de curvas se hará en paralelo a la demostración del siguiente lema:

**Lema C.10.** Sea  $f_1, \dots, f_s$  una familia de polinomios en  $n+1$  variables  $(\mathbf{x}, y)$ , donde  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ . Supongamos, además, que la familia es estable bajo derivación con respecto a  $y$  y que todos los  $f_k$  son cuasimónicos con respecto a  $y$ . Sea  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, \ell_i})_{i=1, \dots, m}$  una descomposición algebraica cilíndrica de  $f_1, \dots, f_s$ . Entonces,  $\xi_{i,j}$  puede extenderse con continuidad a  $\overline{A_i}$  para todo  $i, j$ .

*Demostración.* Demostramos el Teorema C.3 (Lema de Selección de Curvas) y el Lema C.10 por inducción de forma simultánea, siguiendo los siguientes pasos:

- (1) El Teorema C.3 es trivial en el caso  $n = 1$ .
- (2) El Teorema C.3 para  $n$  implica el Lema C.10 para  $n$ .
- (3) El Teorema C.3 para  $n$  y el Lema C.10 para  $n$  implican el Teorema C.3 para  $n + 1$ .

**Paso 1.** Los conjuntos semialgebraicos en  $R$  son uniones finitas de puntos e intervalos abiertos, por lo que la conclusión del Teorema C.3 se verifica en este caso.

**Paso 2.** Sean  $f_1, \dots, f_s$  cuasimónicos y estables bajo derivación con respecto a  $y$ ; y tomemos una descomposición algebraica cilíndrica suya  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, \ell_i})_{i=1, \dots, m}$ . Fijando  $i, j$  y  $x_0 \in \overline{A_i}$ , demostramos que  $\xi_{i,j}$  puede extenderse de forma continua a  $x_0$ .

En primer lugar, encontramos un valor candidato para  $\xi_{i,j}(x_0)$ . Como  $x_0 \in \overline{A_i} \subseteq R^n$ , también se tiene  $x_0 \in \overline{A_i} \cap B(x_0, 1)$ , y aplicando el Teorema C.3 para  $n$ , existe  $g : [0, 1] \rightarrow R^n$  semialgebraica y continua tal que  $g(0) = x_0$ ,  $g((0, 1]) \subseteq A_i \cap B(x_0, 1)$ . Definimos entonces  $\varphi := \xi_{i,j} \circ g|_{(0, 1]} : (0, 1] \rightarrow R$ . Aplicamos ahora el Lema C.5 para extender  $\varphi$  a 0 de forma continua. Para ello, falta ver que  $\varphi$  es acotada: en efecto, la gráfica de  $\xi_{i,j}$  está contenida en los ceros de algún  $f_k$ . Si  $f_k(\mathbf{x}, y) = y^d + g_{d-1}(\mathbf{x})y^{d-1} + \dots + g_0(\mathbf{x})$ , entonces aplicando el Lema C.6, se tiene que  $|\xi_{i,j}(x)| \leq \max\{1, |g_{d-1}(x)| + \dots + |g_0(x)|\}$ . Puesto que el polinomio  $|g_{d-1}(x)| + \dots + |g_0(x)|$  es acotado en el conjunto acotado  $\overline{A_i} \cap B(x_0, 1)$ , se tiene que  $\varphi$  es acotada. Así, se puede extender  $\varphi$  a 0.

Veamos entonces que definiendo  $\xi_{i,j}(x_0) := \varphi(0)$  se obtiene una extensión continua de  $\xi_{i,j}$ . Observamos que por las propiedades de la descomposición algebraica cilíndrica, se tiene que  $\text{signo}(f_k(x, \xi_{i,j}(x)))$  es constante en  $A_i$ . Por tanto, si denotamos  $\sigma(k) := \text{signo}(f_k(x, \xi_{i,j}(x)))$  para  $x \in A_i$  y

$$B_\sigma := \{y \in R : \text{signo}(f_k(x_0, y)) = \sigma(k) \text{ para todo } k = 1, \dots, s\},$$

entonces  $\varphi(x) \in \overline{B_\sigma} \subseteq B_\sigma$  para todo  $x \in (0, 1]$ . Por continuidad de  $\varphi$  y siguiendo la notación del Lema C.8, se tiene que  $\varphi(0) \in B_{r(\sigma)}$ . Además, como  $\xi_{i,j}$  es raíz de algún  $f_k$ , necesariamente  $\sigma(k) = 0$  para algún  $k$  y aplicando el Lema de Thom, el conjunto  $B_{r(\sigma)}$  es vacío o un solo punto.

Usamos este hecho para probar que la extensión  $\xi_{i,j}(x_0) := \varphi(0)$  es continua, por contradicción. De lo contrario, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, si definimos  $S_\varepsilon := \{x \in A_i : \|\xi_{i,j}(x) - \varphi(0)\| > \varepsilon\}$ , entonces  $x \in \overline{S_\varepsilon}$ , luego  $x \in \overline{S_\varepsilon \cap B(x_0, 1)}$ . Aplicando nuevamente el Teorema C.3 para  $n$ , se obtiene  $h$  semialgebraica y continua tal que  $h(0) = x_0$  y  $h((0, 1]) \subseteq S_\varepsilon \cap B(x_0, 1)$ . Definimos  $\psi := \xi_{i,j} \circ h|_{(0, 1]}$ , y argumentando de forma análoga al caso anterior, se prueba que  $\psi$  puede extenderse de forma continua a 0. Ahora, por elección de  $\psi$ , se tiene que  $|\varphi(0) - \psi(x)| \geq \varepsilon$  para todo  $x \in (0, 1]$ , luego por continuidad  $\psi(0) \neq \varphi(0)$ . Sin embargo, razonando nuevamente de forma análoga a como se hizo con  $\varphi$ , se tiene que  $\psi(0) \in B_{r(\sigma)}$ , lo cual es imposible si  $\varphi(0) \neq \psi(0)$ .

**Paso 3.** Sean  $A \subseteq R^{n+1}$  semialgebraico,  $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{A}$ , donde  $x_0 \in R^n$  son las  $n$  primeras coordenadas del punto  $z_0$  e  $y \in R$ . Denotamos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  e  $y$  una sola variable. El conjunto  $A$  estará dado por una serie de condiciones sobre los signos de algunos polinomios  $f_1, \dots, f_s \in R[\mathbf{x}, y]$ . Tras un cambio de coordenadas lineal adecuado  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 - a_1 y, \dots, \mathbf{x}'_n = \mathbf{x}_n - a_n y$ , podemos suponer que todos los  $f_k$  son cuasimónicos en  $y$ . Añadiendo después las derivadas de los  $f_k$ , que serán también polinomios cuasimónicos, obtenemos una familia de polinomios estables bajo derivación, así que también supondremos que los polinomios dados cumplen esta condición.

Sea  $(A_i, (\xi_{i,j})_{j=1, \dots, \ell_i})_{i=1, \dots, m}$  una descomposición algebraica cilíndrica de los  $f_k$ . Entonces, el conjunto  $A$  se descompone en una unión finita de conjuntos de la forma

$$(\xi_{i,j}, \xi_{i,k}) := \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in A_i, \xi_{i,j} < y < \xi_{i,k}\}, \text{ o} \quad (18)$$

$$\text{Graf}(\xi_{i,j}) = \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in A_i, y = \xi_{i,j}(x)\}. \quad (19)$$

Por lo tanto, el punto  $(x_0, y_0)$  pertenece a la adherencia de uno de estos conjuntos. Distinguimos ahora dos casos:

*Caso 1:*  $(x_0, y_0) \in \overline{(\xi_{i,j}, \xi_{i,k})}$ . Entonces, por el Lema (C.10) para  $n$ , ambas  $\xi_{i,j}, \xi_{i,k}$  pueden extenderse con continuidad a  $x_0$ . Además, por continuidad,  $\xi_{i,j}(x_0) \leq y_0 \leq \xi_{i,k}(x_0)$ . Si  $\xi_{i,j}(x_0) < y_0 < \xi_{i,k}(x_0)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $\xi_{i,j}(x) < y_0 < \xi_{i,k}(x)$  para todo  $x \in A_i \cap B(x_0, \delta)$ . Aplicando el Teorema C.3 para  $n$ , existe  $g$  semialgebraica y continua tal que  $g(0) = x_0$  y  $g((0, 1]) \subseteq A_i \cap B(x_0, \delta)$ . Entonces, podemos tomar  $f : [0, 1] \rightarrow R^{n+1}$  dada por  $f(t) = (g(t), y_0)$ , que cumple lo pedido en el Teorema C.3. Si  $y_0 = \xi_{i,j}(x_0)$ , aplicando el Teorema C.3 para  $n$ , existe  $g$  aplicación semialgebraica y continua tal que  $g(0) = x_0$ ,  $g((0, 1]) \subseteq A_i$ . Entonces, tomamos  $f(t) = (g(t), (\xi_{i,j} \circ g)(t))$ . En el caso  $y_0 = \xi_{i,k}(x_0)$ , se procede de forma análoga a lo anterior.

*Caso 2:*  $(x_0, y_0) \in \overline{\text{Graf}(\xi_{i,j})}$ . Entonces,  $x_0 \in \overline{A_i}$  y aplicando el Teorema C.3 para  $n$ , existe  $g : [0, 1] \rightarrow R^n$  semialgebraica y continua tal que  $g(0) = x_0$ ,  $g((0, 1]) \subseteq A_i$ . Por el Lema C.10 para  $n$ ,  $\xi_{i,j}$  se extiende de forma continua a  $\overline{A_i}$ . Como  $(x_0, y_0) \in \overline{\text{Graf}(\xi_{i,j})}$ , por continuidad debe ser  $\xi_{i,j}(x_0) = y_0$ . Por tanto, podemos tomar  $f(t) := (g(t), (\xi_{i,j} \circ g)(t))$ . □

*Observación.* El Lema de Selección de Curvas permite demostrar el siguiente resultado, que relaciona la conexión semialgebraica y la conexión por caminos semialgebraicos, y que se ha utilizado en el trabajo.

**Proposición C.11.** *Un conjunto semialgebraico es semialgebraicamente conexo si y solo si es conexo por caminos semialgebraicos.*

*Además, un conjunto semialgebraico en  $\mathbb{R}^n$  es conexo si y solo si es conexo por caminos semialgebraicos.*