

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LÁZARO CÁRDENAS



INGENIERÍA ELECTRÓNICA

ROBÓTICA II

“IMPLEMENTACIÓN DE LA DINÁMICA PARA UN BRAZO ROBÓTICO DE 3 GDL MEDIANTE EL USO DEL ALGORITMO DE NEWTON-EULER”

Realizó

CESAR EDUARDO CONEJO BENITEZ

12560144

CD. LÁZARO CÁRDENAS MICHOACÁN, DICIEMBRE 2016



Av. Melchor Ocampo # 2555, Col. Cuarto Sector, C.P. 60950, Cd. Lázaro
Cárdenas, Michoacán,
Teléfono (753) 53 7 19 77, 53 2 10 40, 53 7 53 91, 53 7 53 92 Dirección Ext.

Contenido

1. Introducción.....	2
2. Estructura del brazo robótico	3
3. Distribución de la masa	4
3.1. Calculo del volumen, masa y centros de gravedad.....	4
3.1.1. Pieza 1.....	5
3.1.2. Pieza 2.....	6
3.1.3. Pieza 3.....	9
3.1.4. Pieza 4.....	13
3.2. Calculo de las coordenadas del centro de gravedad.....	16
3.2.1. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 2	17
3.2.2. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 3	18
3.2.3. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 4	20
3.3. Calculo del tensor de inercia	21
3.3.1. Tensor de inercia de la pieza 2	23
3.3.2. Tensor de inercia de la pieza 3	34
3.3.3. Tensor de inercia de la pieza 4	44
4. Algoritmo iterativo de dinámica de Newton - Euler	55
4.1. Determinación de los valores iniciales	56
4.2. Iteraciones salientes	60
4.2.1. Vínculo 1	60
4.2.2. Vínculo 2	61
4.2.3. Vínculo 3	62
4.3. Iteraciones entrantes	63
4.3.1. Vínculo 3	63
4.3.2. Vínculo 2	63
4.3.3. Vínculo 1	64
5. Simulación del brazo robótico en MATLAB	65
6. Conclusiones	72
7. Referencias.....	72

1. Introducción

Anteriormente en Robótica I solo se consideraba el análisis de la cinemática para determinar la posición, orientación y las matrices de transformación homogénea para un manipulador robótico, despreciando las fuerzas requeridas para producir el movimiento.

En esta práctica se consideran las ecuaciones de movimiento para un manipulador de manera que se produce el movimiento del manipulador debido a los momentos de torsión aplicados por los actuadores.

Para la realización de esta práctica se calculó el volumen total, la masa total y las coordenadas del centro de gravedad de cada pieza que conforma el brazo robótico para posteriormente calcular sus tensores de inercia y estos ser añadidos al algoritmo de Newton-Euler.

2. Estructura del brazo robótico

El brazo robótico a analizar al cuál se le implementara la dinámica, es tridimensional y de tres grados de libertad. En este análisis se supondrá que cada eslabón del manipulador tiene libertad de movimiento sobre su propio eje de giro.

El manipulador robótico consta de una base cuadrática conformada por un cilindro el cuál ayudara a la estructura robótica a realizar el giro sobre sí mismo (pieza 1), de un primer eslabón con una longitud de 9 cm (pieza 2), de un segundo eslabón con una longitud de 15 cm (pieza 3) y finalmente de un tercer eslabón con una longitud de 13 cm el cuál es el que portaría la herramienta (pieza 4).

En la Figura 1 se muestra el diseño del brazo robótico mediante el uso del software SketchUp 8 de Google.

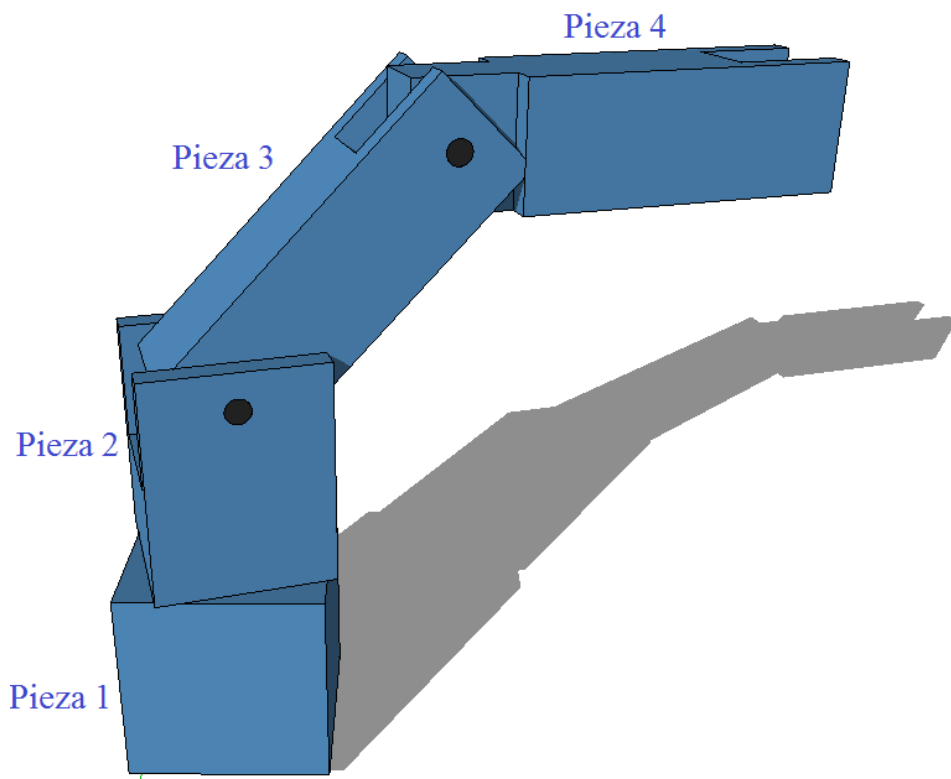


Figura 1. Brazo robótico tridimensional de 3 GDL

3. Distribución de la masa

Para un cuerpo rígido que tiene la libertad de moverse en tres dimensiones, hay un número infinito de posibles ejes de rotación. En el caso de la rotación sobre un eje arbitrario, se necesita una forma completa de caracterizar la distribución de la masa de un cuerpo rígido [Craig, 2006].

Por tal motivo es que para nuestro brazo robótico se realizara la obtención del tensor de inercia para cada eslabón de movimiento. El tensor de inercia se define como una generalización del momento escalar de inercia de un objeto.

A continuación, se mostrará el análisis que se llevó a cabo para la obtención de los tensores de inercia para cada eslabón que constituye al manipulador robótico, empezando por obtener el valor de la masa, el volumen y las coordenadas del centro de gravedad para cada trama.

3.1. Calculo del volumen, masa y centros de gravedad

Para determinar los momentos de torsión, es necesario calcular el volumen, la masa y los centros de gravedad para cada eslabón, es por tal motivo que se mostrara de manera ilustrativa cada uno de los eslabones con sus respectivas formas.

Es necesario aclarar que para la pieza 1 solo se calculara el volumen y la masa para poder determinar la masa total del manipulador robótico. Las demás variables como las coordenadas del centro de gravedad y el tensor de inercia se despreciarán para esta pieza debido a que como es la base, esta no realiza ningún movimiento.

El material usado en los eslabones para el análisis del robot fue de titanio. La densidad del titanio es de $\rho_T = 4.50 \text{ g/cm}^3$.

3.1.1. Pieza 1

En la Figura 2 se muestran las dimensiones de la pieza 1 el cual está conformado de un cubo (V_{CUP1}) y un cilindro ($CP1$). Por lo tanto, se calculará el volumen del cubo (V_{CUP1}) y el volumen del cilindro (V_{CP1}) para obtener el volumen de la pieza 1 (V_{P1}).

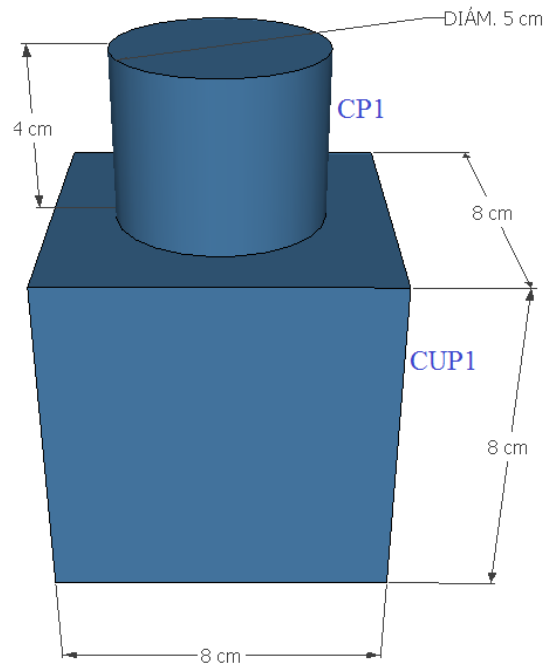


Figura 2. Dimensiones de la pieza 1

A1. Calcular volumen

a) Volumen del cubo

$$V_{CUP1} = l * a * h = (8 \text{ cm})(8 \text{ cm})(8 \text{ cm}) = 512 \text{ cm}^3$$

b) Volumen del cilindro

$$V_{CP1} = \pi * r^2 * h = (\pi)(2.5 \text{ cm})^2(4 \text{ cm}) = 78.5398 \text{ cm}^3$$

c) Volumen de la pieza 1

$$V_{P1} = V_{CUP1} + V_{CP1} = 512 \text{ cm}^3 + 78.5398 \text{ cm}^3 = 590.5398 \text{ cm}^3$$

En seguida se calculó la masa del cubo (M_{CUP1}), la masa del cilindro (M_{CP1}) y la masa de la pieza 1 (M_{P1}).

B1. Calcular masa

a) Masa del cubo

$$M_{CUP1} = V_{CUP1} * \rho_T = (128 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{576 \text{ g}}$$

b) Masa del cilindro

$$M_{CP1} = V_{CP1} * \rho_T = (78.5398 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{353.4291 \text{ g}}$$

c) Masa de la pieza 1

$$M_{P1} = V_{P1} * \rho_T = (206.5398 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = 929.4291 \text{ g} = \mathbf{0.9294 \text{ kg}}$$

3.1.2. Pieza 2

En la Figura 3 se muestran las dimensiones de la pieza 2 en el cual el eslabón en forma de rectángulo ($CREP_2$) está conformado por un prisma rectangular y a este se le quitan cuatro partes (piezas secundarias) las cuales son un cubo rectangular ($CRHP_2$), un cilindro grande ($CHGP_2$) y dos cilindros pequeños ($CH1P_2$ y $CH2P_2$). Por lo tanto, para obtener el volumen de la pieza 2 (V_{P2}), se le restara al volumen del eslabón completo (V_{ECP2}) los volúmenes del cubo rectangular hueco (V_{CRHP2}), del cilindro hueco grande (V_{CHGP2}) y de los dos cilindros huecos pequeños (V_{CH1P2} y V_{CH2P2}).

A2. Calcular volumen

a) Volumen del eslabón completo

$$V_{CREP2} = l * a * h = (7 \text{ cm})(7 \text{ cm})(9 \text{ cm}) = 441 \text{ cm}^3$$

b) Volumen del cubo rectangular hueco

$$V_{CRHP2} = l * a * h = (5 \text{ cm})(7 \text{ cm})(4 \text{ cm}) = 140 \text{ cm}^3$$

c) Volumen del cilindro hueco grande

$$V_{CHGP2} = \pi * r^2 * h = (\pi)(2.5 \text{ cm})^2(4 \text{ cm}) = 78.5398 \text{ cm}^3$$

d) Volumen del cilindro hueco 1

$$V_{CH_1P_2} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(1 \text{ cm}) = 0.7853 \text{ cm}^3$$

e) Volumen del cilindro hueco 2

$$V_{CH_2P_2} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(1 \text{ cm}) = 0.7853 \text{ cm}^3$$

f) Volumen de la pieza 2

$$V_{P_2} = V_{ECP_2} - V_{CRHP_2} - V_{CHGP_2} - V_{CH_1P_2} - V_{CH_2P_2}$$

$$V_{P_2} = 441 \text{ cm}^3 - 140 \text{ cm}^3 - 78.5398 - 0.7853 \text{ cm}^3 - 0.7853 \text{ cm}^3$$

$$V_{P_2} = 220.8896 \text{ cm}^3$$

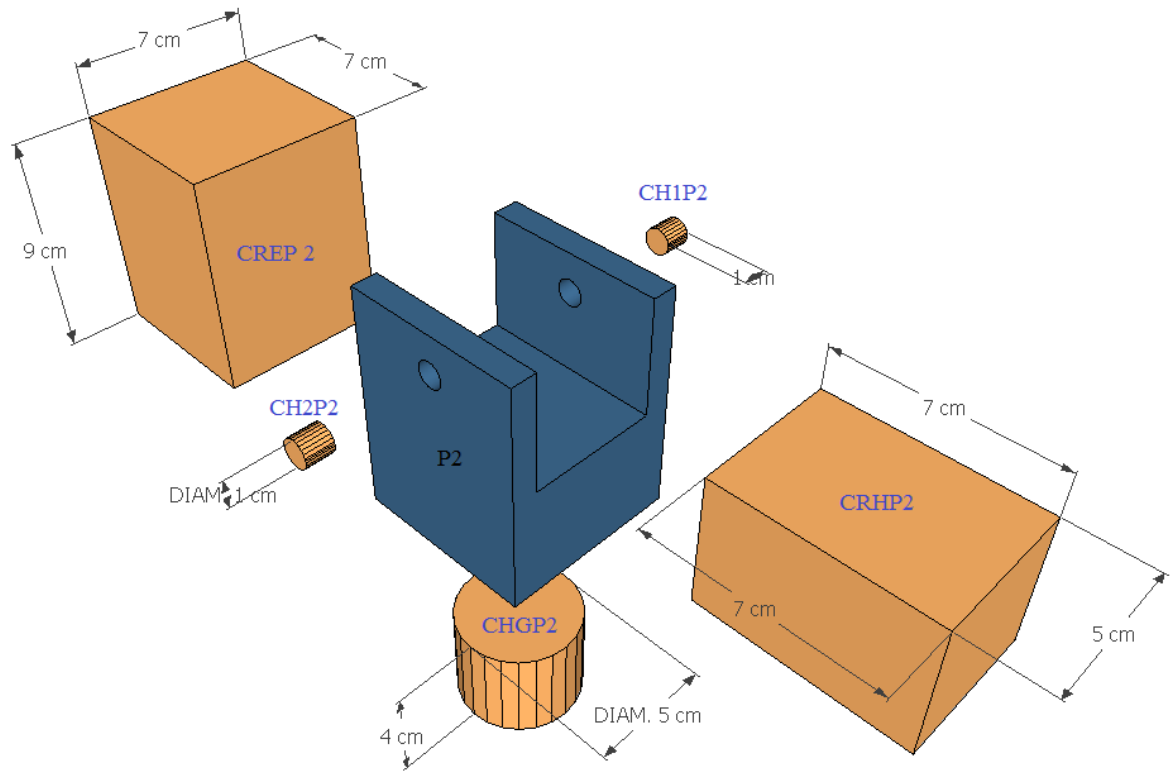


Figura 3. Piezas secundarias de la Pieza 2

En seguida se obtuvo la masa de la pieza 2 (M_{P_2}) y de las masas secundarias (M_{CREP_2} , M_{CRHP_2} , M_{CHGP_2} , $M_{CH_1P_2}$ y $M_{CH_2P_2}$) ya que más adelante se ocuparán para calcular las coordenadas del centro de gravedad de la pieza 2.

B2. Calcular masa

a) Masa del eslabón completo

$$M_{\text{CREP}_2} = V_{\text{ECP}_2} * \rho_T = (441 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{1984.5 \text{ g}}$$

b) Masa del cubo rectangular hueco

$$M_{\text{CRHP}_2} = V_{\text{CRHP}_2} * \rho_T = (140 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{630 \text{ g}}$$

c) Masa del cilindro hueco grande

$$M_{\text{CHGP}_2} = V_{\text{CHGP}_2} * \rho_T = (78.5398 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{353.4291 \text{ g}}$$

d) Masa del cilindro hueco 1

$$M_{\text{CH}_1\text{P}_2} = V_{\text{CH}_1\text{P}_2} * \rho_T = (0.7853 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{3.5338 \text{ g}}$$

e) Masa del cilindro hueco 2

$$M_{\text{CH}_2\text{P}_2} = V_{\text{CH}_2\text{P}_2} * \rho_T = (0.7853 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{3.5338 \text{ g}}$$

f) Masa de la pieza 2

$$M_{\text{P}_2} = V_{\text{P}_2} * \rho_T = (220.8896 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = 994.0032 \text{ g} = \mathbf{0.994 \text{ kg}}$$

El siguiente paso fue calcular los centros de gravedad de las cinco partes (piezas secundarias) que conforman a la estructura de la pieza 2. El centro de gravedad de cada una de las piezas secundarias se determinó gráficamente como se muestra en la Figura 4. Se toma en cuenta en qué punto se efectúa el movimiento del eslabón (pieza 2) y a partir de ahí se realiza una diferencia de distancias con respecto a la ubicación del centro de gravedad que tiene cada figura secundaria analizada, en este caso el movimiento se efectúa en CHGP₂. Las coordenadas de ubicación del centro de gravedad para un cuadrado, un rectángulo y un cilindro siempre se encuentran a la mitad de su longitud de largo, anchura y altura.

C2. Calcular centro de gravedad

a) Centro de gravedad del eslabón completo

$$\mathbf{CG_{\text{CREP}_2} = [0 \quad 0 \quad 2.5]}$$

b) Centro de gravedad del cubo rectangular hueco

$$\mathbf{CG_{\text{CRHP}_2} = [0 \quad 0 \quad 5]}$$

c) Centro de gravedad del cilindro hueco grande

$$CG_{CHGP_2} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

d) Centro de gravedad del cilindro hueco 1

$$CG_{CH_1P_2} = [3 \quad 0 \quad 5.5]$$

e) Centro de gravedad del cilindro hueco 2

$$CG_{CH_2P_2} = [-3 \quad 0 \quad 5.5]$$

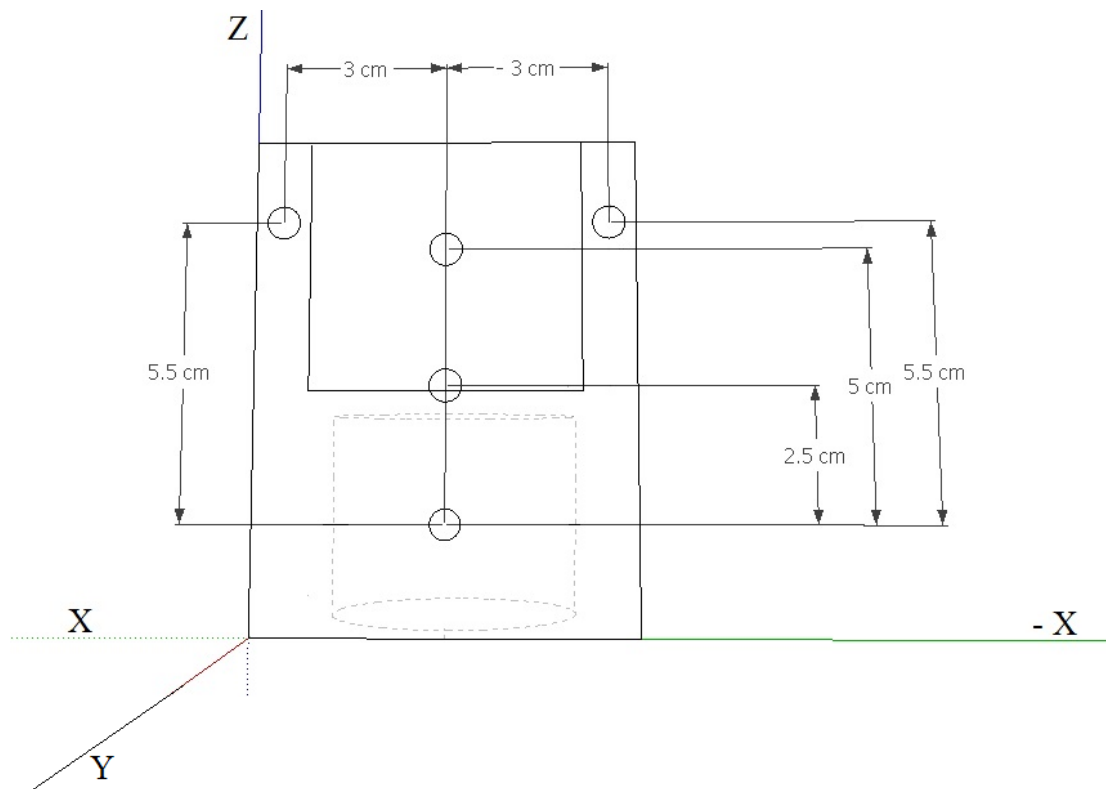


Figura 4. Centros de gravedad para la Pieza 2

3.1.3. Pieza 3

En la Figura 5 se muestran las dimensiones de la pieza 3 en el cual el eslabón en forma de rectángulo ($CREP_3$) está conformado por un prisma rectangular y a este se le quitan cuatro partes (piezas secundarias) las cuales son un cubo rectangular ($CRHP_3$), un cilindro largo ($CHLP_3$) y dos cilindros pequeños (CH_1P_3 y CH_2P_3). Por lo tanto, para obtener el volumen

de la pieza 3 (V_{P3}), se le restara al volumen del eslabón cubo rectangular (V_{CREP3}) los volúmenes del cubo rectangular hueco (V_{CRHP3}), del cilindro hueco largo (V_{CHLP3}) y de los dos cilindros huecos pequeños (V_{CH1P3} y V_{CH2P3}).

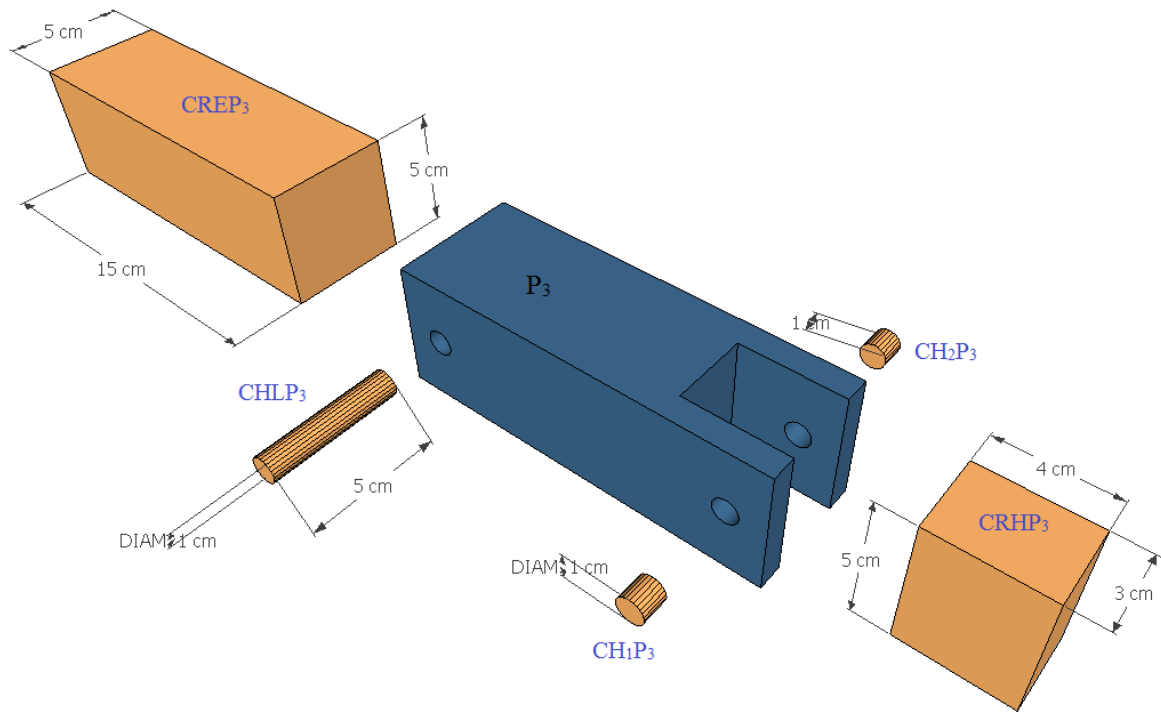


Figura 5. Piezas secundarias de la Pieza 3

A3. Calcular volumen

a) Volumen del eslabón cubo rectangular

$$V_{CREP_3} = l * a * h = (15 \text{ cm})(5 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 375 \text{ cm}^3$$

b) Volumen del cubo rectangular hueco

$$V_{CRHP_3} = l * a * h = (4 \text{ cm})(3 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 60 \text{ cm}^3$$

c) Volumen del cilindro hueco largo

$$V_{CHLP_3} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(5 \text{ cm}) = 3.9269 \text{ cm}^3$$

d) Volumen del cilindro hueco 1

$$V_{CH1P_3} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(1 \text{ cm}) = 0.7853 \text{ cm}^3$$

e) Volumen del cilindro hueco 2

$$V_{CH_2P_3} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(1 \text{ cm}) = 0.7853 \text{ cm}^3$$

f) Volumen de la pieza 3

$$\begin{aligned} V_{P_3} &= V_{CREP_3} - V_{CRHP_3} - V_{CHLP_3} - V_{CH_1P_3} - V_{CH_2P_3} \\ V_{P_3} &= 375 \text{ cm}^3 - 60 \text{ cm}^3 - 3.9269 \text{ cm}^3 - 0.7853 \text{ cm}^3 - 0.7853 \text{ cm}^3 \\ V_{P_3} &= 309.5025 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

En seguida se obtuvo la masa de la pieza 3 (M_{P_3}) y de las masas secundarias (M_{CREP_3} , M_{CRHP_3} , M_{CHLP_3} , $M_{CH_1P_3}$ y $M_{CH_2P_3}$) ya que más adelante se ocuparán para calcular las coordenadas del centro de gravedad de la pieza 3.

B3. Calcular masa

a) Masa del eslabón cubo rectangular

$$M_{CREP_3} = V_{CREP_3} * \rho_T = (375 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{1687.5 \text{ g}}$$

b) Masa del cubo rectangular hueco

$$M_{CRHP_3} = V_{CRHP_3} * \rho_T = (60 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{270 \text{ g}}$$

c) Masa del cilindro hueco largo

$$M_{CHLP_3} = V_{CHLP_3} * \rho_T = (3.9269 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{17.6710 \text{ g}}$$

d) Masa del cilindro hueco 1

$$M_{CH_1P_3} = V_{CH_1P_3} * \rho_T = (0.7853 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{3.5338 \text{ g}}$$

e) Masa del cilindro hueco 2

$$M_{CH_2P_3} = V_{CH_2P_3} * \rho_T = (0.7853 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{3.5338 \text{ g}}$$

f) Masa de la pieza 3

$$M_{P_3} = V_{P_3} * \rho_T = (309.5025 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = 1392.7612 \text{ g} = \mathbf{1.3927 \text{ kg}}$$

El siguiente paso fue calcular los centros de gravedad de las cinco partes (piezas secundarias) que conforman a la estructura de la pieza 3. El centro de gravedad de cada una de las piezas secundarias se determinó gráficamente como se muestra en la Figura 6. Se toma en cuenta en qué punto se efectúa el movimiento del eslabón (pieza 3) y a partir de ahí se realiza una

diferencia de distancias con respecto a la ubicación del centro de gravedad que tiene cada figura secundaria analizada, en este caso el movimiento se efectúa en $CHLP_3$. Las coordenadas de ubicación del centro de gravedad para un cuadrado, un rectángulo y un cilindro siempre se encuentran a la mitad de su longitud de largo, anchura y altura.

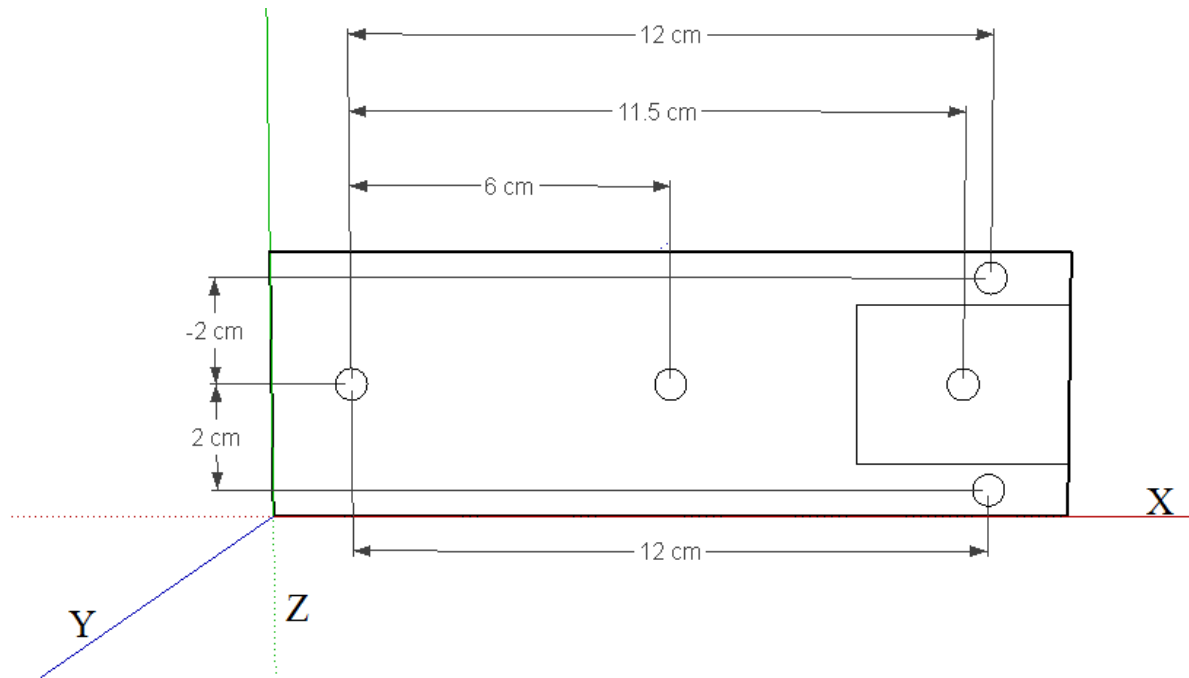


Figura 6. Centros de gravedad para la pieza 3

C3. Calcular centro de gravedad

a) Centro de gravedad del eslabón completo

$$CG_{CREP_3} = [6 \quad 0 \quad 0]$$

b) Centro de gravedad del cubo rectangular hueco

$$CG_{CRHP_3} = [11.5 \quad 0 \quad 0]$$

c) Centro de gravedad del cilindro hueco grande

$$CG_{CHLP_3} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

d) Centro de gravedad del cilindro hueco 1

$$CG_{CH_1P_3} = [12 \quad 0 \quad 2]$$

e) Centro de gravedad del cilindro hueco 2

$$CG_{CH_2P_3} = [12 \quad 0 \quad -2]$$

3.1.4. Pieza 4

En la Figura 7 se muestran las dimensiones de la pieza 4 en el cual el eslabón en forma de rectángulo ($CREP_4$) está conformado por un prisma rectangular y a este se le quitan cuatro partes (piezas secundarias) las cuales son un cubo rectangular ($CRHP_4$), dos cubos rectangulares del soporte ($CR_{1,2}SP_4$) y un cilindro largo ($CHLP_4$). Por lo tanto, para obtener el volumen de la pieza 4 (V_{P_4}), se le restara al volumen del eslabón cubo rectangular (V_{CREP_4}) los volúmenes del cubo rectangular hueco (V_{CRHP_4}), de los dos cubos rectangulares huecos del soporte (V_{CR1SP_4} y V_{CR2SP_4}) y del cilindro hueco largo pequeño (V_{CHLP_4}).

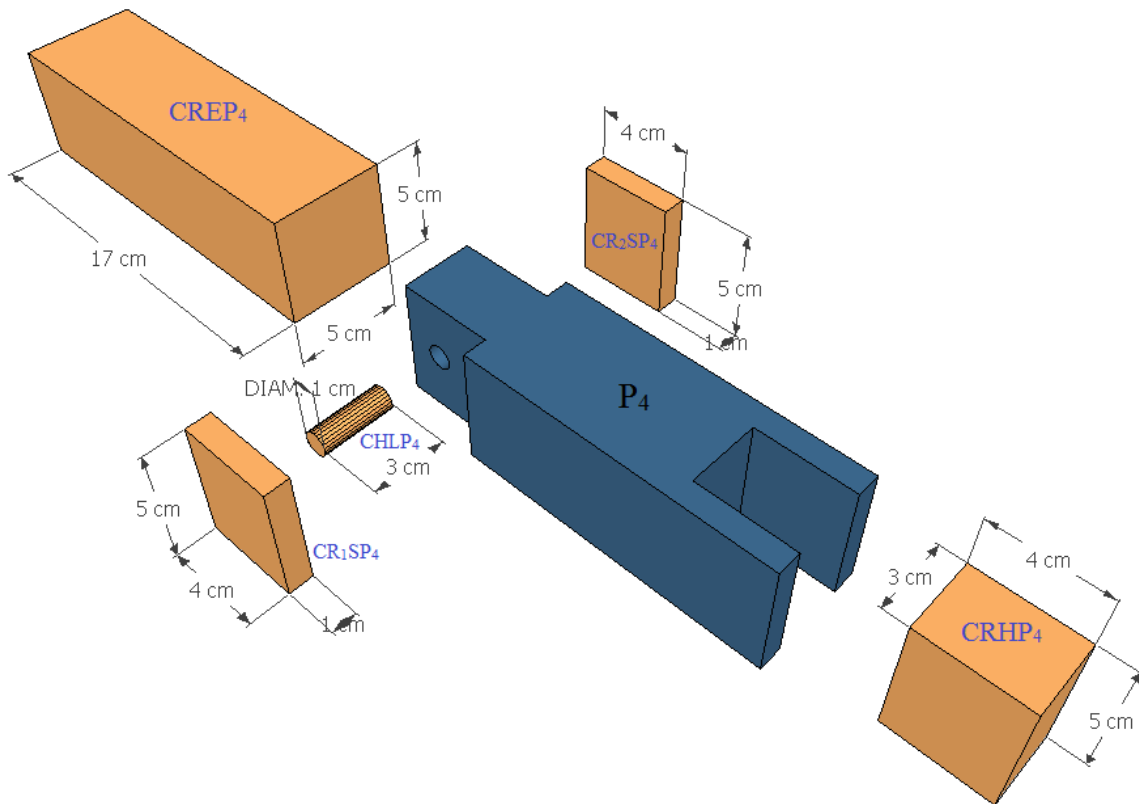


Figura 7. Piezas secundarias de la Pieza 4

A4. Calcular volumen

a) Volumen del eslabón cubo rectangular

$$V_{\text{CREP}_4} = l * a * h = (17 \text{ cm})(5 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 425 \text{ cm}^3$$

b) Volumen del cubo rectangular hueco

$$V_{\text{CRHP}_4} = l * a * h = (4 \text{ cm})(3 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 60 \text{ cm}^3$$

c) Volumen del cubo rectangular 1 soporte hueco

$$V_{\text{CR}_1\text{SP}_4} = l * a * h = (4 \text{ cm})(1 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}^3$$

d) Volumen del cubo rectangular 2 soporte hueco

$$V_{\text{CR}_2\text{SP}_4} = l * a * h = (4 \text{ cm})(1 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}^3$$

e) Volumen del cilindro hueco largo

$$V_{\text{CHLP}_4} = \pi * r^2 * h = (\pi)(0.5 \text{ cm})^2(3 \text{ cm}) = 2.3561 \text{ cm}^3$$

f) Volumen de la pieza 4

$$\begin{aligned} V_{P_4} &= V_{\text{CREP}_4} - V_{\text{CRHP}_4} - V_{\text{CR}_1\text{SP}_4} - V_{\text{CR}_2\text{SP}_4} - V_{\text{CHLP}_4} \\ V_{P_4} &= 425 \text{ cm}^3 - 60 \text{ cm}^3 - 20 \text{ cm}^3 - 20 \text{ cm}^3 - 2.3561 \text{ cm}^3 \\ V_{P_4} &= 322.6439 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

En seguida se obtuvo la masa de la pieza 4 (M_{P_4}) y de las masas secundarias (M_{CREP_4} , M_{CRHP_4} , M_{CHLP_4} , $M_{\text{CR}_1\text{SP}_4}$ y $M_{\text{CR}_2\text{SP}_4}$) ya que más adelante se ocuparán para calcular las coordenadas del centro de gravedad de la pieza 4.

B4. Calcular masa

a) Masa del eslabón cubo rectangular

$$M_{\text{CREP}_4} = V_{\text{CREP}_4} * \rho_T = (425 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{1912.5 \text{ g}}$$

b) Masa del cubo rectangular hueco

$$M_{\text{CRHP}_4} = V_{\text{CRHP}_4} * \rho_T = (60 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{270 \text{ g}}$$

c) Masa del cubo rectangular 1 soporte hueco

$$M_{\text{CR}_1\text{SP}_4} = V_{\text{CR}_1\text{SP}_4} * \rho_T = (20 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = \mathbf{90 \text{ g}}$$

g) Masa del cubo rectangular 2 soporte hueco

d) Masa del cilindro hueco largo

e) Masa de la pieza 4

$$M_{P_4} = V_{P_4} * \rho_T = (322.6439 \text{ cm}^3)(4.50 \text{ g/cm}^3) = 1451.8975 \text{ g} = \mathbf{1.4518 \text{ kg}}$$

El siguiente paso fue calcular los centros de gravedad de las cinco partes (piezas secundarias) que conforman a la estructura de la pieza 4. El centro de gravedad de cada una de las piezas secundarias se determinó gráficamente como se muestra en la Figura 8. Se toma en cuenta en qué punto se efectúa el movimiento del eslabón (pieza 4) y a partir de ahí se realiza una diferencia de distancias con respecto a la ubicación del centro de gravedad que tiene cada figura secundaria analizada, en este caso el movimiento se efectúa en CHLP₄. Las coordenadas de ubicación del centro de gravedad para un cuadrado, un rectángulo y un cilindro siempre se encuentran a la mitad de su longitud de largo, anchura y altura.

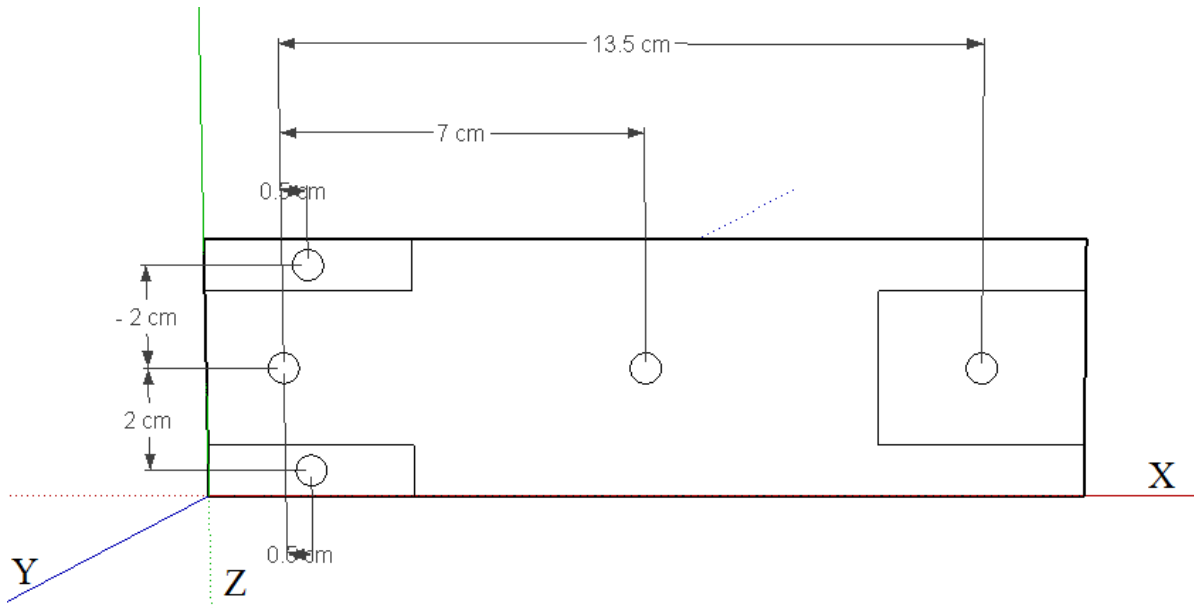


Figura 8. Centros de gravedad para la pieza 4

C4. Calcular centro de gravedad

a) Centro de gravedad del eslabón completo

$$CG_{CREP_4} = [7 \quad 0 \quad 0]$$

b) Centro de gravedad del cubo rectangular hueco

$$CG_{CRHP_4} = [13.5 \quad 0 \quad 0]$$

c) Centro de gravedad del cubo rectangular 1 soporte hueco

$$CG_{CR_1SP_4} = [0.5 \quad 0 \quad 2]$$

d) Centro de gravedad del cubo rectangular 2 soporte hueco

$$CG_{CR_2SP_4} = [0.5 \quad 0 \quad -2]$$

e) Centro de gravedad del cilindro hueco largo

$$CG_{CHLP_4} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Como complemento adicional se calculó el volumen y la masa total de nuestro manipulador robótico el cual nos dio el siguiente resultado:

$$V_T = 1059.5758 \text{ cm}^3$$

$$M_T = 4.768 \text{ kg}$$

3.2. Calculo de las coordenadas del centro de gravedad

Para la obtención de las coordenadas del centro de gravedad de las piezas 2, 3 y 4, se necesitan las masas de cada pieza secundaria y sus respectivos centros de gravedad. El procedimiento consiste en multiplicar la masa de cada pieza secundaria con su respectiva coordenada del centro de gravedad, (esto depende sobre que coordenada se está calculando puede ser X, Y o Z), en seguida se hace una resta de productos y se divide entre la masa total de la pieza que conforma al eslabón del manipulador robótico.

3.2.1. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 2

Para calcular en el eje X la coordenada del centro de gravedad de la pieza 2, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada X de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 2.

$$X_{P_2} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{2x}} * M_{CREP_2}) - (CG_{CRHP_{2x}} * M_{CRHP_2}) - (CG_{CHGP_{2x}} * M_{CHGP_2}) - (CG_{CH_1P_{2x}} * M_{CH_1P_2}) - (CG_{CH_2P_{2x}} * M_{CH_2P_2})}{M_{P_2}}$$

$$X_{P_2} = \frac{(0 * 1984.5 \text{ g}) - (0 * 353.4291 \text{ g}) - (0 * 630) - (3 * 3.5338 \text{ g}) - (-3 * 3.5338 \text{ g})}{994.0032 \text{ g}}$$

$$X_{P_2} = 0 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Y la coordenada del centro de gravedad de la pieza 2, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Y de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 2.

$$Y_{P_2} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{2y}} * M_{ECP_2}) - (CG_{CRHP_{2y}} * M_{CRHP_2}) - (CG_{CHGP_{2y}} * M_{CHGP_2}) - (CG_{CH_1P_{2y}} * M_{CH_1P_2}) - (CG_{CH_2P_{2y}} * M_{CH_2P_2})}{M_{P_2}}$$

$$Y_{P_2} = \frac{(0 * 1984.5 \text{ g}) - (0 * 353.4291 \text{ g}) - (0 * 630) - (0 * 3.5338 \text{ g}) - (0 * 3.5338 \text{ g})}{994.0032 \text{ g}}$$

$$Y_{P_2} = 0 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Z la coordenada del centro de gravedad de la pieza 2, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Z

de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 2.

$$Z_{P_2} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{2z}} * M_{ECP_2}) - (CG_{CRHP_{2z}} * M_{CRHP_{2z}}) - (CG_{CHGP_{2z}} * M_{CHGP_2}) - (CG_{CH_1P_{2z}} * M_{CH_1P_2}) - (CG_{CH_2P_{2z}} * M_{CH_2P_2})}{M_{P_2}}$$

$$Z_{P_2} = \frac{(2.5 * 1984.5 \text{ g}) - (5 * 353.4291 \text{ g}) - (0 * 630) - (5.5 * 3.5338 \text{ g}) - (5.5 * 3.5338 \text{ g})}{994.0032 \text{ g}}$$

$$Z_{P_2} = 1.7830 \text{ cm}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad para la pieza 2 quedaría expresado como $CG_{P_2} = [X_{P_2} \quad Y_{P_2} \quad Z_{P_2}]$, esto es:

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

3.2.2. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 3

Para calcular en el eje X la coordenada del centro de gravedad de la pieza 3, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada X de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 3.

$$X_{P_3} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{3x}} * M_{CREP_3}) - (CG_{CRHP_{3x}} * M_{CRHP_3}) - (CG_{CHLP_{3x}} * M_{CHLP_3}) - (CG_{CH_1P_{3x}} * M_{CH_1P_3}) - (CG_{CH_2P_{3x}} * M_{CH_2P_3})}{M_{P_3}}$$

$$X_{P_3} = \frac{(6 * 1687.5 \text{ g}) - (11.5 * 270 \text{ g}) - (0 * 17.6710 \text{ g}) - (12 * 3.5338 \text{ g}) - (12 * 3.5338 \text{ g})}{1392.7612 \text{ g}}$$

$$X_{P_3} = 4.9794 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Y la coordenada del centro de gravedad de la pieza 3, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Y de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 3.

$$Y_{P_3} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{3y}} * M_{CREP_3}) - (CG_{CRHP_{3y}} * M_{CRHP_3}) - (CG_{CHLP_{3y}} * M_{CHLP_3}) - (CG_{CH_1P_{3y}} * M_{CH_1P_3}) - (CG_{CH_2P_{3y}} * M_{CH_2P_3})}{M_{P_3}}$$

$$Y_{P_3} = \frac{(0 * 1687.5 \text{ g}) - (0 * 270 \text{ g}) - (0 * 17.6710 \text{ g}) - (0 * 3.5338 \text{ g}) - (0 * 3.5338 \text{ g})}{1392.7612 \text{ g}}$$

$$Y_{P_3} = 0 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Z la coordenada del centro de gravedad de la pieza 3, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Z de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 3.

$$Z_{P_3} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{3z}} * M_{CREP_3}) - (CG_{CRHP_{3z}} * M_{CRHP_3}) - (CG_{CHLP_{3z}} * M_{CHLP_3}) - (CG_{CH_1P_{3z}} * M_{CH_1P_3}) - (CG_{CH_2P_{3z}} * M_{CH_2P_3})}{M_{P_3}}$$

$$Z_{P_3} = \frac{(0 * 1687.5 \text{ g}) - (0 * 270 \text{ g}) - (0 * 17.6710 \text{ g}) - (2 * 3.5338 \text{ g}) - (-2 * 3.5338 \text{ g})}{1392.7612 \text{ g}}$$

$$Z_{P_3} = 0 \text{ cm}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad para la pieza 3 quedaría expresado como $CG_{P_3} = [X_{P_3} \quad Y_{P_3} \quad Z_{P_3}]$, esto es:

$$CG_{P_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

3.2.3. Coordenadas del centro de gravedad de la pieza 4

Para calcular en el eje X la coordenada del centro de gravedad de la pieza 4, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada X de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 4.

$$X_{P_4} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{4x}} * M_{CREP_4}) - (CG_{CRHP_{4x}} * M_{CRHP_4}) - (CG_{CR_1SP_{4x}} * M_{CR_1SP_4}) - (CG_{CR_2SP_{4x}} * M_{CR_2SP_4}) - (CG_{CHLP_{4x}} * M_{CHLP_4})}{M_{P_4}}$$

$$X_{P_4} = \frac{(7 * 1912.5 \text{ g}) - (13.5 * 270 \text{ g}) - (0.5 * 90 \text{ g}) - (0.5 * 90 \text{ g}) - (0 * 10.6024 \text{ g})}{1451.8975 \text{ g}}$$

$$X_{P_4} = 6.6481 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Y la coordenada del centro de gravedad de la pieza 4, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Y de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 4.

$$Y_{P_4} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{4y}} * M_{CREP_4}) - (CG_{CRHP_{4y}} * M_{CRHP_4}) - (CG_{CR_1SP_{4y}} * M_{CR_1SP_4}) - (CG_{CR_2SP_{4y}} * M_{CR_2SP_4}) - (CG_{CHLP_{4y}} * M_{CHLP_4})}{M_{P_4}}$$

$$Y_{P_4} = \frac{(0 * 1912.5 \text{ g}) - (0 * 270 \text{ g}) - (0 * 90 \text{ g}) - (0 * 90 \text{ g}) - (0 * 10.6024 \text{ g})}{1451.8975 \text{ g}}$$

$$Y_{P_4} = 0 \text{ cm}$$

Para calcular en el eje Z la coordenada del centro de gravedad de la pieza 4, se multiplico la masa de cada pieza secundaria (cilindro, cubo rectangular) con su respectiva coordenada Z

de su centro de gravedad. En seguida se hizo la resta de productos y se dividió entre la masa de la pieza 4.

$$Z_{P_4} =$$

$$\frac{(CG_{CREP_{4Z}} * M_{CREP_4}) - (CG_{CRHP_{4Z}} * M_{CRHP_4}) - (CG_{CR_1SP_{4Z}} * M_{CR_1SP_4}) - (CG_{CR_2SP_{4Z}} * M_{CR_2SP_4}) - (CG_{CHLP_{4Z}} * M_{CHLP_4})}{M_{P_4}}$$

$$Z_{P_4} = \frac{(0 * 1912.5 \text{ g}) - (0 * 270 \text{ g}) - (2 * 90 \text{ g}) - (-2 * 90 \text{ g}) - (0 * 10.6024 \text{ g})}{1451.8975 \text{ g}}$$

$$Z_{P_4} = 0 \text{ cm}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad para la pieza 4 quedaría expresado como $CG_{P_4} = [X_{P_4} \quad Y_{P_4} \quad Z_{P_4}]$, esto es:

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

3.3. Calculo del tensor de inercia

El tensor de inercia de un sólido rígido viene dado por una matriz simétrica de 3x3, como es mostrada en la ecuación (1).

$$I = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (1)$$

El tensor de inercia se forma a partir de los momentos de inercia los cuales dan información de la distribución de masas de un cuerpo o sistemas de partículas alrededor de uno de sus puntos [Pérez, 2016].

Observando la ecuación (1), notamos que los elementos I_{XX} , I_{YY} , e I_{ZZ} se llaman momentos de inercia de masas y los demás elementos con índices mezclados se llaman productos de

inercia de masas. Este conjunto de seis cantidades dependerá, para un cuerpo dado, de la posición y orientación de la trama en la que estén definidas.

El tensor de inercia de una articulación puede ser obtenido a través de la separación de formas geométricas comunes (prisma rectangular y cilindro) ya que existen fórmulas definidas para calcular los momentos de inercia para cada forma geométrica [Pérez, 2016], las cuales se muestran en la Figura 9.

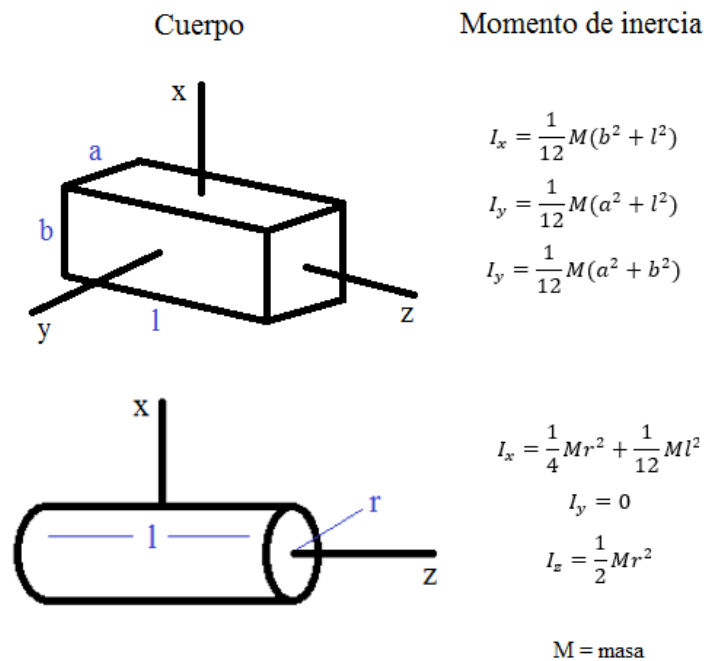


Figura 9. Momento de inercia para prisma rectangular y cilindro

Después se hace uso del teorema de ejes paralelos y finalmente la suma algebraica de los tensores de inercia de cada figura geométrica, dicha sumatoria será el tensor de inercia del eslabón (Piezas 2, 3 y 4).

Como en el caso de nuestras piezas, sus sistemas de coordenadas de referencia tienen el mismo sentido del sistema de referencia del tensor de inercia, entonces este se traslada al centro de gravedad del eslabón (Pieza 2, 3 o 4) haciendo uso del teorema de ejes paralelos

(Beer et al., 2005]. Las ecuaciones a utilizar para el uso del teorema de ejes paralelos son las ecuaciones (2), (3) y (4).

$$I_{x_{CG}} = I_x - M(y^2 + z^2) \quad (2)$$

$$I_{y_{CG}} = I_y - M(x^2 + z^2) \quad (3)$$

$$I_{z_{CG}} = I_z - M(y^2 + x^2) \quad (4)$$

Donde las variables I_x , I_y , I_z son los momentos de inercia y las variables x , y , z es una diferencia de distancia del centro de gravedad de la pieza secundaria al centro de gravedad de la pieza (eslabón) sobre su respectivo eje (x , y o z)

3.3.1. Tensor de inercia de la pieza 2

A2. Pieza Secundaria CREP₂

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a , b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 7 \text{ cm} \quad b = 7 \text{ cm} \quad l = 9 \text{ cm} \quad M_{\text{CREP}_2} = 1984.5 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CREP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_2} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1984.5 \text{ g})(7^2 + 9^2) = 21,498.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CREP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_2} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1984.5 \text{ g})(7^2 + 9^2) = 21,498.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CREP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_2} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (1984.5 \text{ g})(7^2 + 7^2) = 16,206.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 2 (CG_{P_2}) y de la pieza secundaria (CG_{CREP_2}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

$$CG_{CREP_2} = [0 \quad 0 \quad 2.5]$$

Por lo tanto

$$x = 0 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -0.717 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CREP_2CG}} = i_{XX_{CREP_2}} - M_{CREP_2}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CREP_2CG}} = 21,498.75 - (1984.5)(0^2 + (-0.717)^2)$$

$$i_{XX_{CREP_2CG}} = 20,478.5403 \text{ gcm}^2 = 0.002047 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CREP_2CG}} = i_{YY_{CREP_2}} - M_{CREP_2}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CREP_2CG}} = 21,498.75 - (1984.5)(0^2 + (-0.717)^2)$$

$$i_{YY_{CREP_2CG}} = 20,478.5403 \text{ gcm}^2 = 0.002047 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CREP_2CG}} = i_{ZZ_{CREP_2}} - M_{CREP_2}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CREP_2CG}} = 16,206.75 - (1984.5)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{ZZ_{\text{CREP}_2\text{CG}}} = 16,206.75 \text{ gcm}^2 = 0.00162 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CREP₂ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{\text{CREP}_2} = \begin{bmatrix} 0.002047 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002047 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00162 \end{bmatrix}$$

B2. Pieza Secundaría CRHP₂

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 7 \text{ cm} \quad b = 5 \text{ cm} \quad l = 4 \text{ cm} \quad M_{\text{CRHP}_2} = 630 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{XX_{\text{CRHP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_2} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (630 \text{ g}) (5^2 + 4^2) = 2,152.5 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{YY_{\text{CRHP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_2} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (630 \text{ g}) (7^2 + 4^2) = 3,412.5 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{ZZ_{\text{CRHP}_2}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_2} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (630 \text{ g}) (7^2 + 5^2) = 3,885 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 2 (CG_{P_2}) y de la pieza secundaria (CG_{CRHP_2}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

$$CG_{CRHP_2} = [0 \quad 0 \quad 5]]$$

Por lo tanto

$$x = 0 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -3.217 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CRHP_2}CG} = i_{XX_{CRHP_2}} - M_{CRHP_2}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CRHP_2}CG} = 2152.5 - (630)(0^2 + (-3.217)^2)$$

$$i_{XX_{CRHP_2}CG} = -4,367.4260 \text{ gcm}^2 = -0.0004367 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CRHP_2}CG} = i_{YY_{CRHP_2}} - M_{CRHP_2}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CRHP_2}CG} = 3,412.5 - (630)(0^2 + (-3.217)^2)$$

$$i_{YY_{CRHP_2}CG} = -3,107.4260 \text{ gcm}^2 = -0.0003107 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CRHP_2}CG} = i_{ZZ_{CRHP_2}} - M_{CRHP_2}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CRHP_2}CG} = 3,885 - (630)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{zz_{CRHP_2CG}} = 3,885 \text{ gcm}^2 = 0.0003885 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CRHP₂ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CRHP_2} = \begin{bmatrix} -0.0004367 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003107 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003885 \end{bmatrix}$$

C2. Pieza Secundaría CHGP₂

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 2.5 \text{ cm} \quad l = 4 \text{ cm} \quad M_{CHGP_2} = 353.4291 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{CHGP_2}} = \frac{1}{4} M_{CHGP_2} (r^2) + \frac{1}{12} M_{CHGP_2} (l^2)$$

$$i_{xx_{CHGP_2}} = \frac{1}{4} (353.4291 \text{ g})(2.5^2) + \frac{1}{12} (353.4291 \text{ g})(4^2) = 1,023.4717 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{CHGP_2}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{CHGP_2}} = \frac{1}{2} M_{CHGP_2} (r^2) = \frac{1}{2} (353.4291 \text{ g})(2.5^2) = 1,104.4659 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 2 (CG_{P_2}) y de la pieza secundaria (CG_{CHGP_2}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

$$CG_{CHGP_2} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = 0 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 1.7830 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CHGP_2CG}} = i_{XX_{CHGP_2}} - M_{CHGP_2}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CHGP_2CG}} = 1,023.4717 - (353.4291)(0^2 + 1.7830^2)$$

$$i_{XX_{CHGP_2CG}} = -100.1108 \text{ gcm}^2 = -0.00001001 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CHGP_2CG}} = i_{YY_{CHGP_2}} - M_{CHGP_2}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CHGP_2CG}} = 0 - (353.4291)(0^2 + 1.7830^2)$$

$$i_{YY_{CHGP_2CG}} = -1,123.5825 \text{ gcm}^2 = -0.0001123 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CHGP_2CG}} = i_{ZZ_{CHGP_2}} - M_{CHGP_2}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CHGP_2CG}} = 1,104.4659 - (353.4291)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{ZZ_{CRHP_2CG}} = 1,104.4659 \text{ gcm}^2 = 0.0001104 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CHGP₂ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CHGP_2} = \begin{bmatrix} -0.00001001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001123 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001104 \end{bmatrix}$$

D2. Pieza Secundaría CH₁P₂

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{CH_1P_2} = 3.5338 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{CH_1P_2}} = \frac{1}{2} M_{CH_1P_2} (r^2) = \frac{1}{2} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) = 0.4417 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{CH_1P_2}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{CH_1P_2}} = \frac{1}{4} M_{CH_1P_2} (r^2) + \frac{1}{12} M_{CH_1P_2} (l^2)$$

$$i_{zz_{CH_1P_2}} = \frac{1}{4} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) + \frac{1}{12} (3.5338 \text{ g})(1^2) = 0.5153 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 2 (CG_{P_2}) y de la pieza secundaria ($CG_{CH_1P_2}$) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

$$CG_{CH_1P_2} = [3 \quad 0 \quad 5.5]$$

Por lo tanto

$$x = -3 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -3.717 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CH_1P_2}CG} = i_{XX_{CH_1P_2}} - M_{CH_1P_2}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CH_1P_2}CG} = 0.4417 - (3.5338)(0^2 + (-3.717)^2)$$

$$i_{XX_{CH_1P_2}CG} = -48.3815 \text{ gcm}^2 = -0.000004838 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CH_1P_2}CG} = i_{YY_{CH_1P_2}} - M_{CH_1P_2}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CH_1P_2}CG} = 0 - (3.5338)((-3)^2 + (-3.717)^2)$$

$$i_{YY_{CH_1P_2}CG} = -80.6274 \text{ gcm}^2 = -0.000008062 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CH_1P_2}CG} = i_{ZZ_{CH_1P_2}} - M_{CH_1P_2}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CH_1P_2}CG} = 0.5153 - (3.5338)(0^2 + (-3)^2)$$

$$i_{ZZ_{CH_1P_2CG}} = -31.2889 \text{ gcm}^2 = -0.000003128 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CH_1P_2 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CH_1P_2} = \begin{bmatrix} -0.000004838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.000008062 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000003128 \end{bmatrix}$$

E2. Pieza Secundaría CH_2P_2

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{CH_2P_2} = 3.5338 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{XX_{CH_2P_2}} = \frac{1}{2} M_{CH_2P_2} (r^2) = \frac{1}{2} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) = 0.4417 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{YY_{CH_2P_2}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{ZZ_{CH_2P_2}} = \frac{1}{4} M_{CH_2P_2} (r^2) + \frac{1}{12} M_{CH_2P_2} (l^2)$$

$$i_{ZZ_{CH_2P_2}} = \frac{1}{4} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) + \frac{1}{12} (3.5338 \text{ g})(1^2) = 0.5153 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 2 (CG_{P_2}) y de la pieza secundaria ($CG_{CH_2P_2}$) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_2} = [0 \quad 0 \quad 1.7830]$$

$$CG_{CH_2P_2} = [-3 \quad 0 \quad 5.5]$$

Por lo tanto

$$x = 3 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -3.717 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CH_2P_2}CG} = i_{XX_{CH_2P_2}} - M_{CH_2P_2}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CH_2P_2}CG} = 0.4417 - (3.5338)(0^2 + (-3.717)^2)$$

$$i_{XX_{CH_2P_2}CG} = -48.3815 \text{ gcm}^2 = -0.000004838 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CH_2P_2}CG} = i_{YY_{CH_2P_2}} - M_{CH_2P_2}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CH_2P_2}CG} = 0 - (3.5338)(3^2 + (-3.717)^2)$$

$$i_{YY_{CH_2P_2}CG} = -80.6274 \text{ gcm}^2 = -0.000008062 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CH_2P_2}CG} = i_{ZZ_{CH_2P_2}} - M_{CH_2P_2}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CH_2P_2}CG} = 0.5153 - (3.5338)(0^2 + 3^2)$$

$$i_{zz_{CH_2P_2CG}} = -31.2889 \text{ gcm}^2 = -0.000003128 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CH_2P_2 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CH_2P_2} = \begin{bmatrix} -0.000004838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.000008062 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000003128 \end{bmatrix}$$

F2. Pieza 2

a) Tensor de inercia

Para calcular el tensor de inercia para la pieza 2, se realizó una sumatoria de todos los tensores de inercia que se calcularon anteriormente para cada pieza secundaria.

$$I_{P_2} = I_{CREP_2} - I_{CRHP_2} - I_{CHGP_2} - I_{CH_1P_2} - I_{CH_2P_2}$$

$$I_{P_2} = \begin{bmatrix} 0.002047 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002047 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00162 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.0004367 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003107 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003885 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.00001001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001123 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001104 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.000004838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.000008062 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000003128 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.000004838 & 0 & 0 \\ 0 & -0.000008062 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000003128 \end{bmatrix}$$

El tensor de inercia para la pieza 2 es:

$$I_{P_2} = \begin{bmatrix} 0.002504 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002487 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001127 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.3.2. Tensor de inercia de la pieza 3

A3. Pieza Secundaría CREP₃

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 15 \text{ cm} \quad l = 5 \text{ cm} \quad M_{\text{CREP}_3} = 1687.5 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CREP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_3} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1687.5 \text{ g})(15^2 + 5^2) = 35,156.25 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CREP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_3} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1687.5 \text{ g})(5^2 + 5^2) = 7,031.25 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CREP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_3} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (1687.5 \text{ g})(5^2 + 15^2) = 35,156.25 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 3 (CG_{P₃}) y de la pieza secundaria (CG_{CREP₃}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{\text{CREP}_3} = [6 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = -1.0206 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CREP_3CG}} = i_{XX_{CREP_3}} - M_{CREP_3}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CREP_3CG}} = 35,156.25 - (1687.5)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{XX_{CREP_3CG}} = 35,156.25 \text{ gcm}^2 = 0.003515 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CREP_3CG}} = i_{YY_{CREP_3}} - M_{CREP_3}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CREP_3CG}} = 7,031.25 - (1687.5)((-1.0206)^2 + 0^2)$$

$$i_{YY_{CREP_3CG}} = 5,273.5088 \text{ gcm}^2 = 0.0005273 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CREP_3CG}} = i_{ZZ_{CREP_3}} - M_{CREP_3}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CREP_3CG}} = 35,156.25 - (1687.5)(0^2 + (-1.0206)^2)$$

$$i_{ZZ_{CREP_3CG}} = 33,398 \text{ gcm}^2 = 0.003339 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CREP₃ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{\text{CREP}_3} = \begin{bmatrix} 0.003515 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005273 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003339 \end{bmatrix}$$

B3. Pieza Secundaría CRHP₃

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad l = 3 \text{ cm} \quad M_{\text{CRHP}_3} = 270 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CRHP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_3} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(4^2 + 3^2) = 562.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CRHP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_3} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(5^2 + 3^2) = 765 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CRHP}_3}} = \frac{1}{12} M_{\text{CRHP}_3} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(5^2 + 4^2) = 922.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 3 (CG_{P₃}) y de la pieza secundaria (CG_{CRHP₃}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{\text{CRHP}_3} = [11.5 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = -6.5206 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{CRHP_3CG}} = i_{xx_{CRHP_3}} - M_{CRHP_3}(y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{CRHP_3CG}} = 562.5 - (270)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{xx_{CRHP_3CG}} = 562.5 \text{ gcm}^2 = 0.00005625 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CRHP_3CG}} = i_{yy_{CRHP_3}} - M_{CRHP_3}(x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CRHP_3CG}} = 765 - (270)((-6.5206)^2 + 0^2)$$

$$i_{yy_{CRHP_3CG}} = -10,714 \text{ gcm}^2 = -0.001071 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{zz_{CRHP_3CG}} = i_{zz_{CRHP_3}} - M_{CRHP_3}(y^2 + x^2)$$

$$i_{zz_{CRHP_3CG}} = 922.5 - (270)(0^2 + (-6.5206)^2)$$

$$i_{zz_{CRHP_3CG}} = -10,557 \text{ gcm}^2 = -0.001055 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria $CRHP_3$ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$\mathbf{I}_{CRHP_3} = \begin{bmatrix} 0.00005625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001071 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001055 \end{bmatrix}$$

C3. Pieza Secundaría CHLP₃

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 5 \text{ cm} \quad M_{\text{CHLP}_3} = 17.6710 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CHLP}_3}} = \frac{1}{4} M_{\text{CHLP}_3} (r^2) + \frac{1}{12} M_{\text{CHLP}_3} (l^2)$$

$$i_{xx_{\text{CHLP}_3}} = \frac{1}{4} (17.6710 \text{ g})(0.5^2) + \frac{1}{12} (17.6710 \text{ g})(5^2) = 37.9190 \text{ cm}^2 \text{ g}$$

$$i_{yy_{\text{CHLP}_3}} = 0 = 0 \text{ cm}^2 \text{ g}$$

$$i_{zz_{\text{CHLP}_3}} = \frac{1}{2} M_{\text{CHLP}_3} (r^2) = \frac{1}{2} (17.6710 \text{ g})(0.5^2) = 2.2088 \text{ cm}^2 \text{ g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 3 (CG_{P₃}) y de la pieza secundaria (CG_{CHLP₃}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{\text{CHLP}_3} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = 4.9794 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CHLP_3CG}} = i_{XX_{CHLP_3}} - M_{CHLP_3}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CHLP_3CG}} = 37.9190 - (17.6710)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{XX_{CHLP_3CG}} = 37.9190 \text{ gcm}^2 = 0.000003791 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CHLP_3CG}} = i_{YY_{CHLP_3}} - M_{CHLP_3}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CHLP_3CG}} = 0 - (17.6710)(4.9794^2 + 0^2)$$

$$i_{YY_{CHLP_3CG}} = -438.1422 \text{ gcm}^2 = -0.00004381 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CHLP_3CG}} = i_{ZZ_{CHLP_3}} - M_{CHLP_3}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CHLP_3CG}} = 2.2088 - (17.6710)(0^2 + 4.9794^2)$$

$$i_{ZZ_{CHLP_3CG}} = -435.9334 \text{ gcm}^2 = -0.00004359 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria $CHLP_3$ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CHLP_3} = \begin{bmatrix} 0.000003791 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00004381 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00004359 \end{bmatrix}$$

D3. Pieza Secundaría CH_1P_3

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{\text{CH}_1\text{P}_3} = 3.5338 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CH}_1\text{P}_3}} = \frac{1}{4} M_{\text{CH}_1\text{P}_3} (r^2) + \frac{1}{12} M_{\text{CH}_1\text{P}_3} (l^2)$$

$$i_{xx_{\text{CH}_1\text{P}_3}} = \frac{1}{4} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) + \frac{1}{12} (3.5338 \text{ g})(1^2) = 0.5153 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CH}_1\text{P}_3}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CH}_1\text{P}_3}} = \frac{1}{2} M_{\text{CH}_1\text{P}_3} (r^2) = \frac{1}{2} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) = 0.4417 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x , y , z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 3 (CG_{P_3}) y de la pieza secundaria ($\text{CG}_{\text{CH}_1\text{P}_3}$) sobre su respectivo eje.

$$\text{CG}_{\text{P}_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

$$\text{CG}_{\text{CH}_1\text{P}_3} = [12 \quad 0 \quad 2]$$

Por lo tanto

$$x = -7.0206 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 2 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{\text{CH}_1\text{P}_3\text{CG}}} = i_{xx_{\text{CH}_1\text{P}_3}} - M_{\text{CH}_1\text{P}_3} (y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{CH_1P_3CG}} = 0.5153 - (3.5338)(0^2 + 2^2)$$

$$i_{xx_{CH_1P_3CG}} = -13.6199 \text{ gcm}^2 = -0.000001361 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CH_1P_3CG}} = i_{yy_{CH_1P_3}} - M_{CH_1P_3}(x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CH_1P_3CG}} = 0 - (3.5338)((-7.0206)^2 + 2^2)$$

$$i_{yy_{CH_1P_3CG}} = -174.1768 \text{ gcm}^2 = -0.00001741 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{zz_{CH_1P_3CG}} = i_{zz_{CH_1P_3}} - M_{CH_1P_3}(y^2 + x^2)$$

$$i_{zz_{CH_1P_3CG}} = 0.4417 - (3.5338)((-7.0206)^2 + 0^2)$$

$$i_{zz_{CH_1P_3CG}} = -173.7351 \text{ gcm}^2 = -0.00001737 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CH_1P_3 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CH_1P_3} = \begin{bmatrix} -0.000001361 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00001741 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001737 \end{bmatrix}$$

E3. Pieza Secundaría CH_2P_3

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{\text{CH}_2\text{P}_3} = 3.5338 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CH}_2\text{P}_3}} = \frac{1}{4} M_{\text{CH}_2\text{P}_3} (r^2) + \frac{1}{12} M_{\text{CH}_2\text{P}_3} (l^2)$$

$$i_{xx_{\text{CH}_2\text{P}_3}} = \frac{1}{4} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) + \frac{1}{12} (3.5338 \text{ g})(1^2) = 0.5153 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CH}_2\text{P}_3}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CH}_2\text{P}_3}} = \frac{1}{2} M_{\text{CH}_2\text{P}_3} (r^2) = \frac{1}{2} (3.5338 \text{ g})(0.5^2) = 0.4417 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 3 (CG_{P_3}) y de la pieza secundaria ($\text{CG}_{\text{CH}_2\text{P}_3}$) sobre su respectivo eje.

$$\text{CG}_{\text{P}_3} = [4.9794 \quad 0 \quad 0]$$

$$\text{CG}_{\text{CH}_2\text{P}_3} = [12 \quad 0 \quad -2]$$

Por lo tanto

$$x = -7.0206 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -2 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{\text{CH}_2\text{P}_3\text{CG}}} = i_{xx_{\text{CH}_2\text{P}_3}} - M_{\text{CH}_2\text{P}_3} (y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{\text{CH}_2\text{P}_3\text{CG}}} = 0.5153 - (3.5338)(0^2 + (-2)^2)$$

$$i_{xx_{CH_2P_3CG}} = -13.6199 \text{ gcm}^2 = -0.000001361 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CH_2P_3CG}} = i_{yy_{CH_2P_3}} - M_{CH_2P_3}(x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CH_2P_3CG}} = 0 - (3.5338)((-7.0206)^2 + (-2)^2)$$

$$i_{yy_{CH_2P_3CG}} = -174.1768 \text{ gcm}^2 = -0.00001741 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{zz_{CH_2P_3CG}} = i_{zz_{CH_2P_3}} - M_{CH_2P_3}(y^2 + x^2)$$

$$i_{zz_{CH_2P_3CG}} = 0.4417 - (3.5338)((-7.0206)^2 + 0^2)$$

$$i_{zz_{CH_2P_3CG}} = -173.7351 \text{ gcm}^2 = -0.00001737 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CH_2P_3 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CH_2P_3} = \begin{bmatrix} -0.000001361 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00001741 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001737 \end{bmatrix}$$

F3. Pieza 3

a) Tensor de inercia

Para calcular el tensor de inercia para la pieza 3, se realizó una sumatoria de todos los tensores de inercia que se calcularon anteriormente para cada pieza secundaria.

$$I_{P_3} = I_{CREP_3} - I_{CRHP_3} - I_{CHLP_3} - I_{CH_1P_3} - I_{CH_2P_3}$$

$$I_{P_3} = \begin{bmatrix} 0.003515 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005273 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003339 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0.00005625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001071 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001055 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0.000003791 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00004381 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00004359 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -0.000001361 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00001741 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001737 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -0.000001361 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00001741 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001737 \end{bmatrix}$$

El tensor de inercia para la pieza 3 es:

$$I_{P_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.003458} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.001677} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.004473} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.3.3. Tensor de inercia de la pieza 4

A4. Pieza Secundaria CREP₄

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 17 \text{ cm} \quad l = 5 \text{ cm} \quad M_{\text{CREP}_4} = 1912.5 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx\text{CREP}_4} = \frac{1}{12} M_{\text{CREP}_4} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1912.5 \text{ g})(17^2 + 5^2) = 50,043.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{CREP_4}} = \frac{1}{12} M_{CREP_4} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (1912.5 \text{ g})(5^2 + 5^2) = 7,968.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{CREP_4}} = \frac{1}{12} M_{CREP_4} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (1912.5 \text{ g})(5^2 + 17^2) = 50,043.75 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 4 (CG_{P_4}) y de la pieza secundaria (CG_{CREP_4}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{CREP_4} = [7 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = -0.3519 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{CREP_4CG}} = i_{xx_{CREP_4}} - M_{CREP_4} (y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{CREP_4CG}} = 50,043.75 - (1912.5)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{xx_{CREP_4CG}} = 50,043.75 \text{ gcm}^2 = 0.005004 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CREP_4CG}} = i_{yy_{CREP_4}} - M_{CREP_4} (x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CREP_4CG}} = 7,968.75 - (1912.5)((-0.3519)^2 + 0^2)$$

$$i_{yy_{CREP_4CG}} = 7,731.9182 \text{ gcm}^2 = 0.0007731 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CREP_4CG}} = i_{ZZ_{CREP_4}} - M_{CREP_4}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CREP_4CG}} = 50,043.75 - (1912.5)(0^2 + (-0.3519)^2)$$

$$i_{ZZ_{CREP_4CG}} = 49,806.9182 \text{ gcm}^2 = 0.004980 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CREP₄ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CREP_4} = \begin{bmatrix} 0.005004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007731 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004980 \end{bmatrix}$$

B4. Pieza Secundaria CRHP₄

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$l = 3 \text{ cm}$$

$$M_{CRHP_4} = 270 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{XX_{CRHP_4}} = \frac{1}{12} M_{CRHP_4} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(4^2 + 3^2) = 562.5 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{YY_{CRHP_4}} = \frac{1}{12} M_{CRHP_4} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(5^2 + 3^2) = 765 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{ZZ_{CRHP_4}} = \frac{1}{12} M_{CRHP_4} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (270 \text{ g})(5^2 + 4^2) = 922.5 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 4 (CG_{P_4}) y de la pieza secundaria (CG_{CRHP_4}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{CRHP_4} = [13.5 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = -6.8519 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CRHP_4}CG} = i_{XX_{CRHP_4}} - M_{CRHP_4}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CRHP_4}CG} = 562.5 - (270)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{XX_{CRHP_4}CG} = 562.5 \text{ gcm}^2 = 0.00005625 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CRHP_4}CG} = i_{YY_{CRHP_4}} - M_{CRHP_4}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CRHP_4}CG} = 765 - (270)((-6.8519)^2 + 0^2)$$

$$i_{YY_{CRHP_4}CG} = -11,911.1040 \text{ gcm}^2 = -0.001191 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CRHP_4}CG} = i_{ZZ_{CRHP_4}} - M_{CRHP_4}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CRHP_4}CG} = 922.5 - (270)(0^2 + (-6.8519)^2)$$

$$i_{ZZ_{CRHP_4}CG} = -11,753.6040 \text{ gcm}^2 = -0.001175 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CRHP₄ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CRHP_4} = \begin{bmatrix} 0.00005625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001191 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001175 \end{bmatrix}$$

C4. Pieza Secundaría CR₁SP₄

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{CR1SP4} = 90 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{CR_1SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_1SP_4} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g}) (4^2 + 1^2) = 127.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{yy_{CR_1SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_1SP_4} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g}) (5^2 + 1^2) = 195 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{zz_{CR_1SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_1SP_4} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g}) (5^2 + 4^2) = 307.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 4 (CG_{P₄}) y de la pieza secundaria (CG_{CR₁SP₄}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{CR_1SP_4} = [0.5 \quad 0 \quad 2]$$

Por lo tanto

$$x = 6.1481 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = -2 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{CR_1SP_4CG}} = i_{xx_{CR_1SP_4}} - M_{CR_1SP_4}(y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{CR_1SP_4CG}} = 127.5 - (90)(0^2 + (-2)^2)$$

$$i_{xx_{CR_1SP_4CG}} = -232.5 \text{ gcm}^2 = -0.00002325 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CR_1SP_4CG}} = i_{yy_{CR_1SP_4}} - M_{CR_1SP_4}(x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CR_1SP_4CG}} = 195 - (90)(6.1481^2 + (-2)^2)$$

$$i_{yy_{CR_1SP_4CG}} = -3,566.9220 \text{ gcm}^2 = -0.0003566 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{zz_{CR_1SP_4CG}} = i_{zz_{CR_1SP_4}} - M_{CR_1SP_4}(y^2 + x^2)$$

$$i_{zz_{CR_1SP_4CG}} = 307.5 - (90)(0^2 + 6.1481^2)$$

$$i_{zz_{CR_1SP_4CG}} = -3,094.4220 \text{ gcm}^2 = -0.0003094 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CR_1SP_4 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CR_1SP_4} = \begin{bmatrix} -0.00002325 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003566 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0003094 \end{bmatrix}$$

D4. Pieza Secundaría CR₂SP₄

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables a, b y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$a = 5 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm} \quad M_{CR_2SP_4} = 90 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{CR_2SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_2SP_4} (b^2 + l^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g})(4^2 + 1^2) = 127.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{yy_{CR_2SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_2SP_4} (a^2 + l^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g})(5^2 + 1^2) = 195 \text{ cm}^2 \text{g}$$

$$i_{zz_{CR_2SP_4}} = \frac{1}{12} M_{CR_2SP_4} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} (90 \text{ g})(5^2 + 4^2) = 307.5 \text{ cm}^2 \text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x, y, z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 4 (CG_{P₄}) y de la pieza secundaria (CG_{CR₂SP₄}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{CR_2SP_4} = [0.5 \quad 0 \quad -2]$$

Por lo tanto

$$x = 6.1481 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 2 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{xx_{CR_2SP_4CG}} = i_{xx_{CR_2SP_4}} - M_{CR_2SP_4}(y^2 + z^2)$$

$$i_{xx_{CR_2SP_4CG}} = 127.5 - (90)(0^2 + 2^2)$$

$$i_{xx_{CR_2SP_4CG}} = -232.5 \text{ gcm}^2 = -0.00002325 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{yy_{CR_2SP_4CG}} = i_{yy_{CR_2SP_4}} - M_{CR_2SP_4}(x^2 + z^2)$$

$$i_{yy_{CR_2SP_4CG}} = 195 - (90)(6.1481^2 + 2^2)$$

$$i_{yy_{CR_2SP_4CG}} = -3,566.9220 \text{ gcm}^2 = -0.0003566 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{zz_{CR_2SP_4CG}} = i_{zz_{CR_2SP_4}} - M_{CR_2SP_4}(y^2 + x^2)$$

$$i_{zz_{CR_2SP_4CG}} = 307.5 - (90)(0^2 + 6.1481^2)$$

$$i_{zz_{CR_2SP_4CG}} = -3,094.4220 \text{ gcm}^2 = -0.0003094 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria CR_2SP_4 viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CR_2SP_4} = \begin{bmatrix} -0.00002325 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003566 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0003094 \end{bmatrix}$$

E4. Pieza Secundaría CHLP₄

a) Momento de inercia

Primero se identifican las variables r y l para esta figura a analizar

Valores iniciales:

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad l = 3 \text{ cm} \quad M_{\text{CHLP}_4} = 10.6024 \text{ g}$$

Después se sustituyen los valores con la fórmula adecuada de la Figura 9

$$i_{xx_{\text{CHLP}_4}} = \frac{1}{4} M_{\text{CHLP}_4} (r^2) + \frac{1}{12} M_{\text{CHLP}_4} (l^2)$$

$$i_{xx_{\text{CHLP}_4}} = \frac{1}{4} (10.6024 \text{ g}) (0.5^2) + \frac{1}{12} (10.6024 \text{ g}) (3^2) = 8.6144 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{yy_{\text{CHLP}_4}} = 0 = 0 \text{ cm}^2\text{g}$$

$$i_{zz_{\text{CHLP}_4}} = \frac{1}{2} M_{\text{CHLP}_4} (r^2) = \frac{1}{2} (10.6024 \text{ g}) (0.5^2) = 1.3253 \text{ cm}^2\text{g}$$

b) Teorema de ejes paralelos

Primeramente, se identificarán los valores para x , y , z tomando en cuenta la diferencia de distancia de los centros de gravedad de la pieza 4 (CG_{P_4}) y de la pieza secundaria (CG_{CHLP_4}) sobre su respectivo eje.

$$CG_{P_4} = [6.6481 \quad 0 \quad 0]$$

$$CG_{\text{CHLP}_4} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto

$$x = 6.6481 \text{ cm} \quad y = 0 \text{ cm} \quad z = 0 \text{ cm}$$

Usando las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos para el eje x

$$i_{XX_{CHLP_4CG}} = i_{XX_{CHLP_4}} - M_{CHLP_4}(y^2 + z^2)$$

$$i_{XX_{CHLP_4CG}} = 8.6144 - (10.6024)(0^2 + 0^2)$$

$$i_{XX_{CHLP_4CG}} = 8.6144 \text{ gcm}^2 = 0.0000008614 \text{ kgm}^2$$

Para el eje y

$$i_{YY_{CHLP_4CG}} = i_{YY_{CHLP_4}} - M_{CHLP_4}(x^2 + z^2)$$

$$i_{YY_{CHLP_4CG}} = 0 - (10.6024)(6.6481^2 + 0^2)$$

$$i_{YY_{CHLP_4CG}} = -468.5967 \text{ gcm}^2 = -0.00004685 \text{ kgm}^2$$

Para el eje z

$$i_{ZZ_{CHLP_4CG}} = i_{ZZ_{CHLP_4}} - M_{CHLP_4}(y^2 + x^2)$$

$$i_{ZZ_{CHLP_4CG}} = 1.3253 - (10.6024)(0^2 + 6.6481^2)$$

$$i_{ZZ_{CHLP_4CG}} = -467.2914 \text{ gcm}^2 = -0.00004672 \text{ kgm}^2$$

c) Tensor de inercia

El tensor de inercia para nuestra pieza secundaria $CHLP_4$ viene dado por una matriz simétrica de 3x3 la cual es:

$$I_{CHLP_4} = \begin{bmatrix} 0.0000008614 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00004685 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00004672 \end{bmatrix}$$

F4. Pieza 4

a) Tensor de inercia

Para calcular el tensor de inercia para la pieza 4, se realizó una sumatoria de todos los tensores de inercia que se calcularon anteriormente para cada pieza secundaria.

$$I_{P_4} = I_{CREP_4} - I_{CRHP_4} - I_{CR_1SP_4} - I_{CR_2SP_4} - I_{CHLP_4}$$

$$\begin{aligned} I_{P_4} = & \begin{bmatrix} 0.005004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007731 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004980 \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} 0.00005625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001191 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001175 \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} -0.00002325 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003566 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0003094 \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} -0.00002325 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003566 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0003094 \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} 0.0000008614 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00004685 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00004672 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El tensor de inercia para la pieza 4 es:

$$I_{P_4} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.004993} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.002724} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.006821} \end{bmatrix} \quad (7)$$

4. Algoritmo iterativo de dinámica de Newton - Euler

En esta sección se mostrará el cálculo de los momentos de torsión correspondiente a una trayectoria determinada. Antes de implementar el algoritmo para obtener los momentos de torsión, es necesario conocer la cinemática, la distribución de masa del manipulador robótico, la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones ($\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ respectivamente).

Para calcular las fuerzas inerciales que actúan en los vínculos es necesario calcular la velocidad de rotación y la aceleración lineal y rotacional del centro de masas de cada vínculo del manipulador en cualquier instante dado. Esto debe realizarse en forma iterativa, empezando con el vínculo 1 y avanzando vínculo por vínculo (Iteraciones salientes) [Craig, 2006].

La velocidad de rotación se obtiene mediante:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_i R \ {}^i\omega_i + \dot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (8)$$

La ecuación para transformar la aceleración angular de un vínculo al siguiente es:

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_i R \ {}^i\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_i R \ {}^i\omega_i \times \dot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\Theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (9)$$

La aceleración lineal del origen de cada trama de vínculo se obtiene mediante:

$${}^{i+1}\dot{V}_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{V}_i) \quad (10)$$

También es necesario la aceleración lineal del centro de masas de cada vínculo la cual puede obtenerse mediante:

$${}^i\dot{V}_{C_i} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{C_i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{C_i}) + {}^i\dot{V}_i \quad (11)$$

Después se puede calcular la fuerza y el momento de torsión inerciales que actúan en el centro de masas de cada vínculo. Por lo tanto, tenemos que [Craig, 2006]:

$$F_i = m\dot{v}_{C_i} \quad (12)$$

$$N_i = {}^{C_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{C_i}I\omega_i \quad (13)$$

Ahora es necesario calcular las fuerzas y los momentos de torsión netos que se producirán en cada vínculo. Las ecuaciones de fuerza y momento de torsión mostradas a continuación están ordenadas para que aparezcan como relaciones iterativas desde el vínculo adyacente de mayor numeración hasta el de menor numeración (iteraciones entrantes) [Craig, 2006]:

$${}^i f_i = {}_{i+1}^i R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (14)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}_{i+1}^i R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}_{i+1}^i R^{i+1} f_{i+1} \quad (15)$$

Los momentos de torsión de articulación requeridos pueden obtenerse tomando el componente \hat{Z} del momento de torsión aplicado por un vínculo sobre su vínculo adyacente [Craig, 2006]:

$$\tau_i = {}^i n_i^\tau \hat{Z}_i \quad (16)$$

4.1. Determinación de los valores iniciales

El brazo robótico que se está analizando es tridimensional de tres grados de libertad por lo tanto está conformado por cinco vínculos los cuales son del vínculo 0 (referencia base inmóvil) al vínculo 4 como se muestra en la Figura 10.

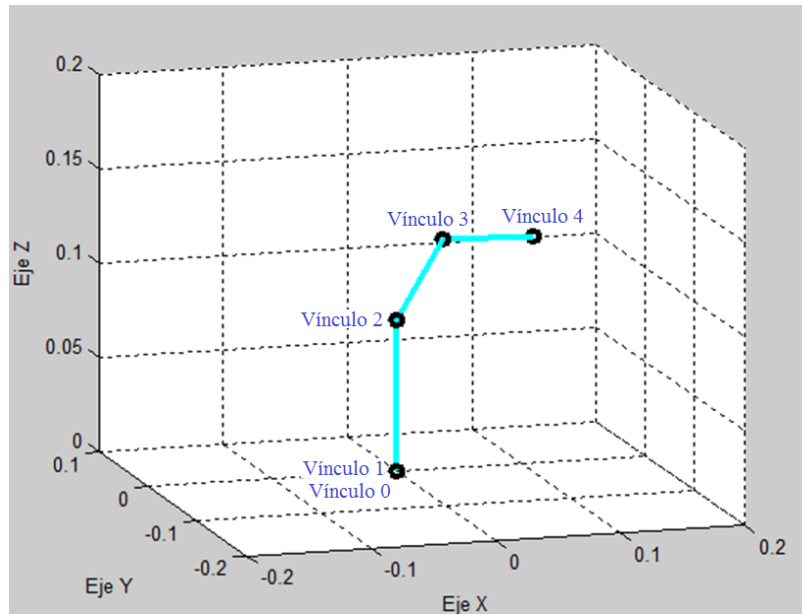


Figura 10. Vínculos para el manipulador robótico de 3 GDL

Para poder aplicar el algoritmo de Newton – Euler, es necesario conocer un conjunto de valores iniciales los cuales se mostrarán a continuación.

a) Vectores que ubican el centro de masas para cada vínculo

$${}^1P_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso ${}^1P_{C_1}$ es cero debido que, para facilitar el análisis de la cinemática directa e inversa, se despreció la longitud del primer eslabón.

$${}^2P_{C_2} = l_2 \hat{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.04979 l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3P_{C_3} = l_3 \hat{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.06648 l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Tensor de inercia en el centro de masas

Se utilizarán los tensores de inercia de las ecuaciones (5), (6) y (7), los cuales se calcularon anteriormente.

$$I_{P_2} = \begin{bmatrix} 0.002504 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002487 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001127 \end{bmatrix}$$

$$I_{P_3} = \begin{bmatrix} 0.003458 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001677 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004473 \end{bmatrix}$$

$$I_{P_4} = \begin{bmatrix} 0.004993 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002724 & 0 \\ 0 & 0 & 0.006821 \end{bmatrix}$$

c) Fuerzas en el efector final

En el extremo final de nuestro brazo robótico no hay fuerzas actuando, por lo tanto

$$f_4 = 0$$

$$n_4 = 0$$

d) Velocidad y aceleración rotacional para el vínculo 0

Como se mencionó anteriormente, el vínculo 0 es solo el sistema de referencia base para el manipulador robótico por lo tanto este vínculo no esta girando.

$$\omega_0 = 0$$

$$\dot{\omega}_0 = 0$$

e) Fuerza de gravedad incluida

Aunque el vínculo 0 sea inmóvil, tiene una aceleración y es tomando en cuenta la fuerza de gravedad en el eje Z, quedando:

$${}^0\dot{V}_0 = g\hat{Z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

f) Matrices de rotación entre tramas de vínculo sucesivas

Las matrices de rotación se obtienen de las matrices de transformación homogénea las cuales se obtienen de la cinemática directa por el método de Denavit - Hartenberg.

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3R = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g) Vectores de posición

Los vectores de posición son también obtenidos de las matrices de transformación homogénea.

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3R = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4R = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2. Iteraciones salientes

Se aplicaron las ecuaciones (8) a la (13) para cada vínculo.

Los valores de la velocidad rotacional ($\dot{\Theta}$) se determinaron tomando en cuenta una diferenciación del valor de la posición siguiente al valor de la posición anterior con respecto al tiempo $(\Theta_{n+1} - \Theta_n)/t$.

Los valores de la aceleración rotacional ($\ddot{\Theta}$) se determinaron tomando en cuenta una diferenciación del valor de la velocidad siguiente al valor de la velocidad anterior con respecto al tiempo $(\dot{\Theta}_{n+1} - \dot{\Theta}_n)/t$.

4.2.1. Vínculo 1

Las iteraciones salientes en forma expresada para el vínculo 1 son:

a) Propagación de velocidad de rotación

$${}^1\omega_1 = {}^1R {}^0\omega_0 + \dot{\Theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 \quad (17)$$

b) Aceleración angular

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R {}^0\dot{\omega}_0 + {}^1R {}^0\omega_0 \times \dot{\Theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 + \ddot{\Theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 \quad (18)$$

c) Aceleración lineal

$${}^1\dot{V}_1 = {}^1_0R({}^0\dot{\omega}_0 \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0 \times ({}^0\omega_0 \times {}^0P_1) + {}^0\dot{V}_0) \quad (19)$$

d) Aceleración lineal del centro de masas

$${}^1\dot{V}_{C_1} = {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_{C_1} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_{C_1}) + {}^1\dot{V}_1 \quad (20)$$

e) Fuerza inercial que actúa en el centro de masas

$${}^1F_1 = m_1 {}^1\dot{V}_{C_1} \quad (21)$$

f) Momento de torsión que actúa en el centro de masas

$${}^1N_1 = I_{P_2} {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times I_{P_2} {}^1\omega_1 \quad (22)$$

4.2.2. Vínculo 2

Las iteraciones salientes en forma expresada para el vínculo 2 son:

a) Propagación de velocidad de rotación

$${}^2\omega_2 = {}^2_1R {}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 \quad (23)$$

b) Aceleración angular

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2_1R {}^1\dot{\omega}_1 + {}^2_1R {}^1\omega_1 \times \dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 + \ddot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 \quad (24)$$

c) Aceleración lineal

$${}^2\dot{V}_2 = {}^2_1R({}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_2) + {}^1\dot{V}_1) \quad (25)$$

d) Aceleración lineal del centro de masas

$${}^2\dot{v}_{C_2} = {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_{C_2} + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_{C_2}) + {}^2\dot{v}_2 \quad (26)$$

e) Fuerza inercial que actúa en el centro de masas

$${}^2F_2 = m_2 {}^2\dot{v}_{C_2} \quad (27)$$

f) Momento de torsión que actúa en el centro de masas

$${}^2N_2 = I_{P_3} {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times I_{P_3} {}^2\omega_2 \quad (28)$$

4.2.3. Vínculo 3

Las iteraciones salientes en forma expresada para el vínculo 3 son:

a) Propagación de velocidad de rotación

$${}^3\omega_3 = {}^3R {}^2\omega_2 + \dot{\theta}_3 {}^3\hat{Z}_3 \quad (29)$$

b) Aceleración angular

$${}^3\dot{\omega}_3 = {}^3R {}^2\dot{\omega}_2 + {}^3R {}^2\omega_2 \times \dot{\theta}_3 {}^3\hat{Z}_3 + \ddot{\theta}_3 {}^3\hat{Z}_3 \quad (30)$$

c) Aceleración lineal

$${}^3\dot{v}_3 = {}^3R ({}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_3 + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_3)) + {}^2\dot{v}_2 \quad (31)$$

d) Aceleración lineal del centro de masas

$${}^3\dot{v}_{C_3} = {}^3\dot{\omega}_3 \times {}^3P_{C_3} + {}^3\omega_3 \times ({}^3\omega_3 \times {}^3P_{C_3}) + {}^3\dot{v}_3 \quad (32)$$

e) **Fuerza inercial que actúa en el centro de masas**

$${}^3F_3 = m_3 {}^3\dot{v}_{C_3} \quad (33)$$

f) **Momento de torsión que actúa en el centro de masas**

$${}^3N_3 = I_{P_4} {}^3\dot{\omega}_3 + {}^3\omega_3 \times I_{P_4} {}^3\omega_3 \quad (34)$$

4.3. Iteraciones entrantes

Se aplicaron las ecuaciones (14) a la (16) para cada vínculo.

4.3.1. Vínculo 3

Las iteraciones entrantes en forma expresada para el vínculo 3 son:

a) **Fuerza neta**

$${}^3f_3 = {}^3R {}^4f_4 + {}^3F_3 \quad (35)$$

b) **Momento de torsión neta**

$${}^3n_3 = {}^3N_3 + {}^3R {}^4n_4 + {}^3P_{C_3} \times {}^3F_3 + {}^3P_4 \times {}^3R {}^4f_4 \quad (36)$$

c) **Momento de torsión neta (respecto al componente Z)**

$$\tau_3 = {}^3n_3^T {}^3\hat{Z}_3 \quad (37)$$

4.3.2. Vínculo 2

Las iteraciones entrantes en forma expresada para el vínculo 2 son:

a) **Fuerza neta**

$${}^2f_2 = {}^2_3R {}^3f_3 + {}^2F_2 \quad (38)$$

b) Momento de torsión neta

$${}^2n_2 = {}^2N_2 + {}^2_3R {}^3n_3 + {}^2P_{C_2} \times {}^2F_2 + {}^2P_3 \times {}^2_3R {}^3f_3 \quad (39)$$

c) Momento de torsión neta (respecto al componente Z)

$$\tau_2 = {}^2n_2^T {}^2\hat{Z}_2 \quad (40)$$

4.3.3. Vínculo 1

Las iteraciones entrantes en forma expresada para el vínculo 1 son:

a) Fuerza neta

$${}^1f_1 = {}^1_2R {}^2f_2 + {}^1F_1 \quad (41)$$

b) Momento de torsión neta

$${}^1n_1 = {}^1N_1 + {}^1_2R {}^2n_2 + {}^1P_{C_1} \times {}^1F_1 + {}^1P_2 \times {}^1_2R {}^2f_2 \quad (42)$$

c) Momento de torsión neta (respecto al componente Z)

$$\tau_1 = {}^1n_1^T {}^1\hat{Z}_1 \quad (43)$$

5. Simulación del brazo robótico en MATLAB

Ya teniendo las ecuaciones correspondientes a la dinámica para el brazo robótico de tres grados de libertad, se hizo una simulación en MATLAB la cual consiste en que el manipulador robótico trace una trayectoria (en este caso una recta) con el uso del polinomio de quinto grado. Durante su trayectoria en cada trazo se estará calculando el momento de torsión aplicado a los vínculos 1, 2 y 3 al igual que sus velocidades rotacionales.

El programa inicia en declarar la longitud (en metros) de los eslabones l_1 , l_2 y l_3 , en seguida se declaran las coordenadas en donde se quiere que el brazo robótico inicie y termine la trayectoria. Después se escribe la ecuación del polinomio de quinto grado y de la recta en términos del polinomio. Se declaran los valores de tiempo (inicio y fin) e incremento. Ver Figura 11.

```
4 -   clc
5 -   clear all
6
7 -   L1 = 0.08; L2 = 0.13; L3 = 0.12;
8
9 -   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ESTABLECIENDO COORDENADAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10 -  X1 = -0.15;
11 -  Y1 = 0.10;
12 -  Z1 = 0.15;
13
14 -  X2 = -0.15;
15 -  Y2 = 0.10;
16 -  Z2 = 0.0;
17
18 -  qf = 1;
19 -  tf = 100;
20 -  inc = 0.1;
21 -  t = 0:inc:tf;
22
23 -  Pt = ((qf)*((10*(t.^3/tf^3)) - (15*(t.^4/tf^4)) + (6*(t.^5/tf^5))));
24
25 -  xx = ((X1) + ((X2-X1/qf)*(Pt)));
26 -  yy = ((Y1) + ((Y2-Y1/qf)*(Pt)));
27 -  zz = ((Z1) + ((Z2-Z1/qf)*(Pt)));
```

Figura 11. Declarando variables

La segunda parte consiste en abrir un ciclo for el cuál hará repeticiones según la longitud de t . Dentro de este ciclo se estarán calculando los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 en cada trazo que se

vaya realizando durante la trayectoria, para esto se introdujeron las ecuaciones obtenidas de la cinemática inversa. Los valores de theta, seno y coseno (para cada trama) que vayan calculándose durante la ejecución del ciclo for, se estarán guardando en un vector debido que se utilizara más adelante. Ver Figura 12.

```

29 - for i=1:length(t)
30 -     Px = xx(i);
31 -     Py = yy(i);
32 -     Pz = zz(i);
33 -
34 -     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% MODELO MATEMATICO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35 -
36 -     theta1 = atan2(Py,Px)*(180/pi);
37 -
38 -     C1 = ((Px)*(sind(theta1)))/(Py);
39 -     S1 = ((Py)*(cosd(theta1)))/(Px);
40 -     C3 = ((Px^2 + Py^2 + Pz^2 - L2^2 - L3^2)/(2*L2*L3));
41 -     S3 = -sqrt(1 - C3^2);
42 -     theta3 = atan2(S3,C3)*(180/pi);
43 -
44 -     C2 = (((Pz*L3*S3)+((Px*C1) + (Py*S1))*(L3*C3) + L2))/(((Px*C1) + (Py*S1))^2 + Pz^2));
45 -     S2 = sqrt(1 - C2^2);
46 -     theta2 = atan2(S2,C2)*(180/pi);
47 -
48 -     t1(i) = theta1;
49 -     t2(i) = theta2;
50 -     t3(i) = theta3;
51 -
52 -     c1(i) = C1;
53 -     s1(i) = S1;
54 -     c2(i) = C2;
55 -     s2(i) = S2;
56 -     c3(i) = C3;
57 -     s3(i) = S3;

```

Figura 12. Obtención de los ángulos y sus variables

La siguiente parte consiste dibujar el manipulador y esto es posible al determinar las coordenadas de cada vinculo, para esto se necesitan las ecuaciones resultantes del método algebraico. Además, se da una instrucción de que vaya dibujando la línea al ritmo que el brazo robótico vaya moviéndose.

Se determina el color de los eslabones del brazo robótico (cian), de los vínculos (negro) y de la línea (azul) con un grosor de 3.

Finalmente se determina que la gráfica sea tridimensional y graficada con sus respectivas etiquetas. El pause sirve para que cuando el ciclo for termina una ejecución espere un cierto tiempo y después vuelva a ejecutar la siguiente iteración. Ya terminadas todas sus iteraciones, se termina el ciclo for y pasa a la siguiente instrucción (línea). Ver Figura 13.

```

59  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DIBUJAR MANIPULADOR %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
60  - Px0 = 0;
61  - Py0 = 0;
62  - Pz0 = 0;
63
64  - Px1 = 0;
65  - Py1 = 0;
66  - Pz1 = L1;
67
68  - Px2 = (L2*cosd(theta2))*cosd(theta1);
69  - Py2 = L2*cosd(theta2)*sind(theta1);
70  - Pz2 = L2*sind(theta2);
71
72  - Px3 = (L2*cosd(theta2)+ L3*(cosd(theta2 + theta3)))*cosd(theta1);
73  - Py3 = (L2*cosd(theta2)+ L3*(cosd(theta2 + theta3)))*sind(theta1);
74  - Pz3 = L2*sind(theta2) + L3*sind(theta2 + theta3);
75
76  - X=[Px0 Px1 Px2 Px3];
77  - Y=[Py0 Py1 Py2 Py3];
78  - Z=[Pz0 Pz1 Pz2 Pz3];
79
80  - vectorx(i)=xx(i);
81  - vectory(i)=yy(i);
82  - vectorz(i)=zz(i);
83
84  - plot3(X,Y,Z,'c','Linewidth',3);
85  - grid on
86  - axis ([-0.20 0.20 -0.20 0.10 0.0 0.20])
87  - hold on
88  - plot3(X,Y,Z,'ok','Linewidth',3)
89
90  - plot3(vectorx,vectorz,vectorz,'b','LineWidth',3);
91  - hold on
92  - hold off
93
94  - xlabel('Eje X');
95  - ylabel('Eje Y');
96  - zlabel('Eje Z');
97
98  - pause(.01)
99  - end

```

Figura 13. Dibujo del manipulador

Más adelante se escriben los valores que se necesitan conocer para poder implementar el algoritmo de Newton – Euler como lo es la masa de cada eslabón, la gravedad, el vector que ubica el centro de masas para cada vínculo, los tensores de inercia, fuerzas del efector final, velocidad y aceleración rotacional de la base y los vectores de posición. Esto ya fue calculado en las secciones anteriores. Ver Figura 14.

```

101 - m1 = 0.994; m2 = 1.3927; m3 = 1.4518;
102 - g = 9.81;
103
104 %--- Vectores que ubican el centro de masas para cada vínculo ---%
105 - PC11 = [0; 0; 0]; PC22 = [0.04979*L2; 0; 0]; PC33 = [0.06648*L3; 0; 0];
106
107 %--- Tensor de inercia en el centro de masas ---%
108 - C1I1 = [0.002504 0 0; 0 0.002487 0; 0 0 0.001127];
109 - C2I2 = [0.003458 0 0; 0 0.001677 0; 0 0 0.004473];
110 - C3I3 = [0.004993 0 0; 0 0.002724 0; 0 0 0.006821];
111
112 %--- Fuerzas en el efector final ---%
113 - f44 = [0; 0; 0];
114 - n44 = [0; 0; 0];
115
116 %--- Velocidad y aceleración rotacional base ---%
117 - w00 = [0; 0; 0];
118 - w00p = [0; 0; 0];
119
120 %--- Fuerza de gravedad incluida ---%
121 - v00p = [0; 0; g];
122
123 %--- Vectores de posición ---%
124 - P01 = [0; 0; 0];
125 - P12 = [0; 0; 0];
126 - P23 = [L2; 0; 0];
127 - P34 = [L3; 0; 0];

```

Figura 14. Escribiendo los valores iniciales

El siguiente paso fue en abrir otro ciclo for similar al anterior y determinar los valores de la velocidad y aceleración rotacional con el método que fue explicado anteriormente en la sección 4.2, en esta parte fue donde se ocupó el vector que guardo anteriormente los valores de theta para cada trama.

Además, se utilizó el vector que guardo los valores de seno y coseno para cada trama para implementarlas en las matrices de rotación y así los valores vayan cambiando en cada trazo que vaya realizando el brazo robótico.

Se usó un vector en donde contendrá en Z los valores de la velocidad y aceleración rotacional calculadas ($\dot{\Theta}$ y $\ddot{\Theta}$) ya que se ocupan para el cálculo de las iteraciones salientes de cada vínculo. Ver Figura 15.

```

129 - for k = 0:length(t)-4
130 -     tp1 = (t1(1,2+k) - t1(1,1+k))/inc; tplaux = (t1(1,4+k) - t1(1,3+k))/inc; tbp1 = (tp1aux - tp1)/inc;
131 -     tp2 = (t2(1,2+k) - t2(1,1+k))/inc; tp2aux = (t2(1,4+k) - t2(1,3+k))/inc; tbp2 = (tp2aux - tp2)/inc;
132 -     tp3 = (t3(1,2+k) - t3(1,1+k))/inc; tp3aux = (t3(1,4+k) - t3(1,3+k))/inc; tbp3 = (tp3aux - tp3)/inc;
133 -
134 -     %--- Matrices de rotación entre tramas de vínculo sucesivas ---%
135 -     R01 = [c1(1,1+k) -s1(1,1+k) 0; s1(1,1+k) c1(1,1+k) 0; 0 0 1];
136 -     R12 = [c2(1,1+k) -s2(1,1+k) 0; 0 0 -1; s2(1,1+k) c2(1,1+k) 0];
137 -     R23 = [c3(1,1+k) -s3(1,1+k) 0; s3(1,1+k) c3(1,1+k) 0; 0 0 1];
138 -     R34 = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
139 -
140 -     %--- Matrices transpuestas ---%
141 -     R10 = transpose(R01);
142 -     R21 = transpose(R12);
143 -     R32 = transpose(R23);
144 -     R43 = transpose(R34);
145 -
146 -     %--- Thetas primas ---%
147 -     T1P = [0; 0; tp1];
148 -     T2P = [0; 0; tp2];
149 -     T3P = [0; 0; tp3];
150 -
151 -     %--- Thetas biprimas ---%
152 -     T1BP = [0; 0; tbp1];
153 -     T2BP = [0; 0; tbp2];
154 -     T3BP = [0; 0; tbp3];
155 -

```

Figura 15. Calculo de la velocidad y aceleración rotacional

Dentro el mismo ciclo for se escriben las ecuaciones anteriores del algoritmo de Newton – Euler las cuales son de la (17) a la (43) para que en cada movimiento que realice el brazo robótico vaya calculándose los momentos de torsión y la velocidad rotacional que se le aplican a cada vínculo. Terminado las iteraciones se termina el ciclo for y el programa. A los vínculos los suponemos que son los motores.

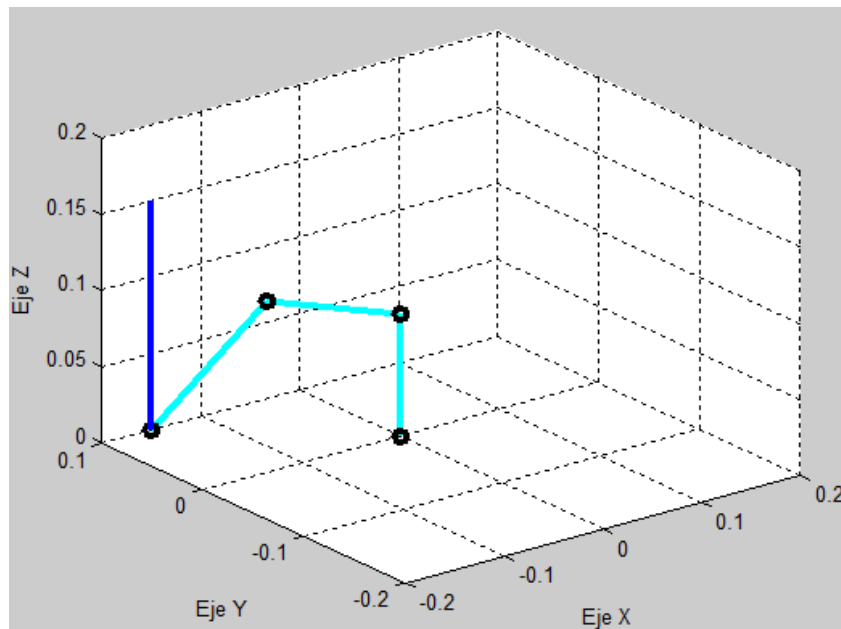


Figura 16. Simulación de la trayectoria del manipulador

En la Figura 16 se muestra la trayectoria realizada por el brazo robótico y durante cada movimiento se está calculando el par (momento de torsión) y la velocidad de rotación.

En la Figura 17 se muestran unas graficas las cuales se muestran una vez que el manipulador robótico haya terminado su trayectoria.

En estas graficas vemos del lado derecho el comportamiento del momento de torsión que tuvo cada vínculo durante la trayectoria y del lado izquierdo vemos el comportamiento de la velocidad rotacional en cada vínculo el cual se demuestra que es correcto este comportamiento debido a que la velocidad rotacional va variando conforme a la velocidad de la trayectoria, empezando en cero, variando los valores de la velocidad rotacional y finalmente terminando en cero. El cambio de las curvas de un cuadrante a otro se debe a que los vínculos giran hacia un sentido y en un cierto tiempo giran al sentido contrario.

Debido a que se traza una línea vertical que solo varia en el eje Z, el vínculo 1 no tendría que girar y es por eso que en las gráficas se muestra que el par y la velocidad rotacional es cero para este vínculo.

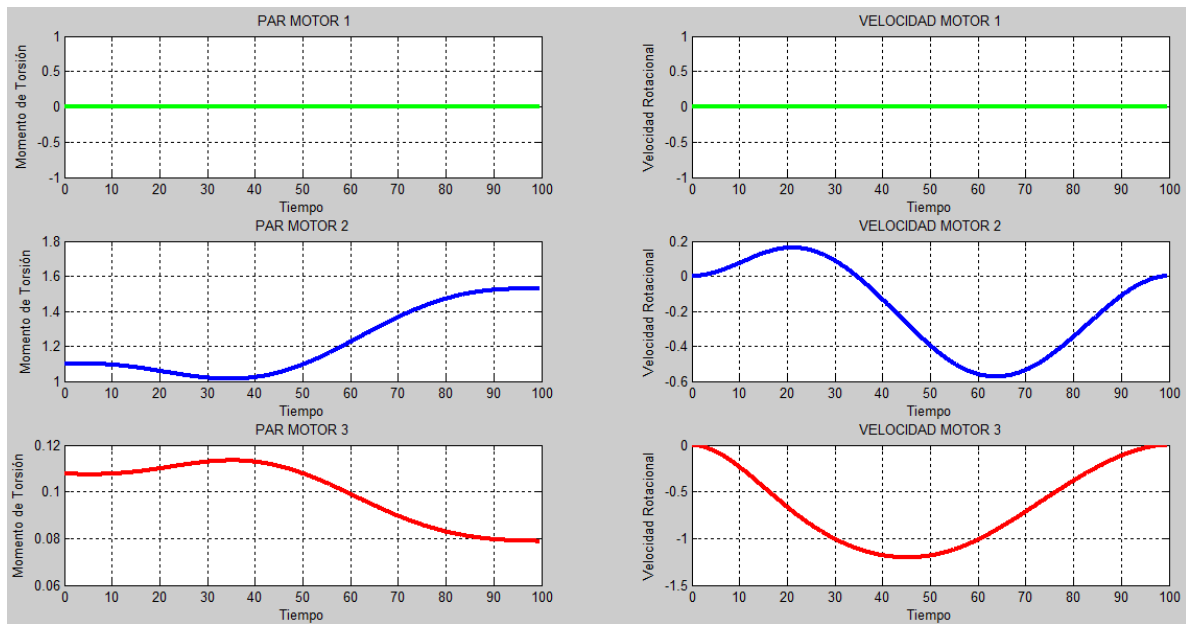


Figura 17. Gráficas para el par y la velocidad rotacional de cada vínculo

Es así como se da por concluida esta práctica, demostrando la implementación del algoritmo de la dinámica de Newton – Euler y de la cinemática en manipuladores robóticos. Además, se ha comprobado que nuestros cálculos han sido correctos debido a que los resultados mostrados en la gráfica son lógicos y concuerda con el movimiento que realizó el brazo robótico durante la trayectoria.

6. Conclusiones

En esta práctica se pudo observar que las ecuaciones del algoritmo de Newton – Euler nos demuestran que el movimiento de los manipuladores es debido a los momentos de torsión que son aplicados en este, aunque también afecta el material del diseño del manipulador y su diseño. Al calcular el momento de torsión nos ayuda a determinar qué tipo de servomotores son ideales para nuestro manipulador robótico.

Esta práctica ayudo a reforzar los conocimientos que se adquirió en Robótica I debido a que se necesitaba realizar el análisis de la cinemática directa e inversa para poder implementar el algoritmo de la dinámica. Además, se tuvo que utilizar el polinomio de quinto grado para la trayectoria. Ayudo a reforzar temas de algebra lineal y calculo vectorial.

Se pudo dar una idea más amplia del análisis que se tiene que hacer en el diseño de un robot debido a que las variables físicas afectan a que el robot tenga algunos problemas en la precisión o en que no pueda realizar el movimiento deseado.

7. Referencias

[Beer et al., 2005]

Beer. Ferd “*Momentos de inercia de formas geométricas comunes*”. Mecánica vectorial para ingenieros / Dinámica. 2005.

[Craig, 2006]

John Craig. “*Robótica*”. Pearson Educación, México. 2006.

[Pérez, 2011]

Pérez Bailón Waldemar. “*Distribución de Masa*”. Notas de Robótica II. 2016.